ريض ١٥٢

قررت وزارة التربية والتعليم بمملكة البحرين اعتماد هذا الكتاب لتدريس منهج الرياضيات ٢ للمرحلة الثانوية

الرياضيات ٢

للمرحلة الثانوية

دليل المعلم

الطبعة الأولى
١٤٣٤هـ - ٢٠١٣م

العبيكان Obeikan

Mc Graw Hill Education

الرياضيات ٢
للمرحلة الثانوية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
خلود عبدالحفيظ لوباني
أحمد محمود أبو صهيون

التعريب
د. عبدالله الهباهبة
د. معاذ الشياب
د. جعفر العمري
سعد الجبور
أمين المستريحي
فراس العمري

التحرير اللغوي
عمر الصاوي
محمد رمضان خضر

المواءمة والمراجعة لنسخة مملكة البحرين
هند إبراهيم الجودر
نسيمة محمد غلوم
بهرامَ حسين حاجي
نور محمد حسّان
إيمان ناصر المسيفر

الغلاف:
جسر الأمير خليفة بن سلمان آل خليفة.

Original Title:

Algebra2 © 2010
By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M.Casey

Contributing Authors
Dinah Zike

CONSULTANTS
Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum

Gifted and talented
Shelbik.cole

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency
Robert m . capraro

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah cassett lent
Lynn T. Havens

www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com

Education

العبيكان Obeikan

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

المقـدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلبة، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلبة.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آلية لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة. ثم يقدم دعما للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلبة، وبأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدّم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة حسب مستويات الطلبة تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات.
كما يقدّم الدليل في كل درس إجابات مفصّلة لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلبة (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلبة.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوذ اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

واللّه ولي التوفيق

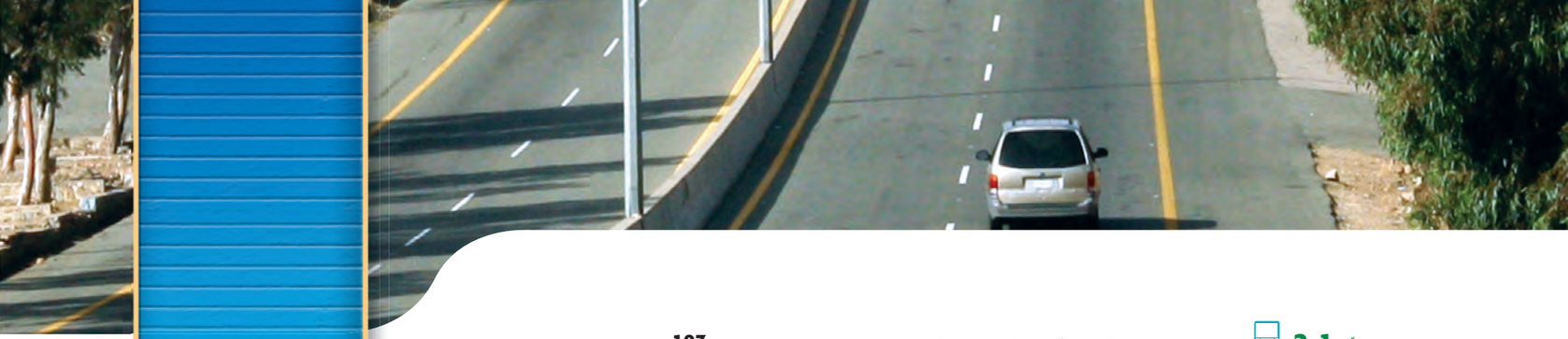
الفهرس

الفصل 1 الدوال والمتباينات

مخطط الفصل 1 ..... 10A
التقويم والمعالجة 10C
تنويع التعليم 10D
التركيز في المحتوى الرياضي 10E
التهيئة للفصل الأول 11
1-1 العلاقات والدوال 12
توسّع 1-1 معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة 20
1-2 كتابة المعادلات بصيغة ميل - مقطع 21
1-3 كتابة المعادلات بصيغة نقطة - ميل 31
توسّع 1-3 معمل الآلة الحاسبة البيانية: التغير الطردي 39
1-4 شكل الانتشار وخط الانحدار 40
1-5 دوال خاصة 49
اختبار منتصف الفصل 56
1-6 الدوال الأم والتحويلات الهندسية 57
1-7 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا 64
1-8 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا 70
توسّع 1-8 معمل الآلة الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية 76
1-9 البرمجة الخطية 77
دليل الدراسة والمراجعة 83
اختبار الفصل 89
التهيئة للاختبارات المعيارية 90
اختبار معياري 92
ملحق إجابات الفصل الأول 93A

الفصل 2 المصفوفات

مخطط الفصل 2 ..... 94A
التقويم والمعالجة 94C
تنويع التعليم 94D
التركيز في المحتوى الرياضي 94E
التهيئة للفصل الثاني 95
2-1 مقدمة في المصفوفات 96



الفهرس

توسّع 2-1 معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات 103
2-2 العمليات على المصفوفات 104
2-3 ضرب المصفوفات 110
اختبار منتصف الفصل 118
2-4 المحدّدات وقاعدة كرامر 119
2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية 127
توسّع 2-5 معمل الآلة الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة 133
دليل الدراسة والمراجعة 134
اختبار الفصل 137
التهيئة للاختبارات المعيارية 138
اختبار معياري تراكمي 140
ملحق إجابات الفصل الثاني 141A

الفصل 3 الدوال التربيعية

مخطط الفصل 3 ..... 142A
التقويم والمعالجة 142C
تنويع التعليم 142D
التركيز في المحتوى الرياضي 142E
التهيئة للفصل الثالث 143
3-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا 144
توسّع 3-1 معمل الآلة الحاسبة البيانية: تمثيل البيانات الواقعية 157
3-2 حل المعادلات التربيعية بيانيًا 158
توسّع 3-2 معمل الآلة الحاسبة البيانية: المتباينات التربيعية 165
3-3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل 166
اختبار منتصف الفصل 173
3-4 الأعداد المركبة 174
3-5 القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميز 181
توسّع 3-5 معمل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما 189
استكشاف 3-6 معمل الآلة الحاسبة البيانية: عائلة القطوع المكافئة 191
3-6 التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية 193
دليل الدراسة والمراجعة 199
اختبار الفصل 203
التهيئة للاختبارات المعيارية 204
اختبار معياري تراكمي 206
ملحق إجابات الفصل الثالث 207A
إجابات كتاب التمارين 208

أهلاً بك في عالم الرياضيات

دليل المعلم

منهج الرياضيات المترابط رأسيًّا
ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي

تقدم لك هذه السلسلة ثلاثة أبعاد للترابط الرأسي:

1 تصميم المحتوى

يعد الترابط الرأسي للمحتوى عملية مهمة تساعد طلبتك على التحقق من التسلسل الدقيق للمحتوى وتتابعه من مستوى إلى مستوى آخر. وهذا يمنحك الثقة بأن المحتوى يتم تقديمه وتعزيزه وتقويمه في الأوقات المناسبة، كما يساعد على سد الثغرات وتجنب التكرار غير المبرر، مما يمكنك من توجيه تدريسك وتكييفه ليتلائم مع حاجات الطلبة.

2 تصميم التدريس

إن الترابط الرأسي القوي بين الأساليب التدريسية بدءًا من الصف الأول يسهل على الطلبة الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى الإعدادية، فالثانوية. إذ تعمل المفردات، والتقنيات والوسائل الحسية وخطة الدرس والمعالجة على التقليل من عوامل الصعوبة والتشويش التي يواجهها بعض الطلبة عندما ينتقلون عبر الصفوف المختلفة.

3 التصميم البصري

تشتمل صفحات السلسلة على تصاميم بصرية متسقة من صف إلى آخر، تساعد الطلبة على الانتقال بسلاسة من مرحلة إلى أخرى، كما تزداد دافعيتهم للتعلم والنجاح عندما تكون طريقة التعامل مع هذه الصفحات مألوفة لديهم.

الحلقة الأولى من المرحلة الابتدائية

الحلقة الثانية من المرحلة الابتدائية

المفاتيح الخمسة للنجاح

1 الخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة

تراعي السلسلة الخرائط المفاهيمية وتطورها اعتمادًا على نتائج الطلبة في رياضيات المرحلة الثانوية.

2 المحتوى العميق المتوازن

تم تطوير السلسلة بحيث تركز على المهارات والموضوعات التي يواجه الطلبة صعوبات فيها؛ مثل حَلّ المسألة في كل مستوى صفي.

الصفان 2 , 1	الصفوف 5-3
1) حَلّ المسألة	1) حَلّ المسألة
2) النقود	2) الكسور الاعتيادية
3) الزمن	3) القياس
4) القياس	4) الكسور العشرية
5) الكسور الاعتيادية	5) الزمن
6) الحساب	6) الجبر
الصفوف 8-6	**الصفوف 12-9**
1) الكسور الاعتيادية	1) حَلّ المسألة
2) حَلّ المسألة	2) الكسور الاعتيادية
3) القياس	3) الجبر
4) الجبر	4) الهندسة
5) الحساب	5) الحساب
	6) الاحتمالات

3 التقويم المستمر

تتضمن هذه السلسلة تقويمات تشخيصية وتكوينية وختامية، وخططًا علاجية، وإثرائية.

4 الخطط العلاجية وتنويع التدريس

توفر السلسلة خطة علاجية ذات ثلاثة مستويات:

المعالجة 1 **المعالجة اليومية** تحدد بدائل متنوعة في دليل المعلم لتدريس المفاهيم وفق أنماط التعلم المختلفة.

المعالجة 2 **المعالجة الاستراتيجية** يستعمل المعلمون إرشادات علاجية ومواد مساندة.

المعالجة 3 **المعالجة المكثفة** توفر إرشادات للتدريس، ومفردات داعمة، وخططًا علاجية لمساعدة الطلبة على النجاح.

5 التطوير المهني

توفر السلسلة فرصًا عديدة للمعلم ليطوّر أداءه مهنيًّا، بطرق تعليم إضافية؛ مثل: الفيديو، والرياضيات المحوسبة، والمواقع الإلكترونية المترابطة ترابطًا رأسيًّا متكاملًا من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر.

المرحلة الإعدادية

المرحلة الثانوية

قاعدة البحوث لبرامج الرياضيات

تساعد البحوث المستمرة مع الطلبة والمعلمين والأكاديميين والخبراء على بناء جميع برامج الرياضيات من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي على أسس قوية متينة.

1 بحوث تطوير البرامج

- تقويم المعايير الوطنية
- بحوث نوعية لحاجات سوق العمل
- بحوث خاصة بالمحتوى العلمي

2 البحوث التكوينية

- قاعدة البحوث الخاصة بطرائق التدريس
- اختبارات صفية تجريبية
- لجان المعلمين الاستشارية
- مراجعون ومستشارون أكاديميون

3 البحوث الختامية

- مؤشرات على تحسّن درجات الاختبارات
- بحوث شبه تجريبية لفاعلية البرامج
- دراسات طولية
- تقويمات نوعية للبرامج

إعداد الطلبة للدراسة الجامعية ولسوق العمل

دليل المعلم

تعمل هذه السلسلة على الربط بين ما يتعلمه الطلبة في المدرسة الثانوية وما يتوقع منهم أن يعرفوه عند بدء دراستهم الجامعية.

كيف يمكن إعداد الطلبة بصورة أفضل للدراسة الجامعية؟

إن المنهج القوي للمدارس الثانوية مؤشر جيد على الاستعداد للدراسة الجامعية (Adelman 2006). فالطلبة الّذين يدرسون كتب الرياضيات المعدة للمرحلة الثانوية من هذه السلسلة يكونون أكثر استعدادًا للدراسة الجامعية من الّذين لم يدرسوها (Abraham & Crrech 2002).

وفيما يأتي بعض مناحي الاستعداد للدراسة الجامعية التي طورها (David Conley at the University of Oregon):

- **مهارات عقلية** وهي مهارات ضرورية لتعلم المحتوى على المستوى الجامعي، وتشمل التفكير الناقد، وحَلّ المسألة، والتبرير، وتتاح في كل يوم للطلبة الذين يدرسون هذه السلسلة فرص لتنمية مهارات التفكير العليا من خلال المسائل الخاصة بذلك.
- **المحتوى العلمي** إن كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة متسقة مع معايير عالمية دقيقة تشمل معايير NCTM للرياضيات المدرسية، وغيرها.
- **مهارات عامة** تشمل مهارات مثل: الاستيعاب القرائي، وإدارة الوقت، وتسجيل الملاحظات، ... إلخ. وتوفر هذه السلسلة فرصًا لتنمية هذه المهارات من خلال إرشادات قراءة الرياضيات وروابط المفردات، ودليل التوقّع وغيرها.

ماذا عن الطلبة الّذين لا يخططون للالتحاق بالجامعات؟

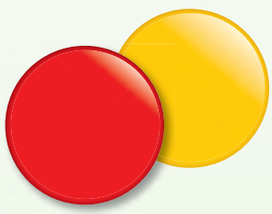
لم تعد الرياضيات في عالم التقنية المعاصر مقتصرة على الطلبة الّذين يلتحقون بالجامعات. فقد أظهرت إحدى الدراسات أن البرامج التدريبية التي يخضع لها شخص يريد الحصول على عمل تتطلب أن يكون هذا الشخص على مستوى معين من التعليم في الجبر، والهندسة، وتحليل البيانات، والإحصاء يماثل مستوى الطالب الّذي يلتحق بالسنة الأولى في الجامعة؛ حتى ينجح في عمله.

فلسفة السلسلة

تعليم متوازن، ترابط رأسي بين الصفوف من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي

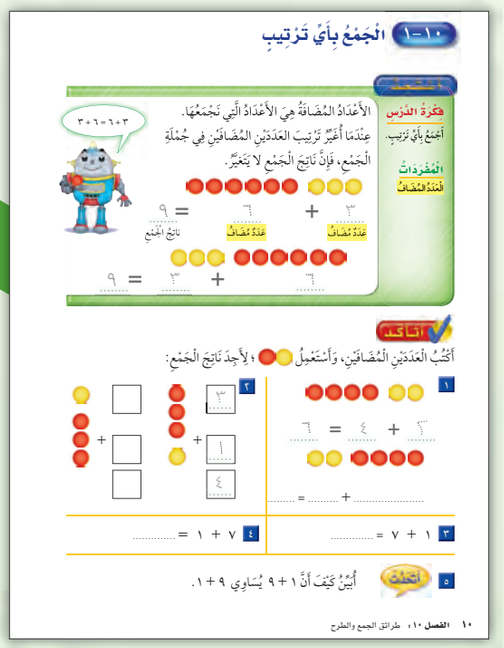
يظهر الترابط الرأسي لهذه السلسلة من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي دمجًا متوازنًا للتعليم.
وتوفر هذه السلسلة للطلبة منحنى متوازنًا للرياضيات من خلال:

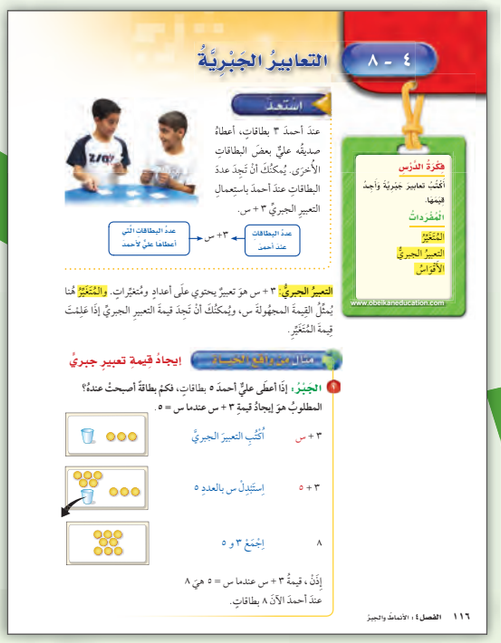
- استقصاء المفاهيم وبناء فهم إدراكي.
- تطوير مهارات إجرائية وحسابية وتعزيزها وإتقانها.
- تطبيق الرياضيات في حَلّ مسائل من واقع الحياة.



ويوضح تسلسل صفحات كتاب الطالب، تطور الترابط الرأسي للفهم الإدراكي والمهارات الإجرائية والحسابية لموضوع مهم في الجبر.

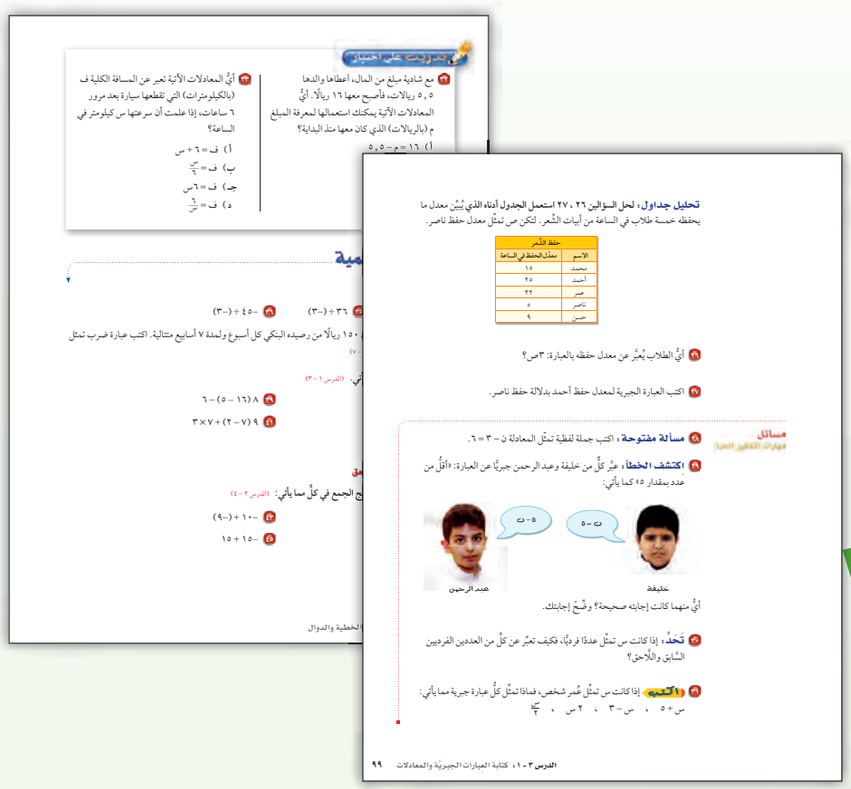
يستعمل طلبة الحلقة الأولى من **المرحلة الابتدائية** قطع عد بلونين مختلفين؛ لتمثيل جُمل الجمع. ويُعدُّ هذا النشاط أساسًا للفهم والنجاح في حَلّ معادلات جبرية.





أما طلبة الحلقة الثانية من **المرحلة الابتدائية** فإنهم يستفيدون من خبراتهم في التعامل مع الأكواب وقطع العد؛ لاستعمالها في تمثيل معادلات الجمع والطرح، وحَلّها.

ينتقل طلبة **المرحلة الإعدادية** خلال التعامل مع الجبر، من استعمال الأكواب وقطع العد إلى استعمال نماذج جبرية أكثر تجريدًا. ويحلّ الطلبة في الدروس اللاحقة، معادلات بسيطة تحتوي على رموز جبرية.



تحليل جداول، لحل السؤالين ٢٦، ٢٧ استعمل الجدول أدناه الذي يُبيّن معدل ما يحفظه خمسة طلاب في الساعة من أبيات الشّعر. لتكن ص تمثّل معدل حفظ ناصر.

حفظ الشعر	
الاسم	معدّل الحفظ في الساعة
محمد	١٥
أحمد	٢٥
عمر	٢٢
ناصر	٥
حسن	٩

٢٦ أيُّ الطلاب يُعبّر عن معدل حفظه بالعبارة: ٣ص؟

٢٧ اكتب العبارة الجبرية لمعدل حفظ أحمد بدلالة حفظ ناصر.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٨ **مسألة مفتوحة:** اكتب جملة لفظية تمثّل المعادلة ن − ٣ = ٦.

٢٩ **اكتشف الخطأ:** عبّر كلٌّ من خليفة وعبد الرحمن جبريًا عن العبارة: «أقلُّ من عدد بمقدار ٥» كما يأتي:

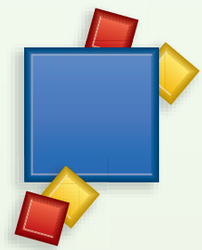
أيُّ منهما كانت إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.

٣٠ **تحدَّ:** إذا كانت س تمثّل عددًا فرديًّا، فكيف تعبّر عن كلٍّ من العددين الفرديين السّابق واللّاحق؟

٣١ **اكتب:** إذا كانت س تمثّل عُمر شخص، فماذا تمثّل كلُّ عبارة جبرية مما يأتي:

س + ٥ ، س − ٣ ، ٢ س ، $\frac{س}{٤}$

الدرس ٣ - ١: كتابة العبارات الجبريّة والمعادلات ٩٩



استمرارية التعليم

يوضّح التسلسل التعليمي الّذي تم وصفه قوّة المقابلة بين النتيجة المرغوب فيها والنجاح في الجبر. وتعمل هذه العملية التطويرية على تجنب وجود فجوات أو تداخلات بين مستويات الصفوف، وتؤكّد على أنّ مفاهيم كل صف ومهاراته مبنيّة على أساس قوي تم تطويره في صفوف سابقة. ويستعمل المنحى نفسه عبر المسارات جميعها، ابتداءً من الصف الأول وحتى الصف الثاني عشر.

فلسفة السلسلة

توازن عملية التدريس

- مفاهيم
- مهارات
- حَلّ مسائل

حَلّ المسألة ذات العلاقة

تزوّد السلسلة الطلبة بخطط ملائمة لحَلّ المسألة، ومهارات وتطبيقات عليها خلال الصفوف؛ إذ يتوافر لهم فرص مستمرة لتطبيق مهارات الرياضيات، وحَلّ المسائل باستعمال التفكير البصري، والاستدلال المنطقي، والحس العددي، والجبر.

استراتيجيات حَلّ المسألة

تساعد استراتيجيات حَلّ المسألة الطلبة على تعلم طرائق مختلفة لمواجهة المسائل اللفظية.

مسائل مهارات التفكير العليا

تتطلب هذه المسائل استعمال مهارات التفكير العليا (التحليل، والتركيب، ... ، إلخ).

تمثيلات متعددة

تساعد مسائل التَّمثيلات المتعددة الطلبة على تصور المفاهيم وتعميق الفهم، وتتضمن العبارات اللفظية، والعددية، والجبرية، والتّمثيل البياني، والجداول ... إلخ.

معامل الآلة الحاسبة البيانية

توفر هذه المعامل للطلبة فرصة لفهم الرياضيات من خلال التّمثيلات البيانية.

نظام التقويم الشامل

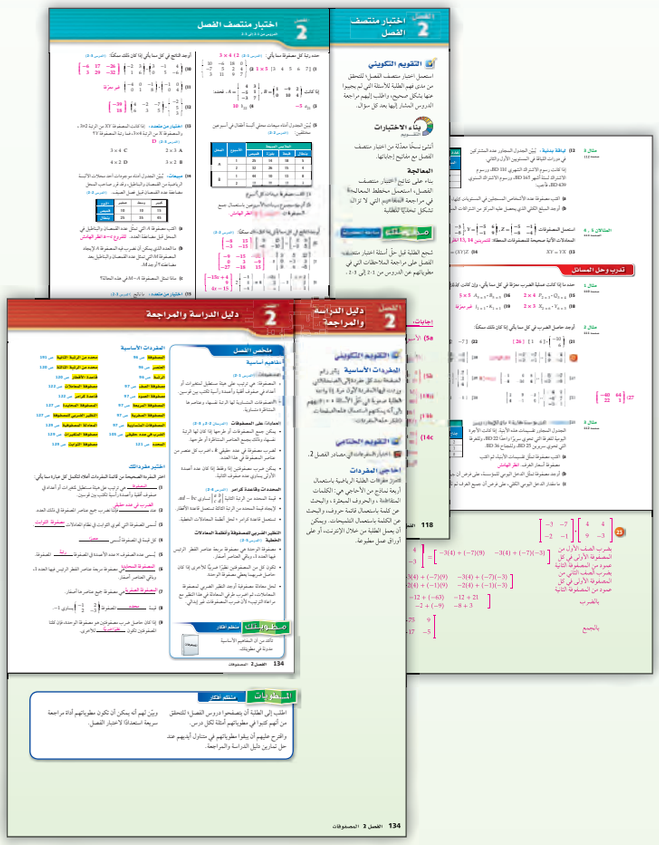
معالجة الأخطاء

توفر السلسلة تقويمًا مستمرًّا ذا معنى لمدى تقدم الطلبة في بنية المنهج وفي المواد المساندة التي يستعين بها المعلم.

1 التقويم التشخيصي

تقويم أوّلي قوِّم معرفة طلبتك في بداية العام الدراسي باستعمال اختبارات تشخيصية، واختبارات تحديد المستوى. وسوف يساعدك هذا على تحديد مدى حاجة طلبتك لمواد ومصادر تعلم إضافية ليكونوا قادرين على المواءمة مع معايير مستوى الصف.

تقويم مستوى المدخلات الدراسية قوِّم المعارف السابقة لطلبتك في بداية الفصل أو الدرس، من خلال المصادرالموجودة في كتاب الطالب أو دليل المعلم أو أي مصادر أخرى تراها مناسبة.



2 التقويم التكويني

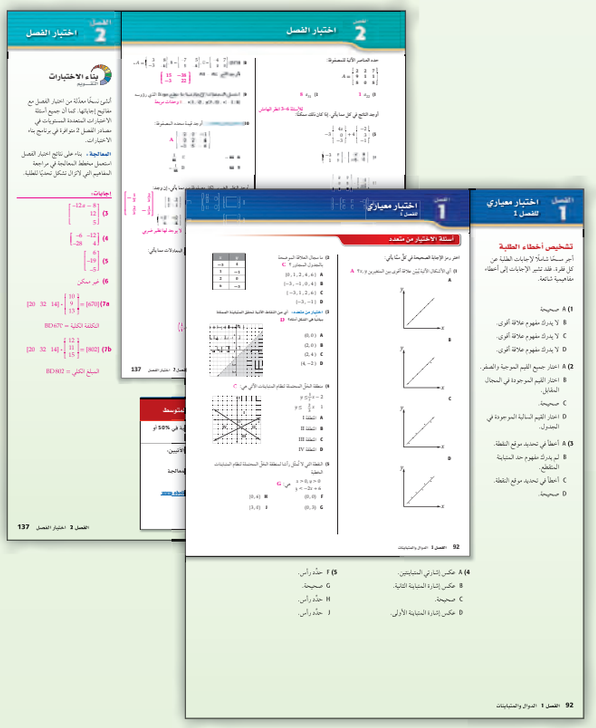
مراقبة التقدم حدِّد إذا كان طلبتك يحرزون تقدمًا مناسبًا في أثناء تعلمهم في كل درس أو لا، باستعمال أنواع التقويم الآتية لتنويع التدريس والتدريبات:

كتاب الطالب

- تأكد
- تأكد من فهمك
- اختبار منتصف الفصل
- دليل الدراسة والمراجعة
- المطويات

دليل المعلم

- بدائل تنويع التعليم
- الخطوة الرابعة (التقويم) في خطة التدريس
- معالجة الأخطاء



3 التقويم الختامي

التقويم الختامي قوِّم مدى نجاح طلبتك في تعلم مفاهيم كل فصل باستعمال ما يأتي:

كتاب الطالب:

- اختبار الفصل
- الاختبار المعياري التراكمي
- المطويات

دليل المعلم

- معالجة الأخطاء

تلبية حاجات الطلبة

توفر السلسلة دعمًا واسعًا يراعي الفروق الفردية بين الطلبة.

حيث يحتوي كل فصل وكل درس على اقتراحات؛ لتحديد احتياجات طلبتك وتلبيتها.

كما أن تنويع التعليم يلبي حاجات الفئتين الآتيتين :

دون الطلبة دون المتوسط

فوق الطلبة فوق المتوسط

الطلبة من المستوى المتقدم

التسريع والإثراء: يمكن استعمال المصادر والواجبات المنزلية ، التي تم تصنيفها للطلبة فوق المتوسط، مع الطلبة ذوي المستوى التعليمي المتقدم.

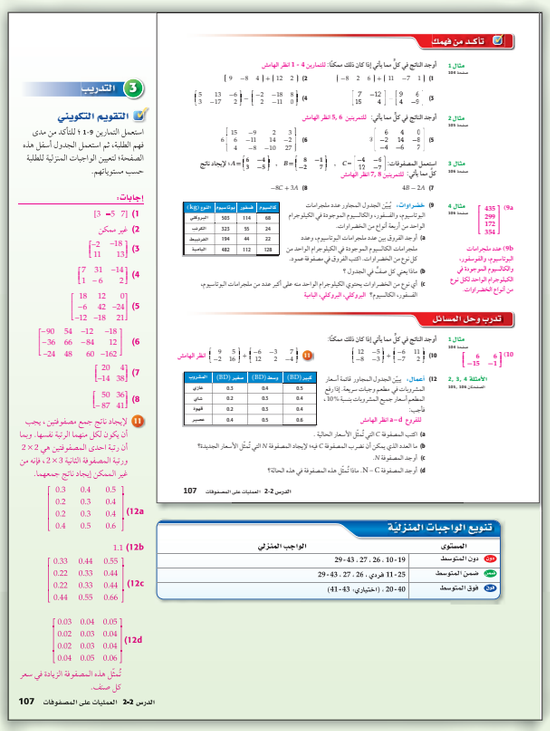
مجموعات أسئلة متعددة المستويات:

تم تنويع الواجبات المنزلية لكل درس حسب مستويات الطلبة:

دون

ضمن

فوق



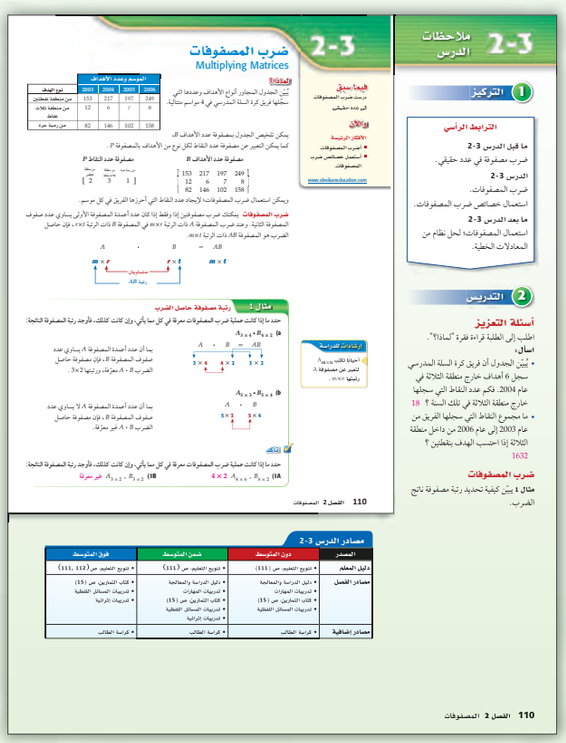
مصادر متعددة المستويات:

توفر السلسلة مصادر لكل درس حسب مستويات الطلبة:

دون

ضمن

فوق



المعالجة

معالجة متعددة المستويات

يُقدَّم في كل فصل من فصول كتاب المعلم لمختلف الصفوف مدخل شامل للمعالجة.

التقويم والمعالجة

يتضمن كل فصل اقتراحات للتشخيص ومستويات المعالجة.

المعالجة 1 استعمال مجموعات أسئلة.

المعالجة 2 استعمال دليل الدراسة والمراجعة، وبدائل تنويع التعليم.

في بداية كل فصل

يقدم مخطط المعالجة اقتراحات لطرائق التعامل مع الطلبة بناءً على نتائج اختبار "التهيئة" في بداية كل فصل. وتساعدك العبارات الشرطية التي يتضمنها المخطط على تحديد مستوى المعالجة الّذي تستعمله.

خلال كل درس

توفر السلسلة فرصًا متعددة للتقويم التكويني في كل فصل؛ ليحدد المعلم إذا كانت هناك ضرورة للمعالجة بناءً على نتائج الطلبة.

ما بعد الفصل

توفر السلسلة بدائل متعددة للطلبة الّذين لا يزالون يعانون من صعوبات بعد إنهاء الفصل تساعدهم على تحسين مستوياتهم.

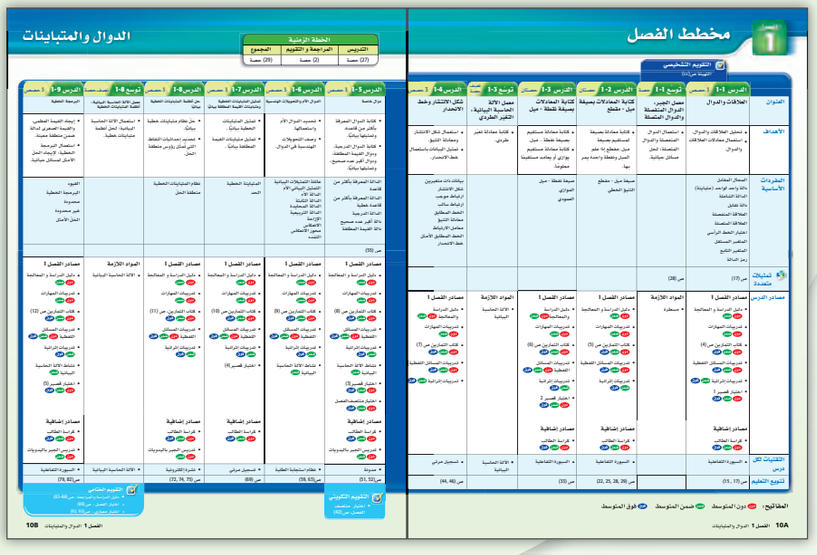
التخطيط للنجاح

سهولة الاستعمال

تتميّز السلسلة بأنها نموذج تعليم قوي يشتمل على بدائل تنويع التعليم، وإعادة التعليم والتعزيز، وبدائل للتوسّع، وإرشادات للمعلم تساعده على تعرّف مستويات الطلبة، كما يشتمل على نشاطات قبلية متقدمة، وتقويم مصاحب للتعليم.

تخطيط ملائم للدرس في متناول اليد

يساعدك مخطط الفصل على التخطيط للتعليم من خلال توضيح الأهداف والخطة الزمنية المقترحة، والتغطية الشاملة للأفكار المحورية.



التركيز في المحتوى الرياضي

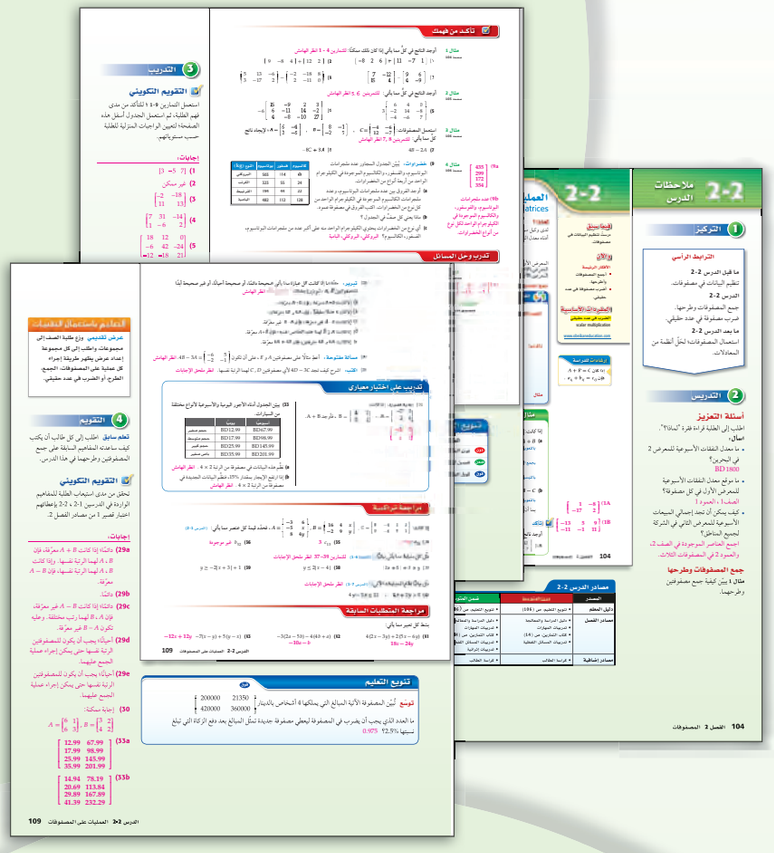
الترابط الرأسي (بين الفصول)

بُنيت المواضيع الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لمواضيع مستقبلية.

خطة التعليم ذات الخطوات الأربع

تنظم تعليمك، وتتضمن:

1 التركيز 3 التدريب
2 التدريس 4 التقويم



الترابط الرأسي (بين الدروس)

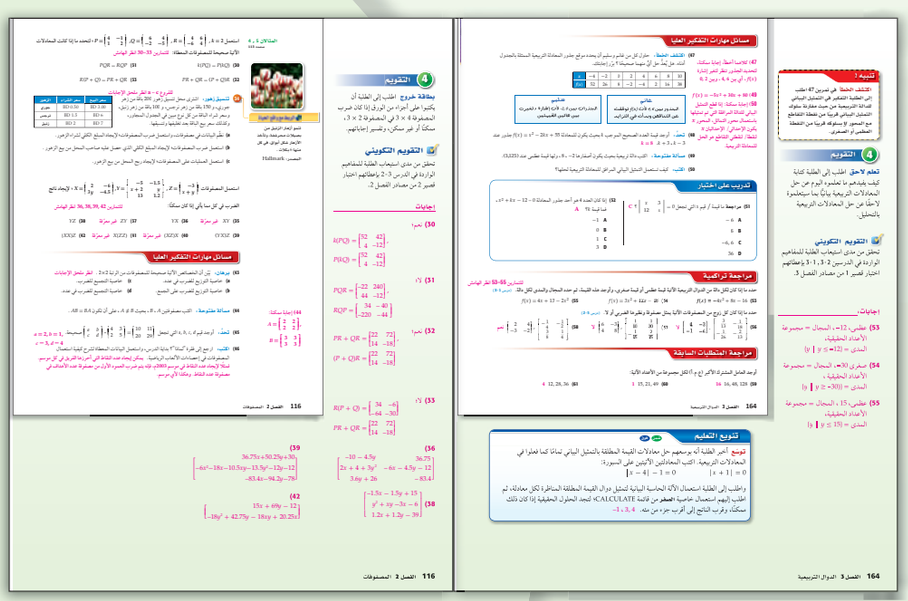
يوضح الترابط الرأسي في بداية كل درس الأهداف التي تؤدي إلى محتوى الدرس الحالي والأهداف التي تتبعه، والذي يأتي في إطار وثيقة المدى والتتابع من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي.

أسئلة التعزيز

يحتوي كل درس على أسئلة التعزيز؛ لتستعملها في مساعدة الطلبة على استقصاء الأفكار الرئيسة للدرس وفهمها.

أمثلة إضافية

يعدُّ كل مثال إضافي انعكاسًا لمثال في كتاب الطالب.



بدائل تنويع الواجبات المنزلية

بما أن معظم الصفوف تشمل طلبة ذوي قدرات مختلفة، فإن بدائل تنويع الواجبات المنزلية يسمح لك بتعديل أسئلة الواجب المنزلي.

نشاطات تقويمية

توفر نشاطات التقويم التكويني طرائق بديلة؛ لتحديد مدى استيعاب الطلبة في نهاية كل درس؛ مثل:

- **تعلم سابق** يربط الطلبة ما تعلموه في الدرس الحالي بما تعلموه سابقًا.
- **تعلم لاحق** يتوقع الطلبة كيفية ارتباط الدرس الحالي بالدرس التالي.
- **التسمية في الرياضيات** يحدد الطلبة المعلومات الرياضية المستعملة في المسألة.
- **بطاقة خروج** يكتب الطلبة جواب السؤال على ورقة خارجية يسلمونها قبل مغادرتك غرفة الصف.

الفصل 1

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
التهيئة ص(11)

	الدرس 1-1 3 حصص	توسّع 1-1 حصة	الدرس 2-1 حصتان	الدرس 3-1 حصتان	توسّع 3-1 نصف حصة	الدرس 4-1 3 حصص
العنوان	العلاقات والدوال	معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة	كتابة المعادلات بصيغة ميل - مقطع	كتابة المعادلات بصيغة نقطة - ميل	معمل الآلة الحاسبة البيانية: التغيّر الطردي	شكل الانتشار وخط الانحدار
الأهداف	• تحليل العلاقات والدوال. • استعمال معادلات العلاقات والدوال.	• استعمال الدوال المنفصلة والدوال المتصلة؛ لحَلّ مسائل حياتية.	• كتابة معادلة بصيغة لمستقيم بصيغة ميل-مقطع إذا علم الميل ونقطة واحدة يمر بها.	• كتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة - ميل. • كتابة معادلة مستقيم يوازي أو يعامد مستقيمًا معلومًا.	• كتابة معادلة تغيّر طردي.	• استعمال شكل الانتشار ومعادلة التنبؤ. • تمثيل البيانات باستعمال خط الانحدار.
المفردات الأساسية	المجال المقابل دالة واحد لواحد (متباينة) الدالة الشاملة دالة تقابل العلاقة المنفصلة العلاقة المتصلة اختبار الخط الرأسي المتغير المستقل المتغير التابع رمز الدالة		صيغة ميل - مقطع التنبؤ الخطي	صيغة نقطة - ميل الموازي العمودي		بيانات ذات متغيرين شكل الانتشار ارتباط موجب ارتباط سالب الخط المطابق معادلة التنبؤ معامل الارتباط الخط المطابق الأمثل خط الانحدار
تمثيلات متعددة	ص (17)	ص (28)				
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (4) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • مسطرة	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (5) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (6) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (7) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• السبورة التفاعلية		• السبورة التفاعلية	• السبورة التفاعلية	• الآلة الحاسبة البيانية	• تسجيل مرئي
تنويع التعليم	ص (17 , 15)		ص (29, 28, 25, 22)	ص (33)		ص (46, 44)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الدوال والمتباينات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(27) حصة	(2) حصة	(29) حصة

الدرس 1-5 (3 حصص)	الدرس 1-6 (3 حصص)	الدرس 1-7 (3 حصص)	الدرس 1-8 (3 حصص)	توسّع 1-8 (نصف حصة)	الدرس 1-9 (3 حصص)
دوال خاصة	الدوال الأم والتحويلات الهندسية	تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا	حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا	معمل الآلة الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية	البرمجة الخطية
• كتابة الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة، وتمثيلها بيانيًا. • كتابة الدوال الدرجية، ودوال القيمة المطلقة، ودوال أكبر عدد صحيح، وتمثيلها بيانيًا.	• تحديد الدوال الأم واستعمالها. • وصف التحويلات الهندسية في الدوال.	• تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا . • تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا .	• حَلّ نظام متباينات خطية بيانيًا. • تحديد إحداثيات النقاط التي تُمثّل رؤوس منطقة الحَلّ.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لحَلّ أنظمة متباينات خطية.	• إيجاد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة. • استعمال البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحَلّ الأمثل لمسائل حياتية.
الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة خطية الدالة الدرجية دالة أكبر عدد صحيح دالة القيمة المطلقة	عائلة التمثيلات البيانية التمثيل البياني الأم الدالة الأم الدالة الثابتة الدالة المحايدة الدالة التربيعية الإزاحة الانعكاس محور الانعكاس التمدّد	المتباينة الخطية الحد	نظام المتباينات الخطية منطقة الحَلّ		القيود البرمجة الخطية محدودة غير محدودة الحَلّ الأمثل
ص (55)					
مصادر الفصل 1 • دليل الدراسة و المعالجة (دون ضمن) • تدريبات المهارات (دون ضمن) • كتاب التمارين ص (8) (دون ضمن فوق) • تدريبات المسائل اللفظية (دون ضمن فوق) • تدريبات إثرائية (ضمن فوق) • نشاط الآلة الحاسبة البيانية (ضمن) • اختبار قصير(3) (دون ضمن فوق) • اختبار منتصف الفصل (دون ضمن فوق) **مصادر إضافية** • كراسة الطالب (دون ضمن فوق) • تدريس الجبر باليدويات (دون ضمن)	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة (دون ضمن) • تدريبات المهارات (دون ضمن) • كتاب التمارين ص (9) (دون ضمن فوق) • تدريبات المسائل اللفظية (دون ضمن فوق) • تدريبات إثرائية (ضمن فوق) • نشاط الآلة الحاسبة البيانية (ضمن)	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة (دون ضمن) • تدريبات المهارات (دون ضمن) • كتاب التمارين ص (10) (دون ضمن فوق) • تدريبات المسائل اللفظية (دون ضمن فوق) • تدريبات إثرائية (ضمن فوق) • اختبار قصير(4) **مصادر إضافية** • كراسة الطالب (دون ضمن فوق)	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة (دون ضمن) • تدريبات المهارات (دون ضمن) • كتاب التمارين، ص (11) (دون ضمن فوق) • تدريبات المسائل اللفظية (دون ضمن فوق) • تدريبات إثرائية (ضمن فوق) **مصادر إضافية** • كراسة الطالب (دون ضمن فوق) • تدريس الجبر باليدويات (دون ضمن)	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة و المعالجة (دون ضمن) • تدريبات المهارات (دون ضمن) • كتاب التمارين ص (12) (دون ضمن فوق) • تدريبات المسائل اللفظية (دون ضمن فوق) • تدريبات إثرائية (ضمن فوق) • نشاط الآلة الحاسبة البيانية (ضمن) • اختبار قصير (5) (دون ضمن فوق) **مصادر إضافية** • كراسة الطالب (دون ضمن فوق) • تدريس الجبر باليدويات (دون ضمن)
• مدونة ص(51, 52)	• نظام استجابة الطلبة ص(59, 63)	• تسجيل مرئي ص (69)	• نشرة إلكترونية ص (72, 74, 75)	• الآلة الحاسبة البيانية	• السبورة التفاعلية ص(79, 82)

التقويم التكويني
- اختبار منتصف الفصل، ص (42)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (88–83)
- اختبار الفصل، ص (89)
- اختبار معياري، ص(92, 93)

التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 1	المرجع		المرجع
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الأول، ص(11)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (11)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد، تأكد من فهمك	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم		
	تنبيه !	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (42)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 1، ص (88-83)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (89)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري، ص (93, 92)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات			
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات			

تنويع التعليم

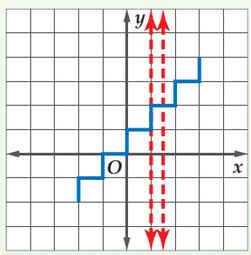
البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

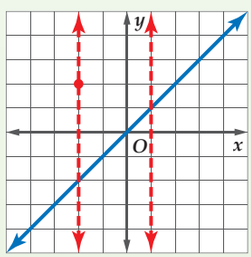
الطلبة الحركيون: اطلب إلى الطلبة أن يعملوا في مجموعات ثنائية؛ لقياس أطوالهم وأطوال أذرعهم من الكتف إلى أطراف أصابعهم بالسنتمترات، وأن يسجلوا الطولين لكل طالب على صورة زوج مرتب (طول ذراع الطالب، طول الطالب).

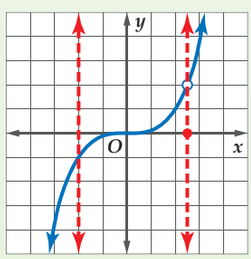
استعمل بيانات طلبة الصف لرسم شكل الانتشار، ورسم الخط المطابق، ووصف الارتباط، ثم استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لإيجاد معادلة خط الانحدار.

البديل 2 دون المتوسط دون

وزع على كل طالب عددًا من التّمثيلات البيانية، بحيث يكون بعضها دوالَّ والبعض الآخر لا يُمثّل دوال. اطلب إلى الطلبة رسم عدد من الخطوط الرأسية على كل منحنى بحيث يحاول كل منهم أن يجعل خطًّا منها يقطع المنحنى في أكثر من نقطة، ثم اطلب إلى كل طالب تحديد المنحنيات التي تُمثّل دوالَّ.







البديل 3 فوق المتوسط فوق

ضع قائمة من المفردات و/ أو الصيغ للفصل، واكتب كلًّا منها على بطاقة، ثم اطلب إلى الطلبة القيام باللعبة الآتية:

يقوم أحدهم بسحب بطاقة من بين البطاقات، ثم يُمثّل أمام زملائه محتويات البطاقة بيانيًّا، أو حركيًّا دون التفوه بأي كلمة.

الفصل 1

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 1

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تحديد المجال والمدى لعلاقة أو دالة مُعطاة.
- تحديد مقطعي التّمثيلات البيانية للدوال الخطية لكل من المحورين.
- تحديد ميل الخط المستقيم.
- كتابة معادلة الخط المستقيم.
- صياغة متباينات خطية لحل مسائل من واقع الحياة.

الفصل 1

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تحديد كل من المجال والمدى لعلاقة، مع تحديد المجال والمدى المقبول لمواقف تتضمن قيمًا منفصلة أو متصلة.
- الفرق بين العلاقة والدالة.
- كتابة معادلة مستقيم بصيغة ميل – مقطع.
- كتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة – ميل.
- رسم شكل الانتشار، وإيجاد معادلة الخط المطابق، ومعامل الارتباط، ومعادلة خط الأعداد، وعمل التنبؤات.
- تحديد الدوال الأم لكل من الدوال الخطية ($f(x) = x$)، ودوال القيمة المطلقة ($f(x) = |x|$)، الدوال التربيعية ($f(x) = x^2$).
- تمثيل المتباينات الخطية، ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا.
- حَلّ نظام متباينات خطية بيانيًّا.
- استعمال البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

ما بعد الفصل 1

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- وصف خصائص الدوال الأم رمزيًّا ، وبيانيًّا، وعدديًّا، ولفظيًّا.
- تحديد كل من المجال، والمدى للدوال باستعمال التمثيلات البيانية، والجداول، والرموز.
- استعمال الدوال وخواصها؛ لنمذجة مواقف حياتية، وحَلّها.
- استعمال الانحدار؛ لتحديد مدى ملاءمة الدالة الخطية لنمذجة بيانات من واقع الحياة.

نظرة على الدروس

1-1 العلاقات والدوال

تذكر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة، وأن الدالة هي علاقة يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المجال المقابل. ويمكن للدالة أن توصف بأنها واحد لواحد؛ أو شاملة أو تقابل بناءً على عملية ربط عناصر المجال بعناصر المجال المقابل.

يستعمل التمثّيل البياني والعددي في التمييز بين الدوال والعلاقات، كما تستعمل المقابلة في التعبير عن الكيفية التي يتم فيها ربط عناصر المجال بعناصر المجال المقابل من خلال التعبير عن ذلك بمجموعة من الأزواج المرتبة، وبالتالي فإن عملية المقابلة تستعمل في تحديد العلاقات التي تعد دوالً، كما يستعمل اختبار الخط الرأسي لهذا الغرض.

وعندما يكون مجال العلاقة أو الدالة مجموعة من النقط، فإن العلاقة، أو الدالة تكون منفصلة، أما عندما لا يوجد فجوات في المجال وتمثل العلاقة، أو الدالة بخط أو منحنى، فإن العلاقة، أو الدالة تكون متصلة.

1-2 كتابة المعادلات بصيغة ميل - مقطع

درست معادلة المستقيم، إذا علم ميله ومقطعه من المحور y ، ويعبّر عنها بالصيغة $y = mx + b$ ، حيث تُمثّل m الميل و b مقطع المحور y. وتستعمل في هذا الدرس، صيغة نقطة – ميل $(y-y_1 = m(x-x_1))$؛ لكتابة معادلة المستقيم، إذا علمت نقطتان يمر بهما، أو إذا علمت نقطة يمر بها وميله، أو إذا علمت نقطة يمر بها ومعادلة مستقيم موازٍ له أو عمودي عليه.

المستقيمات المتوازية لها الميل نفسه، أما المستقيمان غير الرأسيين يكونان متعامدين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميلهما يساوي -1.

1-3 كتابة المعادلات بصيغة نقطة - ميل

تم اشتقاق المعادلة في صيغة ميل – نقطة من تعريف الميل من خلال استعمال إحداثيات نقطتين على المستقيم. افرض أن النقطتين هما: $(x_1، y_1)$، $(x، y)$.

فباستعمال تعريف الميل، تجد أن م $= \frac{y-y_1}{x-x_1}$ ، وعند ضرب كل طرف من طرفي المعادلة في $(x-x_1)$ فإن الناتج الذي هو $y-y_1 = m(x-x_1)$ يمثل صيغة نقطة – ميل.

1-4 شكل الانتشار وخط الانحدار

عند تمثيل البيانات ذات المتغيرين كأزواج مرتبة في المستوى الإحداثي، فإن هذا التَّمثيل يسمى شكل الانتشار. وإذا أتخذت مجموعة البيانات اتجاهًا خطيًّا، فيمكن إيجاد معادلة الخط المطابق للبيانات؛ لتقريب العلاقة التي تربط قيم المجال بقيم المجال المقابل. ولإيجاد هذه المعادلة اتبع الخطوات الآتية:

- ارسم شكل الانتشار للبيانات.
- ارسم الخط المطابق لشكل الانتشار بحيث يكون أقرب ما يمكن من معظم النقاط.
- اختر نقطتين على الخط المطابق وأوجد معادلته مستعملًا صيغة ميل – مقطع. وعندها يمكن استعمالها كمعادلة للتنبؤ؛ لتحسب قيم متغير إذا علمت قيم المتغير الآخر. خط الانحدار هو الخط المطابق الأمثل للبيانات، وتُستعمل عمليات حسابية معقدة لإيجاد معادلته، ويمكن إيجاد معادلة خط الانحدار بسهولة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

1-5 دوال خاصة

يتضمن هذا الدرس عددًا من الدوال الخاصة وهي:

- الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة حيث تكتب باستعمال تعبيرين جبريين أو أكثر.
- الدالة الدرجية (التي تشبه الدرج) والتي تُعدُّ حالة خاصة من الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة، ويتكون التّمثيل البياني لهذه الدالة من عدد من القطع المستقيمة الأفقية التي تشبه الدرج.
- دالة القيمة المطلقة وتشبه الحرف V، ويتكوّن تمثيلها البياني من قطعتين مستقيمتين.

1-6 الدوال الأم والتحويلات الهندسية

عائلة التمثيلات البيانية للدوال هي مجموعة من التمثيلات البيانية التي تعرض واحدة أو أكثر من الخصائص المتشابهة. التمثيل البياني الأم هو التمثيل البياني للدالة الأم، وهو أسهل وأبسط تمثيل بياني في عائلة التمثيلات البيانية. وبإجراء تحويلات هندسية عليه يمكن الحصول على التمثيل البياني لأي دالة في عائلة التمثيلات البيانية. والتحويلات الهندسية هي:

- إزاحة إلى أعلى أو إلى أسفل (إذا أضيف أو طرح من الدالة الأم عدد حقيقي، وإزاحة إلى اليمين أو اليسار (إذا طرح أو أضيف إلى المتغير المستقل عدد حقيقي).
- انعكاس حول محور الانعكاس، بحيث تكون الدالة $-f(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x ، والدالة $f(-x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور y .
- توسّع أو تضييق ويكون ذلك عند ضرب الدالة الأم في عدد حقيقي غير صفري.

1-7 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

تعرَّف مجموعة الحَلّ للمتباينة الخطية على أنها مجموعة الأزواج المرتبة التي تجعل المتباينة صحيحة، ويمكن تمثيل المتباينة بيانيًّا من خلال تظليل منطقة الحَلّ، وهي إحدى المنطقتين في المستوى البياني اللتين يقسمهما المستقيم المُمثّل للحد.

ويمكن للمستقيم الذي يُمثّل حدود منطقة الحل أن يكون ضمن مجموعة الحَلّ، وعندها يُمثّل بمستقيم غير متقطع (متصل)، وذلك عندما تتضمن المتباينة أحد الرمزين $\leq$ أو $\geq$. كما يمكنه أن لايكون ضمن منطقة الحَلّ، وعندها يُمثّل بمستقيم متقطع، وذلك عندما تتضمن المتباينة أحد الرمزين $<$ أو $>$.

ويشبه التَّمثيل البياني لمتباينات القيمة المطلقة التَّمثيل البياني للمتباينات الخطية، حيث يتم في البداية تمثيل المتباينة على أنها تتضمن رمز المساواة، وبعدها يتم تحديد منطقة الحَلّ وتظليلها.

1-8 حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا

يشبه حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا حَلّ أنظمة المعادلات الخطية بيانيًا. وتبدأ عملية الحَلّ بتمثيل المتباينات على المستوى الإحداثي نفسه، ثم يتم تحديد منطقة الحَلّ المحتملة من خلال إيجاد الأزواج المرتبة التي تحقّق المتباينات جميعها. وتتمثّل منطقة الحَلّ المحتملة لنظام من متباينتين في المنطقة المشتركة بينهما والتي يجب تحديدها. وعندما لا يكون هنالك منطقة مشتركة أو عندما لا تتقاطع المنطقتان تكون مجموعة الحَلّ هي المجموعة الخالية، وعندها نستنتج عدم وجود حل لنظام المتباينات.

وإذا حصر التَّمثيل البياني لنظام من ثلاث متباينات أو أكثر منطقة مضلعة، فإن رؤوس هذه المنطقة يمكن تحديدها من خلال إيجاد إحداثيي كل منها بإيجاد نقط تقاطع المستقيمين اللذين يتقاطعان عندها.

1-9 البرمجية الخطية

يعتمد حَلّ المسألة التي تتناول مفهوم البرمجة الخطية على المهارات التي تعلمتها في الدرس 7–1. فبعد أن يتم تمثيل المتباينات الخطية وتحديد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، يتم إيجاد قيمة الدالة المعُطاة بتعويض إحداثيي الرؤوس في هذه الدالة، حيث تَمثّل النقطة التي يكون للدالة عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى حلًّا للمسألة.

وفيما يأتي توضيح لعناصر حَلّ المسألة باستعمال البرمجية الخطية.

- تسمى المتباينات في النظام بالقيود.
- تسمى المنطقة التي تحقّق النظام منطقة الحَلّ المحتملة.
- تسمى نقاط تقاطع حدود الخطوط برؤوس منطقة الحَلّ المحتملة.

منطقة الحَلّ المحتملة المحددة هي منطقة مضّلعة ومحصورة بالقيود، أما منطقة الحَلّ المحتملة غير المحدودة فهي مفتوحة وممتدة.

مشروع الفصل

زيادة ربح مصنع

- يستعمل الطلبة ما تعلموه عن الدوال والمتباينات؛ لتحديد أكبر ربح لمصنع.
- اسأل الطلبة، ما العوامل التي تؤخذ بعين الاعتبار لحساب ربح مصنع ؟
- قسم الطلبة إلى مجموعات ، بحيث تحوي كل مجموعة من 5 إلى 6 طلبة.
- اطلب إلى كل مجموعة زيارة أحد المصانع، أو جمع بيانات عن أحد المصانع من ناحية نوعية المنتج، حجمه، سعر التكلفة للمنتج، سعر البيع ....إلخ.
- ثم اطلب إليهم تحديد نوعين للمنتج، ووضع دالة الربح لهما، وكذلك المتباينات التي تُمثّل قيودًا.
- اطلب إليهم تحديد عدد الوحدات من كل نوع التي يجب أن ينتجها المصنع ليحقق أكبر ربح.
- اطلب إلى الطلبة تحضير تقرير للنتائج، وعرض المشاريع ومناقشتها أمام زملائهم.

المفردات الأساسية قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: المتباينة الخطية هي متباينة تحتوي على متغير أو أكثر مرفوع للأس 1، وتستعمل فقط عمليات جمع، وطرح، وضرب المتغيرات فيها بأعداد حقيقية.

مثال: المتباينة $y \geq 5x - 3$ هي متباينة خطية.

سؤال: هل المتباينة $y > 5x^2 + 9.5$ متباينة خطية؟ فسّر إجابتك. لا؛ لأن المتباينة تحتوي على متغير x مرفوع لأس غير 1

مطوياتك منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلبة ملاحظاتهم في أثناء دراستهم للدوال والمتباينات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب في أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل؛ لتدوين ملاحظاتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجِّع الطلبة في أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

مسرد مفردات الطالب، ص (1,2)

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضًا للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

الفصل 1 الدوال والمتباينات
Functions and Inqualities

فيما سبق
درستُ حَلّ المعادلات والمتباينات الخطية.

والآن
الأفكار العامة
- أستعمل معادلات العلاقات الخطية والدوال.
- أستعمل شكل الانتشار ومعادلة التنبؤ.
- أحل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا.
- أحُلّ مسائل من واقع الحياة مستعملًا البرمجة الخطية.

لماذا؟
إدارة أعمال يتطلب النجاح في إدارة الأعمال إتقان مهارات رياضية متنوعة. وفي هذا الفصل ستتعلم كيفية زيادة الربح، أو تقليل التكلفة؛ لتحقيق أكبر ربح ممكن من خلال استعمال البرمجة الخطية.

مطوياتك منظم أفكار

الدوال والمتباينات: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الأول حول الدوال والمتباينات، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات .

1. **اطو** كل ورقة من المنتصف كما هو مُبيّن في الشكل أدناه.
2. **قص** الأوراق من طول خط الطي كما هو مُبيّن في الشكل أدناه، ثم ثبّت أنصاف الأوراق الثمانية الناتجة؛ لتحصل على كُتيِّب صغير.
3. **قص** أطراف الأوراق كما هو مُبيّن في الشكل أدناه، بحيث تترك سطرين من طرف الورقة الأولى، و6 أسطر من طرف الورقة الثانية وهكذا.
4. **سمِّ** طرف كل ورقة برقم وعنوان كل درس من دروس الفصل.

التهيئة للفصل الأول

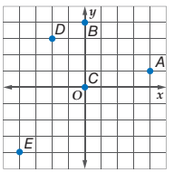
تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة .

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي ، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

اكتب الزوج المرتب الذي تمثّله كل نقطة مما يأتي، ثم حدّد الربع الذي تقع فيه: (مهارة سابقة)



1) A 2) B
3) C 4) D

للتمارين 4 – 1 انظر الهامش

5) حيوانات: يخفق قلب الحوت الأزرق 9 مرات في الدقيقة. اعمل جدولًا من الأزواج المرتبة، بحيث يمثّل الإحداثي x عدد الدقائق، والإحداثي y عدد خفقات قلب الحوت الأزرق. (مهارة سابقة) انظر الهامش

احسب قيمة كل تعبير مما يأتي إذا كان: (مهارة سابقة)
$a = -3 , b = 4 , c = -2$

6) $4a - 3$ -15 7) $2b - 5c$ 18

8) $b^2 - 3b + 6$ 10 9) $\frac{2a + 4b}{c}$ -5

مثّل المعادلات الآتية بيانيًّا: (مهارة سابقة)

10) $x = 4y$ 11) $y = \frac{1}{3}x + 5$

12) $x + 2y = 4$ 13) $y = -x + 6$

14) $3x + 5y = 15$ 15) $3y - 2x = -12$

للتمارين 15 – 10 انظر ملحق الإجابات

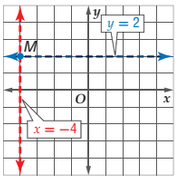
16) سفر: تسافر جميلة بالسيارة بسرعة $65\,\text{mi/h}$ لمدة x ساعة يوم السبت. في حين أنها تسافر بسرعة $55\,\text{mi/h}$ يوم الأحد لمدة $(x + 3)$ ساعة. اكتب تعبيرًا مبسطًا لمجموع المسافات التي تقطعها في اليومين. (مهارة سابقة)

$120x + 165$

مراجعة سريعة

مثال 1

اكتب الزوج المرتب الذي تمثّله النقطة M، ثم حدّد الربع الذي تقع فيه



خطوة 1 تتبع المستقيم الرأسي بدءًا من النقطة M ؛ لإيجاد الإحداثي x للنقطة.

خطوة 2 تتبع المستقيم الأفقي بدءًا من النقطة M ؛ لإيجاد الإحداثي y للنقطة.

خطوة 3 الزوج المرتب الذي تمثّله النقطة M هو $(-4, 2)$. بما أن الإحداثي x سالب، والإحداثي y للنقطة M موجب؛ إذن تقع M في الربع II.

مثال 2

احسب قيمة التعبير $3a^2 - 2ab + b^2$، إذا كانت $a = 4$، $b = -3$.

$$3a^2 - 2ab + b^2 = 3(4^2) - 2(4)(-3) + (-3)^2$$
$$= 3(16) - 2(4)(-3) + 9$$
$$= 48 - (-24) + 9 = 81$$

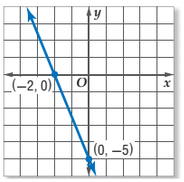
مثال 3

مثّل $2y + 5x = -10$ بيانيًّا.

أوجد نقاط التقاطع مع المحورين x ، y.

$2(0) + 5x = -10$
$5x = -10$
$x = -2$

$2y + 5(0) = -10$
$2y = -10$
$y = -5$



المنحنى يقطع المحور x عند النقطة $(-2, 0)$ والمحور y عند النقطة $(0, -5)$. استعمل الزوجين المرتبين السابقين ؛ لتمثيل المعادلة بيانيًّا.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومُخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة" إذا ... فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين ،
فاختر	أحد المصادر الآتية :
مصادر الفصل	تدريبات المهارات
دليل المعلم	مشروع الفصل 1، ص (10)
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من التمارين ،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين :
مصادر الفصل	دليل الدراسة و المعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات :

1) (4, 1) ، الربع الأول (I)
2) (0, 4) ، المحور y
3) (0, 0) ، نقطة الأصل
4) (−2, 3) ، الربع الثاني (II)
5)

x	y	(x, y)
1	9	(1, 9)
2	18	(2, 18)
3	27	(3, 27)
4	36	(4, 36)
5	45	(5, 45)

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-1

تحديد مجال علاقة أو دالة معطاة ومداها.

الدرس 1-1

تحليل العلاقات والدوال.

استعمال معادلات العلاقات والدوال.

ما بعد الدرس 1-1

تحديد الدوال الأم وتمثيلها بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما معدل أدنى درجة حرارة في شهر مايو؟ 26°C
- كيف تعبر عن معدلي درجتي الحرارة الدنيا والعليا لشهر نوفمبر كزوج مرتب؟ (15, 27)
- لماذا تكون متأكدًا من أن العدد الثاني في الزوج المرتب لهذه البيانات يكون دائمًا أكبر من أو يساوي العدد الأول؟ معدل درجات الحرارة العليا دائمًا أكبر من أو يساوي معدل درجات الحرارة الدنيا.

العلاقات والدوال
Relations and Functions

فيما سبق

درستُ تحديد كلٍّ من مجال ومدى علاقة معطاة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحلّل العلاقات والدوال.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.

المفردات الأساسية

المجال المقابل
codomain

دالة واحد لواحد (متباينة)
one-to-one function

الدالة الشاملة
onto function

دالة تقابل
corresponding function

العلاقة المنفصلة
discrete relation

العلاقة المتصلة
continuous relation

اختبار الخط الرأسي
vertical line test

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

رمز الدالة
function notation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يُبيّن الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة ما. لاحظ أن معدل كلٍّ من درجة الحرارة الدنيا، والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال: يمكن تمثيل معدلَي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (9, 20).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة ما

الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

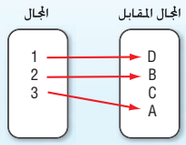
العلاقات والدوال الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في **المجال المقابل**، والمجال المقابل لمجال دالة ما هو مجموعة جميع العناصر التي تحوي صور عناصر المجال، بحيث يتشكل المدى من مجموعة العناصر من المجال المقابل التي ارتبطت بعناصر من المجال، وفي جميع الدوال ترتبط كل عناصر المجال بعناصر المجال المقابل، لكن قد يكون هناك اختلاف في طريقة ارتباط عناصر المجال بعناصر المجال المقابل.

مفهوم أساسي الدوال

أضف إلى مطويتك

دالة واحد لواحد (متباينة)

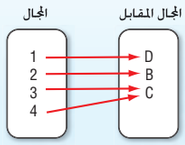
كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل، بحيث لا يكون لأكثر من عنصر في المجال الصورة نفسها.



المدى = {D, B, A}

الدالة شاملة

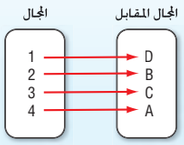
كل عنصر في المجال المقابل هو صورة لعنصر واحد على الأقل في المجال، أي المجال المقابل = المدى.



المدى = {D, B, C}

دالة واحد لواحد وشاملة (تقابل)

إذا كانت الدالة واحد لواحد، وشاملة، فهي دالة تقابل. أي كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل، وكل عنصر في المجال المقابل هو صورة لعنصر واحد فقط في المجال



المدى = {D, B, C, A}

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (15)	• تنويع التعليم، ص (15, 17)	• تنويع التعليم، ص (15, 17)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

العلاقات والدوال

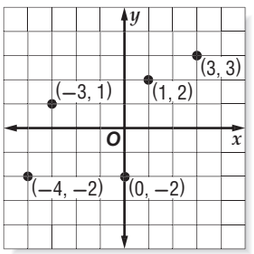
مثال 1 يُبيّن كيفية تحديد مجال ومدى العلاقة المنفصلة، وتمييز ما إذا كانت العلاقة تُمثّل دالة أو لا، ويُبيّن أيضًا كيفية تحديد إذا كانت الدالة واحد لواحد ، أو شاملة، أو تقابل، أو غير ذلك.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدّد مجال العلاقة ومداها، ثم حدّد إذا كانت تُمثّل دالة، وإذا كانت كذلك فهل هي واحد لواحد أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟



المجال = {−4 , −3, 0, 1, 3}.
المدى = {−2 , 1, 2, 3}. كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد في المجال المقابل. لذا، فإن هذه العلاقة تُمثّل دالة، وهي ليست (واحد لواحد) ، ولكنها شاملة، وهي ليست (تقابل).

مثال 1 المجال والمدى

حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيّهما دالة. وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

a) {(−6 , −1), (−5 , −9), (−3 , −7), (−1 , 7), (6 , −9)}

المجال = {6 , −1 , −3 , −5 , −6} ، المدى = {7 , −1 , −7 , −9}

هل هي دالة؟ نعم؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل.

هل هي واحد لواحد؟ لا ؛ لأن العنصر 9− من المدى هو صورة لعنصرين من المجال هما 6 , 5−.

هل هي شاملة؟ نعم؛ لأن المجال المقابل = المدى.

بما أن الدالة ليست واحدًا لواحدٍ، فهي ليست تقابل.

b)

x	2	−1	−2	−1	2
y	−2	−1	0	1	2

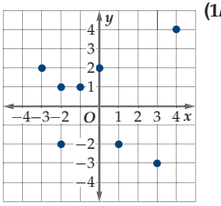
المجال = {2 , −1 , −2} ، المدى = {2 , 1 , 0 , −1 , −2}

هذه العلاقة ليست دالة؛ لأن العنصر 2 في المجال ارتبط بالعنصرين 2− و 2 في المجال المقابل، والعنصر 1− في المجال ارتبط بالعنصرين 1− و 1 في المجال المقابل.

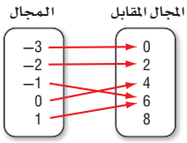
تأكد

حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيُّهما دالة. وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

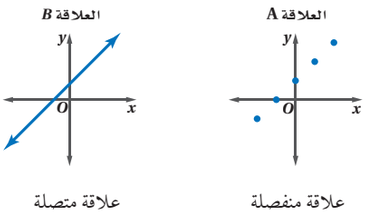
1A)



1B)



العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعةً من النقاط المنفصلة، مثل العلاقة A أدناه تُسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، وعندما يكون المجال للعلاقة عددًا لا نهائيًّا من العناصر، وأمكن تمثيلها بيانيًّا بخطٍ مستقيمٍ، أو بمنحنًى متصلٍ، فإنها تكون **علاقة متصلة**.



يمكن استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع كلٍّ من العلاقات المتصلة والمنفصلة؛ لمعرفة ما إذا كانت العلاقة دالة أو لا.

إرشادات للدراسة

إذا أُعطيت العلاقة بأزواج مرتبة، فإن مجموعة كل الإحداثيات x من الأزواج المرتبة تمثّل المجال، ومجموعة كل الإحداثيات y من الأزواج المرتبة تمثّل المدى.

إرشادات للدراسة

العلاقة المتصلة

إذا أمكن تمثيل العلاقة بيانيًّا دون رفع القلم عن الورقة، تكون العلاقة متصلة.

1A) المجال = {−3, −2, −1, 0, 1, 3, 4}، المدى = {−3, −2, 1, 2, 4}، ليست دالة

1B) المجال = {−3, −2, −1, 0, 1}، المدى = {0, 2, 4, 6}، هذه العلاقة دالة، وهي ليست واحد لواحد، وليست شاملة، وليست تقابل.

إرشادات للمعلم الجديد

اختبار الخط الرأسي ناقش مع الطلبة لماذا يُعد اختبار الخط الرأسي طريقة صحيحة؟
أكثر من نقطة على الخط الرأسي تعني أكثر من نقطة على التمثيل البياني لها الإحداثي x نفسه.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بعرض بعض التمثيلات البيانية على السبورة، ثم تطبيق اختبار الخط الرأسي. ارسم خطًّا رأسيًّا، ثم قم بتحريكه من اليسار إلى اليمين فوق التَمثيل البياني، بيّن للطلبة أنه إذا قطع ذلك الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن العلاقة لا تُمثّل دالة.

العلاقات والدوال

مثال 2 يُبيّن كيفية استعمال اختبار الخط الرأسي؛ لمعرفة إذا كان المنحنى يُمثّل دالة أو لا، ويُبيّن كيفية تحديد إذا كانت العلاقة منفصلة، أو متصلة بالنظر إلى تمثيلها البياني.

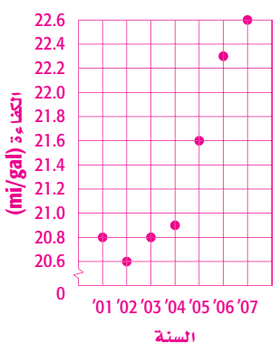
مثال إضافي

2 **مواصلات:** يُبيّن الجدول أدناه معدل كفاءة الوقود بالميل لكل جالون للسيارات الرياضية الحديثة في عدة سنوات. مَثِّلْ هذه المعلومات بيانيًّا، وبيّن إذا كانت تُمثّل دالة أو لا، وهل هي متصلة أم منفصلة ؟

السنة	كفاءة الوقود (mi\gal)
2001	20.8
2002	20.6
2003	20.8
2004	20.9
2005	21.6
2006	22.3
2007	22.6

المصدر: U.S. Environmental Protection Agency

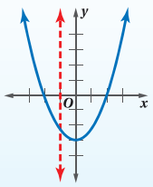
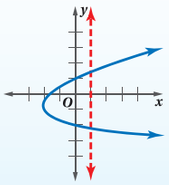
كفاءة الوقود



نعم، هذه العلاقة تُمثّل دالة، وهي منفصلة.

مفهوم أساسي — اختبار الخط الرأسي

أضف إلى مطويتك

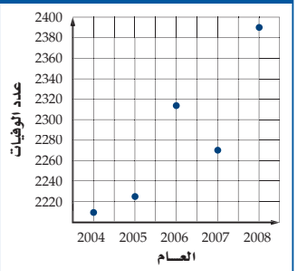
	إذا لم يقطع أي خط رأسي في المستوى الإحداثي التّمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.	إذا قطع خط رأسي في المستوى الإحداثي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر، فالعلاقة ليست دالة.
التعبير اللفظي		
النموذج		

مثال 2 من واقع الحياة

حوادث المرور: التّمثيل البياني المجاور يُبيّن أعداد الوفيات في مملكة البحرين نتيجة الحوادث المرورية من عام 2004 م إلى عام 2008 م ، فهل العلاقة التي يمثّلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تُمثّل دالة أم لا؟

بما أن التّمثيل البياني مكون من نقاط منفصلة، فالعلاقة منفصلة. و باستعمال اختبار الخط الرأسي، نلاحظ أنه لا يمكن رسم أي خط رأسي يمر بأكثر من نقطة من نقاط التّمثيل؛ إذن العلاقة تُمثّل دالة.

أعداد الوفيات



المصدر: www.cio.gov.bh/

الربط مع واقع الحياة

هل تعلم أن نسبة الحوادث المرورية في عام 2010 – 2009 في مملكة البحرين، والتي كان سببها تجاوز الإشارة الحمراء بلغت 7.98%.

المصدر: www.cio.gov.bh/

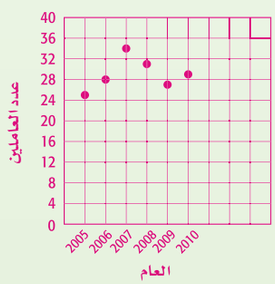
تأكد

2) إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 2005 م إلى 2010 م على الترتيب هو 25, 28, 34, 31, 27, 29. مثّل هذه البيانات بيانيًّا، وحدّد هل العلاقة التي تُمثّلها هذه البيانات منفصلة، أم متصلة. وهل تُمثّل دالة أم لا؟ انظر الهامش

معادلات العلاقات والدوال يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x , y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد ما إذا كانت المعادلة تُمثّل دالة أم لا، من خلال تمثيلها البياني.

إجابة (تأكد):

2)



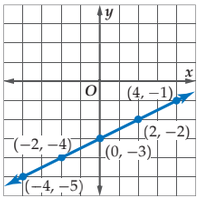
علاقة منفصلة، تُمثّل دالة.

مثال 3 تمثيل العلاقة بيانيًّا

مثّل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها، ثم حدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

كوّن جدولًا لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثّل المعادلة بيانيًّا.

x	y
−4	−5
−2	−4
0	−3
2	−2
4	−1



أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، وأي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم؛ لذا فإن كلًّا من مجال هذه العلاقة، ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.

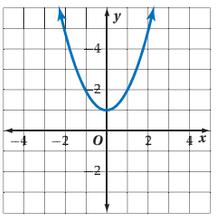
التَّمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تُمثّل دالة. وكل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y، وكل قيمة لِـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لِـ x ؛ لذا فالدالة واحد لواحد شاملة؛ إذن فهي دالة تقابل.

وبما أن التَّمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq 1\}$ المعادلة تُمثّل دالة ليست واحد لواحد، وليست شاملة وليست تقابل، ولكنها متصلة.

تأكد

3) استعمل التَّمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^2 + 1$؛ لتحديد مجالها ومداها، ثم حدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.



إذا كانت المعادلة تُمثّل دالة، فإن المتغير من المجال (غالبًا ما يكون x) يسمى **المتغير المستقل**. والمتغير الآخر (غالبًا ما يكون y) يسمى **المتغير التابع**؛ لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير x.

المعادلات التي تُمثّل دوالَّ تُكتب عادة باستعمال **رمز الدالة**، فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها في الصورة $f(x) = 5x - 1$، وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر 6 − في مجال الدالة f، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$، ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد 6 − ؛ لذا فإن: $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$.

مثال 4 إيجاد قيمة الدالة

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$، أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

a) $f(6)$

الدالة المعطاة	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(6) = 2(6)^2 - 8$
$6^2 = 36$	$= 2(36) - 8$
بالتبسيط	$= 72 - 8 = 64$

b) $f(2y)$

الدالة المعطاة	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$
$(2y)^2 = 2^2y^2$	$= 2(4y^2) - 8$
بالتبسيط	$= 8y^2 - 8$

تأكد

لتكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

4A) $g(2.8)$ -6.58

4B) $g(4a)$ $8a^2 - 20a + 3.5$

مراجعة المفردات

المجال والمدى

المجال هو مجموعة القيم الممكنة للمتغير المستقل x جميعها. أما المدى فهو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع y.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلًا من y، ويُقرأ "f of x". علمًا بأن f هو اسم الدالة، وليس متغيرًا مضروبًا في x.

معادلات العلاقات والدوال

مثال 3 يبين كيفية تمثيل علاقة خطية بيانيًّا.

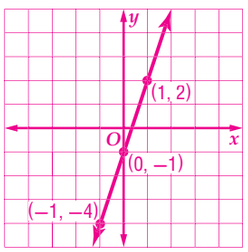
مثال 4 يبين كيفية إيجاد قيمة الدالة.

التركيز في المحتوى الرياضي

العلاقات والدوال الدالة هي حالة خاصة من العلاقة تمامًا كما أن المربع هو حالة خاصة من المستطيل. لذا، فإن جميع الدوال هي علاقات.

مثالان إضافيان

3 مثّل المعادلة $y = 3x - 1$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها، ثم حدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ ثم حدّد، ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية، والمعادلة تمثل دالة، وهي تقابل لأنها واحد لواحد، وشاملة، وهي متصلة.

4 لتكن $f(x) = x^3 - 3$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $f(-2)$ -11

b) $f(2t)$ $8t^3 - 3$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا كان أحد الطلبة أو أكثر متمكنًا من علم العروض وبحور الشعر،

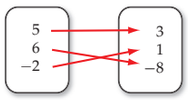
فقم بالطلب إليه أن يقارن بين تمثيل النقاط على المستوى الإحداثي، وتقطيع الأبيات الشعرية.

تأكد من فهمك

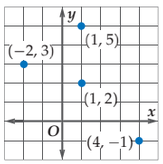
مثال 1 صفحة 13

حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيها دالة، وإذا كانت دالة، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

1)



2)



3) انظر الهامش

x	y
−2	−4
1	−4
4	−2
8	6

مثال 2 صفحة 14

4) كرة سلة: الجدولُ المجاورُ يُبيّن الوسطَ لعدد النقاط التي أحرزها فريق كرة سلة في مبارياته خلال 4 مواسم.

الموسم	الوسط للأعمار	الوسط لعدد النقاط
2003 – 2004	22	16.2
2004 – 2005	23	24.1
2005 – 2006	24	27.2
2006 – 2007	25	23.5

a) افترض أن الوسط للأعمار هو المجال. حدّد كلًّا من المجال والمدى.

b) اكتب علاقة في صورة أزواج مرتبة تُمثّل البيانات.

c) هل هذه العلاقة منفصلة أم متصلة؟ منفصلة

d) مثّل هذه العلاقة بيانيًّا، وهل هي دالة أم لا؟ انظر الهامش

للتمارين 7–5 انظر ملحق الإجابات

مثال 3 صفحة 15

مثّل كلَّ معادلة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد مجالها، ومداها، وحدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإن كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل ، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

5) $y = 5x + 4$ **6)** $y = -4x - 2$ **7)** $x = 7$

مثال 4 صفحة 15

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

8) $f(-3)$، إذا كانت $f(x) = -4x - 8$ 4

9) $g(5)$، إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$ −69

تدرب وحل المسائل

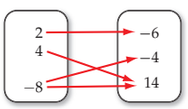
مثال 1 صفحة 13

حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيّها دالة، وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

10)

x	y
−0.3	−6
0.4	−3
1.2	−1

11)



12) {(3, −4), (−1, 0), (3, 0), (5, 3)}
ليست دالة
المجال = {−1, 3, 5}
المدى = {−4, 0, 3}

مثال 2 صفحة 14

13) سكان: الجدول المجاور يُبيّن عدد الذكور وعدد الإناث في محافظات مملكة البحرين عام 2010 م .

المحافظة	عدد الذكور	عدد الإناث
العاصمة	225031	104479
المحرق	108854	80260
الشمالية	150534	126415
الوسطى	205085	121220
الجنوبية	69508	31948

a) مثّل البيانات الواردة في الجدول بيانيًّا على أن يُمثّل المحور الأفقي عدد الذكور، والمحور الرأسي عدد الإناث.

b) حدّد كلًّا من المجال والمدى. انظر الهامش

c) هل العلاقة التي تُمثّل البيانات منفصلة أم متصلة؟

d) هل العلاقة تُمثّل دالة أم لا؟ وضّح إجابتك.

10) المجال = {−0.3, 0.4, 1.2}
المدى = {−6, −3, −1}
العلاقة دالة، واحد لواحد، شاملة، فهي تقابل.

11) المجال = {−8, 4, 2}
المدى = {−6, −4, 14}
ليست دالة.

13c) منفصلة.

13d) نعم؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

13b) المجال = {69508 , 205085 , 150534 , 108854 , 225031}
المدى = {31948 , 121220 , 126415 , 80260 , 104479}

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 9 - 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

تجنب الأخطاء أشر إلى أنه في العديد من المواقف الحياتية يوجد متغيران؛ يعتمد أحدهما على الآخر، ولكنه في بعض الأحيان لا تكون هناك علاقة واضحة.

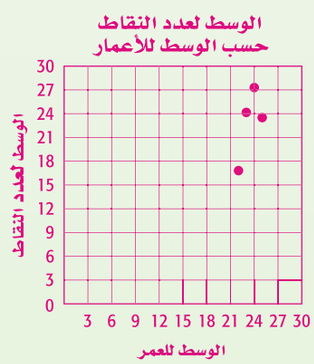
إجابات:

3 المجال = {−2, 1, 4, 8}

المدى = {−4, −2, 6}

بما أن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد في المجال المقابل، فإن العلاقة تمثل دالة، وهي ليست واحد لواحد، لأن العنصرِ 4− في المدى هو صورة لعنصرين من المجال هما 2− ، 1 ، وهي دالة شاملة؛ لأن المجال المقابل = المدى، وهي ليست تقابل.

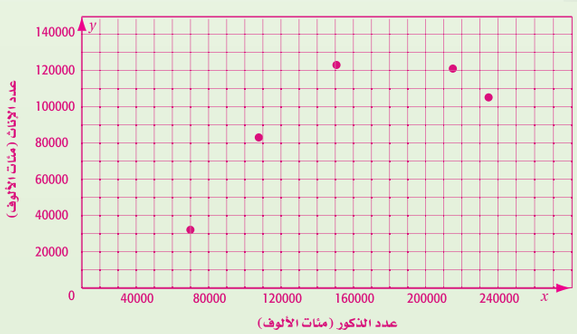
4d) نعم، هي دالة



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	26 - 10 ، 28 ، 29 ، 41 - 31
ضمن ضمن المتوسط	25 - 11 فردي ، 29 - 27 ، 42 - 31
فوق فوق المتوسط	38 - 27 ، (اختياري: 42 - 39)

13a)

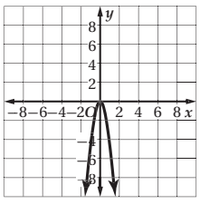
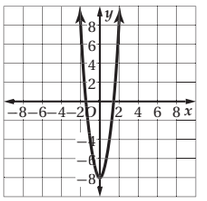
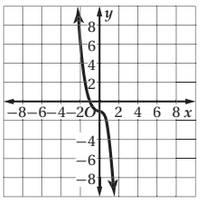


مثال 3
صفحة 15

استعمل التَّمثيل البياني للمعادلة في كل شكل أدناه؛ لتحديد مجالها ومداها، وحدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة؟

14) $y = -5x^2$ **15)** $y = 4x^2 - 8$ **16)** $y = -3x^3 - 1$

للتمارين 16–14 انظر ملحق الإجابات

مثال 4
صفحة 15

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

17) $f(-8)$، إذا كانت $f(x) = 5x^3 + 1$ **−2559**

18) $f(2.5)$، إذا كانت $f(x) = 16x^2$ **100**

19) غوص: الجدول المجاور يُبيّن مقدار الضغط الواقع على الغواص عند أعماق معينة تحت سطح الماء:

العمق (ft)	0	20	40	60	80	100
الضغط الجوي	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

a) اكتب علاقة في صورة أزواج مرتبة تُمثّل البيانات المعطاة في الجدول. للفروع a – d انظر ملحق الإجابات

b) مثّل العلاقة بيانيًّا.

c) حدّد كلًّا من مجال العلاقة ومداها، وهل هي منفصلة أم متصلة؟

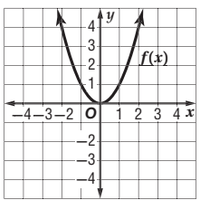
d) هل هذه العلاقة دالة أم لا؟ برّر إجابتك.

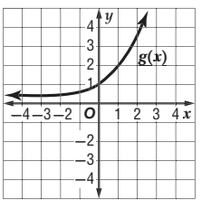
الربط مع واقع الحياة

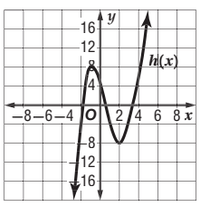
الضغط الواقع على الغواص يزداد بازدياد عمق الغوص تحت الماء.

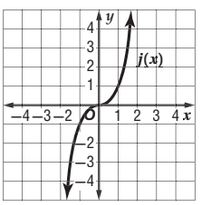
20) تمثيلات متعددة: في هذا التمرين سوف تستكشف دوال واحد لواحد، وشاملة.

استعمل التمثيلات البيانية أدناه للإجابة عن الفروع a – d: للفروع a – d انظر ملحق الإجابات









تمثيلات متعددة: يستعمل الطلبة في التمرين 20، جدول معلومات، وتحليلًا بصريًّا؛ لمعرفة خصائص الدوال.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع بعض العلاقات (والدوال) ليست منفصلة ولا متصلة كليًّا. اطلب إلى الطلبة أن يعتبروا المثال الموجود في الأسفل علاقة بين متغيرين، ثم اطلب إليهم أن يحددوا إذا كانت كل علاقة تُمثّل دالة، وهل المجال و /أو المدى منفصل؟

عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية مع الزمن (افرض أن التجربة بدأت بخلية بكتيرية واحدة وانقسمت كل خلية إلى خليتين جديدتين بعد 30 min). عدد الخلايا البكتيرية يمثل دالة في الزمن، ومجال هذه الدالة متصل ذو قيم غير سالبة للزمن والمتغير التابع (عدد الخلايا البكتيرية) ذو قيم منفصلة.

a) جدولة: استعمل التَّمثيلات البيانية السابقة؛ لعمل جدول يُبيّن عدد المرات التي يمكن أن يقطع فيها خط أفقي التَّمثيل البياني لكل دالة مما سبق، اكتب جميع الحالات الممكنة.

b) تحليل: حتى تكون الدالة واحدًا لواحد، يجب ألّا يقطع أي خط أفقي في المستوى الإحداثي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة. أيُّ الدوال السابقة تحقق هذا الشرط، وأيها لا تحققه؟

c) حتى تكون الدالة شاملة، يجب أن يقطع أي خط أفقي في المستوى الإحداثي تمثيلها البياني في نقطة واحدة على الأقل. أيُّ الدوال السابقة تحقّق هذا الشرط، وأيها لا تحققه؟

d) جدولة: كوّن جدولًا، وصنّف فيه الدوال السابقة إلى واحد لواحد، أو شاملة.

إذا كانت: $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = -2x^2,\ h(x) = -4x^2 - 2x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

21) $g(-6)$ -72 **22)** $h(3)$ -37 **23)** $h(8)$ -267

24) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 4 **25)** $g\left(\frac{3}{2}\right)$ $-\frac{9}{2}$ **26)** $h\left(\frac{1}{5}\right)$ $\frac{111}{25}$

27) يملك فهد BD 800. إذا قرّر أن يُضيف إلى هذا المبلغ BD 200 شهريًّا، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$؛ تُمثّل مقدار ما معه من نقود $p(t)$ بعد t شهرًا. كم يكون معه بعد 8 أشهرٍ؟ انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

28) اكتشف الخطأ: أوجَدَ كلٌّ من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$، حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. أيُّهما حَلّه صحيح؟ برّر إجابتك.

أحمد	خالد
$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$ $= -4(9d^2) - 6d + 1$ $= -36d^2 - 6d + 1$	$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$ $= 12d^2 - 6d + 1$

29) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة. وبرّر إجابتك.
"إذا كانت الدالة شاملة، فهي واحد لواحد". انظر الهامش

30) تحدٍّ: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحققان الشروط: $f(a) = 19, g(a) = 33, f(b) = 31, g(b) = 51$، حيث $a = 5, b = 8$.

31) اكتب: اذكر وجه الاختلاف في مدى الدالة بين دالة واحد لواحد، والدالة الشاملة. انظر الهامش

28) إجابة ممكنة: أحمد؛ فخالد لم يقم بتربيع العدد 3 قبل الضرب في -4.

30) إجابة ممكنة: $f(x) = 4x - 1,\ g(x) = 6x + 3$

31) إجابة ممكنة: في الدالة الشاملة المجال المقابل =المدى، بينما في دالة واحد لواحد من غير الضروري أن يساوي المجال المقابل المدى.

تنبيه!

اكتشف الخطأ في تمرين 28، اقترح على الطلبة إعادة كتابة الدالة الأصلية باستبدال كل x بـ $3d$ قبل البدء بتبسيطها.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يذكروا أمثلة على دوال، وناقش معهم هل هي دالة واحد لواحد، أم دالة شاملة، أم دالة تقابل؟

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 1-1 بإعطائهم اختبارًا قصيرًا 1 من مصادر الفصل 1.

إرشادات للمعلم الجديد

معالجة يحتوي هذا الدرس على العديد من المفردات التي قد تكون جديدة، وربما صعبة لبعض الطلبة. لذا، تأكد أن الطلبة يتعاملون بسلاسة مع اللغة الرياضية في هذا الدرس قبل الانتقال إلى الدرس التالي.

إجابات:

27 الدالة الأصلية

$p(t) = 800 + 200t$

بالتعويض عن t بـ 8

$p(8) = 800 + 200(8)$

بالضرب

$= 800 + 1600$

بالتبسيط

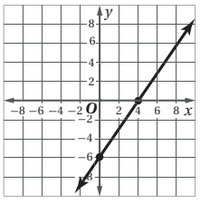
$= 2400$

اذن يكون معه BD 2400 بعد 8 أشهر.

29) خاطئة؛ إجابة ممكنة: من الممكن أن تكون الدالة شاملة، بحيث يرتبط عنصران مختلفان من المجال بنفس العنصر من المجال المقابل ففي هذه الحالة تكون ليست واحد لواحد.

تدريب على اختبار معياري

32) ما ميل المستقيم المُمثّل في الشكل أدناه؟ **D**



A $\frac{-3}{2}$ **B** $-\frac{2}{3}$

C $\frac{2}{3}$ **D** $\frac{3}{2}$

33) إذا كانت $g(x) = x^2$، فأي تعبير مما يأتي يساوي $g(x+1)$؟ **C**

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

حدّد أي من المعادلات الآتية تُمثّل معادلة خطية: (مهارة سابقة)

34) $6y - 8x = 19$ خطية

35) $4x^2 = 2y - 9$ ليست خطية

36) $18 = 2xy + 6$ خطية

حدّد الربع في المستوى الإحداثي الذي تقع فيه كل نقطة مما يأتي: (مهارة سابقة)

37) $(-4, -8)$ الربع الثالث

38) $(3, -1)$ الربع الرابع

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين في كلٍّ مما يأتي:

39) $(2, 3)$ ، $(9, 7)$ $\frac{4}{7}$

40) $(2, 4)$ ، $(-3, 6)$ $-\frac{2}{5}$

41) $(-1, 3)$ ، $(2, 6)$ 1

42) $(1, 3)$ ، $(-3, 3)$ 0

19 الدرس 1-1 العلاقات والدوال

توسّع 1-1

ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف

- استعمال الدوال المنفصلة والدوال المتصلة لحَلّ مسائل حياتية.

المواد اللازمة

- مسطرة

إرشادات التدريس

ابدأ هذا النشاط بأن تطلب إلى الطلبة أن يفكروا بأمثلة مجالها الأعداد الكلية فقط. قد تكون الأمثلة:

- عدد عجلات سيارة.
- عدد الطلبة الّذين تغيبوا عن المدرسة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلبة في مجموعات بحيث تضم كل مجموعة طالبين متفاوتي القدرات. واطلب إليهم قراءة الفقرات الأربع الأولى.

تدريب اطلب إلى الطلبة أن يحلوا التمارين 1-5 .

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 5؛ لتقويم مدى فهم الطلبة للفرق بين الدالة المنفصلة والمتصلة.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى كل طالب تلخيص ما تعلموه عن الدوال المتصلة والمنفصلة، ثم اطلب إليهم تقديم أمثلة على كل منها.

توسّع 1-1

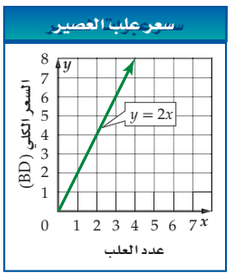
معمل الجبر:

الدوال المنفصلة والدوال المتصلة

Discrete and Continuous Functions

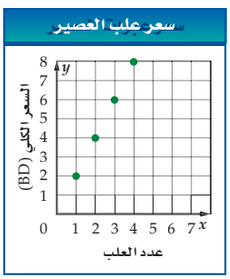
الهدف
أستعمل الدوال المنفصلة والدوال المتصلة؛ لحَلّ مسائل حياتية.

تُباع علبة العصير الواحدة من أحد الأنواع بسعر 2 BD، ويمكن إيجاد سعر x علبة عصير باستعمال الدالة المتصلة $y = 2x$، حيث y السعر الكلي بالدينار. ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًّا كما هو موضح في الشكل المجاور.



بالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن أن ترى أن سعر علبتي عصير يساوي 4 BD، وسعر 3 علبٍ يساوي 6 BD وهكذا. يُبيّن التَّمثيل البياني أن سعر 1.5 علبة هو 2(1.5)، ويساوي 3 BD، إلَّا أن علب العصير لا تُباع مملوءة جزئيًّا. فهذه الدالة تُمثل بدقة أكثر بدالة منفصلة.

التَّمثيل البياني المجاور هو تمثيل الدالة المنفصلة التي تُمثّل سعر علب العصير. والمجال في هذا التَّمثيل البياني مقبول ومنطقي في هذا الموقف.

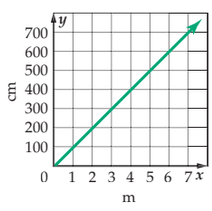


عند اختيار دالة منفصلة أو متصلة؛ لتمثيل موقف من واقع الحياة، يجب الأخذ بعين الاعتبار ما إذا كانت كل الأعداد الحقيقية تُعدُّ منطقية ومقبولة بوصفها عناصر في المجال.

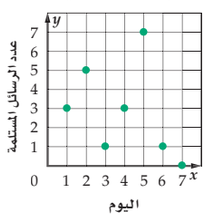
تمارين:

بيّن هل مُثِّلت كلٌّ مما يأتي بصورة صحيحة بوصفها دالة متصلة أو منفصلة، برّر إجابتك.

1) تحويل الوحدات



2) البريد الإلكتروني



1) متصلة؛ لأنه يمكن أن تكون هناك كتل مساوية لأعداد غير صحيحة.
2) منفصلة؛ لأنه لا يمكن استلام جزء من رسالة بريد إلكترونية.

للتمارين 5-3 انظر ملحق الإجابات.

3) y تُمثّل المسافة التي تقطعها سيارة في زمن مقداره x ساعة.

4) y تُمثّل العدد الكلي لراكِبي لعبة العجلة الدوَّارة بعد x دورةً من تشغيل اللعبة.

5) اكتب: أعْطِ مثالًا من واقع الحياة على دالة منفصلة وآخر على دالة متصلة، برّر إجابتك.

التوسع في المفهوم

- اطلب إلى الطلبة تمثيل موقفًا حياتيًّا بيانيًّا، حيث يمكن التعبير عن ذلك الموقف بدالة متصلة.
- اطلب إلى الطلبة تمثيل موقفًا حياتيًّا بيانيًّا، حيث يمكن التعبير عن ذلك الموقف بدالة منفصلة.

1-2 كتابة المعادلات بصيغة ميل - مقطع
Writing Equations in Slope-Intercept Form

فيما سبق
درست تمثيل مستقيم عُلم ميله ومقطعه من المحور y.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أكتب معادلة بصيغة ميل ومقطع إذا عُلم الميل ونقطةٌ واحدة.
- أكتب معادلة بصيغة ميل ومقطع إذا عُلمت نقطتان.

المفردات الأساسية
صيغة ميل - مقطع
slope-intercept form
التنبؤ الخطي
Linear extrapolation

www.obeikaneducation.com

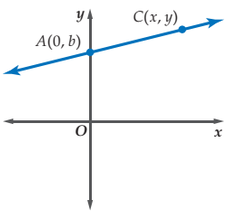
لماذا؟

تطلب بعض شركات التأمين الصحي من مشتركيها دفع مبلغ من المال عند كل زيارة للطبيب بالإضافة إلى الاشتراك السنوي.

تتقاضى شركة تأمين صحي مبلغ 110 BD اشتراكًا سنويًّا، و 4 BD عن كل زيارة للطبيب. ويمكن التعبير عن إجمالي ما يدفعه المشترك في العام بالمعادلة $y = 4x + 110$، حيث x عدد مرات زيارة الطبيب.

صيغ المعادلات يمر الخط المستقيم في التَّمثيل المجاور بالنقطتين $A(0, b), C(x, y)$، لاحظ أن b تُمثّل مقطع المحور y بالمستقيم AC.

يمكن أن تستعمل النقطتين؛ لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{AC}$. عوض بإحداثيات النقطتين A و C في صيغة الميل.



صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (0, b), (x_2, y_2) = (x, y)$ $m = \frac{y - b}{x - 0}$

بالتبسيط $m = \frac{y - b}{x}$

والآن حُلّ المعادلة؛ لإيجاد y.

بضرب الطرفين في x $mx = y - b$

بإضافة b إلى كل طرف $mx + b = y$

خاصية التماثل في المساواة $y = mx + b$

عندما تكتب المعادلة على هذه الصورة، فإنها تسمى **صيغة ميل – مقطع**.

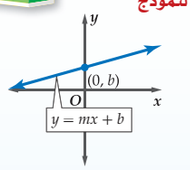
مفهوم أساسي صيغة ميل - مقطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي صيغة ميل – مقطع لمعادلة مستقيم هي: $y = mx + b$، حيث m الميل، و b مقطع المحور y.

بالرموز $y = mx + b$ (المقطع، الميل)

النموذج



إذا أُعطيت ميل مستقيم ومقطعه من المحور y، فإنك تستطيع أن تجد معادلته بتعويض قيمة m و b في صيغة ميل– مقطع.

1-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-2
إيجاد ميل المستقيم.

الدرس 1-2
كتابة معادلة بصيغة ميل - مقطع لمستقيم علم ميله ونقطة يمر بها.
كتابة معادلة بصيغة ميل - مقطع لمستقيم يمر بنقطتين.

ما بعد الدرس 1-2
كتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة - ميل.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- ماذا يُمثّل المتغير x في هذا الموقف؟ عدد الزيارات إلى الطبيب
- ماذا يُمثّل المتغير y في هذا الموقف؟ المبلغ الكلي الذي يدفعه المشترك في السنة
- ما المبلغ الكلي الذي يدفعه شخص، إذا زار الطبيب تسع مرات؟ BD 146

مصادر الدرس 1-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (22, 25)	• تنويع التعليم، ص (22, 25, 28)	• تنويع التعليم، ص (28)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

كتابة معادلة مستقيم بصيغة ميل-مقطع

مثال 1 يُبيّن طريقة كتابة معادلة بصيغة ميل – مقطع لمستقيم عُلم ميله ونقطة يمر بها.

مثال 2 يُبيّن طريقة كتابة معادلة بصيغة ميل – مقطع لمستقيم علمت نقطتان يمر بهما.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الذّي ميله $-\frac{3}{5}$ ويمر بالنقطة $(5, -2)$.

$y = -\frac{3}{5}x + 1$

2 اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

a) $(-3, -4)$, $(-2, -8)$

$y = -4x - 16$

b) $(6, -2)$, $(3, 4)$

$y = -2x + 10$

مثال 1 كتابة معادلة بصيغة ميل-مقطع لمستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه

اكتب معادلة بصيغة ميل–مقطع للمستقيم الّذي ميله 3 ويمر بالنقطة $(2, 1)$.

حيث أُعطي في هذا المثال ميل المستقيم، ولم يُعطَ مقطعه من المحور y .

الخطوة 1 أوجد مقطعه من المحور y .

$y = mx + b$	صيغة ميل - مقطع
$1 = 3(2) + b$	بالتعويض عن m بـ 3، و y بـ 1، و x بـ 2
$1 = 6 + b$	بالتبسيط
$1 - 6 = 6 + b - 6$	بطرح 6 من كلا الطرفين
$-5 = b$	بالتبسيط

الخطوة 2 اكتب المعادلة بصيغة ميل – مقطع.

$y = mx + b$	صيغة ميل - مقطع
$y = 3x - 5$	بالتعويض عن m بـ 3 و b بـ -5

فتكون المعادلة هي $y = 3x - 5$.

تأكد

اكتب معادلة بصيغة ميل–مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

1A) يمر بالنقطة $(-2, 5)$، الميل 3 $y = 3x + 11$

1B) يمر بالنقطة $(4, -7)$، الميل -1 $y = -x - 3$

كتابة معادلة بصيغة ميل-مقطع لمستقيم بدلالة نقطتين يمكن استعمال نقطتين يمر بهما خط مستقيم لإيجاد الميل أولًا، ثم اتباع الخطوات نفسها كما في المثال (1) لكتابة المعادلة.

مثال 2 كتابة معادلة بصيغة ميل-مقطع لمستقيم بدلالة نقطتين

اكتب معادلة بصيغة ميل –مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

a) $(3, 1)$, $(2, 4)$

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$= \frac{4 - 1}{2 - 3}$	$(x_1, y_1) = (3, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 4)$
$= \frac{3}{-1} = -3$	بالتبسيط

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا استعمل الطلبة m و b بطريقة خاطئة.

فقم بالتأكد من أن الطلبة يفهمون أن الحرف m يستعمل دائمًا للميل، و b يُستعمل لمقطع المحور y في صيغة ميل – مقطع للمعادلة $y = mx + b$.

الخطوة 2 استعمل أيًّا من النقطتين؛ لإيجاد المقطع y .

صيغة ميل - مقطع	$y = mx + b$
بالتعويض عن m بـ -3 ، x بـ 2 ، و y بـ 4	$4 = (-3)(2) + b$
بالتبسيط	$4 = -6 + b$
بطرح (-6) من كلا الطرفين	$4 - (-6) = -6 + b - (-6)$
بالتبسيط	$10 = b$

الخطوة 3 اكتب المعادلة بصيغة ميل – مقطع.

صيغة ميل-مقطع	$y = mx + b$
بالتعويض عن m بـ (-3)، وعن b بـ (10)	$y = -3x + 10$

إذن، المعادلة هي $y = -3x + 10$.

إرشادات للدراسة

الميل إذا كان إحداثيًّا النقطة (x_1 , y_2) سالبين، فخذ كلًّا من الإشارة السالبة ورمز الطرح بعين الاعتبار في صيغة الميل.

b) $(-4, -2) , (-5, -6)$

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

صيغة الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$(x_1, y_1) = (-4, -2), (x_2, y_2) = (-5, -6)$	$= \frac{-6 - (-2)}{-5 - (-4)}$
بالتبسيط	$= \frac{-4}{-1} = 4$

إرشادات للدراسة

اختيار نقطة عند إعطاء نقطتين على مستقيم، يمكنك اختيار أيّ من النقطتين لتكون (x_1 , y_1). تأكد من اتساق اختيارك خلال حل المسألة.

الخطوة 2 استعمل أيًّا من النقطتين؛ لإيجاد المقطع الصادي.

صيغة ميل - مقطع	$y = mx + b$
بالتعويض عن m بـ (4)، وعن x بـ (-4)، وعن y بـ (-2)	$-2 = 4(-4) + b$
بالتبسيط	$-2 = -16 + b$
بطرح (-16) من كلا الطرفين	$-2 - (-16) = -16 + b - (-16)$
بالتبسيط	$14 = b$

الخطوة 3 اكتب المعادلة بصيغة ميل – مقطع.

صيغة ميل - مقطع	$y = mx + b$
بالتعويض عن m بـ (4)، وعن b بـ (41)	$y = 4x + 14$

إذن، المعادلة هي $y = 4x + 14$.

تأكد

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

2A $(-1, 12), (4, -8)$ $y = -4x + 8$

2B $(5, -8), (-7, 0)$ $y = -\frac{2}{3}x - \frac{14}{3}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بعرض المستوى الإحداثي على السبورة التفاعلية، ثم حدّد نقطتين على المستوى، واطلب إلى الطلبة إيجاد معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين بصيغة ميل – مقطع، ثم قم بتحريك النقط إلى أماكن أخرى في المستوى، وأعد نفس الخطوات.

التركيز في المحتوى الرياضي

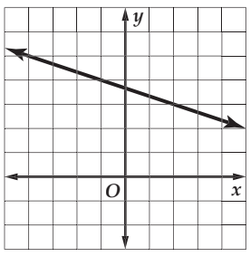
صيغة ميل - مقطع إذا علمت إحداثيات نقطتين يمر بهما مستقيم، وأردت كتابة معادلته بصيغة ميل – مقطع، فاستعمل هاتين النقطتين لإيجاد الميل، ثم عوض إحداثيات إحدى النقطتين في المعادلة $y = m x + b$ وحلها، لإيجاد قيمة b مقطع المحور y.

كتابة معادلة مستقيم بصيغة ميل- مقطع

مثال 3 يُبيّن طريقة كتابة معادلة بصيغة ميل – مقطع لمستقيم ممثل بيانيًّا.

مثال إضافي

3 اكتب معادلةبصيغة ميل – مقطع للمستقيم المُمثّل بيانيًّا على المستوى الإحداثي أدناه .



$y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

استعمال صيغة ميل- مقطع

مثال 4 يُبيّن طريقة حل مسألة من واقع الحياة بكتابة معادلة بصيغة ميل – مقطع لمستقيم عُلمت نقطتان يمر بهما.

مثال إضافي

4 **اقتصاد:** يوفر معاذ بشكل منتظم مبلغًا من المال كل شهر، إذا وفر BD25 في شهر محرم، وBD30 في شهر صفر، فاكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للتنبؤ بما يوفره في نهاية كل شهر من أشهر السنة الهجرية. $y = 5x + 20$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية ذكّر الطلبة بأن المتغيرين x, y في المعادلة يُمثلان أي زوج من قيم x, y التي تحقق المعادلة. وأن إحداثيات النقطة المعطاة هي إحدى هذه الأزواج.
تأكد أن طلابك يفهمون أنه مع الحاجة إلى استعمال نقطتين فقط لكتابة المعادلة فإن معادلات التنبؤ بمسائل من واقع الحياة تتضمن بيانات لنقاط أكثر.

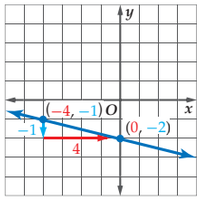
قد نحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلة مستقيم بمعلومية تمثيله البياني، ومن الضروري أحيانًا حساب الميل قبل كتابة المعادلة.

تنبيه!

صيغة ميل - مقطع
لا يمكن كتابة معادلة المستقيم الرأسي بصيغة ميل - مقطع؛ لأن ميل المستقيم الرأسي غير مُعرّف.

مثال 3 كتابة معادلة مستقيم بصيغة ميل - مقطع

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



مقطع المستقيم من المحور y هو -2 ؛ لذا $b = -2$

الخطوة 1 أوجد الميل.

صيغة الميل
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$(x_1, y_1) = (-4, -1)$ ، $(x_2, y_2) = (0, -2)$
$$= \frac{-2 - (-1)}{0 - (-4)}$$
بالتبسيط
$$= -\frac{1}{4}$$

الخطوة 2 عوّض بالقيم في صيغة ميل – مقطع.

صيغة ميل - مقطع
$$y = mx + b$$
$m = -\frac{1}{4}, b = -2$
$$y = -\frac{1}{4}x - 2$$

تأكد

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ ممَّا يأتي:

3A) الميل $\frac{4}{3}$ ، ويمر بالنقطة $(0, 4)$ $y = -4x - 6$ **3B)** يمر بالنقطتين $(-4, 10)$ ، $(0, -6)$ $y = \frac{4}{3}x + 4$

إرشادات للدراسة

تحقق
يمكنك التحقق من صحة حلّك بتعويض نقطة تقع على الخط المستقيم في المعادلة.

الربط مع واقع الحياة

تتضمن مسؤولية حامل الأمتعة في المطار مساعدة المسافرين في حمل أمتعتهم والتأكد من سلامتها وأمنها.

مثال 4 من واقع الحياة استعمال صيغة ميل - مقطع

رحلات جوية: الجدول المجاور يُبيّن مُعدَّل عدد الرحلات الجوية في مدينة خلال 4 سنوات . اكتب معادلة يمكنك استعمالها للتنبؤ بما إذا كانت الرحلات ستستمر في الزيادة بالمعدل نفسه أم لا.

السنة	عدد الرحلات
2004	354
2005	366
2006	378
2007	390

افهم: تعلم عدد الرحلات الجوية.

خطط: افرض أن x تُمثّل عدد السنوات منذ عام 2000 ، وy تُمثّل عدد الرحلات الجوية. اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطتين $(5, 366)$، $(6, 378)$.

حل: أوجد الميل.

صيغة الميل
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
بالتعويض عن (x_1, y_1) بـ $(5, 366)$ ، وعن (x_2, y_2) بـ $(6, 378)$
$$= \frac{378 - 366}{6 - 5}$$
بالتبسيط
$$= \frac{12}{1} = 12$$

اختر النقطة $(6, 378)$ ، وأوجد المقطع y للمستقيم.

صيغة ميل - مقطع
$$y = mx + b$$
بالتعويض عن m بـ 12، وعن x بـ 6، وعن y بـ 378
$$378 = 12(6) + b$$
بالتبسيط
$$378 = 72 + b$$
بطرح 72 من كلا الطرفين
$$306 = b$$

استعمل $m = 12$ ، $b = 306$ لكتابة المعادلة.

$y = mx + b$ صيغة ميل - مقطع

$y = 12x + 306$ بالتعويض عن m بـ 12، وعن b بـ 306

تحقق: تحقق من صحة الحل باستعمال إحداثيات النقطة الأخرى.

$y = 12x + 306$ المعادلة الأصلية

$366 \stackrel{?}{=} 12(5) + 306$ بالتعويض عن x بـ 5 ، وعن y بـ 366

$366 = 366$ ✓ بالتبسيط

تأكد

4) نقود: يتقاضى طلال 5 BD عن كل ساعة إضافية، بالإضافة إلى أجرته الأسبوعية. إذا عمل خلال الأسبوع الماضي 7 ساعات إضافية. وكانت أجرته كاملة 175 BD ، فاكتب معادلة خطية لإيجاد أجرته الكلية y، إذا عمل x ساعة إضافية. $y = 140 + 5x$

يمكنك استعمال المعادلة الخطية لإجراء تنبؤات حول القيم التي تتجاوز مدى البيانات، وتُسمى هذه العملية **التنبؤ الخطي**.

مثال 5 من واقع الحياة — **التنبؤ باستعمال صيغة ميل - مقطع**

رحلات جوية: استعمل المعادلة في المثال 4؛ لتقدير عدد الرحلات الجوية عام **2010**.

$y = 12x + 306$ المعادلة الأصلية

$= 12(10) + 306$ بالتعويض عن x بـ 10

$= 426$

التقدير المناسب لمعدل الرحلات الجوية يساوي 426 رحلةً.

تأكد

5) نقود: استعمل المعادلة في (تأكد 4)؛ للتنبؤ بالمبلغ المستحق الّذي يتقاضاه طلال في الأسبوع، إذا عمل 8 ساعاتٍ إضافيةٍ. 263 DB

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 22

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) يمر بالنقطة (3, −3)، الميل 3 $y = 3x - 12$

2) يمر بالنقطة (4, 2)، الميل 2 $y = 2x$

3) يمر بالنقطة (5, 1) ، الميل −1 $y = -x + 6$

4) يمر بالنقطة (6, −4)، الميل −2 $y = -2x - 2$

5) يمر بالنقطة (0, 5) ، $m = 1.5$ $y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$

6) يمر بالنقطة (−2, −8) ، $m = \frac{5}{2}$ $y = \frac{5}{2}x + 18$

مثال 2 صفحة 22

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

7) (4, −3), (2, 3) $y = -3x + 9$

8) (−7, −3), (−3, 5) $y = 2x + 11$

9) (−1, 3), (0, 8) $y = 5x + 8$

10) (−2, 6), (0, 0) $y = -3x$

استعمال صيغة ميل - مقطع

مثال 5 يُبيّن طريقة استعمال معادلة المستقيم للتنبؤ بالقيم في مسألة من واقع الحياة.

مثال إضافي

5 اقتصاد: يرغب معاذ في شراء آلة حاسبة علمية ثمنها 80 BD. استعمل معادلة التنبؤ في المثال الإضافي 4؛ لتحديد إذا كان المبلغ الّذي يوفره في شهر شعبان كافيًا لشراء الآلة الحاسبة العلمية أو لا. برّر إجابتك.

إذا استمر توفيره بالمعدل نفسه فإن مقدار ما يوفره في شهر شعبان سيكون 60 BD. لذا، يحتاج إلى 20 BD أخرى لشراء الآلة الحاسبة العلمية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 12 - 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا اختلط الأمر على بعض الطلبة عند تعلم أكثر من طريقة لكتابة المعادلة الخطية،

فوجههم إلى استعمال تعريف الميل لاشتقاق المعادلة باستعمال صيغة ميل – مقطع. ويمكن استعمال الأسلوب نفسه لكتابة معادلة المستقيم بصيغة نقطة – ميل في الدرس 3–1. ويتعلم المتعلمون المنطقيون بصورة أفضل عند ربط المفاهيم الجديدة بالمفاهيم السابقة .

إرشادات للمعلم الجديد

الحس المنطقي ذكّر الطلبة بأن معامل x يمثل الميل فقط عندما تكون المعادلة بصيغة ميل – مقطع، ووضح ذلك بمثال لمعادلتين، إحداهما بصيغة ميل – مقطع والأخرى ليست بهذه الصيغة.

الدرس 2-1 كتابة المعادلات بصيغة ميل - مقطع 25

إرشادات للمعلم الجديد

الميل ودرجة الانحراف أشر إلى أنه عندما تختلف الوحدات و /أو التدريج على كلا المحورين لا يمكنك تقدير الميل للمستقيم المُمثّل بيانيًّا عن طريق مقارنته بميل المستقيم $y = x$ الذي يصنع زاوية قياسها 45° ، وميله يساوي 1.

إجابة:

11 الخطوة 1 أوجد الميل

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{11 - (-1)}{-9 - (-6)}$ $(x_1, y_1) = (-6, -1)$ $(x_2, y_2) = (-9, 11)$

بالتبسيط $= -4$

الخطوة 2 اختر النقطة $(-9, 11)$

لإيجاد مقطع المستقيم من المحور y (b)

صيغة ميل–مقطع $y = mx + b$

$x = -9, y_2 = 11, m = -4$

إذن $11 = -4(-9) + b$

بالتبسيط $11 = 36 + b$

بطرح 11 من الطرفين $-25 = b$

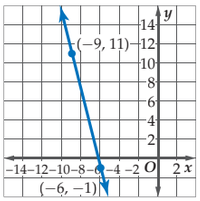
إذن، معادلة المستقيم هي

$y = -4x - 25$

لذلك، فإن A هي الإجابة الصحيحة.

مثال 3 صفحة 24

11 اختيار من متعدد: معادلة المستقيم المُمثّل بيانيًّا في الشكل المجاور هي: انظر الهامش



A $y = -4x - 25$

B $y = -\frac{2}{3}x - 5$

C $y = \frac{4}{5}x + \frac{29}{25}$

D $y = 6x + 35$

المثالان 4, 5 الصفحتان 24, 25

12 رحلة: خرج عشرة أشخاص في رحلة ترفيهية مع شركة سياحية مدة يوم واحد. إذا كانت أجرة الرحلة لمدة يوم كامل 35 BD، ودفعت المجموعة كاملة 425 BD.

a اكتب معادلة لإيجاد التكلفة الكلية c لِـ p شخصًا بصيغة ميل – مقطع. $C = 35p + 75$

b كم تكون تكلفة الرحلة لِـ 15 شخصًا؟ BD 600

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 22

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

13 يمر بالنقطة (3, 1)، الميل 2 $y = 2x - 5$

14 يمر بالنقطة (4, −1) ، الميل 1− انظر ملحق الإجابات

15 يمر بالنقطة (7, 1) ، الميل 8 $y = 8x - 55$

16 يمر بالنقطة (2, 5) ، الميل 2− $y = -2x + 9$

17 الميل 3 ، ويمر بالنقطة (0, −2) $y = 3x - 2$

18 الميل $-\frac{1}{2}$ ، ويمر بالنقطة (0, 5) $y = \frac{-1}{2}x + 5$

19 الميل $-\frac{6}{5}$ ، ويمر بالنقطة (0, 8) $y = \frac{-6}{5}x + 8$

20 يمر بالنقطة $m = -\frac{3}{4}$ ، (6, 4) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{2}$

21 يمر بالنقطة $m = -\frac{3}{5}$ ، (−4, −2) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{22}{5}$

22 يمر بالنقطة $m = \frac{9}{2}$ ، $(0, -\frac{13}{2})$ $y = \frac{9}{2}x - \frac{13}{2}$

مثال 2 صفحة 22

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

23 (9, −2), (4, 3) $y = -x + 7$

24 (−2, 5), (5, −2) $y = -x + 3$

25 (−5, 3), (0, −7) $y = -2x - 7$

26 (3, 5) , (2, −2) $y = 7x - 16$

27 (−1, −3), (−2, 3) $y = -6x - 9$

28 (−2, −4) , (2, 4) $y = 2x$

29 (5, −2), (1, 7) $y = -\frac{9}{4}x + \frac{37}{4}$

30 (5, −3) , (2, 5) انظر ملحق الإجابات

31 $\left(\frac{5}{4}, 1\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $y = \frac{x}{6} + \frac{19}{24}$

32 $\left(\frac{5}{12}, -1\right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$ $y = -x - \frac{7}{12}$

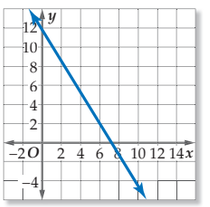
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	40–13، 50 ، 67-52
ضمن ضمن المتوسط	38-14 زوجي ، 50-39 ، 67-52
فوق فوق المتوسط	61-20 ، (اختياري: 67-62)

مثال 3
صفحة 24

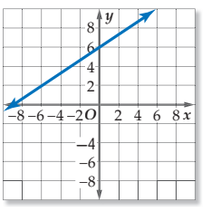
اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع لكل مستقيم مُمثّل بيانيًّا أدناه: للتمارين 35-33 انظر الهامش

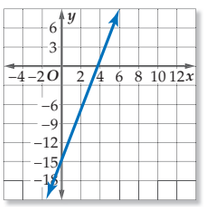
(33



34

(35





المثالان 5, 4
الصفحتان 25, 24

(36 سيارات: يحرك سامي سيارة لُعبةً باستعمال جهاز التحكم عن بُعد بسرعةٍ ثابتةٍ. فبدأ بتحريك السيارة عندما كانت على بُعد 5 ft منه، وبعد 2 sec أصبح بعدها 35 ft.

a) اكتب معادلة خطية لإيجاد بُعد السيارة d عن سامي بَعد t sec. $d = 15t + 5$

b) قدّر المسافة التي تقطعها السيارة بعد 10 sec . **155 ft**

(37 سكان: بلغ عدد سكان مملكة البحرين 1.23 مليون نسمة تقريبًا عام 2010 م، ويزداد عدد السكان بمُعدّل تقريبي 0.068 مليون نسمة سنويًّا.

a) اكتب معادلةً خطيةً لإيجاد عدد سكان المملكة K بالملايين بعد L سنة منذ 2010 م. $K = 0.068L + 1.23$

b) إذا استمرت الزيادة نفسها، فكم يصبح عدد سكان المملكة عام 2020 م ؟ **1.91 مليون نسمة.**

(38 عيادات: بلغ عدد الأشخاص الزائرين لعيادات السكري (القطاع الحكومي) في مملكة البحرين عام 2007م نحو 21 ألف شخص، ووصل هذا العدد عام 2011م نحو 39 ألف شخص.

a) اكتب معادلةً خطيةً لإيجاد عدد الأشخاص الزائرين لعيادات السكري R بعد N سنة من عام 2007م، حيث $N = O$ في العام 2007م. $R = 4.5N + 21$

b) مثّل المعادلة بيانيًّا. **انظر الهامش**

c) قدِّرْ عدد الأشخاص الزائرين عام 2017م. **66 ألف شخص**

(39 نادٍ رياضي: يقدم نادٍ رياضي عرضًا للعضوية مقابل 28 BD ، ودروسًا في التمارين الرياضية بمبلغ إضافي مقداره 6 BD لكل درس.

a) اكتب معادلة تمثّل التكلفة الكلية لعضو حضر x درسًا. $y = 6x + 28$

b) إذا كان المبلغ الّذي دفعه مالك 1008 BD في إحدى السنوات، فما عدد دروس التمارين الرياضية التي حضرها؟ **163.3 درسًا تقريبًا**

(40 اشتراك: تقدم مجلة عرضًا للاشتراك الإلكتروني يسمح بالاطلاع على 25 مقالة مجانًا، والاطلاع على 30 مقالة مقابل 49.15 BD، وعلى 33 مقالة مقابل 57.40 BD.

a) ما تكلفة الاطلاع على المقالة الواحدة؟ **2.75 BD**

b) ما تكلفة الاشتراك في المجلة؟ **35.40 BD**

إجابات:

(33 $y = -\frac{5}{3}x + 12$

34 بما أن المستقيم يمر بالنقطتين $(0,6)$, $(-6,2)$، فإنه يمكن إيجاد الميل.

معادلة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (-6,2)$
$(x_2, y_2) = (0,6)$
$= \frac{6-2}{0-(-6)}$

بالتبسيط $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

المستقيم يقطع المحور y في 6 لذا، فإن $b = 6$.

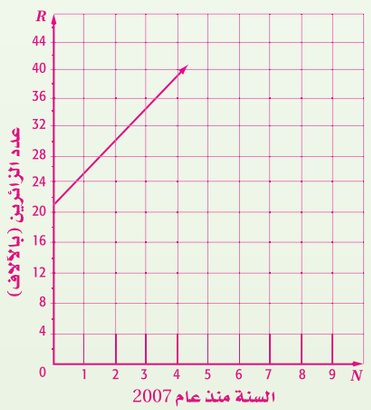
معادلة المستقيم بصيغة ميل–مقطع هي:

$y = m\,x + b$

$y = \frac{2}{3}x + 6$ $\quad m = \frac{2}{3}, b = 6$

(35 $y = \frac{15}{4}x - 15$

(38 b



بيّن هل تقع النقطة على المستقيم المُعطى معادلته أم لا ؟ برّر إجابتك.

41) $(3, -1), y = \frac{1}{3}x + 5$ لا

42) $(6, -2), y = \frac{1}{2}x - 5$ نعم

للتمارين **45 – 43**، بيّن أيّ المعادلات المعطاة فيما يأتي هي الأفضل تمثيلًا للوضع، وفسّر معنى كل متغير.

A	B	C
$y = -\frac{1}{3}x + 72$	$y = 2x + 225$	$y = 8x + 4$

43) **أجرة:** تبلغ أجرة دخول موقع BD 8، بالإضافة إلى BD 4 عن كل ساعة. **C؛ لأن x تمثل عدد الذين يدخلون الموقع في الساعة، y تمثل مجموع تكلفة دخول الموقع في الساعة.**

44) **تبرعات:** المبلغ المتوفر لدى مسؤول التبرعات لطلاب صف بمدرسة ما هو BD 225، ويحتاج إلى جمع BD 2 من كل طالب بالإضافة إلى ذلك. **B؛ لأن x تمثل عدد التذاكر المبيعة، y تمثل مجموع المبلغ الذي تم جمعه.**

45) **مياه:** يبلغ مستوى الماء في بركة السباحة 6 ft، ومعدّل التبخر $\frac{1}{3}$ in يوميًّا. **A؛ لأن x تمثل عدد الأيام، y تمثل الكمية المتبقية من الماء في البركة.**

46) **بيئة:** طبق مصنع برنامجًا لتقليل النفايات، ففي عام 1998 كانت كمية النفايات 946 Ton، ثم بدأ مقدار النفايات ينخفض منذ ذلك العام بمعدل 28.4 Ton سنويًّا.

a) كم طنًّا تصل كمية النفايات عام 2010؟ **605.2**

b) في أيّ عام أصبح الاستمرار في هذا الاتجاه مستحيلًا ؟ وضح إجابتك. **عام 2032؛ لأنه ستكون في هذا العام كمية النفايات صفر وبعد ذلك تصبح كمية سالبة، وهذا مستحيل.**

47) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في المسألة الآتية، ميلَي الخطين المتعامدين. **للفروع a – d انظر الهامش**

a) تمثيل بياني: مثّل المستقيم $y = \frac{3}{4}x + 1$ على ورقة رسم بياني.

b) رسم: استعمل مسطرةً غير مدرجة ومنقلة ؛ لرسم مستقيم يعامد المستقيم المرسوم.

c) جبري: أوجد معادلة المستقيم الّذي يتعامد مع المستقيم الأصلي، وصِفْ الطريقة التي استعملتها لكتابة المعادلة.

d) تحليل: قارن بين مِيلَي المستقيمين، وصِفْ العلاقة بينهما.

48) **حديقة ألعاب:** يريد جاسم طلب تذاكر لإحدى الفعاليات عن طريق شبكة الإنترنت، ويدفع مبلغ إضافي مقابل كل طلب. ويبلغ سعر التذكرة الواحدة BD 52. وقد طلب جاسم 5 تذاكر ودفع BD 275 ثمنًا لها.

a) أوجد قيمة المبلغ الإضافي، واكتب معادلةً خطيةً ؛ لتمثيل التكلفة الكلية C للتذاكر التي عددها t.
BD 15; $C = 52t + 15$

b) كوّن جدولًا لثلاث قيم على الأقل لأعداد مختلفة من مجموعات التذاكر. **للفرعين b, c انظر الهامش**

c) مثّل المعادلة بيانيًّا، وتنبأ بتكلفة 8 تذاكر.

تنبيهات لحل تمارين

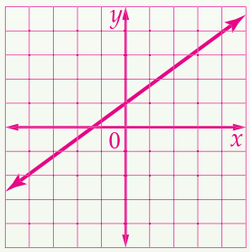
ورق بياني يحتاج الطلبة إلى ورق بياني؛ لحل التمارين 49 ,47 ,38 .

منقلة ومسطرة يحتاج الطلبة إلى منقلة ومسطرة لحل التمرين 47 .

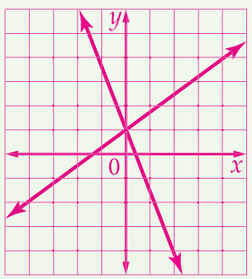
تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة التمثيل البياني والتحليل الجبري؛ لمقارنة ميلي المستقيمين المتعامدين في التمرين 47.

إجابات:

47a)



47b) إجابة ممكنة



47c) إجابة ممكنة: $y = -\frac{4}{3}x + 1$، يمر المستقيم بالنقطتين $(0, 1), (-3, 5)$، وباستعمال هاتين النقطتين نجد أن $m = -\frac{4}{3}$ ، وبما أن مقطع المحور y هو 1. لذا، نعوض عن 1 في المعادلة بدلاً من b، و$(-\frac{4}{3})$ بدلاً من m في المعادلة $y = mx + b$، فنحصل على المعادلة $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

47d) ميل المستقيم الأصلي (المعلوم) $\frac{3}{4}$، وميل المستقيم (المجهول) المتعامد معه يساوي $-\frac{4}{3}$. إذن، ميل المستقيم المتعامد المجهول هو $\frac{-1}{\text{ميل المستقيم المعلوم}}$.

48b)

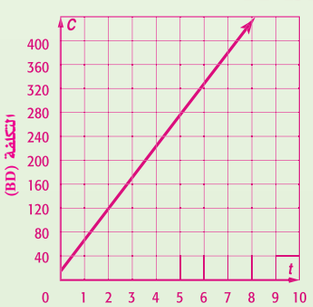
عدد التذاكر	3	4	6	7
التكلفة (BD)	171	223	327	379

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اكتب النقطتين (5, 4) ، (3, 4) على السبورة، واطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة b مقطع المحور y للمستقيم المار بهما، وبعد ذلك اكتب النقطتين (3, 4)، (3, 5) على السبورة، واطلب إليهم إيجاد قيمة b للمستقيم المار بهما مع الشرح. $b = 4$ ، لا يوجد مقطع y؛ لأن النقطتين تقعان على مستقيم رأسي.

48c) BD 431



49) **نوادي علمية:** تبلغ رسوم العضوية في النادي العلمي BD 22 في السنة، حيث يمكن للعضو الحصول على أشرطة علمية بأسعار مخفضة. وقد اشترى أحد الأعضاء 17 شريطًا في سنةٍ واحدةٍ، وكان جملة ما دفعه في تلك السنة BD 111.25 .

a) ما ثمن الشريط الواحد؟ BD 5.25

b) اكتب معادلة خطية لتمثيل جملة المبلغ y الّذي يدفعه العضو في السنة الواحدة إذا تم شراء x شريطًا. $y = 5.25x + 22$

c) مثّل المعادلة بيانيًّا. انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

50) **اكتشف الخطأ:** كتب كلٌّ من يوسف وسمير معادلة المستقيم الّذي يمر بالنقطتين (4, 6), (−2, 3). فأيُّهما كانت إجابته صحيحةً؟ برّر إجابتك.

سمير

$$m = \frac{4-(-2)}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$$
$$y = mx + b$$
$$-2 = 2(3) + b$$
$$-2 = 6 + b$$
$$-8 = b$$
$$y = 2x - 8$$

يوسف

$$m = \frac{4-(-2)}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$$
$$y = mx + b$$
$$6 = 2(4) + b$$
$$6 = 8 + b$$
$$-2 = b$$
$$y = 2x - 2$$

سمير، لأن يوسف قام بتبديل الإحداثيين x ، y في النقطة التي استعملها في الخطوة 3.

51) **تحدَّ:** إذا كانت النقاط (9, p), (−6, 1), (3, 7) تقع على المستقيم نفسه، فأوجد قيمة p مُبيّنًا خطوات الحل. 11؛ استعمل أول نقطتين لإيجاد معادلة المستقيم، ثم استبدل قيمتي x, y بـ $9, b$ على الترتيب، ثم حل المعادلة بالنسبة لـ b.

52) **تبرير:** افرض أن الصورة القياسية لمعادلة المستقيم هي $ax + by = c$.

a) أعد كتابة المعادلة بصيغة ميل – مقطع. $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$

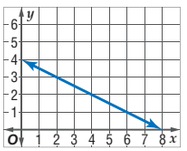
b) ما ميل المستقيم؟ الميل $= \frac{-a}{b}$

c) ما قيمة مقطع المحور y؟ مقطع المحور y $= \frac{c}{b}$

d) هل يكون هذا صحيحًا لجميع قيم a, b, c؟ لا؛ $b \neq 0$

53) **مسألة مفتوحة:** اكتب ما يلي:

a) مسألة من واقع الحياة تناسب التمثيل البياني المجاور، ثم عرّف المتغيرين، وصفّ العلاقة بينهما. انظر الهامش

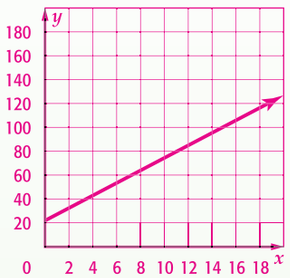


b) معادلة تُمثّل هذه العلاقة، وصِفْ معنى الميل ومقطع المحور y. $y = \frac{-1}{2}x + 4$

54) **اكتب:** تفيد المعادلات الخطية في التنبؤ بالأحداث المستقبلية؛ لذا صف بعض العوامل من واقع الحياة التي تؤثر في ثبات التمثيل البياني عند إجراء التنبؤات. انظر الهامش

إجابات:

49c)



53a) إجابة ممكنة: يتدفق الماء من قارورة بها 4 L بمعدّل $\frac{1}{2}$ L/sec . افرض أن y تمثل عدد لترات الماء الموجودة في القارورة، x تمثل زمن (sec) تدفق الماء من القارورة؛ بزيادة ثانية واحدة تقل كمية الماء في القارورة $\frac{1}{2}$ L، فتكون المعادلة هي $y = -\frac{1}{2}x + 4$، حيث يمثل الميل معدّل تغير الماء المتدفق من القارورة وهو $\frac{1}{2}$ L/sec، ومقطع المحور y يمثل كمية الماء في القارورة عندما كانت ممتلئة وهي 4 L .

54) إجابة ممكنة: إذا كانت المسألة حول شيء ممكن أن يتغير فجأة، مثل الطقس أو الأسعار فيمكن عند تمثيل المسألة أن يصعد التمثيل البياني للمستقيم فجأة، ويحتاج لتمثيل المستقيم بيانيًا إلى إيجاد ثابت معدّل التغيّر.

الدرس 2-1 كتابة المعادلات بصيغة ميل – مقطع 29

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا كيف ساعدهم قانون الميل في كتابة معادلة مستقيم بصيغة ميل – مقطع.

إجابات:

55) إجابة ممكنة: أن يكون ميل المستقيم معلوم ومقطع المحور y، أو ميل معلوم ونقطة يمر بها، أو نقطتين يمر بهما.

58) المجال $= \{-1, 1, 2, 4\}$
المدى $= \{5, 3, -4\}$
العلاقة تُمثّل دالة، ليست واحدًا لواحد، شاملة، ليست تقابل.

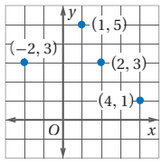
59) المجال $= \{0, 1, 2\}$
المدى $= \{2, 3, 0, -1\}$
العلاقة لا تُمثّل دالة.

55) **اكتب** ما المعلومات الضرورية لكتابة معادلة مستقيم؟ وضح إجابتك. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

56) **مراجعة:** ما مجال العلاقة الموضحة ومداها في الشكل أدناه؟

المجال $= \{-2, 1, 2, 4\}$
المدى $= \{1, 3, 5\}$



57) ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ، $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$؟ **A**

A $y = -2x - \frac{1}{2}$ **B** $y = -3x$ **C** $y = 2x - 5$ **D** $y = \frac{1}{2}x + 1$

مراجعة تراكمية

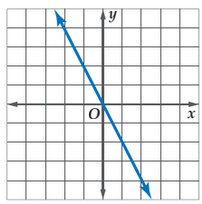
حدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيها دالة، وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ (الدرس 1-1)

58) $\{(4, 3), (2, -4), (1, 3), (-1, 5)\}$ انظر الهامش

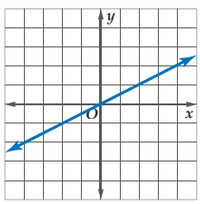
59) $\{(1, 0), (2, -1), (1, 3), (0, 2)\}$ انظر الهامش

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع لكل مستقيم ممثل بيانيًّا أدناه: (الدرس 2-1)

60) $y = -2x$



61) $y = \frac{1}{2}x$



مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة r الّذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

62) $m = 4$، ويمر بالنقطتين $(6, -2), (r, -6)$ **5**

63) $m = 6$، ويمر بالنقطتين $(r, 4)$ $(8, 10)$ **7**

64) $m = -3$، ويمر بالنقطتين $(r, 4), (7, -10)$ $2\frac{1}{3}$

65) $m = -1$، ويمر بالنقطتين $(9, r), (6, 2)$ **−1**

66) $m = -\frac{1}{3}$، ويمر بالنقطتين $(6, 3), (9, r)$ **2**

67) $m = \frac{4}{3}$، ويمر بالنقطتين $(2, -3), (5, r)$ **1**

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3 - 1

كتابة معادلات بصيغة ميل-مقطع لمستقيمات بمعلومية الميل ونقطة أو معلومية نقطتين.

الدرس 3 - 1

كتابة معادلة بصيغة نقطة-ميل لمستقيم علم ميله ونقطة يمر بها.

كتابة معادلة المستقيم بصيغ مختلفة.

كتابة معادلة المستقيم المار بنقطة معطاة ويوازي مستقيمًا معلومًا.

كتابة معادلة المستقيم المار بنقطة معطاة ويعامد مستقيمًا معلومًا.

ما بعد الدرس 3 - 1

استعمال خط الإنحدار في شكل الانتشار للتنبؤ بقيم.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة «لماذا؟» .

اسأل:

- ما ميل المعادلة $y = 156x + 55$؟
  156
- أوجد نقطة واحدة ممثلة للمستقيم.
  إجابة ممكنة $(0, 55)$
- اكتب معادلة المستقيم بدلالة الميل والنقطة المعطاة، وأي نقطة (x, y) تقع على المستقيم.
  إجابة ممكنة: $\frac{y-55}{x-0} = 156$

كتابة المعادلات بصيغة نقطة - ميل
Writing Equation in Point-Slope Form

فيما سبق
درست ميل المستقيم.

والآن

الأفكار الرئيسة
- أكتب معادلة مستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه.
- أكتب معادلة مستقيم يوازي أو يعامد مستقيمًا معلومًا.

المفردات الأساسية
صيغة نقطة - ميل
linear extra polation
الموازي
parallel
العمودي
perpendicular

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُشارك مملكة البحرين في العديد من مسابقات القرآن الكريم الدولية بشكل منتظم؛ إيمانًا منها بأهمية المنافسة الشريفة بين المتسابقين في هذا المجال المهم، ومن المسابقات التي تشارك فيها مسابقة الملك عبد العزيز الدولية لحفظ القرآن الكريم وتلاوته وتفسيره، وقد بدأت هذه المسابقة عام 1399 هـ بـ 55 مشاركًا، وتزايد العدد خلال الثلاثين عامًا بمعدل 156 مشاركًا سنويًا. ويمكنك التعبير عن عدد المشاركين في المسابقة سنويًا بالمعادلة $y = 156x + 55$، حيث x يمثل عدد السنوات بعد عام 1399 هـ، و y يمثل عدد المشاركين.

وقد حققت مملكة البحرين خلال الأعوام الماضية – لاسيما في الفترة الممتدة من 2001 م إلى الآن – عددًا لا بأس به من المراكز المتقدمة في المسابقة تراوحت بين المركز الثاني والمركز الخامس.

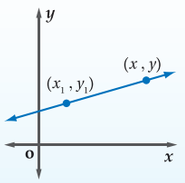
صيغة الميل ونقطة: يمكنك كتابة معادلة المستقيم بصيغة نقطة – ميل، إذا علمت إحداثيات نقطة يمر بها وميله.

مفهوم أساسي — صيغة نقطة-ميل

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$ تُعبر عن معادلة المستقيم غير الرأسي بصيغة نقطة - ميل، حيث (x_1, y_1) نقطة معطاة تقع على المستقيم، m ميل هذا المستقيم.

بالرموز $y - y_1 = m(x - x_1)$



مثال 1 — كتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة - ميل

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2, 3)$ وميله $\frac{1}{4}$ بصيغة نقطة – ميل.

صيغة نقطة - ميل: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$(x_1, y_1) = (3, -2)$، $m = \frac{1}{4}$: $y - (-2) = \frac{1}{4}(x - 3)$

بالتبسيط: $y + 2 = \frac{1}{4}(x - 3)$

تأكد $y - 1 = -6(x + 2)$ للتمثيل انظر ملحق الإجابات

1) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2, 1)$ وميله -6 بصيغة نقطة – ميل، ثم مثّلها بيانيًا.

مصادر الدرس 3 - 1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (38)	• تنويع التعليم، ص (33, 38)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمراجعة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• دليل الدراسة والمراجعة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر اضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

كتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة - ميل

مثال 1 يُبيّن طريقة كتابة معادلة بصيغة نقطة–ميل لمستقيم إذا عُلِم الميل ونقطة تقع على المستقيم.

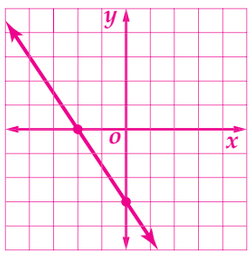
التقويم التكويني

استعمل تدريبات" تأكد "بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2, 0)$، وميله $-\frac{3}{2}$ بصيغة نقطة–ميل، ثم مثّلها بيانيًّا.

$y = -\frac{3}{2}(x+2)$



صيغ المعادلات الخطية

مثال 2 يُبيّن طريقة كتابة معادلة مستقيم بالصورة القياسية إذا أُعطيت معادلته بصيغة نقطة–ميل.

مثال 3 يُبيّن طريقة كتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة–ميل لمستقيم أُعطيت معادلته بصيغة ميل–مقطع.

مثالان إضافيان

2 اكتب المعادلة $y = \frac{3}{4}x - 5$ بالصورة القياسية.

$3x - 4y = 20$

3 اكتب المعادلة $y - 5 = \frac{4}{3}(x - 3)$ بصيغة ميل–مقطع.

$y = \frac{4}{3}x + 1$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اسحب المستوى الإحداثي على السبورة وعيّن نقطتين فيه، واطلب إلى الطلبة إيجاد المعادلة المُمثّلة للخط المار بهما، ثم اسحب النقاط إلى مواقع أخرى من المستوى وكرر العملية.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء أكد للطلبة أن a, b, c في الصورة القياسية تكون جميعها أعدادًا صحيحة، والمثال 2 هو تدريب على المعالجة الجبرية.

حقائق الضرب من الطرق الأخرى لكتابة المعادلة في المثال 3 بصيغة ميل - مقطع هي تحديد ميل المستقيم m، ولإيجاد قيمة b مقطع المحور y أفرض أن $x = 0$، ثم حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، فتكون القيمة الناتجة عن ذلك هي قيمة b في المعادلة المكتوبة بصيغة ميل - مقطع.

صيغ المعادلات الخطية إذا عُلم ميل المستقيم وإحداثيًّا نقطةٍ يمر بها، أو عُلمت نقطتان يمر بهما، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الخطية بإحدى الطرائق الآتية:

إرشادات للدراسة

الميل

ميل المستقيم ثابت لا يتغير، وعندما تتحرك بالتغيّر الأفقي والرأسي نفسيهما صعودًا أو نزولًا، فستصل دائمًا إلى نقطة على المستقيم.

ملخص المفهوم — كتابة المعادلات الخطية

أضف إلى مطويتك

إذا عُلم الميل ونقطة

الخطوة 1 عوّض عن قيم m, x_1, y_1 في المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$، أو عوّض عن قيم m, x_1, y_1 في صيغة ميل– مقطع، وحلّها لإيجاد قيمة b.

الخطوة 2 أعد كتابة المعادلة بالصيغة المطلوبة.

إذا عُلمت نقطتان

الخطوة 1 أوجد الميل.

الخطوة 2 اختر إحدى النقطتين.

الخطوة 3 اتبع الخطوات نفسها الواردة في كتابة معادلة المستقيم، إذا عُلم الميل ونقطة.

مثال 2 — الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$ بالصورة القياسية.

المعادلة الأصلية	$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$
بضرب كل طرف في العدد (3) للتخلص من الكسر	$3(y - 1) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)(x - 5)$
بالتبسيط	$3(y - 1) = -2(x - 5)$
خاصية التوزيع	$3y - 3 = -2x + 10$
بإضافة (3) إلى كل طرف	$3y = -2x + 13$
بإضافة $2x$ إلى كل طرف	$2x + 3y = 13$

مراجعة المفردات

الصورة القياسية للمعادلة الخطية

هي $ax + by = c$، حيث $a \geq 0$، a, b معًا لا تساوي صفرًا، a, b, c أعداد صحيحة العامل المشترك الأكبر لها يساوي 1.

تأكد

2) اكتب المعادلة $y - 1 = 7(x + 5)$ بالصورة القياسية. $7x - y = -36$

لإيجاد المقطع y للمعادلة، أعد كتابتها بصيغة ميل – مقطع.

مثال 3 — صيغة ميل - مقطع

اكتب المعادلة $y + 3 = \frac{3}{2}(x + 1)$ بصيغة ميل – مقطع.

المعادلة الأصلية	$y + 3 = \frac{3}{2}(x + 1)$
خاصية التوزيع	$y + 3 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$
بطرح 3 من كل طرف	$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

تأكد

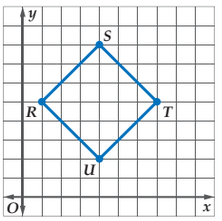
3) اكتب المعادلة $y + 6 = -3(x - 4)$ بصيغة ميل – مقطع. $y = -3x + 6$

واستعمال الصيغ المختلفة للمعادلات الخطية يفيد في موضوعات أخرى.

إرشادات للدراسة

الميل في المربع
الأضلاع المتقابلة وغير الرأسية في المربع لها الميل نفسه. وإذا كانت إحداثيات أحد الرؤوس غير معطاة، فاستعمل ميل الضلع المقابل لإيجادها.

مثال 4 صيغة نقطة - ميل والصورة القياسية



هندسة: الشكل المجاور يبيّن المربع $RSTU$.

a) اكتب معادلة المستقيم الّذي يتضمن $\overline{TU}$ بصيغة نقطة – ميل.

الخطوة 1 أوجد ميل $\overline{TU}$.

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (4, 2), (x_2, y_2) = (7, 5)$ $= \frac{5-2}{7-4} = 1$

الخطوة 2 يمكنك اختيار إحدى النقطتين للتعويض عن (x_1, y_1) في صيغة نقطة – ميل.

صيغة نقطة - ميل $y - y_1 = m(x - x_1)$

$(x_1, y_1) = (4, 2)$ $y - 2 = 1(x - 4)$

على اعتبار أن $(x_1, y_1) = (7, 5)$ $y - 5 = 1(x - 7)$

b) اكتب معادلة المستقيم نفسه بالصورة القياسية.

$y - 5 = 1(x - 7)$	المعادلة الأصلية	$y - 2 = 1(x - 4)$
$y - 5 = x - 7$	خاصية التوزيع	$y - 2 = x - 4$
$y = x - 2$	بإضافة 2 إلى كل طرف	$y = 1x - 2$
$-x + y = -2$	بطرح $1x$ من كل طرف	$-x + y = -2$
$x - y = 2$	بضرب كل طرف في (-1)	$x - y = 2$

تأكد

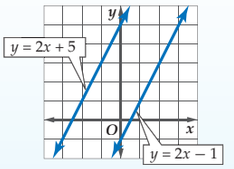
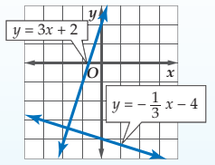
4a) اكتب معادلة المستقيم الّذي يتضمن $\overline{ST}$ بصيغة نقطة – ميل. $y - 5 = -1(x - 7)$ أو $y - 8 = -1(x - 4)$

4b) اكتب معادلة المستقيم الّذي يتضمن $\overline{ST}$ بالصورة القياسية. $x + y = 12$

المستقيمات المتوازية والمستقيمان المتعامدان يمكن تحديد هل المستقيمان متوازيان أو متعامدان، أو غير ذلك باستعمال الميل.

مفهوم أساسي المستقيمات المتوازية والمستقيمان المتعامدان

أضف إلى مطويتك

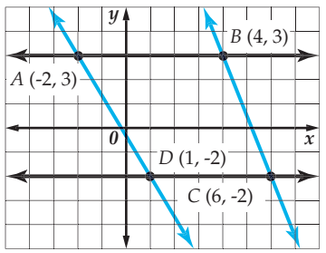
المستقيمات المتوازية	المستقيمان المتعامدان
التعبير اللفظي المستقيمات غير الرأسية (المائلة) تكون متوازية إذا وفقط إذا كان لها الميل نفسه. أما المستقيمات الرأسية والأفقية فجميعها متوازية.	**التعبير اللفظي** المستقيمان غير الرأسيين يكونان متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1.
	
مثال المستقيمان $y = 2x + 5, y = 2x - 1$ متوازيان	**مثال** المستقيمان $y = 3x + 2, y = -\frac{1}{3}x - 4$ متعامدان

صيغ المعادلات الخطية

مثال 4 يُبيّن طريقة استعمال صيغة نقطة–ميل لكتابة معادلة مستقيم يمثل جزء منه ضلعًا لشكل هندسي.

مثال إضافي

4 هندسة: يُبيّن الشكل أدناه شبه المنحرف ABCD وقاعدتاه $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.



a) اكتب معادلة المستقيم الّذي يتضمن $\overline{BC}$ بصيغة نقطة–ميل.

$y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 4)$

أو $y + 2 = -\frac{5}{2}(x - 6)$

b) اكتب معادلة المستقيم نفسه بالصورة القياسية.

$5x + 2y = 26.$

التركيز في المحتوى الرياضي

صيغة نقطة-ميل إذا كانت النقطة (x_1, y_1) تقع على المستقيم الّذي ميله m، يمكن بصورة عامة استعمال صيغة الميل في كتابة المعادلة لجميع النقاط (x, y).

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

وبضرب طرفي المعادلة في $x - x_1$ ينتج أن:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ وهذه هي صورة معادلة المستقيم التي تعرف بصيغة نقطة–ميل.

تنويع التعليم

فوق

توسّع مثل عدة مستقيمات لكل منها ميل مختلف في مستويات إحداثية مختلفة، وضمّن هذه المستقيمات، مستقيمات أفقية وعمودية، واطلب إلى الطلبة تقدير ميل كلًّا منها ومقطعها من المحورين، ومن ثم كتابة معادلاتها، كرّر العمل في مستويات غير منتظمة (أي مستويات تختلف وحدات المحور y فيها عن وحدات المحور x).

المستقيمان المتوازيان أو المتعامدان

مثال 5 يُبيّن كيفية كتابة معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بنقطة معلومة وموازٍ لمستقيم آخر.

مثال 6 يُبيّن كيفية كتابة معادلة مستقيم مار بنقطة وعمودي على مستقيم آخر.

مثالان إضافيان

5 اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الذي يمر بالنقطة (4, −2)، ويوازي المستقيم $y = \frac{1}{2}x - 7$.

$y = \frac{1}{2}x - 4$

6 اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (3, −2)، والعمودي على المستقيم $y = -5x + 1$.

$y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$

إرشادات للمعلم الجديد

خيارات في مثال 6، أشر إلى الطلبة أنهم بإمكانهم أن يبدأوا بصيغة ميل – مقطع بدلًا من صيغة نقطة – ميل.

مثال 5 معادلة مستقيم بمعلومية نقطة يمر بها وموازٍ لمستقيم آخر

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يمر بالنقطة (−2 , −1) ويوازي المستقيم $y = -3x - 2$.

ميل المستقيم $y = -3x - 2$ يساوي −3 ، وحيث إن المستقيم المطلوب يوازيه، فإن له الميل نفسه.

صيغة نقطة – ميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$(x_1, y_1) = (-1, -2), m = -3$	$y - (-2) = -3[x - (-1)]$
بالتبسيط	$y + 2 = -3(x + 1)$
خاصية التوزيع	$y + 2 = -3x - 3$
بطرح 2 من الطرفين	$y + 2 - 2 = -3x - 3 - 2$
بكتابة المعادلة بصيغة ميل – مقطع	$y = -3x - 5$

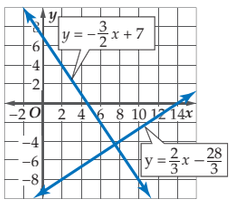
تأكد

5) اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المار بالنقطة (4,−1)، والموازي للمستقيم $y = \frac{1}{4}x + 7$. $y = \frac{1}{4}x - 2$

مثال 6 كتابة معادلة مستقيم بمعلومية نقطة يمر بها وعمودي على مستقيم آخر

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (6, −5)، والعمودي على المستقيم $y = -\frac{3}{2}x + 7$

ميل المستقيم المعلوم هو $-\frac{3}{2}$، وبما أن ميل المستقيم العمودي يساوي $\frac{-1}{\text{ميل المستقيم المعلوم}}$، فإن ميل المستقيم العمودي يساوي $\frac{2}{3}$



استعمل صيغة نقطة – ميل.

صيغة نقطة - ميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$(x_1, y_1) = (5, -6), m = \frac{2}{3}$	$y - (-6) = \frac{2}{3}(x - 5)$
خاصية التوزيع	$y + 6 = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$
بطرح 6 من كلا الطرفين وبالتبسيط	$y = \frac{2}{3}x - \frac{28}{3}$

التحقق مثّل المستقيمين بيانيًّا؛ للتحقق من صحة حلّك.

تأكد

6) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (3, 7)، والعمودي على المستقيم $y = \frac{3}{4}x - 5$. $y = \frac{4}{3}x + 11$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 31

اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

1) الميل 6− ويمر بالنقطة $(-2, 5)$ $y - 5 = -6(x + 2)$

2) الميل $\frac{5}{6}$ ويمر بالنقطة $(-2, -8)$ $y + 8 = \frac{5}{6}(x + 2)$

3) الميل $-\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(4, 3)$ $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4)$

مثال 2 صفحة 32

اكتب كل معادلة مما يأتي بالصيغة القياسية:

4) $y + 2 = \frac{7}{8}(x - 3)$ $7x - 8y = 37$

5) $y + 7 = -5(x + 3)$ $5x + y = -22$

6) $y + 2 = \frac{5}{3}(x + 6)$ $5x - 3y = -24$

مثال 3 صفحة 32

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة ميل – مقطع:

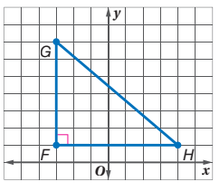
7) $y - 10 = 4(x + 6)$ $y = 4x + 34$

8) $y - 7 = -\frac{3}{4}(x + 5)$ $y = \frac{-3}{4}x + \frac{13}{4}$

9) $y - 9 = x + 4$ $y = x + 13$

مثال 4 صفحة 33

10) **هندسة:** استعمل المثلث القائم FGH للإجابة عمَّا يأتي:



a) اكتب معادلة المستقيم الّذي يحوي الضلع $\overline{GH}$ بصيغة ميل – نقطة. $y - 7 = -\frac{6}{7}(x + 3)$

b) اكتب معادلة المستقيم نفسه بالصيغة القياسية. $6x + 7y = 31$

المثالان 5, 6 صفحة 34

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ ممَّا يأتي:

11) يمر بالنقطة $(-9, -3)$، وعمودي على المستقيم $y = -\frac{5}{3}x - 8$ $y = 0.6x + 2.4$

12) يمر بالنقطة $(4, -10)$، وموازٍ للمستقيم $y = \frac{7}{8}x - 3$ انظر الهامش

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 31

اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ ممَّا يأتي:

13) $(5, 3), m = 7$ $y - 3 = 7(x - 5)$

14) $(2, -1), m = -3$ $y + 1 = -3(x - 2)$

15) $(-6, -3), m = -1$ $y + 3 = -1(x + 6)$

16) $(-7, 6), m = 0$ $y - 6 = 0$

17) $(-2, 11), m = \frac{4}{3}$ $y - 11 = \frac{4}{3}(x + 2)$

18) $(-7, -8), m = -\frac{3}{7}$ $y + 8 = \frac{-3}{7}(x + 7)$

19) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-9, -2)$ وميله $\frac{5}{7}$ – بصيغة نقطة – ميل. $y + 9 = -\frac{7}{5}(x + 2)$

20) اكتب معادلة المستقيم الأفقي المار بالنقطة $(0, -6)$ بصيغة نقطة – ميل. $y = 0$

مثال 2 صفحة 32

اكتب كل معادلة مما يأتي بالصيغة القياسية:

21) $y - 10 = 2(x - 8)$ $2x - y = 6$

22) $y - 6 = -3(x + 2)$ $3x + y = 0$

23) $y - 9 = -6(x + 9)$ $6x + y = -45$

24) $y + 4 = \frac{2}{3}(x + 7)$ $2x - 3y = -2$

25) $y + 7 = \frac{9}{10}(x + 3)$ $9x - 10y = 43$

26) $y + 7 = -\frac{3}{2}(x + 1)$ $3x + 2y = -17$

27) $2y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 2)$ $x + 6y = -7$

28) $4y - 5x = 3(4x - 2y + 1)$ $17x - 10y = -3$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	13-37، 54-57، 59-78
ضمن ضمن المتوسط	13-41 فردي، 38، 45-57، 59-78
فوق فوق المتوسط	38-74، (اختياري: 75-78)

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 12 –1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابة:

12) بما أن المستقيمين المتوازيين لهما الميل نفسه، فإن $m = \frac{7}{8}$

المعادلة بصيغة ميل – نقطة

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$(x_1, y_1) = (4, -10), m = \frac{7}{8}$

$y - (-10) = \frac{7}{8}(x - 4)$

الخاصية التوزيعية

$y + 10 = \frac{7}{8}x - \frac{7}{2}$

بطرح 10 من كلا الطرفين

$y = \frac{7}{8}x - \frac{27}{2}$

مثال 3
صفحة 32

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة ميل – مقطع:

29) $y - 6 = -2(x - 7)$ $y = -2x + 20$

30) $y - 11 = 3(x + 4)$ $y = 3x + 23$

31) $y + 5 = -6(x + 7)$ $y = -6x - 47$

32) $y - 1 = \frac{4}{5}(x + 5)$ $y = \frac{4}{5}x + 5$

33) $y + 2 = \frac{1}{6}(x - 4)$ $y = \frac{1}{6}x - \frac{8}{3}$

34) $y + 6 = -\frac{3}{4}(x + 8)$ $y = -\frac{3}{4}x - 12$

35) $y + 3 = -\frac{1}{3}(2x + 6)$ $y = -\frac{2}{3}x - 5$

36) $y + 4 = 3(3x + 3)$ $y = 9x + 5$

مثال 4
صفحة 33

37) تأجير أشرطة فيديو: ينقص عدد الأشرطة التي يتم تأجيرها في محل لأشرطة الفيديو بمعدل 5 أشرطة في الأسبوع، وفي الأسبوع السادس تم تأجير 4 أشرطة، ما عدد الأشرطة التي تم تأجيرها في الأسبوع الثاني؟ 24 شريطًا

38) وصلات كهربائية (كوابل): تقدم شركة كوابل عرضًا استثنائيًا بمبلغ 39.95 BD كل شهر بالإضافة إلى رسوم التركيب مرة واحدة، فإذا بلغت التكلفة الكلية للتركيب والخدمات مدة 6 أشهر 264.70 BD، فأجب عما يأتي:

a) اكتب معادلة التكلفة الكليّة y لأي عددٍ من الكوابل بعد x شهرًا بصيغة نقطة – ميل.

(**تلميح**: النقطة (6, 264.70) هي حل لهذه المعادلة) $y - 264.70 = 39.95(x - 6)$

b) اكتب المعادلة بصيغة ميل – مقطع. $y = 39.95x + 25$

c) ما قيمة رسوم التركيب؟ 25 BD

39) $11x + 12y = 58$

40) $5x - 2y = -11$

41) $14x - 10y = 91$

اكتب كل معادلة مما يأتي بالصيغة القياسية:

39) $y + 8 = -\frac{11}{12}(x - 14)$

40) $y - 3 = 2.5(x + 1)$

41) $y + 2.1 = 1.4(x - 5)$

المثالان 5, 6
صفحة 34

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

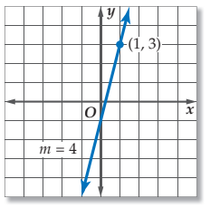
42) يمر بالنقطة (4, 2)، وعمودي على المستقيم $y = -2x + 3$ $y = \frac{1}{2}x$

43) يمر بالنقطة (−6, −6)، وموازٍ للمستقيم $y = \frac{4}{3}x + 8$ $y = \frac{4}{3}x + 2$

44) يمر بالنقطة (12, 0)، وموازٍ للمستقيم $y = -\frac{1}{2}x - 3$ $y = \frac{-1}{2}x + 6$

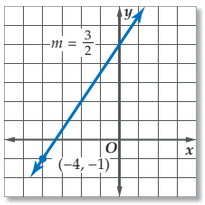
اكتب معادلة بصيغة نقطة– ميل للمستقيم الممثل بيانيًّا في كل شكل أدناه:

45)



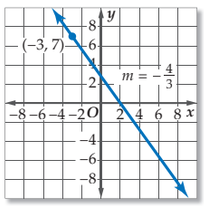
$y - 3 = 4(x - 1)$

46)



$y + 1 = \frac{3}{2}(x + 4)$

47)



$y - 7 = -\frac{4}{3}(x + 3)$

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة ميل – مقطع: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

48) $y + \frac{3}{5} = x - \frac{2}{5}$

49) $y - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(x - 4)$ $y = x - 1$

50) $y + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}(x + \frac{2}{5})$ $y = \frac{5}{6}x$

للتمرينين 51, 52 انظر الهامش

51) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (−2, 8) وميله $\frac{8}{5}$ بالصيغ الآتية: نقطة – ميل، وميل – مقطع، والصيغة القياسية.

52) اكتب معادلة المستقيم ℓ الّذي يمر بالنقطة (−9, 4) وميله $\frac{4}{7}$. بالصيغ الآتية: نقطة – ميل، وميل – مقطع، والصيغة القياسية.

إجابات:

51) صيغة نقطة – ميل:

$y - 8 = \frac{8}{5}(x + 2)$

صيغة ميل – مقطع:

$y = \frac{8}{5}x + \frac{56}{5}$

الصيغة القياسية:

$8x - 5y = -56$

52) صيغة نقطة – ميل:

$y - 4 = \frac{4}{7}(x + 9)$

صيغة ميل – مقطع:

$y = \frac{4}{7}x + \frac{64}{7}$

الصيغة القياسية:

$4x - 7y = -64$

الربط مع واقع الحياة

ينخفض الضغط الجوي وتقل كمية الأكسجين كلما ارتفعنا إلى أعلى، والتعرض للضغط الجوي المنخفض لفترات طويلة يسبّب أمراضًا معينة.

53) طقس: الضغط الجوي هو دالة خطية للارتفاع. فالضغط الجوي يساوي 598 ملمتر زئبق (mmHg) عند ارتفاع 1.8 km ، 577 ملمتر زئبق (mmHg) ،عند ارتفاع 2.1 km

a) اكتب صيغة الضغط الجوي في صورة دالة للارتفاع. $y = -70x + 724$

b) ما الارتفاع بالكيلومترات الّذي تكون عنده قيمة الضغط الجوي تساوي 657 mmHg؟ 0.96 km

مسائل مهارات التفكير العليا

54) أيها لا ينتمي؟ حدد المعادلة التي لا تنتمي إلى المعادلات الأخرى، وفسر إجابتك.

$y + 4 = 3(x + 1)$؛ لأن معادلة هذا المستقيم بصيغة ميل- مقطع ليست على صورة $y = 3x + 2$.

$y - 5 = 3(x - 1)$	$y + 1 = 3(x + 1)$	$y + 4 = 3(x + 1)$	$y - 8 = 3(x - 2)$

55) اكتشف الخطأ: يكتب كلٌّ من سعيد وعلاء معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-6, 4)$, $(-7, 3)$ بصيغة نقطة- ميل. أيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ليس أي منهما، فقد استعمل سعيد النقطة $(7, -3)$ بدلاً من $(-7, 3)$، واستعمل علاء التغيّر في x مقسومًا على التغير في y.

علاء	سعيد
$y - 4 = -\frac{9}{11}(x + 6)$	$y - 7 = -\frac{11}{9}(x + 3)$

56) مسألة مفتوحة: صف موقفًا من واقع الحياة يتضمن معدلًا ثابتًا للتغير، وقيمةً للمتغير y تقابل قيمة محددة للمتغير x، مثّل هذا الموقف باستعمال معادلة بصيغة نقطة – ميل، وبصيغة ميل – مقطع. انظر الهامش

57) تبرير: اكتب معادلة المستقيم الّذي يمر بالنقطتين $(-7, 3)$, $(8, -4)$، ثم أوجد ميله، وبيّن، أين يقطع المستقيم المحورين x, y ؟ انظر الهامش

58) تحدٍّ: اكتب معادلة المستقيم الّذي يمر بالنقطتين (r, s), (t, n) بصيغة نقطة – ميل.

$y - n = \frac{n - s}{t - r}(x - t)$

59) اكتب: وضِّح، كيف يمكنك استعمال صيغة الميل لكتابة معادلة مستقيم بصيغة نقطة- ميل. انظر الهامش

تنبيه!

اكتشف الخطأ: على الطلبة الانتباه إلى أن ميل المعادلات مختلف عند حل التمرين 55 .

إجابات:

56) أنفق علي BD 2 في مدينة ألعاب، وتضمن المبلغ رسم الدخول، ولعب 5 ألعاب سعر الواحدة منها BD 0.2، $y-2=0.2(x-5)$، $y=0.2x+1$

57) $y = -\frac{15}{7}x - \frac{4}{7}$ ،

$m = -\frac{15}{7}$ ،

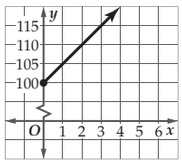
مقطع المحور y هو $\frac{-4}{7}$ ،

مقطع المحور x هو $-\frac{4}{15}$

59) اكتب المعادلة وذلك بكتابة الكسر الذي يُمثّل الميل (m) في الجزء الأيمن واتخاذ (x, y) نقطة أولى، و(x_1, y_1) نقطة ثانية، ثم اضرب طرفي المعادلة في $(x - x_1)$ الذي يُمثّل مقام الكسر إلى يسار إشارة المساواة.

تدريب على اختبار معياري

60) أيّ العبارات الآتية ترتبط بالشكل المعطى أكثر من غيرها؟ **B**



A لديك BD 100 ، تصرف منها BD 5 أسبوعيًّا.

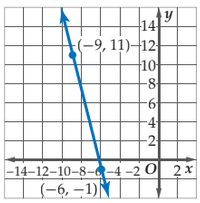
B لديك BD 100 ، توفر منها BD 5 أسبوعيًّا.

C تحتاج إلى BD 100 لشراء جهاز، وتوفر BD 5 أسبوعيًّا.

D تحتاج إلى BD 100 لشراء جهاز، وتصرف BD 5 أسبوعيًّا.

61) **إجابة قصيرة:** يعرض متجر هدية بقيمة BD 5 لكل من يشتري بمبلغ BD 75. كم يجب أن يشتري الزبون؛ ليحصل على هدية بقيمة BD 35 ؟ **BD 525**.

62) **اختيار من متعدد:** معادلة المستقيم المُمثّل بيانيًّا في الشكل المجاور هي: **A**



A $y = -4x - 25$

B $y = -\frac{2}{3}x - 5$

C $y = \frac{4}{5}x + \frac{29}{25}$

D $y = 6x + 35$

مراجعة تراكمية

اكتب معادلة المستقيم الّذي يمر بكل زوج من النقاط فيما يأتي: (الدرس 2-1)

63) $y = x - 2$ (4, 2), (−2, −4)

64) $y = 2x - 8$ (3, −2), (6, 4)

65) $y = -2x + 1$ (−1, 3), (2, −3)

66) $y = 4x - 10$ (2, −2), (3, 2)

67) $y = -2$ (7, −2), (−4, −2)

68) $y = 5$ (0, 5), (−3, 5)

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الذي يحقق الشروط في كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

69) الميل 2−، مقطع المحور y يساوي 6 $y = -2x + 6$

70) الميل 3 ، مقطع المحور y يساوي 5− $y = 3x - 5$

71) الميل $\frac{1}{2}$ − ، مقطع المحور y يساوي 3 $y = \frac{1}{2}x + 3$

72) الميل $\frac{3}{5}$ − ، مقطع المحور y يساوي 12 $y = -\frac{3}{5}x + 12$

73) الميل 0 ، مقطع المحور y يساوي 3 $y = 3$

74) الميل 1− ، مقطع المحور y يساوي 0 $y = -x$

مراجعة المتطلبات السابقة

مثِّل كل علاقة ممَّا يأتي بيانيًّا: انظر ملحق الإجابات

75) {(3, 8), (3, 7), (2, −9), (1, −9), (−5, −3)}

76) {(3, 4), (4, 3), (2, 2), (5, −4), (−4, 5)}

77) {(0, 2), (−5, 1), (0, 6), (−1, 9), (−4, −5)}

78) {(7, 6), (3, 4), (4, 5), (−2, 6), (−3, 2)}

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اكتب المعادلة $4x + 3y = 8$ على السبورة، واطلب إلى الطلبة إعادة كتابتها بصيغة ميل–مقطع، وتحديد الميل، ثم استنتاج العلاقة بين الميل وقيم كل من a, b عندما تكون معادلة المستقيم مكتوبة بالصورة القياسية $ax + by = c$.

$y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ ، الميل هو $-\frac{4}{3}$ ، وقيم كل من a, b والميل لها المقام نفسه.

تنبيه لحل تمرين

الورقة البيانية تتطلب التمارين 78–75 من الطلبة استعمال ورقة بيانية.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات أحضر صندوقين؛ أحدهما به بطاقات كتب عليها قيم ميل، والآخر به بطاقات كتب عليها أزواج مرتبة.

اطلب إلى الطلبة اختيار بطاقة من كلا الصندوقين، أو بطاقتي أزواج مرتبة واستعمالهما في كتابة معادلة المستقيم بالصيغ الثلاث ومناقشتها في الصف.

التقويم التكويني

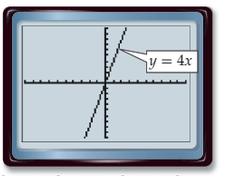
تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 3–2, 1–2 بإعطائهم اختبارًا قصيرًا 2 من مصادر الفصل 1.

التغيّر الطردي
Direct Variation

الهدف
أكتب معادلة تغيّر طردي.

معادلة التغيّر الطردي حالة خاصة من المعادلة الخطية، ويمكن كتابة معادلة التغيّر الطردي بالصيغة $y = kx$، حيث k هو ثابت التغيّر.

نلاحظ أن التّمثيل البياني للمعادلة $y = 4x$ هو مستقيم يمر بنقطة الأصل، ومعادلة التغيّر الطردي هي حالة خاصة من معادلة مكتوبة بصيغة ميل – مقطع، أو $y = mx + b$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

فإذا كانت $m = k$ و $b = 0$، فإن $y = kx$؛ لذا فالميل في هذه المعادلة هو ثابت التغيّر.

وللتعبير عن التغيّر الطردي نقول: إن y تتغيّر طرديًّا بتغيّر x، حيث تتغيّر قيمة y بمعدل ثابت بتغيّر قيمة x.

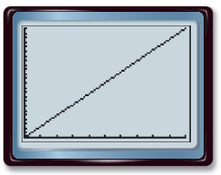
مفهوم أساسي — التغيّر الطردي

أضف إلى مطويتك

تتغيّر y طرديًّا مع x، إذا وُجد عدد ثابت k، $k \neq 0$، بحيث $y = kx$، ويُسمى العدد k ثابت التغيّر.

نشاط

ذهب: يُقاس عيار الذهب بالقيراط r، ويعتمد على نسبة الذهب الخالص p الموجودة فيه، فقطعة ذهب عيارها **14** قيراطًا تحوي 58.25% من الذهب الخالص.


[0, 1] scl: 0.1 by [0, 24] scl: 1

a) اكتب معادلة التغيّر الطردي الّذي يربط بين r و p، ثم مثّلها بيانيًّا.

استعمل الزوج المرتب (0.5825, 14)؛ لإيجاد ثابت التغيّر.

معادلة التغيّر الطردي	$y = kx$
$x = 0.5825, y = 14$	$14 = k(0.5825)$
بقسمة كل طرف على 0.5825	$24.03 \approx k$

معادلة التغيّر الطردي هي $r = 24.03p$.

b) أوجد العيار بالقيراط لخاتم من الذهب، نسبة الذهب الخالص فيه 75%

استعمل الآلة الحاسبة؛ لمعرفة عيار الذهب بالقيراط بالضغط على المفاتيح:

18.0225 ENTER 0.75 [CALC] 2nd

عيار خاتم نسبة الذهب الخالص فيه 75% هو 18 قيراطًا.

تمارين: للتمرينين 2–1 انظر ملحق الإجابات

1) غوص: عندما تغوص تحت الماء، فإن ضغط الماء على أذنك يتغيّر طرديًّا بتغيّر العمق، فإذا كنت تغوص على عمق 8 ft، فإن الضغط على أذنيك يكون $3.44\ \text{lb/in}^2$. اكتب معادلة التغيّر الطردي التي تربط بين الضغط والعمق، ومثّلها بيانيًّا، ثم أوجد الضغط على عمق 65 ft.

2) مثّل معادلات التغيّر الطردي بيانيًّا: $y = 2x, y = 4x, y = -2x, y = -4x$
ما أوجه الشبه والاختلاف بين التّمثيلات البيانية؟

1 التركيز

الهدف
- كتابة معادلة تغيّر طردي.

المواد اللازمة
- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس
حتى يفهم الطلبة التغيّر الطردي أعطهم مثالًا مألوفًا لديهم، على سبيل المثال: عندما يقود شخص ما سيارته بمعدل ثابت، المسافة تزيد بزيادة زمن القيادة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
وزِّع الطلبة في مجموعات بحيث تضم كل مجموعة طالبين متفاوتي القدرات. واطلب إليهم تمثيل الدالة $y = 4x$، بيانيًّا وناقش معهم التغيّر الطردي، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط وَ حَلّ تمرين 1.

تدريب اطلب إلى الطلبة أن يحلوا التمرين 2.

3 التقويم

التقويم التكويني
استعمل تمرين 2؛ لتقويم مدى فهم الطلبة؛ لتمثيل معادلات التغيّر الطردي.

من المحسوس إلى المجرد
اطلب إلى الطلبة أمثلة من واقع الحياة ويظهر فيها التغيّر الطردي، مثل: الضغط على الأذن يتغيّر طرديًّا مع العمق الّذي تسبح فيه.

التوسّع في المفهوم
اكتب المعادلة $y = kx^3$ على السبورة، اسأل الطلبة عن نوع التغيّر المُمثّل بهذه المعادلة اسألهم عما يحدث لقيم y عند مضاعفة قيمة x، وعند ثلاثة أمثال قيمة x، وعند تنصيفها إلخ في هذه المعادلة.

تتغيّر y تغيرًا طرديًّا مع مكعب x. عند مضاعفة قيمة x تضرب y بِـ 8، وعند ثلاثة أمثال قيمة x تضرب y بـ 27، وعند تنصيف قيمة x تقسم y على 8.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-1

كتابة المعادلات الخطية.

الدرس 4-1

استعمال شكل الانتشار ومعادلة التنبؤ.

نمذجة البيانات باستعمال خط الانحدار.

ما بعد الدرس 8-1

تكوين نماذج للمعلومات، واستعمال هذه النماذج؛ لاتخاذ القرار والحكم بدقة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- حوالي كم شخص زار المصيف في عام 2000؟ 21000
- حوالي كم شخص زار المصيف في عام 2005؟ 17000
- ما القيمة المقبولة التقريبية لعدد الأشخاص الّذين سيقومون بزيارة المصيف عام 2008؟ 16000 أو 17000

استقصاء العلاقات باستعمال شكل الانتشار

مثال 1 يُبيّن كيفية تحديد هل البيانات المُمّثلة بيانيًّا لمسألة من واقع الحياة تظهر ارتباطًا موجبًا، أو سالبًا، أو لا تظهر أي ارتباط.

شكل الانتشار وخط الانحدار

Scatter Plots and Lines of Regression

فيما سبق

درست كتابة المعادلات الخطية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أستعمل شكل الانتشار، ومعادلة التنبؤ.
- أمثل البيانات باستعمال خط الانحدار.

المفردات الأساسية

بيانات ذات متغيرين
bivarate data

شكل الانتشار
scatter plot

ارتباط موجب
positive correlation

ارتباط سالب
negative correlation

لايوجد ارتباط
no correlation

الخط المطابق
line of fit

معادلة التنبؤ
prediction equation

معامل الارتباط
correlation coefficient

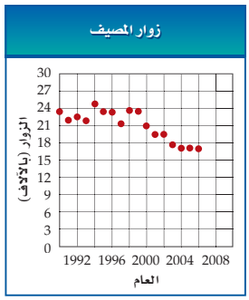
الخط المطابق الأمثل
Line of Bestfit

خط الانحدار
regression line

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

شكل الانتشار المجاور يُبيّن عدد زوار أحد المصايف في عدة أعوام. ويمكن استعمال الدالة الخطية: $f(x) = -0.43x + 24.6$، لتمثيل تلك البيانات.



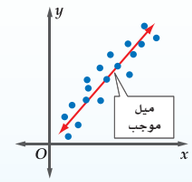
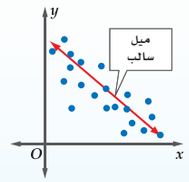
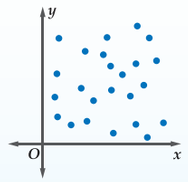
شكل الانتشار ومعادلة التنبؤ تسمى البيانات لمتغيرين كالسنة، وعدد الزوار **البيانات ذات المتغيرين**. وتُمثّل مجموعة البيانات ذات المتغيرين بيانيًّا في صورة أزواج مرتبة في المستوى الإحداثي، ويُسمَّى تمثيلها البياني **شكل الانتشار**. ونستطيع من خلال شكل الانتشار أن نعرف ما إذا كان هناك ارتباط بين البيانات، وما إذا كان **الارتباط موجبًا** أو كان **الارتباط سالبًا**، أو **لا يوجد ارتباط**. ففي الارتباط الموجب تزداد قيم y بزيادة قيم x، وتنقص قيم y بنقصان قيم x. وفي الارتباط السالب تقل قيم y بزيادة قيم x. أما إذا لم تتحقق أيٌّ من الحالتين السابقتين للمتغيرين x و y، فإنه لا يوجد ارتباط.

ويمكن وصف الارتباط بأنه قوي أو ضعيف، بالنظر إلى تبعثر البيانات.

فالبيانات التي يمكن تمثيلها بنقاط قريبة جدًّا من خطٍّ مستقيمٍ، يكون ارتباط المتغيرات فيها قويًّا، وبعكس ذلك يكون الارتباط ضعيفًا.

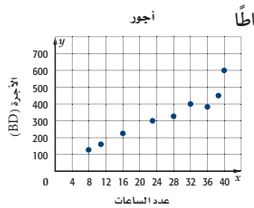
مفهوم أساسي شكل الانتشار

أضف إلى مطويتك

الارتباط الموجب	الارتباط السالب	لا يوجد ارتباط
		
ارتباط موجب قوي	**ارتباط سالب ضعيف**	**لا يوجد ارتباط**
ميل المستقيم موجب، والنقاط قريبة جدًا من الخط المستقيم.	ميل المستقيم سالب، والنقاط ليست قريبةً من الخط المستقيم.	لا يوجد نمط واضح للتزايد، أو للتناقص في البيانات المعطاة.

مثال 1 من واقع الحياة **تحديد الارتباط**

أجور: حدّد ما إذا كان شكل الانتشار المجاور يبيّن ارتباطًا موجبًا، أو ارتباطًا سالبًا، أو لايوجد ارتباط بين البيانات. وإذا وجدت ارتباطًا موجبًا أو سالبًا، ففسّر معناه.



شكل الانتشار المجاور يُبيّن ارتباطًا موجبًا، فكلما زاد عدد ساعات العمل، كلَّما زادت الأجرة.

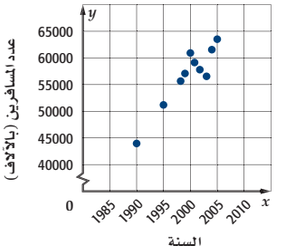
مصادر الدرس 4-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (44)	• تنويع التعليم، ص (44)	• تنويع التعليم، ص (44, 46)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الجداول الالكترونية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات

تأكد

1) شكل الانتشار المجاور يُبيّن عدد المسافرين على أحد خطوط الطيران خلال عدة سنوات. حدّد ما إذا كان الارتباط المُبيّن في شكل الانتشار موجبًا، أو سالبًا، أو أنه لا يوجد ارتباط. فسّر معناه.

موجب؛ يزداد عد المسافرين بمرور السنوات



إذا كانت جميع النقاط المُمثّلة للبيانات قريبة من خطٍّ مستقيم، فإن هذا المستقيم يُسمى **الخط المطابق** للبيانات. ويطلق على معادلة هذا المستقيم **معادلة التنبؤ**؛ لأنه يمكنك استعمالها للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا عُلم الآخر. ولإيجاد الخط المطابق ومعادلة التنبؤ لمجموعة بياناتٍ، اختر نقطتين تعتقد أنهما يُمثّلان البيانات بشكل جيد، وأوجد معادلة التنبؤ، وهذا يتبع الحكم الشخصي على البيانات؛ لذا فإن الخط المستقيم الذي رسمته، والمعادلة التي كوّنتها قد يختلفان من شخص إلى آخر.

إرشادات للدراسة

اختيار المتغير المستقل لتكن x ممثلة لعدد السنوات، حيث إن السنة الأولى في بعض الأحيان تبسط الحسابات المستعملة؛ لإيجاد دالة لنمذجة البيانات.

مفهوم أساسي

استعمال الدالة الخطية لتمثيل البيانات

أضف إلى مطويتك

خطوة 1 ارسم شكل الانتشار، وحدّد ما إذا كانت هناك علاقة بين البيانات.

خطوة 2 ارسم مستقيمًا يكون أقرب ما يمكن من معظم النقاط.

خطوة 3 استعمل نقطتين على الخط المطابق؛ لكتابة معادلته.

خطوة 4 استعمل معادلة الخط المطابق؛ لإيجاد التنبؤات.

مثال 2 من واقع الحياة

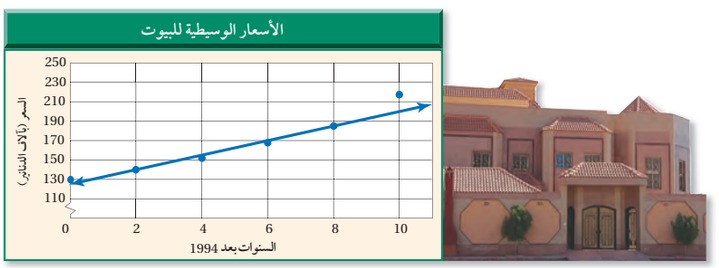
إيجاد معادلة التنبؤ واستعمالها

إسكان: يُمثّل الجدول أدناه الأسعار الوسيطية لبيع البيوت الكبيرة الجديدة في بعض السنوات.

السنة	1994	1996	1998	2000	2002	2004
السعر بالآلاف الدنانير	130	140	152.5	169	187.6	219.6

a) ارسم شكل الانتشار والخط المطابق للبيانات، ثم صِفْ نوع الارتباط.

مثّل البيانات في صورة أزواج مرتبة، حيث يُمثّل المحور الأفقي عدد السنوات ابتداءً من سنة 1994، ويمثّل المحور الرأسي السعر. في هذا التّمثيل تبدو النقطتان (2, 140) و (8, 187.6) كأنهما تمثلان البيانات بشكل مناسب. ارسم خطًّا مستقيمًا يمر بهاتين النقطتين، ولاحظ أنه يمر بجميع النقاط باستثناء النقطة (10, 219.6). ولذلك يكون الارتباط موجبًا قويًّا.



b) أوجد معادلة التنبؤ، وبيّن إلامَ يُشير كلٌّ من الميل ومقطع المحور y.

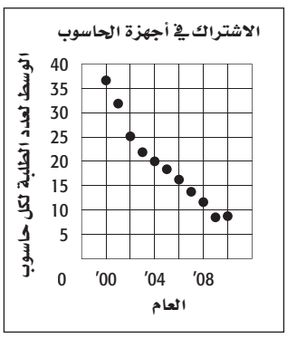
أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (8, 187.6) ، (2, 140).

إرشادات للدراسة

القيم المتطرفة إذا كان شكل الانتشار يحوي نقاطًا خارجة بعيدة عن الخط المطابق، فتحقق من بياناتك قبل الحكم على النقاط بأنها متطرفة، فربما تكون قد أخطأت في تعيين، أو في تسجيل النقاط.

مثال إضافي

1 **تقنية:** يُبيّن شكل الانتشار أدناه الوسط لعدد الطلبة لكل جهاز حاسوب في إحدى المدارس، حدّد ما إذا كان شكل الانتشار يُبيّن ارتباطًا موجبًا، أو سالبًا، أو لا يوجد ارتباط. فسّر معناه.



ارتباط سالب، إجابة ممكنة: يزداد عدد أجهزة الحاسوب في المدرسة كل سنة، فيقل عدد الطلبة المشتركين في الجهاز الواحد.

إرشادات للمعلم الجديد

شكل الانتشار أكّد على الطلبة أن النقط يجب أن تتجمع بطريقة خطية تقريبًا؛ لنحدد الارتباط.

شكل الانتشار ومعادلة التنبؤ

مثال 2 يُبيّن كيفية رسم شكل الانتشار لجدول بيانات، ورسم الخط المطابق، وتفسير هذا الرسم.

صيغة الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
بالتعويض	$= \frac{187.6 - 140}{8 - 2}$
بالتبسيط	≈ 7.93

صيغة نقطة - ميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بالتعويض	$y - 140 = 7.93(x - 2)$
خاصية التوزيع	$y - 140 = 7.93x - 15.86$
بالتبسيط	$y = 7.93x + 124.14$

إحدى معادلات التنبؤ هي $y = 7.93x + 124.14$. ويشير الميل إلى أن السعر الوسيط يتزايد بمعدل BD 7930 في السنة. وأمّا مقطع المحور y، فيشير إلى أنه وفقًا لاتجاه بقية البيانات، فإن القيمة الوسيطية للأسعار في سنة 1994 كان ينبغي أن تكون نحو BD 124140.

c) **تنبأ بقيمة وسيط أسعار البيوت عام 2014.**

يأتي عام 2014 بعد 20 سنة من عام 1994، لذلك نستعمل معادلة التنبؤ؛ لإيجاد قيمة y عندما $x = 20$

معادلة التنبؤ	$y = 7.93\,x + 124.14$
$x = 20$	$= 7.93\,(20) + 124.14$
بالتبسيط	$= 282.74$

تنبأ النموذج بأن السعر الوسيطي لعام 2014 سيكون نحو BD 282740.

d) **إلى أي مدى يبدو هذا التنبؤ دقيقًا؟**

إن الخط المطابق يمرُّ بجميع البيانات باستثناء القيم المتطرفة؛ لذا يمكن القول: إن التنبؤ دقيق بدرجة عالية.

إرشادات للدراسة

التنبؤات

عندما تتنبأ بقيمة لـ x أكبر أو أصغر من أيٍّ من البيانات، فإن الإجراءات تُعرف بأنها تنبؤ خارجي. وعندما تتنبأ بقيمةٍ لـ x تقع بين أقل قيمة وأكبر قيمة في البيانات، فإن الإجراءات تُعرف بأنها تنبؤ داخلي.

تأكد

2) **مزارع:** يُبيّن الجدول أدناه الأسعار الوسيطية لبيع المزارع خلال سنوات عدة. ارسم شكل الانتشار والخط المطابق للبيانات، ثم أوجد معادلة التنبؤ، وتنبأ بقيمة وسيط أسعار عام 2014: انظر الهامش

السنة	1994	1996	1998	2000	2002	2004
السعر (بالآف الدنانير)	154.5	166.4	181.9	207.0	228.7	273.5

الربط مع واقع الحياة

في مدينة ملاهي في نيوجيرسي حطمت الأفعوانية الأرقام القياسية في العالم في الطول على ثلاثة صُعُد، حيث يبلغ طولها 456 ft، وفي السرعة حيث تبلغ سرعتها 128 mi /h، وفي الارتفاع حيث يبلغ أقصى ارتفاع لها 418 ft.

المصدر:
Ultimate Roller Coaster

مثال 3 من واقع الحياة

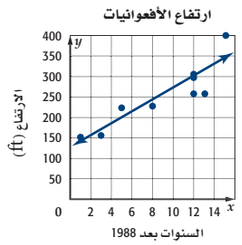
معادلة الخط المطابق

الأفعوانية: يبيّن الجدول أدناه أقصى ارتفاع لتسع أفعوانيات بالولايات المتحدة الأمريكية، وعدد السنوات بعد عام 1988 م، حيث تم افتتاحهم. عيّن المتغير المستقل والتابع. وهل يوجد ارتباط بين البيانات؟ إذا كانت الإجابة نعم، ففسّر معناه، ثم تنبأ بارتفاع أفعوانية يتم إنشاؤها بعد عام 1988، بـ 25 سنة.

عدد السنوات بعد 1988	1	3	5	8	12	12	12	13	15
الارتفاع (ft)	151	155	225	230	306	300	255	255	400

خطوة 1 ارسم شكل انتشار.

المتغير المستقل x هو السنوات، والمتغير التابع y هو الارتفاع. كلما زاد عدد السنوات، زاد الارتفاع فهناك ارتباط موجب بين المتغيرين.



خطوة 2 ارسم الخط المطابق.

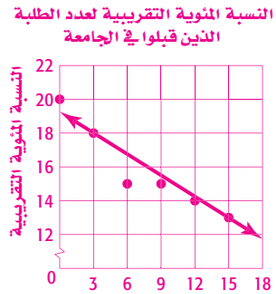
لا يوجد مستقيم واحد يمر بجميع النقاط. ارسم مستقيمًا يكون قريبًا من معظم النقاط، فيكون هو الخط المطابق كما هو مُبيّن في الشكل المجاور.

مثال إضافي

2 **تعليم:** يُمثّل الجدول أدناه النسبة المئوية التقريبية لعدد طلبة الثانوية العامة المقبولين في إحدى الجامعات من إجمالي عدد الطلبة الّذين تقدموا بطلبات التحاق إليها منذ عام 1985.

السنة	النسبة المئوية
1985	20
1988	18
1991	15
1994	15
1997	14
2000	13

a) ارسم شكل الانتشار، والخط المطابق للبيانات، ثم صِفْ نوع الارتباط.



البيانات تُبيّن أن الارتباط سالبًا قوي.

b) أوجد معادلة التنبؤ، وبيّن إلامَ يشير كل من الميل ومقطع المحور y. باستعمال النقطتين (15,13)، (3,18) نحصل على معادلة التنبؤ:

$y = \frac{5}{12}x + 19.25$،

حيث يشير الميل إلى أن النسبة تنخفض بمعدل 42% تقريبًا في السنة، ومقطع المحور y يشير إلى أن النسبة في عام 1985 كانت 19% تقريبًا.

c) تنبأ بنسبة الطلبة المقبولين في الجامعة في عام 2010. 8.83% تقريبًا

d) إلى أي مدى يبدو هذا التنبؤ دقيقًا؟

الخط المطابق لا يمر بمعظم البيانات. لذا، يمكن القول: إن التنبؤ ليس دقيقًا بدرجة عالية.

التركيز في المحتوى الرياضي

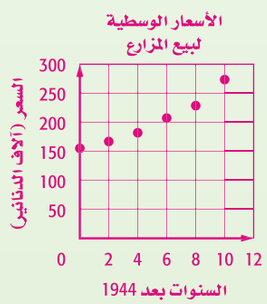
الارتباط تحدّد إشارة ميل الخط المطابق في شكل الانتشار نوع الارتباط، فالإشارة الموجبة للميل تشير إلى ارتباط موجب، بينما تشير الإشارة السالبة إلى ارتباط سالب.

إرشادات للمعلم الجديد

معادلة التنبؤ في **مثال 2** ناقش حالات مختلفة لمعادلات التنبؤ، وقرر أيها الأفضل؟ ولماذا؟

إجابة (تأكد):

2)



معادلة التنبؤ هي: $y = 11.7\,x + 135.1$، قيمة وسيط أسعار عام 2014 هي BD 23698.9

خطوة 3 أوجد معادلة بصيغة ميل – مقطع للخط المطابق باستعمال النقطتين (150 , 2)، (300 , 12)، فتكون هي معادلة التنبؤ.

صيغة الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
بالتعويض	$= \frac{300 - 150}{12 - 2}$
بالتبسيط	$= \frac{150}{10} = 15$

استعمل $m = 15$، وإحدى النقطتين؛ لكتابة معادلة التنبؤ.

صيغة نقطة - ميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بالتعويض	$y - 150 = 15(x - 2)$
خاصية التوزيع	$= 15x - 30$
بالتبسيط	$y = 15x + 120$

الميل يساوي 15؛ مما يعني أن الارتفاع يزداد بمعدل 15 ft كل سنة، وللتنبؤ بارتفاع أفعوانية يتم إنشاؤها بعد 25 سنة من عام 1988، عوِّض بـ 25 بدلًا من x في معادلة التنبؤ، الارتفاع هو $15(25) + 120 = 495$ ft.

تأكد

3) أسطوانات مدمجة: يُبيّن الجدول أدناه مبيعات الأسطوانات المدمجة خلال عدة سنوات بمئات الدنانير. عيِّن المتغير المستقل، والمتغير التابع. وهل يوجد ارتباط بين البيانات؟ إذا كانت الإجابة نعم، ففسر معناها، ثم تنبأ بمبيعات الأسطوانات المدمجة عام 2015. انظر الهامش

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005
المبيعات	13215	12909	12044	11233	11447	10520

معامل الارتباط **معامل الارتباط** هو مقياس عددي يُبيّن ما إذا كانت هناك علاقة بين البيانات (المتغيرات) أو لا، كما يدل على مدى قوة هذا الارتباط، ويُرمز له بالرمز r، حيث $-1 \le r \le 1$. إذا كانت قيمة r قريبةً من -1، فسيكون هناك ارتباط سالب قوي بين البيانات، وإذا كانت قيمة r قريبةً من 1، فسيكون هناك ارتباط موجب قوي، وإذا كانت قيمة r قريبة من 0، فسيكون هناك ارتباط ضعيف. أما إذا كانت $r = 0$، فلن يكون هناك ارتباط بين البيانات.

الخط المطابق الأمثل وخط الانحدار درست كيف ترسم الخط المطابق للبيانات، وكيف تجد معادلته. معظم الآلات الحاسبة تستعمل عمليات حسابية معقدة؛ لإيجاد أدق معادلة للخط المطابق للبيانات، وهي معادلة **الخط المطابق الأمثل للبيانات**.

خط الانحدار هو الخط المطابق الأمثل للبيانات، حيث تكون المسافة الرأسية بين أي نقطة في شكل الانتشار وذلك الخط أقل ما يمكن.

مثال 4 من واقع الحياة **الخط المطابق الأمثل**

مبيعات: يُبيّن الجدول أدناه دخل إحدى الشركات على مدى سبعة أعوام. استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لكتابة معادلة الخط المطابق الأمثل للبيانات.

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
الدخل (مليون دينار)	7.66	8.41	9.52	9.49	9.54	8.99	9.49

تأكد من أن إعدادات الآلة الحاسبة صحيحة قبل أن تبدأ، ويمكنك إيجاد هذه الإعدادات في قائمة CATALOG. اضغط على D، ثم اسحب إلى أسفل واضغط Diagnosticon، ثم اضغط ENTER.

خطوة 1 أدخل البيانات بالضغط على STAT واختيار خيار Edit، ليكن العام 2000 ممثلًا للصفر. أدخل السنوات من عام 2000 في قائمة List 1 (L1)، وهذه القيم تمثّل قيم x. أدخل مقدار الدخل (مليون دينار) في قائمة List 2 (L2) وهي تمثّل قيم y.

استعمال معادلة الخط المطابق

مثال 3 يُبيّن كيفية رسم شكل الانتشار لمسألة من واقع الحياة، ورسم الخط المطابق، ثم كتابة معادلته بصيغة ميل – مقطع.

التقويم التكويني

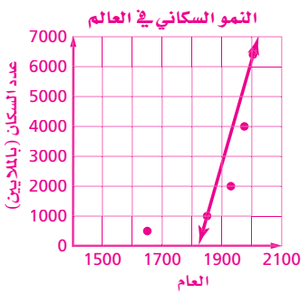
استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

3 سكان: يُبيّن الجدول أدناه النمو السكاني في العالم. منذ عام 1650، عيّن المتغير المستقل والتابع، وهل هناك ارتباط بين البيانات؟ إذا كانت الإجابة نعم، ففسر معناه، ثم تنبأ بعدد السكان عام 2025.

العام	عدد السكان بالملايين
1650	500
1850	1000
1930	2000
1975	4000
2004	6400

المتغير المستقل هو العام، والمتغير التابع هو عدد السكان يُبيّن شكل الانتشار أدناه أنه كلما زاد عدد السنوات، زاد عدد السكان. لذا، فهناك ارتباط موجب بين المتغيرين.



إجابة ممكنة: معادلة التنبؤ هي: $y = 35.1x - 63935$
عدد سكان العالم عام 2025 هو 7142.5 مليونًا.

إجابة (تأكد):

3) المتغير المستقل هو السنة، المتغير التابع هو المبيعات، يوجد ارتباط سالب بين المتغيرين، فكلما زاد عدد السنوات، قلت المبيعات.

إجابة ممكنة: معادلة التنبؤ باستعمال النقطتين (2005,10520) و (2000,13215) هي:
$y = -593x + 1199485$
وبالتعويض عن x بـ 2015، المبيعات عام 2015 هي:
$-593\ (2015) + 1199485 = 4590$

خطوة 2 أوجد معادلة الخط المطابق الأمثل (خط الانحدار) بالضغط على STAT واختيار خيار CALC. اسحب إلى أسفل لـ LinReg $(ax+b)$ ثم اضغط على ENTER.

خطوة 3 اكتب معادلة الخط المطابق الأمثل (خط الانحدار) بتقريب قيمة كلٍّ من a, b، وبما أن الصيغة المختارة هي $ax + b$، لذلك فالمعادلة هي $y = 0.24x + 8.3$، ومعامل الارتباط 0.7064 تقريبًا، مما يعني أن المعادلة مثلت البيانات بشكل ملائم.

تأكد

4) رياضة: باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، أوجد معادلة الخط المطابق الأمثل للبيانات الواردة في الجدول أدناه، والذي يبيّن عدد الأهداف المسجلة من قبل فريق رياضي، وأوجد معامل الارتباط، وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرة آلاف، حيث x تمثّل عدد السنوات منذ عام 2003. انظر الهامش

السنة	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
الأهداف	30	23	41	35	31	43	33	45

يساعد خط الانحدار الباحثين على معرفة نزعة البيانات وعمل التنبؤات، حيث يمكن التنبؤ بقيمة y اعتمادًا على قيمة x . وكلما اقتربت النقاط من المستقيم، كلّما كان التنبؤ أدق.

مثال 5 من واقع الحياة **خط الانحدار**

تُجري شركات التأمين الصحي دراسات إحصائية على أعمار المشتركين تسمى دراسات اكتوارية، وتعتمد على عوامل عديدة منها الرعاية الصحية، وانتشار الأوبئة، ومعدلات الأعمار السابقة، والجدول أدناه يُبيّن العمر المتوقّع للمشتركين بحسب سنة ميلادهم.

سنة الميلاد	1983	1990	1993	1997	2000	2003
العمر المتوقع (بالسنوات)	74.6	75.4	75.5	76.5	76.9	77.5

استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل شكل الانتشار للبيانات السابقة، ثم أوجد معادلة خط الانحدار، ومثّلها بيانيًّا، واستعمل المعادلة للتنبؤ بمعدل الأعمار عام 2025.

خطوة 1 مثّل شكل الانتشار بيانيًّا.

- أدخل سنة الميلاد في L1، والعمر المتوقّع في L2 بالضغط على المفاتيح:

  STAT ENTER 1983 ENTER

  1990 ENTER 1993 ENTER ...

- اضبط الشاشة؛ لتلائم البيانات بالضغط على المفاتيح:

  WINDOW 1980 ENTER 2005 ENTER 5

  ENTER 70 ENTER 90 ENTER 2

- استعمل STAT PLOT؛ لتمثيل شكل الانتشار بالضغط على المفاتيح:

  2nd [STAT PLOT] ENTER ENTER Graph

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة.

خط الانحدار

مثال 4 يُبيّن كيفية استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لإيجاد معادلة الخط المطابق الأمثل للبيانات.

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لإيجاد معادلة خط الانحدار، وعمل التنبؤات.

مثال إضافي

4 أجور: يبين الجدول أدناه الأجرة التي يتقاضاها جهاد في الساعة الواحدة خلال الأعوام 2001 – 2007.

استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لإيجاد معادلة الخط المطابق الأمثل للبيانات، وأوجد معامل الارتباط ، ثم قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة الآلف.

السنة	الأجرة (BD)
2001	10
2002	10.5
2003	11
2004	13
2005	15
2006	15.75
2007	16.50

$y = 1.21\ x + 8.25,\ 0.9801$

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير في **مثال 5** شجع الطلبة على التفكير في هذا النوع من المسائل، وناقشهم كيف يمكن أن يكون هذا النمط مفيدًا في مجالات أخرى مثل الهندسة، التسويق، والإحصاء.

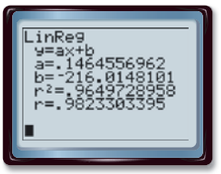
التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية؛ لتصوير فيلم فيديو يُبيّن كيفية إيجاد معادلة خط الانحدار لمجموعة من البيانات، وشارك في مشاهدة فيديو كل مجموعة مع الصف بأكمله.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمين اللفظيين / البصريين / الفضائيين المجلات والصحف الإخبارية يمكن أن تكون مصدرًا جيدًا لأمثلة من واقع الحياة في الرياضيات، بالأخص ما يتعلق بالجداول والتمثيلات البيانية التي تصف الأمور المهمة، بعض دور النشر تعرض بعض المصادر المرتبطة بواقع الحياة للمعلمين. اطلب إلى الطلبة أن يحضروا جدولًا من مجلة أو صحيفة؛ ليناقشوها مع الطلبة الآخرين.

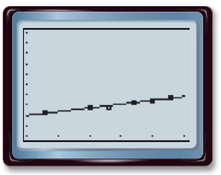


خطوة 2 أوجد معادلة خط الانحدار.

- أوجد معادلة خط الانحدار باختيار **LinReg** $(ax + b)$ من قائمة **STAT CALC** بالضغط على المفاتيح:

STAT ▶ 4 ENTER

معادلة خط الانحدار هي $y = 0.15x - 216.01$ تقريبًا.
يُشير الميل إلى أن معدل الأعمار يتزايد بمقدار 0.15 كل سنة، معامل الارتباط 0.98 تقريبًا، وهو قريب جدًّا من 1. أيْ أنّ خط الانحدار يلائم البيانات بشكل جيد.

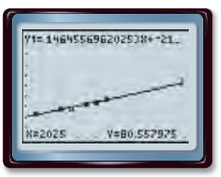


خطوة 3 مثّل معادلة خط الانحدار بيانيًّا.

- انسخ المعادلة إلى قائمة Y = ، ثم مثّلها بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

Y= VARS 5 ▶ ▶ 1 Graph

لاحظ أن خط الانحدار قريب من نقاط البيانات جميعها، وبذلك يُشير معامل الارتباط إلى أن خط الانحدار يُمثّل البيانات تمثيلًا جيدًا.



خطوة 4 التنبؤ باستعمال المعادلة.

- أوجد y عندما تكون $x = 2025$. استعمل **VALUE** من قائمة **CALC**. اضبط حجم الشاشة حتى يلائم قيمة x عام 2025.

اضغط على المفاتيح: 2nd [CALC] 1 2025 ENTER

اعتمادًا على المعادلة، فإن معدل الأعمار سنة 2025 سيكون 80.6 عامًا تقريبًا.

تأكد

5) كتب: الجدول المجاور يُبيّن نسبة مبيعات كتاب الخيول من بين مبيعات الكتب الأخرى في مكتبةٍ ما في الفترة الزمنية بين 2004 – 1995. استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل شكل انتشار البيانات، واكتب معادلة خط الانحدار، ثم مثّلها بيانيًّا، واستعمل المعادلة للتنبؤ بنسبة المبيعات في عام 2015. انظر الهامش

مبيعات كتاب الخيول

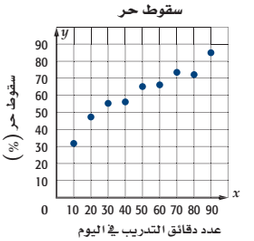
السنة	نسبة المبيعات
1995	52
1996	49.9
1997	51.8
1998	50.8
1999	44.8
2000	42.4
2001	42.5
2002	36.8
2003	33.2
2004	32.5

تأكد من فهمك

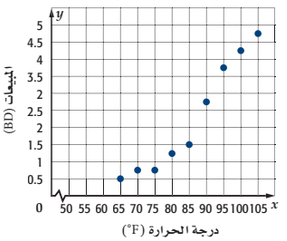
مثال 1
صفحة 40

حدّد ما إذا كان كل شكل انتشار مما يأتي يُبيِّن ارتباطًا موجبًا، أو ارتباطًا سالبًا، أو لا يوجد ارتباط بين البيانات، وإذا وجدت ارتباطًا موجبًا، أو ارتباطًا سالبًا، ففسِّر معناه.

1)



2)



1) ارتباط موجب، كلما زاد عدد دقائق التدريب، زادت النسبة للسقوط الحر.
2) ارتباط موجب، كلما زادت درجة الحرارة، زادت مبيعات عصير الليمون.

تنويع الواجبات المنزلية

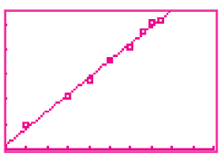
المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	14-7، 15، 16، 18-28
ضمن المتوسط	28-7
فوق المتوسط	25-10، (اختياري: 28-26)

مثال إضافي

5 دخل: الجدول أدناه يبين الوسط للدخل السنوي بالدينار لإحدى العائلات خلال 2002–1970.

السنة	الدخل (BD)
1970	9867
1980	21023
1985	27735
1990	35353
1995	40611
1998	46737
2000	50732
2002	51680

استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل شكل الانتشار للبيانات في الجدول أعلاه، ثم أوجد معادلة خط الانحدار، ومثّلها بيانيًّا، واستعمل المعادلة للتنبؤ بوسط الدخل عام 2015.



[1965, 2015] scl: 5 by [0, 55,000] scl: 10,000

$y = 1349.87x - 2650768.34$
وسط الدخل عام 2015 سيكون BD 69220 تقريبًا.

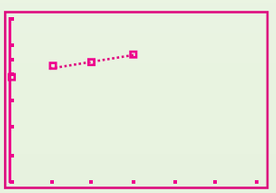
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 6 - 1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابة (تأكد):

5)



[1, 6] scl:1by [0, 55,000] scl:10,000

$y = -2.4x + 544$

x عدد السنوات بعد 1995، 6.6%

مثال 2 صفحة 41

3 محيطات: يُمثّل الجدول أدناه درجة حرارة المحيط على أعماق مختلفة. للفروع a–d انظر الهامش

العمق (m)	0	300	500	1000	2000	2500
درجة الحرارة (°C)	22	20	13	7	6	?

a) ارسم شكل انتشار البيانات.

b) ارسم الخط المطابق، وصفْ نوع الارتباط.

c) استعمل زوجين مرتَّبين؛ لكتابة معادلة التنبؤ.

d) استعمل معادلة التنبؤ الخاصة بك؛ للتنبؤ بالقيمة المفقودة.

مثال 3 صفحة 28

4 زواج: يُبيّن الجدول المجاور الأعمار الوسيطية للنساء عند زواجهن أول مرة.

السنة	العمر
1996	18.8
1997	19.0
1998	19.0
1999	19.1
2000	19.1
2001	19.1
2002	19.3
2003	19.3
2005	19.3
2006	19.9

المصدر: U.S. Bureau of Census

a) ارسم شكل الانتشار، وعيّن المتغير المستقل والتابع، وحدد نوع العلاقة بين البيانات إن وجدت. للفروع a–c انظر الهامش

b) ارسم الخط المطابق.

c) اكتب معادلة الخط المطابق بصيغة ميل – مقطع .

مثال 4 صفحة 43

5 فخار: يحتفظ أحد المعاهد الفنية بعدد من الأعمال الفنية الفخارية للطلبة الذين يستعملون مشغل الفخاريات كل سنة. كما في الجدول أدناه استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لكتابة معادلة الخط المطابق للبيانات، وأوجد معامل الارتباط. $y = 1.18x + 11,\ 0.7181$

عدد الأعمال الفنية							
السنة	1	2	3	4	5	6	7
عدد الأعمال	10	15	18	15	13	19	20

مثال 5 صفحة 44

6 كهرباء: يُمثّل الجدول المجاور وحدات الطاقة الكهربائية المستهلكة بالمليون كيلو وات لكل ساعة بالقطاعات: الزراعي والصناعي والتجاري، والمنزلي في مملكة البحرين في عدة أعوام استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل شكل انتشار البيانات، ثم أوجد معادلة خط الانحدار، ومثّلها بيانيًّا، ثم استعمل المعادلة للتنبؤ بوحدات الطاقة الكهربائية المستهلكة عام 2012. انظر الهامش

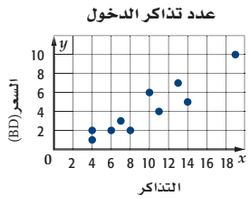
العام	وحدات الطاقة الكهربائية المستهلكة بالمليون (kw/h)
2003	7170.93
2004	7521.42
2005	7897.51
2006	9100.88

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 40

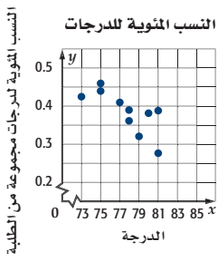
حدّد ما إذا كان كل شكل انتشار مما يأتي يبيّن ارتباطًا موجبًا، أو ارتباطًا سالبًا، أو لا يوجد ارتباط بين البيانات، وإذا وجدت ارتباطًا موجبًا، أو ارتباطًا سالبًا، ففسِّر معناه.

7)



7) ارتباط موجب، كلما ازداد السعر، ازدادت مبيعات التذاكر.

8



انظر الهامش

تنويع التعليم

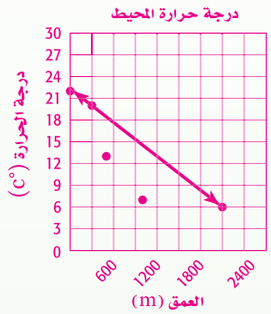
فوق

توسّع تحدَّ الطلبة للبحث عن كيفية حساب معامل الارتباط، وما هي العمليات الرياضية المستعملة في هذه الحسابات؟ ولماذا يقيس مدى ملاءمة خط الانحدار للبيانات؟

إجابات:

3

(a,b



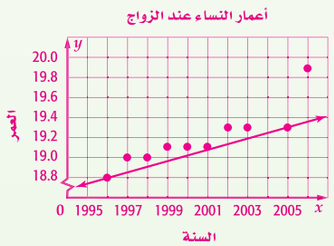
ارتباط سالب ضعيف

c) إجابة ممكنة باستعمال النقطتين (0, 22) , (2000, 6)

معادلة التنبؤ هي $y = \frac{-1}{125}x + 22$

d) $2c°$

(4a,b



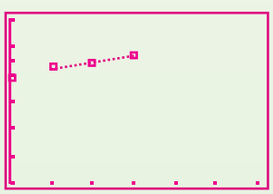
الارتباط موجب، المتغير المستقل x هو السنوات ، والمتغير التابع y هو أعمار النساء عند زواجهن أول مرة.

4c) إجابة ممكنة: باستعمال النقطتين (1996, 18.8) , (2005, 19.3)

معادلة التنبؤ هي:

$y = 0.056x - 92.1$

(6



[1, 6] scl:1by [0, 55,000] scl:10,000

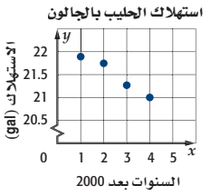
معادلة خط الانحدار باستعمال النقطتين (1, 7521.42) , (2, 7897.51) هي $y = 376x + 7145$

وحدات الطاقة عام 2012 تساوي 10529 وحدة تقريبًا.

8 يبين شكل الانتشار ارتباطًا سالبًا بين المتغيرين، فكلما زادت الدرجة قلت النسبة المئوية.

مثال 2
صفحة 28

9) حليب: شكل الانتشار المجاور يبيّن عدد جالونات الحليب التي يستهلكها كل شخص في أعوام مختلفة.



a) استعمل النقطتين (2, 21.75)، (4, 21) ؛ لكتابة معادلة التنبؤ بصيغة ميل – مقطع. $y = -0.375x + 22.5$

b) تنبأ بكمية استهلاك الحليب عام 2015. **16.875 gal تقريبًا.**

c) تنبأ بالسنة التي تكون فيها كمية استهلاك الحليب 10 gal . وضِّح إجابتك. **2033.**

d) هل من المعقول استعمال المعادلة لتقدير استهلاك الحليب لأي سنة؟ فسّر إجابتك.

9d) نعم؛ من الواضح أن استهلاك الحليب يتناقص مع مرور الأعوام.

مثال 3
صفحة 41

للتمرينين 10, 11، أجب عن الفروع a–c:

a) ارسم شكل الانتشار والخط المطابق، ثم صف نوع الارتباط.

b) استعمل زوجين مرتبين من البيانات؛ لكتابة معادلة التنبؤ.

c) استعمل معادلة التنبؤ الخاصة بك؛ للتنبؤ بالقيم المفقودة.

10b) إجابة ممكنة: لايمكن إيجاد معادلة تنبؤ؛ لأنه لا يوجد ارتباط بين البيانات.

10c) لا يمكن التنبؤ بالقيمة المفقودة.

10) كرة السلة: يُبيّن الجدول أدناه عدد الرميات التي رماها أحد لاعبي كرة السلة في تدريبات مختلفة، وعدد الأهداف التي أحرزها. **للفرع a انظر الهامش**

عدد الرميات	472	353	278	283	238	265	186	162	144
عدد الأهداف	384	97	81	79	18	130	94	95	?

الربط مع واقع الحياة

تقام مسابقة البحرين الكبرى لحفظ القرآن الكريم وتجويده وتفسيره تحت رعاية الملك حمد بن عيسى آل خليفة -ملك البلاد المفدى- ، وقد بدأت في شعبان 1417هـ الموافق 1996م.

11) قرآن كريم: يُبيّن الجدول أدناه عدد المتسابقين في مسابقة البحرين الكبرى لحفظ القرآن الكريم وتجويده وتفسيره خلال الدورات الثماني الأولى. **للفروع a–c انظر الهامش**

رقم الدورة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
عدد المتسابقين	10	12	19	77	97	226	376	518	?

مثال 4
صفحة 43

12) ناطحات سحاب : يبيّن الجدول أدناه ترتيب أطول عشرة مبانٍ في العالم وعدد طوابقها.

الترتيب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد الطوابق	101	88	110	88	88	80	69	102	78	70

أوجد معادلة الخط المطابق الأمثل للبيانات الواردة في الجدول ، وأوجد معامل الارتباط.

12) $y = -2.75x + 102.53$, -0.6071

مثال 5
صفحة 44

13) مبيعات: الجدول المجاور يُبيّن قيمة المبيعات السنوية لأحد المحلات التجارية. استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل شكل انتشار البيانات، ثم أوجد معادلة خط الانحدار، ومثّلها بيانيًّا، ثم استعمل المعادلة للتنبؤ بقيمة المبيعات في عام 2012.

العام	المبيعات (بآلاف الدنانير)
2004	640
2005	715
2006	791
2007	852
2008	910
2009	944

انظر ملحق الإجابات

14) حج: الجدول المجاور يُبيّن العدد التقريبي لحجاج بيت الله الحرام في الأعوام من 1416 هـ – 1995م إلى 1421هـ – 2000م .

العام	عدد الحجاج
1416	1014260
1417	1047200
1418	1064765
1419	990439
1420	1174931
1421	1242253

استعمل الآلة الحاسبة البيانية للإجابة عن الفروع a–d :

للفروع a - d انظر الهامش

a) ارسم شكل انتشار البيانات.

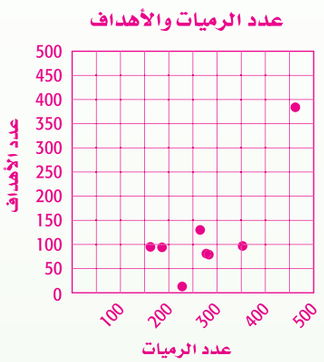
b) أوجد معادلة خط الانحدار للبيانات.

c) تنبأ بعدد الحجاج في عام 1435 هـ – 2014 م.

d) ما مدى واقعية تَـنَـبُّـئِكَ؟ فسّر إجابتك.

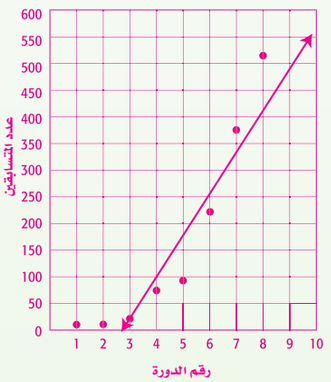
إجابات:

10a)



لا يوجد ارتباط. لذا، لايمكن رسم خط مطابق للبيانات.

11a)

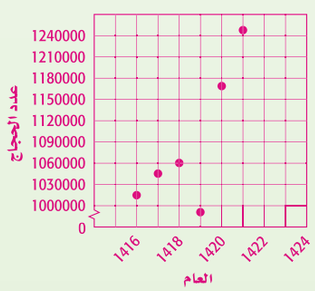


نوع الارتباط موجب قوي

11b) إجابة ممكنة: باستعمال النقطتين (4,77) , (5,97)، معادلة التنبؤ هي: $y = 20x - 3$

11c) عدد المتسابقين في الدورة التاسعة 177 شخصًا تقريبًا.

14a)



14b) $y = 48763.25x - 68050325.25$

14c) 1924939 حاجًّا تقريبًا

14d) كان واقعيًّا؛ لأن عدد الحجاج يتزايد مع مرور الأعوام.

مسائل مهارات التفكير العليا

15) تبرير: ما مدلول معامل الارتباط، وأهميته لخط الانحدار؟ برّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

16) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا من واقع الحياة على بيانات، على أن يكون:

a) معامل ارتباطها موجبًا **b)** معامل ارتباطها سالبًا **c)** ليس بينها ارتباط

17) تحد: مثّل شكل الانتشار للبيانات في الجدول أدناه:

x	1.0	1.5	2.0	2.8	3.2	4.0	4.8	5.8
y	3.5	4.7	5.1	6.8	7.1	7.5	8.8	10.3

أيٌّ مما يأتي يُمثّل معامل الارتباط r للبيانات السابقة بصورة أفضل؟ برّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

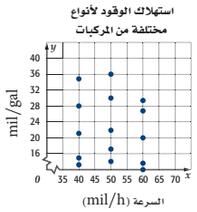
a) 0.99 **b)** -0.98 **c)** 0.62 **d)** 0.08

18) اكتب: اشرح ماذا نستفيد من المعادلات الخطية عند التعامل مع البيانات. انظر ملحق الإجابات

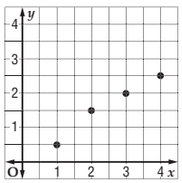
تدريب على اختبار معياري

19) ما نوع الارتباط بين البيانات الممثلة في شكل الانتشار المجاور؟ D

A ارتباط موجب قوي
B ارتباط موجب
C ارتباط سالب
D لا يوجد ارتباط



20) أيُّ معادلة مما يأتي تُمثل معادلة الخط المطابق الأمثل للبيانات في شكل الانتشار المجاور؟ D



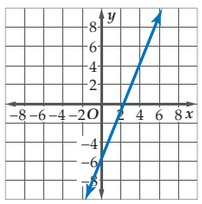
A $y = x$
B $y = -0.5x + 4$
C $y = -0.5x - 4$
D $y = 0.5x + 0.5$

مراجعة تراكمية

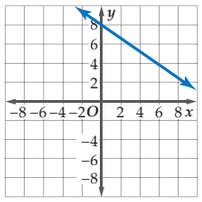
21) $y = 2.5x - 6$ **22)** $y = -\frac{2}{3}x + 8$ **23)** $y = -3x - 6$

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع لكل مستقيم مُمثّل بيانيًّا أدناه: (الدرس 2-1)

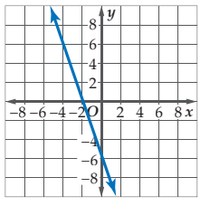
21)



22)



23)



24) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2, 4), (-1, -2)$. (مهارة سابقة) 0

25) ربح: يخطط عبد الكريم لحجز جناح في معرض محلي لبيع لوحاته الفنية. ووجد أن الربح الذي يمكن أن يحصل عليه يعتمد على $P(x) = 11x - 100$، حيث x يمثل عدد اللوحات المبيعة. ما الربح الذي سيحصل عليه عبد الكريم إذا باع 35 لوحة؟ BD 285 (الدرس 1-1)

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

26) $-4|x - 2| = -12$ $5, -1$ **27)** $|3x + 4| = 21$ $\frac{17}{3}, -\frac{25}{3}$ **28)** $2|4x - 1| + 3 = 9$ $1, -\frac{1}{2}$

16a) إجابة ممكنة: أعمار وأطوال الأطفال

16b) إجابة ممكنة: عمر وقدرة بطارية سيارة

16c) إجابة ممكنة: وزن الشخص مع دخله

إرشادات للمعلم الجديد

نظرة للأمام الدرس 5–1 يقدم ويعرض تمثيل الدوال الخاصة بما فيها دالة القيمة المطلقة. استعمل التمارين 28–26؛ للتأكد من مدى معرفة الطلبة بحلّ معادلات القيمة المطلقة.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى كل طالب كتابة ثلاثة أو أربعة مواقف شبيهة بتلك الموجودة في مثال 2، واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-5

تمثيل المعادلات الخطية بيانيًا، وكتابة معادلتها .

حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة .

الدرس 1-5

كتابة الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة، وتمثيلها بيانيًا.

كتابة الدوال الدرجية، ودوال القيمة المطلقة، ودوال أكبر عدد صحيح، وتمثيلها بيانيًا .

ما بعد الدرس 1-5

تحديد الدوال الأم متضمنة الدوال التربيعية، وتمثيلها بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

ما تكلفة الطرد الذي يزن 0.9 kg؟ BD 2.3

ما تكلفة الطرد الذي يزن 1.1 kg؟ BD 2.6

ما نسبة التغيّر في السعر إلى التغيّر في الوزن من 0.9 kg إلى 1.1 kg؟ 1.5

ومن 1.8 kg إلى 2.0 kg؟ 0

كيف تبيّن أن هذه الدالة ليست خطية؟

إجابة ممكنة: الميل للدالة بين نقطتين تنتميان لها لا يساوي الميل بين نقطتين أخريين تنتميان لها.

دوال خاصة
Special Functions

فيما سبق

درستُ تمثيل المعادلات الخطية بيانيًا، وكتابة معادلتها.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أكتب الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب الدوال الدرجية، ودوال القيمة المطلقة، ودوال أكبر عدد صحيح وأمثّلها بيانيًا.

المفردات الأساسية

الدالة الدرجية
step function

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة خطية
piecewise-linear function

دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function

دالة القيمة المطلقة
absolute value function

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة
piecewise-defined function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

الوزن لا يزيد على (kg)	السعر (BD)
$\frac{1}{2}$	2
1	2.3
$1\frac{1}{2}$	2.6
2	2.9
...	...

تكلفة إرسال الطرود البريدية إلى أي دولة من دول مجلس التعاون الخليجي هي دالّة تعتمد على وزن الطرد، ولكنها ليست دالة خطية. ففي الجدول المجاور، الطرود التي تقع أوزانها بين أي عددين في الجدول تقفز تكلفتها إلى القيمة العليا التي تليها. فمثلًا: تكون تكلفة الطرد الذي يزن 1.6 kg مساوية لتكلفة الطرد الذي يزن 2 kg وهي 2.9 BD .

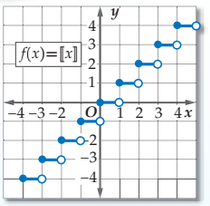
الدالة الدرجية التمثيل البياني للدالة الدرجية يتكون من قطع مستقيمة أفقية. ولأن كل دالة درجية هي دالة خطية، فإن هذا النوع من الدوال يسمى دالة معرفة بأكثر من قاعدة خطية، ومن أمثلتها دالة أكبر عدد صحيح التي تكتب في الصورة $f(x) = [\![x]\!]$، حيث الرمز $[\![x]\!]$ يعني أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x، فعلى سبيل المثال $[\![3.25]\!] = 3$ ، لأن 3 أكبر عدد صحيح أقل من 3.25. وكذلك $[\![-4.6]\!] = -5$، وتسمى $f(x) = [\![x]\!]$ الدالة الأم للدوال الدرجية.

مفهوم أساسي

الدالة الأم لدالة أكبر عدد صحيح

أضف إلى مطويتك

الدالة الأم	$f(x) = [\![x]\!]$
شكل التّمثيل البياني	قطعة مستقيمة غير متقاطعة
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الصحيحة



مثال 1

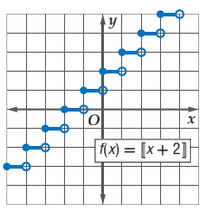
دالة أكبر عدد صحيح

مثّل الدالة $f(x) = [\![x + 2]\!]$ بيانيًا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

أنشئ جدولًا، ثم اختر قيمًا بين الأعداد الصحيحة، عيّن النقاط وعلى التمثيل، ثم ضع دائرة لتمثيل النقطة غير المتضمنة في الدالة.

x	$x + 2$	$[\![x + 2]\!]$
0	2	2
0.25	2.25	2
0.5	2.5	2
1	3	3
1.25	3.25	3
1.5	3.5	3
2	4	4
2.25	4.25	4

لاحظ أن التمثيل البياني هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم وحدتين إلى اليسار $f(x) = [\![x]\!]$



بما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x، إذن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمدى هو مجموعة الأعداد الصحيحة.

تأكد

1) مثّل الدالة $f(x) = 2[\![x]\!]$ بيانيًا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها. انظر ملحق الإجابات

مصادر الدرس 1-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (51)	• تنويع التعليم، ص (51)	• تنويع التعليم، ص (52)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

دالة أكبر عدد صحيح

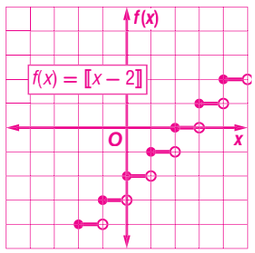
مثال 1 بيِّن كيفية تحديد مجال ومدى دالة أكبر عدد صحيح وطريقة تمثيلها بيانيًّا.

مثال إضافي

1 مثِّل الدالة $f(x) = [\![x - 2]\!]$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

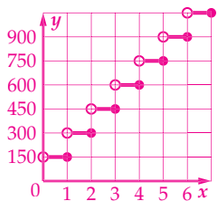


الدالة الدرجية

مثال 2 يُبيّن كيفية تمثيل الدالة الدرجية بيانيًّا.

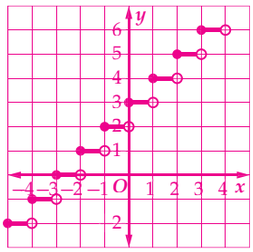
مثال إضافي

2 **a) إيجار:** يبلغ إيجار محل BD 150 عن كل شهر أو أي جزء منه. مثّل هذا الموقف بيانيًّا.



b) مثّل الدالة الآتية بيانيًّا:

$f(x) = [[x]] + 3$



يمكن استعمال الدوال الدرجية في الكثير من المواقف الحياتية التي تشمل النقود.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال الدالة الدرجية

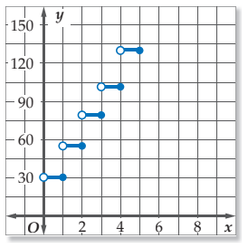
عقار: يتقاضى مجمع للشقق المفروشة BD 30 مقابل تأجير الشقة ليوم واحد أو جزء منه، و BD 25 مقابل تأجير الشقة ذاتها لأي يوم إضافي أو جزء منه. اكتب الدالة التي تُمثّل هذا الموقف، ومثِّلها بيانيًّا.

افهم أجرة التأجير هي BD 30 عن اليوم الأول، بالإضافة إلى BD 25 عن أي جزء من كل يوم إضافي؛ لذا، فإن التَّمثيل البياني عبارة عن دالة درجية.

خطّط إذا كان زمن التأجير أكبر من 0 يوم وأقل من أو يساوي يومًا، فإن الأجرة هي BD 30. وإذا كان الزمن أكبر من يوم وأقل من أو يساوي يومين، فإن الأجرة هي BD 55 وهكذا.

حُلّ استعمل نمط الزمن مع الأجرة لعمل جدول، حيث x هي عدد أيام تأجير الشقة، و $T(x)$ هي أجرة المجمع، ثم مثّله بيانيًّا.

x	y
$0 < x \le 1$	BD 30
$1 < x \le 2$	BD 55
$2 < x \le 3$	BD 80
$3 < x \le 4$	BD 105
$4 < x \le 5$	BD 130



تحقق بما أن المجمع يحوّل أي كسر للعدد الصحيح التالي، فإن كل قطعة مستقيمة ستحتوي على دائرة غير مظلّلة عند طرفها الأيسر، وأخرى مظلّلة عند طرفها الأيمن كما في الشكل أعلاه.

تأكد

2) إعادة تدوير المخلفات الورقية: تدفع شركة لإعادة تدوير المخلفات الورقية BD 3 عن كل صندوق من الورق يتم إحضاره للشركة، ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل. مثّل بيانيًّا المبلغ $P(x)$ الذي تدفعه الشركة لعدد الصناديق x التي تم إحضارها لتدويرها. انظر الهامش

الربط مع واقع الحياة

هناك ثلاث طرائق أساسية للمحافظة على الموارد الطبيعية؛ وهي الترشيد، وإعادة الاستعمال، والتدوير. وعمليات التدوير تقلل من كمية الطاقة التي نحتاجها لصناعة الأشياء، كما تقلل كمية النفايات، ومن ذلك إعادة تدوير الورق والبلاستيك.

دوال القيمة المطلقة هناك نوع آخر من أنواع الدوال المعرّفة بأكثر من قاعدة خطية تسمى **دالة القيمة المطلقة**.

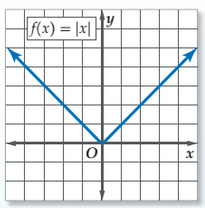
إن القيمة المطلقة لأيّ عدد تكون غير سالبة دائمًا، لذلك فإن الدالة الأم للقيمة المطلقة تكتب في الصورة $f(x) = |x|$، وجميع قيم المدى غير سالبة.

مفهوم أساسي — الدالة الأم لدالة القيمة المطلقة

أضف إلى مطويتك

الدالة الأم $f(x) = |x|$، وتُعرّف على النحو الآتي:

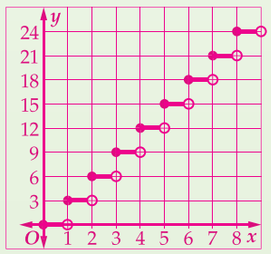
$$f(x) = \begin{cases} x & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$$



شكل التَّمثيل البياني	على شكل حرف V
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
المقطعان	$x = 0, y = 0$
غير معرفة	$f(x) < 0$

إجابة (تأكد):

2)



التركيز في المحتوى الرياضي

الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

تسمى الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة أحيانًا الدوال المتشعبة أو دوال منقسمة المجال، فعلى سبيل المثال، دالة القيمة المطلقة $y = |x|$ هي ذاتها $y = -x$ عندما $x < 0$، و $y = x$ عندما $x \ge 0$.

تسمّى دالة القيمة المطلقة أيضًا دالة معرفة بأكثر من قاعدة؛ لأنها تُعرف بتعبيرين أو أكثر.

مثال 3 دالة القيمة المطلقة

مثّل الدالة $f(x) = |x - 4|$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

بما أن $f(x)$ لا يمكن أن تكون سالبةً، فإن أصغر نقطة في التمثيل هي $f(x) = 0$

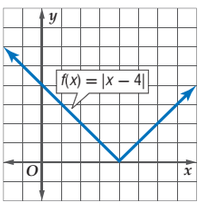
الدالة الأصلية $f(x) = |x - 4|$

بالتعويض عن $f(x)$ بـ 0، $|x - 4|$ بـ $x - 4$ $0 = x - 4$

بإضافة العدد 4 إلى كلا الطرفين $4 = x$

والآن كوّن جدولًا للقيم، بحيث يشتمل على قيمٍ أكبر من 4 وقيمٍ أصغر من 4 .

$f(x) = \lvert x - 4 \rvert$	
x	$f(x)$
−2	6
0	4
2	2
4	0
5	1
6	2
7	3
8	4



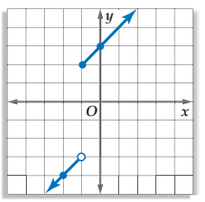
المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 0 أو تساويه.
لاحظ أن التمثيل البياني للدالة هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ بمقدار 4 وحدات إلى اليمين.

تأكد

3) مثّل الدالة $f(x) = |2x + 1|$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها. انظر الهامش

الدوال المعرّفة بأكثر من قاعدة تشتمل على دالة القيمة المطلقة، وكذلك دالة أكبر عددٍ صحيحٍ. وفي الحقيقة كل الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة خطية هي دوال معرفة بأكثر من قاعدة.

مثال 4 الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة



مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , \ x < -1 \\ x + 3 & , \ x \geq -1 \end{cases}$ **بيانيًّا، وحدّد كلًّا من مجالها ومداها.**

الخطوة 1 مثّل $f(x) = x - 2$ بيانيًّا عندما $x < -1$.

احسب قيمة المقدار $x - 2$ عندما $x = -1$ ، وعند قيمةٍ أخرى لِـ x أقل من -1 ولتكن -2

$f(x) = x - 2$ $\qquad$ $f(x) = x - 2$

$f(-1) = (-1) - 2 = -3$ $\qquad$ $f(-2) = (-2) - 2 = -4$

حدد النقطتين $(-2, -4)$,$(-1, -3)$ وصل بينهما بشعاع.

وبما أن العدد -1 لا يحقق المتباينة، إذن أبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(-1, -3)$.

دالة القيمة المطلقة

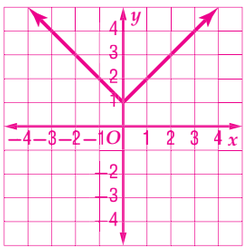
مثال 3 يبيِّن كيفية تمثيل دالة القيمة المطلقة بيانيًّا، وتحديد كلٍّ من مجالها ومداها.

مثال إضافي

3 مثّل الدالة $y = |x| + 1$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها .

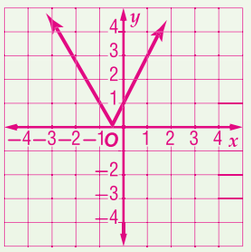
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية.

والمدى $= \{y \mid y \geq 1\}$



إجابة (تأكد):

3)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى $= \{y \mid y \geq 0\}$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون اللغويون / اللفظيون اطلب إلى بعض الطلبة بيان كيفية تمثيل إحدى الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة الواردة في هذا الدرس لفظيًّا أمام زملائهم .

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اعرض على الطلبة عدةَ صور لتمثيلات بيانية لدوال معرفة بأكثر من قاعدة ، واطلب إليهم تدوين شرح لكيفية كتابة كل دالة في مدوناتهم الخاصة.

الخطوة 2 مثّل $f(x) = x + 3$ بيانيًّا، عندما $x \geq -1$.

احسب قيمة المقدار $x + 3$ عندما $x = -1$ ، وعند قيمة أخرى لِـ x أكبر من أو تساوي -1 ولتكن 0

$f(x) = x + 3$ $\qquad$ $f(x) = x + 3$

$f(0) = (0) + 3 = 3$ $\qquad$ $f(-1) = (-1) + 3 = 2$

حدِّد النقطتين $(0, 3)$ ، $(-1, 2)$ وصِلْ بينهما بشعاع.

وبما أن العدد -1 يحقق المتباينة، إذن ابدأ بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-1, 2)$.

وبما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x ، فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

قيم $f(x)$ للأزواج المرتبة في التّمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من $3-$ ، وجميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 ؛ لذا فإن المدى هو $\{y \mid y < -3 \text{ أو } y \geq 2\}$.

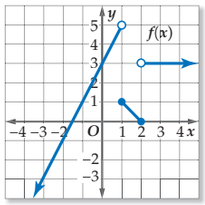
تأكد

4) مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$ بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها. انظر ملحق الإجابات

يمكن كتابة الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة إذا علمت تمثيلها البياني.

مثال 5 كتابة الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

اكتب الدالة المعرفة التي لها التّمثيل البياني المجاور بأكثر من قاعدة.



اكتب الدالة التي تُمثّل كل جزءٍ في التّمثيل البياني.

الجزء الأيسر تمثّله الدالة $f(x) = 2x + 3$

وتوجد دائرة غير مظللة عند النقطة $(1, 5)$، وهذا يعني أن الدالة معرّفة على $\{x \mid x < 1\}$.

الجزء الأوسط تُمثّله الدالة $f(x) = -x + 2$

وتوجد دائرتان مظلّلتان عند النقطتين $(1, 1)$ ، $(2, 0)$، وهذا يعني أن الدالة معرّفة على $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

الجزء الأيمن تُمثّله الدالة الثابتة $f(x) = 3$. وتوجد دائرة غير مظلّلة عند النقطة $(3, 2)$.

وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x \mid x > 2\}$، ونكتب الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة على النحو الآتي:

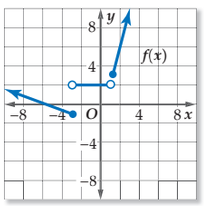
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & , \quad x < 1 \\ -x + 2 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 3 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

تحقق يُبيّن التّمثيل البياني شعاعًا ميله موجب عندما تكون $x < 1$. ويُبيّن أيضًا قطعة مستقيمة ميلها سالب عندما تكون $1 \leq x \leq 2$ ، وشعاعًا آخر ميله صفر عندما تكون $x > 2$ ؛ لذا يكون تعريف الدالة منطقيًّا للتمثيل البياني المُعطى.

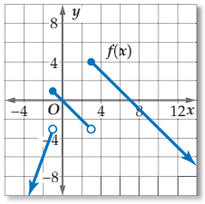
تأكد

اكتب الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة في كلٍّ من التّمثيلين البيانيَّين أدناه. انظر الهامش

(5A



(5B



إرشادات للدراسة

تمثيل الدوال المعرفة بيانيًّا بأكثر من قاعدة

التمثيلات البيانية للدوال المعرفة بأكثر من قاعدة قد تكون متصلة أو غير متصلة.

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

مثال 5 يُبيّن كيفية كتابة دالة معرفة بأكثر من قاعدة.

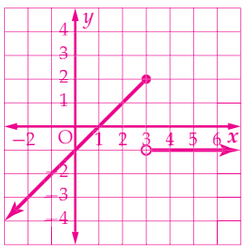
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

4 مثّل الدالة الآتية بيانيًّا، وحدِّد كلًّا من مجالها ومداها :

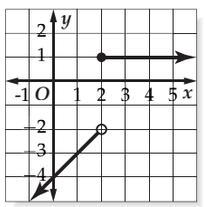
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , x \leq 3 \\ -1 & , x > 3 \end{cases}$$



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى $= \{y \mid y \leq 2\}$.

5 اكتب الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة التي لها التمثيل البياني أدناه:



$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & , x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يرسموا مستوى إحداثيًّا كبيرًا على ورقة بيانية، ثم اجعلهم يستعملون أعواد الأسنان (أو أشياء مشابهة) ؛ لتمثيل الشكل العام للدوال الدرجية، والدوال المعرفة بأكثر من قاعدة، ودوال القيمة المطلقة، مع تحديد نوع كل شكل عند تمثيله.

إجابات (تأكد):

(5A

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x - 2 & , \quad x \leq -3 \\ 2 & , \quad -3 < x < 1 \\ 3x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(5B

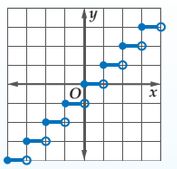
$$f(x) = \begin{cases} 3x & , \quad x < -1 \\ -x & , \quad -1 \leq x < 3 \\ -x + 7 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

ملخص المفاهيم

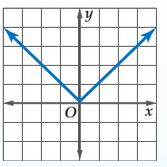
أضف إلى مطويتك

الدوال الخاصة

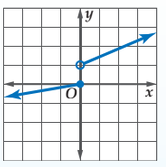
الدالة الدرجية



دالة القيمة المطلقة



الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة



تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 49

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها: انظر الهامش

1) $f(x)=\frac{1}{2}[\![x]\!]$ 2) $f(x)=-[\![x]\!]$ 3) $f(x)=[\![2x]\!]$

مثال 2 صفحة 50

4) **موقف سيارات:** تبلغ تكلفة الوقوف في بعض مواقف السيارات للساعة الأولى BD 0.2 ، ويضاف إليها مبلغ BD 0.1 عن كل ساعة أو جزء من الساعة. مثّل بيانيًّا دالة تُعبّر عن هذا الوضع.

المثالان 3, 2 الصفحتان 50, 51

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

5) $g(x)=[\![x]\!]+1$ 6) $h(x)=[\![x-5]\!]$

7) $g(x)=|-3x|$ 8) $f(x)=2|x|$

9) $h(x)=|x+4|$ 10) $s(x)=|-2x|+6$

4–14) انظر ملحق الإجابات

مثال 4 صفحة 51

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

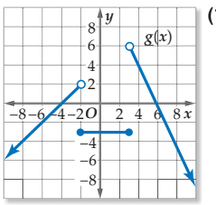
11) $g(x)=\begin{cases}-3, & x\le -4\\ x, & -4<x<2\\ -x+6, & x\ge 2\end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases}8, & x\le -1\\ 2x, & -1<x<4\\ -4-x, & x\ge 4\end{cases}$

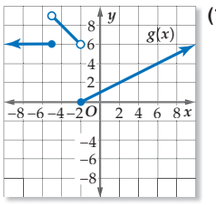
مثال 5 صفحة 52

اكتب الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة والمُمثلة بيانيًّا في كل شكل أدناه:

13)



14)



تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 49

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها: انظر ملحق الإجابات

15) $f(x)=3[\![x]\!]$ 16) $f(x)=[\![-x]\!]$ 17) $f(x)=[\![x]\!]+3$

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الواجب المنزلي
دون	23-15 ، 38 ، 52-40
ضمن	33-15 فردي ، 34 ، 39-35 فردي ، 52-40
فوق	51-34 ، (اختياري: 54-52)

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 13 - 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

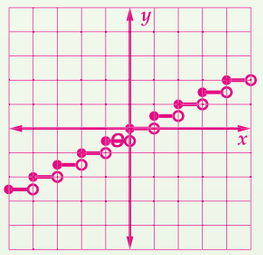
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.-

إرشادات للمعلم الجديد

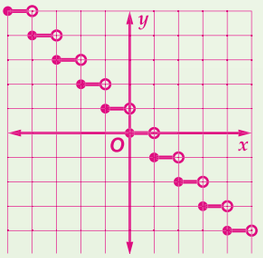
المهارة اللفظية اطلب إلى الطلبة أن يُبيّنوا لماذا سُمِّيت كلٌّ من الدوال الآتية بهذه الأسماء: الدالة الدرجية، دالة القيمة المطلقة، الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة.

إجابات:

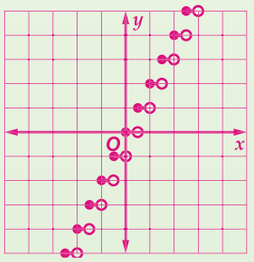
1) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = كل الأعداد الصحيحة المضروبة في $\frac{1}{2}$



2) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة



3) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة



مثال 2
صفحة 50

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

18) $f(x) = [\![x]\!] - 6$ **19)** $h(x) = [\![x + 8]\!]$ **20)** $f(x) = [\![3x + 2]\!]$ **21)** $g(x) = 2[\![x + 4]\!]$

18–27) انظر ملحق الإجابات

مثال 3
صفحة 51

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

22) $f(x) = |x - 5|$ **23)** $g(x) = |x + 2|$ **24)** $h(x) = |x| - 8$

25) $k(x) = |x| + 3$ **26)** $f(x) = 2|x - 4| + 6$ **27)** $h(x) = -3|x + 1| - 2$

مثال 4
صفحة 51

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها: للتمرينين 29 , 28 انظر الهامش

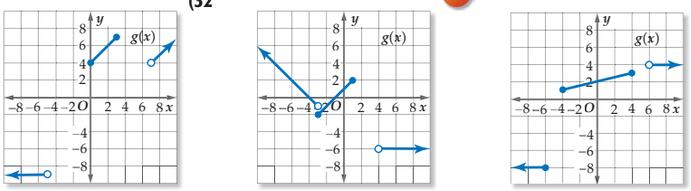
28)
$$f(x) = \begin{cases} -3x , & x \le -4 \\ x , & 0 < x \le 3 \\ 8 , & x > 3 \end{cases}$$

29)
$$f(x) = \begin{cases} 2x , & x \le -6 \\ 5 , & -6 < x \le 2 \\ -2x + 1 , & x > 4 \end{cases}$$

مثال 5
صفحة 52

اكتب الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة والتي لها التّمثيل البياني في كل شكل أدناه:

30) 31) 32)



30–32) انظر ملحق الإجابات

33) جمعية خيرية: تقوم جمعية خيرية بجمع الصدقات؛ لإيصالها إلى مستحقيها، وتتبرع الجمعية أيضًا بمبلغ مساوٍ لأي صدقة دون 100 BD ، أو تساويها، كما تضيف الجمعية 100 BD إلى أي صدقة تزيد على 100 BD.

a) حدّد نوع الدالة التي تُمثّل هذا الموقف. دالة معرفة بأكثر من قاعدة

b) اكتب الدالة التي تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

34) ترفيه: يوضح الجدول المجاور تكلفة استئجار دراجة هوائية.

استئجار الدراجات الهوائية

الزمن (h)	السعر (BD)
$0 < t \le \frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2} < t \le 1$	2
$1 < t \le 2$	3
$2 < t \le 3$	4

a) حدد نوع الدالة التي تُمثّل هذا الموقف. دالة درجية

b) اكتب الدالة التي تُمثّل هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

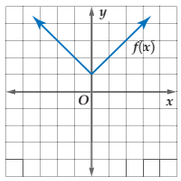
الربط مع واقع الحياة

مع نمو السياحة في مختلف أنحاء العالم أصبح استئجار الدراجات الترفيهية جزءًا من هذه السياحة.

المصدر:
Cycle Tourism

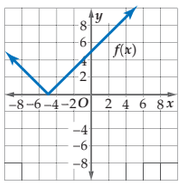
اكتب معادلة دالة القيمة المطلقة التي لها التّمثيل البياني في كل شكل أدناه:

35)



انظر ملحق الإجابات

36)



$f(x) = |x + 5|$

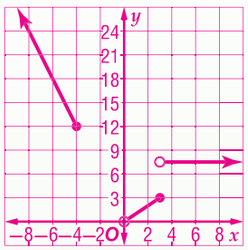
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها: للتمرينين 38 , 37 انظر ملحق الإجابات

37)
$$g(x) = \begin{cases} [\![x]\!] , & x < -4 \\ x + 1 , & -4 \le x \le 3 \\ -|x| , & x > 3 \end{cases}$$

38)
$$h(x) = \begin{cases} -|x| , & x < -6 \\ |x| , & -6 \le x \le 2 \\ |-x| , & x > 2 \end{cases}$$

إجابات :

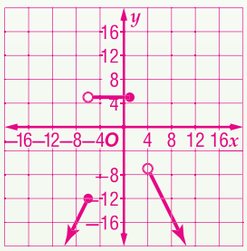
28)



المجال = $\{x \mid x \le -4$ أو $0 < x\}$

المدى = $\{y \mid 0 < y \le 3$ أو $y = 8$ أو $y \ge 12\}$

29)



المجال = $\{x \mid x > 4$ أو $x \le 2\}$

المدى = $\{y \mid y < -7$ أو $y = 5\}$

39) **تمثيلات متعددة:** لتكن $f(x) = |x| - 4, g(x) = |3x|$ للفروع a–c انظر ملحق الإجابات

a) جدولة: كوّن جدولًا لقيم كلٍّ من $f(x)$، $g(x)$ ما بين $x = 4, x = -4$

b) تمثيل بياني: مثّل كلًّا من الدالتين بيانيًّا على مستوى إحداثي مختلف.

c) عددي: احسب الميل بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول.

d) تعبير لفظي: صفِ العلاقة بين ميل كلٍّ من جزأي دالة القيمة المطلقة.

39d) ميل كل من الجزأين يساوي النظير الجمعي لميل الجزء الآخر، أما الميل في كل جزء فهو ثابت.

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **مسألة مفتوحة:** اكتب علاقة باستعمال القيمة المطلقة، بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية. إجابة ممكنة: $y = |x|$

41) **تحدٍّ:** مثّل المعادلة $|y| = 2|x + 3| - 5$ بيانيًّا. انظر الهامش

42) **تبرير:** أعط مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية، وبرّر إجابتك.

"حتى تجد أكبر عدد صحيح لعدد غير صحيح x، فإنك تقرّب x إلى أقرب عدد صحيح".

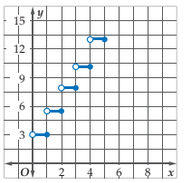
42) إجابة ممكنة: $[\![8.6]\!] = 8$، لكن حين نقرب العدد 8.6 يكون ناتج التقريب 9

43) إجابة ممكنة: يمكن استعمال الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة؛ لتمثيل الأجر الذي يدفعه شخص مقابل استعماله موقف سيارات.

43) **اكتب:** اشرح من خلال مثال كيف تستعمل الدوال المعرّفة بأكثر من قاعدة؛ لتمثيل مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار معياري

44) ما نوع الدالة الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور؟ **A**



A دالة درجية

B دالة قيمة مطلقة

C دالة ثابتة

D دالة محايدة

45) أيّ دالة مما يأتي يكون فيها $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1$؟ **B**

A $f(x) = 2x$

B $f(x) = |-2x|$

C $f(x) = [\![x]\!]$

D $f(x) = [\![2x]\!]$

مراجعة تراكمية

إذا كان: $f(x) = -4x + 6, g(x) = -x^2, h(x) = -2x^2 - 6x + 9$، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-1)

46) $f(2c)$ $-8c + 6$

47) $g(a + 1)$ $-a^2 - 2a - 1$

48) $h(6)$ -99

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 2-1)

49) يمر بالنقطة $(-6, -3)$، وعمودي على المستقيم $y = -2x + 1$

50) يمر بالنقطة $(0, 4)$، وموازٍ للمستقيم $3x + 2y = 6$

51) يمر بنقطة الأصل، وعمودي على المستقيم $4x - 3y = 12$

مراجعة المتطلبات السابقة

مثّل كلًّا مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 54 – 52 انظر الهامش

52) $y = -0.25x + 8$

53) $y = \frac{4}{3}x + 2$

54) $8x + 4y = 32$

4 التقويم

تعلم لاحق في الدرس 7-1 سوف يتعلم الطلبة تمثيل الدوال الأم بيانيًّا. اطلب إليهم أن يدونوا توقعاتهم عن العلاقة بين الدرس الحالي والدرس القادم .

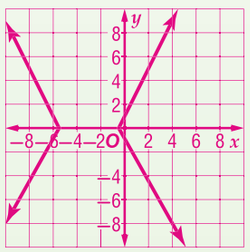
التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 5 - 1, 4 - 1 بإعطائهم اختبارًا قصيرًا 3 من مصادر الفصل 1.

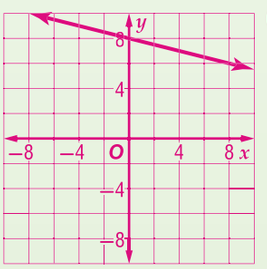
تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 39 جدول قيم، ومن ثم يقومون بتمثيله بيانيًّا على المستوى الإحداثي؛ وذلك للمقارنة بين ميلي جزأي دالة القيمة المطلقة.

إجابات:

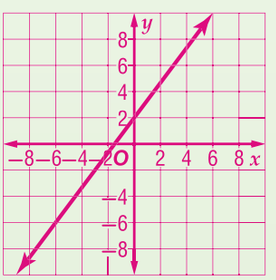
41)



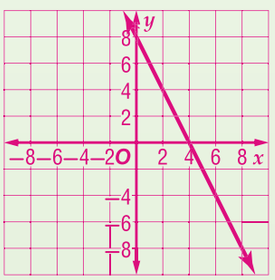
52)



53)



54)



التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل، للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، واطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات
التقـــويم

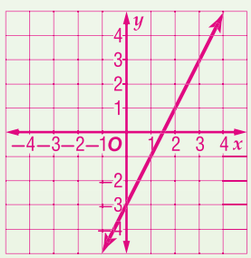
أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.
بناء على نتائج اختبار منتصف الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًا للطلبة.

مطويتك متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حلّ أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 1-1 إلى 1-5.

إجابة :

2)



تمثل دالة، واحد لواحد، شاملة، تقابل، وهي متصلة.

1) حدّد المجال والمدى للعلاقة $\{(4, 1), (0, 3), (5, -2), (2, 7)\}$، وهل تمثّل دالة؟ (الدرس 1-1) المجال $= \{5, 4, 2, 0\}$ ، المدى $= \{7, 3, 1, -2\}$ ، دالة

2) مثّل $y = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم حدّد ما إذا كانت تُمثّل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ وحدّد ما إذا كانت متصلة أم منفصلة؟ (الدرس 1-1) انظر الهامش

3) **اختيار من متعدد :** ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(4, 1)$, $(0, -3)$؟ (الدرس 1-2) C

A $y = -x + 3$

B $y = -x - 3$

C $y = x - 3$

D $y = x + 3$

اكتب معادلة المستقيم بصيغة ميل – مقطع، والذي يحقق الشروط في كلٍّ من الأسئلة 6 – 4 : (الدرس 1-2)

4) الميل $\frac{2}{3}$ ، ويمر بالنقطة $(3, -4)$. $y = \frac{2}{3}x - 6$

5) يمر بالنقطتين $(4, 1)$, $(-2, 3)$. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

6) الميل -3 ، ويمر بالنقطة $(0, 0)$. $y = -3x$

اكتب معادلة المستقيم بصيغة نقطة – ميل، والّذي يحقق الشروط في كلٍّ من الأسئلة 9 – 7 : (الدرس 1-3)

7) يمر بالنقطة $(2, 3)$ ، $m = -4$ $y - 3 = -4(x - 2)$

8) يمر بالنقطة $(10, 2)$ ، وعمودي على المستقيم $y = 4x + 6$.

9) يمر بالنقطة $(4, -12)$ ، ويوازي المستقيم $y = 0.5x - 1$.

8) $y = -0.25x + 4.5$

9) $y = 0.5x - 10$

للأسئلة 12 – 10 انظر ملحق الإجابات

استعمل الجدول أدناه لحَلّ الأسئلة 12 – 10: (الدرس 1-4)

10) ارسم شكل الانتشار للبيانات، ثم ارسم الخط المطابق.

11) استعمل النقطتين $(2, 40)$ ، $(5, 46)$ على الخط؛ لإيجاد معادلة التنبؤ.

12) استعمل المعادلة للتنبؤ بالقيمة المفقودة.

اليوم	1	2	3	4	5	6	7
درجة الحرارة ($C°$)	45°	40°	45°	41°	46°	44°	?

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها. (الدرس 1-5) للأسئلة 15 – 13 انظر ملحق الإجابات

13) $f(x) = |x - 3|$

14) $g(x) = |x| - 2$

15) $h(x) = \begin{cases} x + 2 & , x < -2 \\ 3 & , x \geq -2 \end{cases}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-5 ,1-4 ,1-3 ,1-2 ,1-1	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص(10)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-6

استعمال الدوال والعلاقات وتحليلها.

الدرس 1-6

تحديد الدوال الأم واستعمالها.
وَصف التحويلات الهندسية على التمثيل البياني للدالة الأم.

ما بعد الدرس 1-6

تحليل موقف تم تمثيله بدالة، وتكوين معادلة أو متباينة حَلّ المسألة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- إذا عمل أحمد ثلاث ساعات في محل البيتزا ولكنه لم يوصل البيتزا، فكم سيتقاضى؟ BD 24
- كم يتقاضى أحمد في اليوم الواحد من عمله في محل البيتزا ومن إيصاله لها؟ BD 10
- ما ميل المستقيمين؟ 8, 10

الدوال الأم والتّحويلات الهندسية
Parent Functions and Transformations

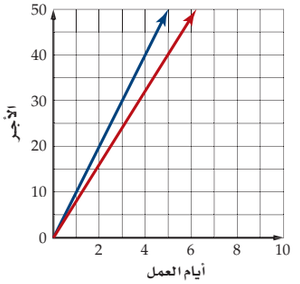
فيما سبق
درستُ استعمال الدوال والعلاقات، وتحليلها.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أحدّد الدوال الأم وأستعملها.
- أصِف التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال.

المفردات الأساسية
عائلة التّمثيلات البيانية
family of graphs
التّمثيل البياني الأم
parent graph
الدالة الأم
parent function
الدالة الثابتة
constant function
الدالة المحايدة
identity function
الدالة التربيعية
quadratic function
الإزاحة
translation
الانعكاس
reflection
محور الانعكاس
line of reflection
التمدد
dilation

www.obeikaneducation.com

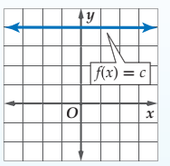
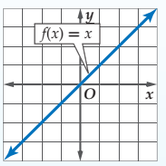
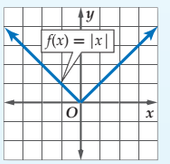
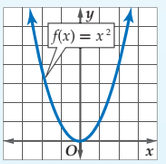
لماذا؟
يعمل أحمد في محل لتوصيل الطلبات، فيتقاضى BD 8 عن كل يوم عمل، مضافًا إليها BD 2 في اليوم بدل مواصلات. والشعاع الأحمر في التّمثيل البياني المجاور يُبيّن ما يتقاضاه أحمد من عمله، أما الشعاع الأزرق فيُبيّن الأجرة مضافًا إليها بدل المواصلات.



التمثيل البياني الأم عائلة التّمثيلات البيانية هي مجموعة من التّمثيلات البيانية التي تعرض واحدة أو أكثر من الخصائص المتشابهة. والتّمثيل البياني الأم هو التّمثيل البياني للدالة الأم، وهو أسهل وأبسط تمثيل بياني في عائلة التّمثيلات البيانية، والتّمثيل البياني لأي دالة في عائلة المنحنيات يمكن الحصول عليه بإجراء تحويلات هندسية على التّمثيل البياني الأم.

مفهوم أساسي الدوال الأم

أضف إلى مطويتك

الدالة الثابتة	الدالة المحايدة
	
الدالة الثابتة هي $f(x) = c$، حيث c عدد حقيقي، وتمثل بمستقيم أفقي. ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، وأما مداها فيحوي عددًا واحدًا فقط هو: c أيْ $\{c\}$.	الدالة المحايدة $f(x) = x$، تمثيلها البياني عبارة عن جميع الأزواج المرتبة (a, a). وهي الدالة الأم لمعظم الدوال الخطية، وكلٌّ من مجالها ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
دالة القيمة المطلقة	**الدالة التربيعية**
	
تذكّر أن الدالة الأم لدوال القيمة المطلقة هي $f(x) = \|x\|$. ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، وأما مداها فمجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة.	الدالة الأم للدوال التربيعية هي $f(x) = x^2$، ومجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأما مداها فمجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة.

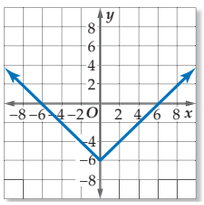
مصادر الدرس 1-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (59)	• تنويع التعليم، ص (59)	• تنويع التعليم، ص (63)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانيّة	• كتاب التمارين، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مثال 1 تحديد نوع دالة من خلال تمثيلها البياني

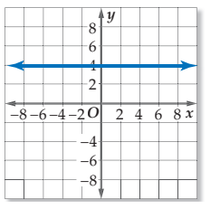
حدّد نوع الدالة الممثّلة بيانيًّا في كل شكل أدناه.

(a)



التَّمثيل البياني يشبه حرف V؛ لذا فإن الدالة هي دالة القيمة المطلقة.

(b)

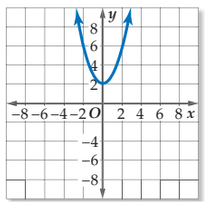


التَّمثيل البياني هو مستقيم أفقي يقطع المحور y عند $y = 4$؛ لذا الدالة هي دالة ثابتة.

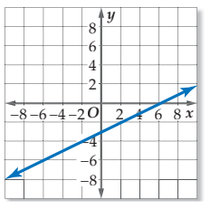
تأكد

حدّد نوع الدالة الممثّلة بيانيًّا في كل شكل أدناه.

(1A) دالة تربيعية



(1B) دالة خطية



التَّحويلات الهندسية التَّحويلات الهندسية على التَّمثيلات البيانية الأم مختلفة، فمنها قلب أو عكس الشكل حول مستقيم، أو محور ما، أو توسيع للتَّمثيل البياني، أو تضييقه. وقد تشبه التَّمثيلات البيانية الجديدة بعد إجراء التحويل الهندسي للتَّمثيل البياني الأم، وقد لا تشبهه.

قراءة الرياضيات

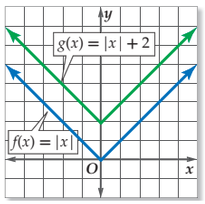
الإزاحة تُسمى الإزاحة أيضًا انسحابًا أو تحركًا.

الإزاحة هي تحريك التَّمثيل البياني إلى أعلى، أو إلى أسفل، أو إلى اليسار، أو إلى اليمين، ويكون ذلك بأحد أمرين:

- إضافة العدد الحقيقي k أو طرحه من الدالة الأم، فالتَّمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x) \pm k$ هو إزاحة للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x)$ إلى أعلى، أو إلى أسفل.
- إضافة العدد الحقيقي h أو طرحه من المتغير x قبل حساب الدالة الأم، فالتَّمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x \pm h)$ هو إزاحة للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x)$ إلى اليسار، أو إلى اليمين.

مثال 2 وصفُ الإزاحة

صِفْ الإزاحة في التَّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x| + 2$، ثم مثّل الدالة بيانيًّا.



التَّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x| + 2$ هو إزاحة للتَّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ وحدتين إلى أعلى.

تأكد للتدريبين **2A, 2B** انظر الهامش

صِفْ الإزاحة في التَّمثيل البياني للدالتين الآتيتين، ثم مثّلهما بيانيًّا:

(2A) $g(x) = |x + 3|$

(2B) $g(x) = x^2 - 4$

إجابات (تأكد):

2A) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x + 3|$ هو إزاحة للتّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ 3 وحدات إلى اليسار .

2B) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = x^2 - 4$ هو إزاحة للتّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ 4 وحدات إلى أسفل.

التّمثيل البياني الأم

مثال 1 يُبيّن كيفية تحديد نوع الدالة المُمثّلة بيانيًّا.

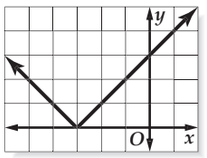
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

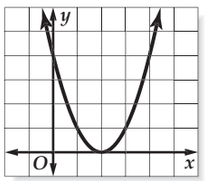
1 حدّد نوع الدالة المُمثّلة بيانيًّا في كل شكل أدناه:

(a)



دالة القيمة المطلقة

(b)



دالة تربيعية

التحويلات الهندسية

الأمثلة 2-4 تُبيّن كيفية وَصْف تأثير التحويلات الهندسية على التمثيل البياني للدالة الأم.

مثال إضافي

2 صِفِ الإزاحة في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = (x + 1)^2$.

التّمثيل البياني للدالة $g(x) = (x + 1)^2$ هو إزاحة للتّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ وحدة واحدة إلى اليسار.

الانعكاس هو قلب أو عكس الشكل حول مستقيم يُسمّى **محور الانعكاس**، ويكون ذلك بأحد أمرين:

- ضرب الدالة الأم في العدد -1، فالتّمثيل البياني للدالة الناتجة $-f(x)$ هو انعكاس للتّمثيل البياني للدالة الأم $f(x)$ حول المحور x.
- ضرب المتغّير x فقط للدالة الأم في العدد -1، فالتّمثيل البياني للدالة الناتجة $f(-x)$ هو انعكاس للتّمثيل البياني للدالة الأم $f(x)$ حول المحور y.

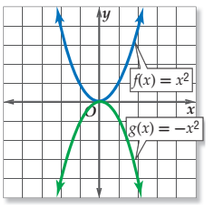
مراجعة المفردات

الرأس هو النقطة العظمى أو الصغرى لمنحنى الدالة التربيعية، أو لمنحنى دالة القيمة المطلقة.

مثال 3 وصف الانعكاس

صِف الانعكاس في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -x^2$.

التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -x^2$ هو انعكاس للتّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ حول المحور x.



تأكد للتدريبين 3A, 3B انظر الهامش

صِف الانعكاس في التّمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

(3A) $g(x) = -|x|$ **(3B)** $g(x) = -x$

إرشادات للدراسة

انعكاس

انعكاس التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ حول المحور y يعطي نفس الدالة؛ لأن $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

التّمدد يُكبّر (توسيع) أو يُصغر (تضييق) الشكل بصورة متناسبة. وعند ضرب المتغيّر في الدالة الخطية الأم في عدد حقيقي غير صفري، فإن ميل التّمثيل البياني للدالة يتغيّر.

وعند ضرب الدالة الأم غير الخطية في عدد غير صفري، فإن التّمثيل البياني للدالة يتوسّع أو يضيق رأسيًّا.

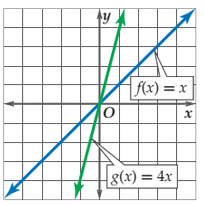
وإذا كان العدد أكبر من 1، فإن التّمثيل البياني للدالة يتوسّع رأسيًّا، أما إذا كان العدد بين 0 و 1، فإن التّمثيل البياني للدالة يضيق رأسيًّا.

مثال 4 وصف التّمدد وتمثيله بيانيًا

صِف التمدد في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 4x$، ثم مثّلها بيانيًّا.

التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 4x$ هو توسّع رأسي للتّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$.

حيث إن ميل التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 4x$ أكبر من ميل التّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$.



تأكد للتدريبين 4A , 4B انظر الهامش

صِف التّمدد في التمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

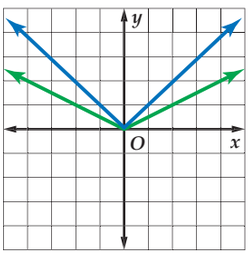
(4A) $g(x) = 2x^2$ **(4B)** $g(x) = \frac{1}{3}|x|$

مثالان إضافيان

3 صِف الانعكاس في التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -|x|$.

التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -|x|$ هو انعكاس للتّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ حول المحور x.

4 صِف التّمدد في التّمثيل البياني للدالة $h(x) = \frac{1}{2}|x|$.



التّمثيل البياني للدالة $h(x) = \frac{1}{2}|x|$ هو تضييق رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$.

إجابات (تأكد):

(3A) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -|x|$ هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ حول المحور x.

(3B) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -x$ هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$ حول المحور x.

(4A) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 2x^2$ هو توسّع رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.

(4B) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{3}|x|$ هو تضييق رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا كان لدى الطلبة الإمكانيات والأدوات لصنع لوحات إعلانية،

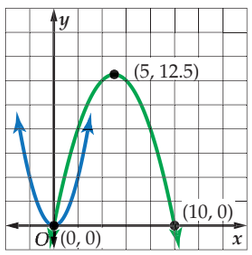
فقم بطلب عمل لوحة إعلانية تعرض الدوال الأم الثلاث التي تمت مناقشتها في الدرس، وكذلك التحويلات الهندسية عليها، ثم اعرض اللوحة في غرفة الصف.

التحويلات الهندسية

مثال 5 يُبيّن كيفية تحديد التحويلات الهندسية.

مثال إضافي

5 **أقواس:** قوس على شكل قطع مكافئ، يُعبر عنه بالدالة $g(x) = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + 12.5$ صِفِ التحويل الهندسي (التحويلات الهندسية) على التّمثيل البياني للدالة الأم.



التمثيل البياني للدالة: $g(x) = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + 12.5$ **ينتج عن عدة تحويلات هندسية على التمثيل البياني للدالة الأم** $f(x) = x^2$.

5− تعني إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم 5 وحدات إلى اليمين.

12.5+ تعني إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم 12.5 وحدة إلى أعلى.

$\frac{1}{2}$ − تعني انعكاس التّمثيل البياني للدالة الأم حول المحور x، مع تضييق رأسي في التّمثيل البياني للدالة الأم.

يلخص الجدول أدناه التغيّرات التي تحدث للتّمثيلات البيانية للدالة الأم نتيجة التّحويلات الهندسية المختلفة.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

التّحويلات الهندسية على التّمثيلات البيانية للدالة

التّحويلات الهندسيّة	التغيّر في التمثيل البياني الأم
إزاحة $(h, k > 0)$	
$f(x+h)$	إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليسار
$f(x-h)$	إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليمين
$f(x)+k$	إزاحة بمقدار k وحدة إلى أعلى
$f(x)-k$	إزاحة بمقدار k وحدة إلى أسفل
انعكاس	
$-f(x)$	انعكاس حول المحور x
$f(-x)$	انعكاس حول المحور y
تمدُّد	
$a \cdot f(x), a > 1$	توسّع رأسي
$a \cdot f(x), 0 < a < 1$	تضييق رأسي

إرشادات للدراسة

وصف التحويل

اسأل نفسك الأسئلة الآتية؛ لتساعدك على تحديد التحويل الهندسي:

- ما نوع الدالة؟
- هل التّمثيل البياني للدالة مفتوح إلى أعلى أم إلى أسفل؟
- هل رأس التّمثيل البياني يقع على أحد المحاور؟

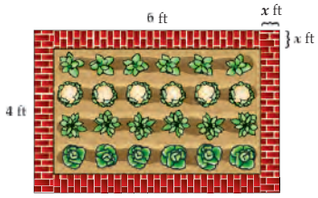
إرشادات للدراسة

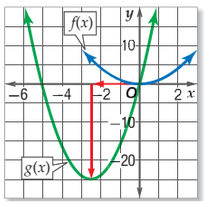
التمدد عندما يتوسّع التمثيل البياني للدالة التربيعية رأسيًا، فإن شكله يكون أضيق من التمثيل البياني للدالة الأم. وعندما يضيق رأسيًا، فإن شكله يكون أوسّع من التمثيل البياني للدالة الأم.

مثال 5 من واقع الحياة

تحديد التّحويل الهندسي

حديقة منزلية: حديقة منزلية محاطة بممرٍّ، يُعبّر عن مساحة الممر بالدالة $g(x) = 4(x+2.5)^2 - 25$، حيث x عرض الممرّ. صِفْ التّحويل الهندسي (التحويلات الهندسية) على التّمثيل البياني للدالة الأم.





التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 4(x+2.5)^2 - 25$ ينتج عن عدة تحويلات هندسية على التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.
بيِّن كيف أثّر كل تحويل في التمثيل البياني للدالة الأم.

$g(x) = 4(x+2.5)^2 - 25$

+2.5 تعني إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم 2.5 وحدة إلى اليسار.

−25 تعني إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم 25 وحدة إلى أسفل.

4 تعني توسّع التّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ رأسيًا.

تأكد

5) علوم: تستعمل $g(x) = \frac{5}{9}(x-32)$؛ لتحويل درجة الحرارة الفهرنهايتية إلى درجة الحرارة المئوية. صِفْ التّحويل الهندسي (التحويلات الهندسية) على التّمثيل البياني للدالة الأم.

5) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{5}{9}(x-32)$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $x = f(x)$ بمقدار 32 وحدة إلى اليمين، وبما أن الميل أقل من ميل المنحنى الأم فهناك تضييق رأسي.

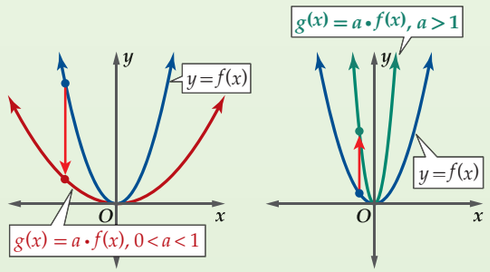
إرشادات للمعلم الجديد

التمدّد الرأسي والتمدّد الأفقي

يظهر التمدّدان متشابهين أحيانًا مثل المَطّ الرأسي والتضييق الأفقي. لذا، يصعب وصف التمدّد الذي طُبّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل، والدالة الأم.

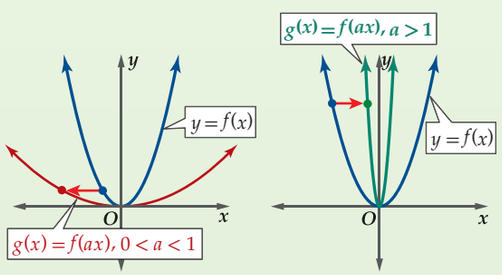
التمدّد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى $g(x) = a\,f(x)$، هو:
توسّع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



التمدّد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى $g(x) = f(ax)$، هو:
تضييق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
توسّع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

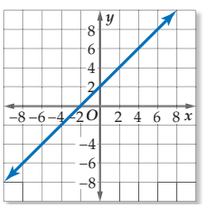


تأكد من فهمك

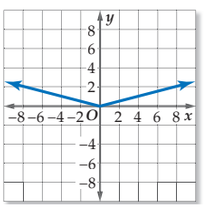
مثال 1 صفحة 58

حدِّد نوع الدالة الممثّلة بيانيًّا في كلِّ شكل أدناه:

1) دالة خطية



2) دالة قيمة مطلقة



مثال 2 صفحة 58

صِفِ الإزاحة في التّمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: للتمارين 8–3 انظر الهامش

3) $g(x) = x^2 + 4$

4) $g(x) = |x + 1|$

مثال 3 صفحة 59

5) صِفِ الانعكاس في التمثيل البياني للدالة $g(x) = (-x)^2$.

مثال 4 صفحة 59

صِفِ التمدّد في التّمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

6) $g(x) = \frac{3}{5}x$

7) $g(x) = 3x^2$

مثال 5 صفحة 60

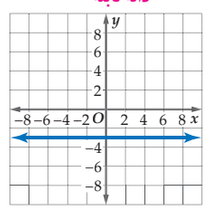
8) **مقهى:** يتأكد مدير مقهى من أن كمية الحليب والقهوة الموجودة في كل كوب يُقَدَّم للزبائن وُضعت بشكل دقيق، وذلك باختيار أحد الأكواب عشوائيًّا لفحصه. ووفقًا لمواصفات المقهى، يجب أن يحتوي كل كوب من القهوة الجاهزة على الكمية نفسها من القهوة ومن الحليب. إذا كانت كمية الحليب التي يمكن أن يحويها كوب فيه 200 ml من القهوة الجاهزة، و x ml من الحليب والقهوة معًا تُمثَّل بـ $g(x) = \frac{1}{2}|x - 200|$، فصِفِ التحويلات الهندسية على التّمثيل البياني للدالة الأم.

تدرب وحل المسائل

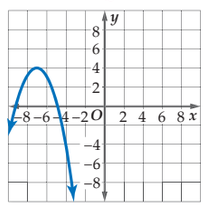
مثال 1 صفحة 58

حدّد نوع الدالة الممثّلة بيانيًّا في كل شكل أدناه:

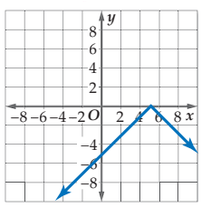
9) دالة ثابتة



10) دالة تربيعية



11) دالة قيمة مطلقة



مثال 2 صفحة 58

صِفِ الإزاحة في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: للتمارين 17–12 انظر هامش صفحة 62

12) $g(x) = x^2 + 4$

13) $g(x) = |x| - 3$

14) $g(x) = x - 1$

15) $g(x) = x + 2$

16) $g(x) = (x - 5)^2$

17) $g(x) = |x + 6|$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 8 - 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة الطلبة قم بعمل عرض شرائح لتمثيلات بيانية مختلفة الأنواع، واسألهم عن نوع كل دالة. أعطِ الطلبة تلميحًا يساعدهم في معرفة الإجابة.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا أسماء الدوال الأم على ورقة لاصقة، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا خصائص التّمثيل البياني لكل دالة.

واطلب إليهم تسليمك أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التركيز في المحتوى الرياضي

أشكال التّمثيل البياني ربما يُمثّل المنحنى أو التّمثيل البياني نوع خاص حتى لو كان صورة لدالة أم بتأثير تحويل أو تحويلات هندسية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	25-9 ، 45-36
ضمن ضمن المتوسط	10-26 زوجي، 27-31 ، 33 ، 34 ، 36-47
فوق فوق المتوسط	28-44 ، (اختياري: 45-47)

إجابات:

6) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{3}{5}x$ هو تضييق رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$.

7) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 3x^2$ هو توسع رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.

8) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{2}|x - 200|$ هو إزاحة بمقدار 200 وحدة إلى اليمين وتوسّع رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$.

3) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = x^2 + 4$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ 4 وحدات إلى أعلى.

4) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x + 1|$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ وحدة واحدة إلى اليسار.

5) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = (-x)^2$ هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ حول المحور y.

المثالان 2, 3 الصفحتان 58, 59

مثال 4 صفحة 59

مثال 5 صفحة 60

18) صِفِ التحويلات الهندسية في الدالة $g(x) = -|x - 2|$، ثم مثّلها بيانيًّا. **للتمارين 27-18 انظر الهامش**

صِفْ التمدّد في كل دالة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

19) $g(x) = 5x^2$ **20)** $g(x) = 6x$ **21)** $g(x) = 4|x|$

22) $g(x) = \frac{1}{2}|x|$ **23)** $g(x) = \frac{2}{3}x$ **24)** $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

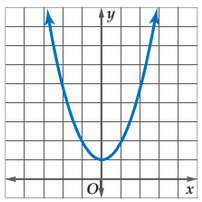
صِفِ التحويلات الهندسية في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

25) $g(x) = -x^2 + 4$ **26)** $g(x) = 3(x - 4)^2 + 1$

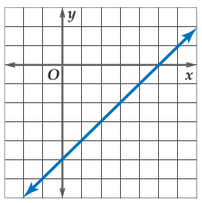
27) صحة: يساعد تمرين رياضي على حرق ما مقداره 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة، ويمكن التعبير عن عدد السعرات الحرارية المحروقة بعد m دقيقة من التمرين بالمعادلة $C(m) = 7.5m$، صِفِ التحويلات الهندسية على التّمثيل البياني للدالة الأم.

اكتب معادلة (قاعدة) كل دالة ممثّلة بيانيًّا في كل شكل أدناه:

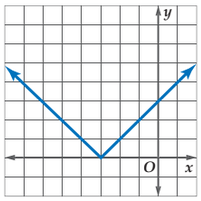
28)



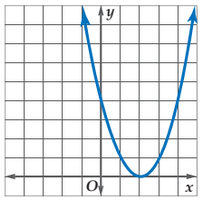
29)



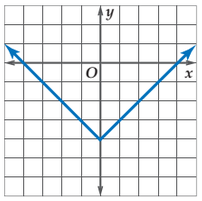
30)



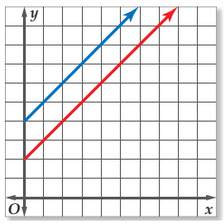
31)



32)

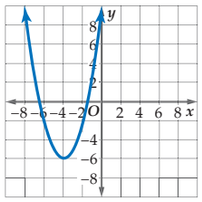


33) أعمال: في إحدى الشركات كانت تكلفة إنتاج x عبوة من المنتج يُعبَّر عنها بالدالة الممثّلة بيانيًّا على المستوى الإحداثي المجاور باللون الأزرق، وبعد تعيين مستشار للشركة، أصبحت تكلفة إنتاج x عبوة من المنتج يُعبَّر عنها بالدالة الممثّلة بيانيًّا على المستوى الإحداثي المجاور باللون الأحمر. اكتب معادلة كلٍّ من الدالتين، وصِفْ نوع التّحويل الهندسي للدالة الممثّلة باللون الأزرق، مقارنة بالتّمثيل البياني للدالة المُمثّلة باللون الأحمر. فسّر إجابتك.

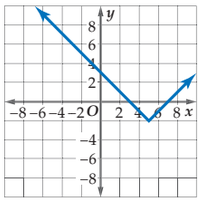


اكتب معادلة كل دالة ممثّلة بيانيًّا في كل شكل أدناه: **للتمرينين 34,35 انظر الهامش**

34)



35)



إجابات:

12) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = x^2 + 4$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ 4 وحدات إلى أعلى.

13) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x| - 3$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ 3 وحدات إلى أسفل

14) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = x - 1$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$ وحدة واحدة إلى أسفل، أو وحدة واحدة إلى اليمين.

15) التّمثيل البياني للدالة الأم $g(x) = x + 2$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$ وحدتين إلى أعلى أو وحدتين إلى اليسار.

16) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = (x - 5)^2$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ 5 وحدات إلى اليمين.

17) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x + 6|$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ 6 وحدات إلى اليسار

18) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -|x - 2|$ هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ حول المحور y، ثم ازاحة وحدتين لليمين.

19) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 5x^2$ هو توسّع رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.

20) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 6x$ هو توسّع رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$.

21) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 4|x|$ توسّع رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$.

22) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{2}|x|$ تضييق رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$.

23) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{2}{3}x$ هو تضييق رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$.

24) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ هو تضييق رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.

25) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = -x^2 + 4$ هو إنعكاس للتمثيل اليابي للدالة الأم $f(x) = x^2$ حول المحور x وإزاحة 4 وحدات إلى أعلى.

26) التّمثيل البياني للدالة $g(x) = 3(x - 4)^2 + 1$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ إلى اليمين 4 وحدات وتوسع رأسي وإزاحة إلى أعلى وحدة واحدة.

27) التّمثيل البياني للدالة $C(m) = 7.5m$ هو توسّع رأسي للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x$.

28) $y = x^2 + 1$

29) $y = x - 5$

30) $y = |x + 3|$

31) $y = (x - 2)^2$

32) $y = |x| - 4$

33) معادلة الدالة الممثلة باللون الأزرق هي: $y = x + 4$، معادلة الدالة الممثلة باللون الأحمر هي: $y = x + 2$، المستقيم الأحمر هو إزاحة للمستقيم الأزرق وحدتين إلى أسفل. تكلفة إنتاج x عبوة من المنتج قلت بعد تعيين مستشار للشركة.

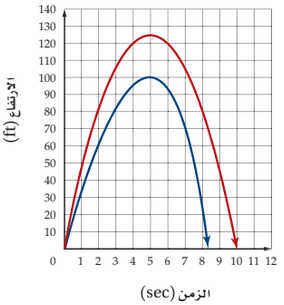
34) التّمثيل البياني للدالة المطلوب كتابة معادلتها هو التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى اليسار، وَ 6 وحدات إلى أسفل. لذلك، فإن معادلة الدالة التي تمثله هي: $y = (x + 4)^2 - 6$.

35) التّمثيل البياني للدالة المطلوب كتابة معادلتها هو التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ مزاحًا 5 وحدات إلى اليمين، ووحدتين إلى أسفل. لذلك، فإن معادلة الدالة التي تمثله هي $y = |x - 5| - 2$.

الربط مع واقع الحياة

بدأ إطلاق الألعاب النارية أول مرة في الحضارة الصينية القديمة. وما يزال كثير من المواد التي استُعملت في الألعاب النارية في ذلك الزمان يستعمل في هذه الأيام.

36) ألعاب نارية: من مستوى سطح الأرض أطلق كل من محمد وإبراهيم لعبةً ناريةً على شكل صاروخ يضيء ولا ينفجر. وكان مسار صاروخ إبراهيم يأخذ شكل المنحنى الأزرق على المستوى الإحداثي المجاور، وأما مسار صاروخ محمد فكان يأخذ شكل المنحنى الأحمر.



a) حدّد نوع الدالة التي تمثّل مسار الصاروخين. دالة تربيعية

b) كم يزيد زمن طيران صاروخ محمد على صاروخ إبراهيم؟ 1.5 sec تقريبًا

c) ما الفرق بين أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخان؟ 25ft تقريبًا

d) صِفِ التحويل الهندسي على منحنى الدالة المُمثّلة باللَّون الأزرق، مقارنةً بمنحنى الدالة المُمثّلة باللون الأحمر. المنحنى الأحمر هو توسّع رأسي للمنحنى الأزرق

مسائل مهارات التفكير العليا

37) تحدٍّ: اشرح: لماذا يشبه عمل إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية، عمل إزاحة رأسية تليها إزاحة أفقية؟

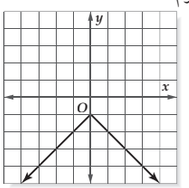
38) مسألة مفتوحة: ارسم شكلًا في الربع الثاني، ثم استعمل التّحويلات الهندسية التي تعلمتها في هذا الدرس؛ لتحريك الشكل إلى الربع الرابع، ثم صِفِ التّحويلات التي استعملتها. انظر الهامش

39) اكتب: وضِّح لماذا لا يتغير شكل التّمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ عند انعكاسه حول المحور y؟ هل هذا ينطبق على جميع انعكاسات الدوال التربيعية؟ إذا كانت الإجابة لا، فأعطِ مثالًا، ووضّحه. انظر الهامش

37) إجابة ممكنة: بما أن الإزاحة الرأسية تتعلق فقط بقيم y، والإزاحة الأفقية تتعلق فقط بقيم x، فالترتيب غير مهم.

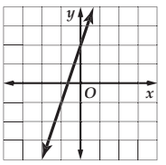
تدريب على اختبار معياري

40) ما المعادلة الأم للتمثيل البياني المرسوم أدناه؟ C



A $y = x^2$
B $y = x$
C $y = |x|$
D $y = \sqrt{x}$

41) ما المعادلة الخطية الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور؟ A



A $y = 3x + 2$
B $y = 3x - 2$
C $y = -3x - 2$
D $y = -3x + 2$

مراجعة تراكمية

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 1-4) للتمارين 44–42 انظر الهامش

42) $f(x) = |x - 3|$

43) $h(x) = [\![x]\!] - 5$

44)
$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le -2 \\ x, & -2 < x \le 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة كلٍّ من التعابير الجبرية الآتية إذا كانت $x = -4$، $y = 6$:

45) $4x - 8y + 12$ −52

46) $5y + 3x - 8$ 10

47) $-12x + 10y - 24$ 84

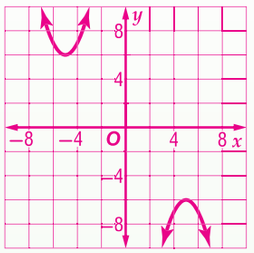
تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يصفوا كيف يمكن دمج دوال أم مختلفة بعضها مع بعض للحصول على دوال أكثر تعقيدًا، فمثلًا إضافة دالة قيمة مطلقة لدالة ثابتة سينتج منحنى دالة قيمة مطلقة تمت إزاحته إلى أعلى أو إلى أسفل.

إجابات:

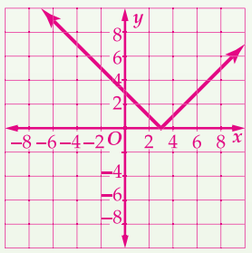
38) إجابة ممكنة:



إجابة ممكنة: الشكل في الربع الرابع ينتج عن انعكاس حول المحور x، ثم إزاحة 10 وحدات إلى اليمين.

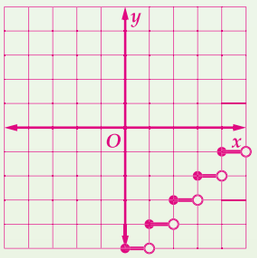
39) إجابة ممكنة: لا ينطبق دائمًا؛ لأن $f(x) = f(-x)$، فعندما لا يكون محور التماثل للتمثيل البياني هو المحور y، فإن التمثيل البياني وصورته ستكونان مختلفتان.

42)



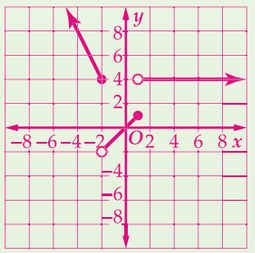
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \ge 0\}$

43)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

44)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \ge 4$ أو $-2 < y \le 1\}$

1-7 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-1

تمثيل الدوال الخطية.

الدرس 7-1

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا.

تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا.

ما بعد الدرس 7-1

حل أنظمة متباينات خطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- اشرح ما تعنيه المتباينة $2p + d \le 15$. عدد الفطائر مضروبًا في BD 2 لكل واحدة مضافًا إليه عدد أكواب العصير الطبيعي مضروبًا في BD 1 لكل كوب أقل من أو يساوي 15.
- هل لدى تركي المبلغ الكافي لشراء 4 فطائر و 8 أكواب عصير؟ لا
- إذا اشترى تركي 5 فطائر، فما أكبر عدد من أكواب العصير يمكنه أن يشتري دون أن ينفق أكثر من BD 15؟ 5 أكواب

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا

مثال 1 يُبيّن كيفية تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا.

1-7 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا
Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أمثّل المتباينات الخطية بيانيًا .
- أمثّل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا .

المفردات الأساسية

المتباينة الخطية linear inequality

الحد boundary

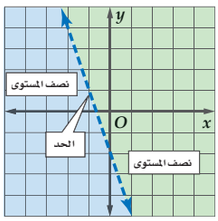
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير، ورصد لتلك الدعوة مبلغ BD 15 فقط.

ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية $2p + d \le 15$، حيث p عدد الفطائر، و d عدد أكواب العصير الطبيعي؛ للتأكد من أن سعر عددٍ معيَّنٍ من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، والفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا؛ $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية في متغيرين، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



يتكوّن التمثيل البياني للمتباينة الخطية من مجموعة النقاط التي تُمثّل جميع الحلول الممكنة للمتباينة وتسمى منطقة الحل. أما التّمثيل البياني للمعادلة المرافقة للمتباينة فيعد حدًّا للمنطقة يقسِّم المستوى الإحداثي إلى نصفين.

قد يكون **الحدُّ** جزءًا من التمثيل البياني للمتباينة ويرسم مستقيمًا متصلًا، وقد لا يكون جزءًا منه ويرسم مستقيمًا متقطعًا. فإذا كان الحد ضمن التمثيل البياني للمبتاينة يكون حل المتباينة نصف مستوى مغلق. وإذا لم يكن الحد ضمن التمثيل البياني للمتباينة، يكون حل المتباينة نصف مستوى مفتوح.

مفهوم أساسي تمثيل المتباينة الخطية بيانيًا

أضف إلى مطويتك

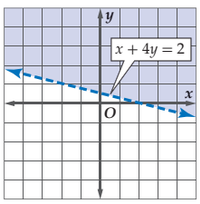
الخطوة 1 ارسم الحد، واستعمل خطًا متصلًا إذا احتوت المتباينة على الرمز $\le$ أو $\ge$ ، واستعمل خطًا متقطعًا إذا احتوت المتباينة على الرمز $<$ أو $>$.

الخطوة 2 استعمل نقطة اختبار لتحديد نصف المستوى الذي سيتم تظليله.

الخطوة 3 ظلل نصف المستوى الذي يحتوي على حل المتباينة.

مثال 1 الحد المتقطع

مثّل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيًا.



الخطوة 1 مثّل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$ ، وبما أن رمز المتباينة هو $>$ ، فإن الحد سيكون متقطعًا.

الخطوة 2 اختبر باستعمال النقطة $(0, 0)$، والتي لا تقع على حد المتباينة .

المتباينة الأصلية $x + 4y > 2$

$(x, y) = (0, 0)$ $0 + 4(0) \stackrel{?}{>} 2$

خاطئة ✗ $0 > 2$

ظلّل المنطقة التي لاتحوي $(0, 0)$.

مصادر الدرس 7-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (69)	• تنويع التعليم، ص (69)	
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

التحقق يُبين التَّمثيل البياني أن النقطة (0, 3) تقع في منطقة الحلّ.

المتباينة الأصلية	$x + 4y > 2$
$(x, y) = (0, 3)$	$0 + 4(3) \stackrel{?}{>} 2$
صحيحة ✓	$12 > 2$

إذن الحل صحيح.

تأكد للتدريبين 1A , 1B انظر ملحق الإجابات

1A) مثّل المتباينة $3x + \frac{1}{2}y < 2$ بيانيًّا.

1B) مثّل المتباينة $-x + 2y > 4$ بيانيًّا.

حل المتباينات الخطية يمكننا استعمال المستوى الإحداثي لحل المتباينات الخطية بمتغيرٍ واحدٍ.

مثال 2 حل المتباينات باستعمال التمثيل البياني

استعمل التمثيل البياني لحل المتباينة $3x + 5 \leq 14$

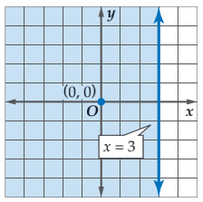
الخطوة 1 ارسم الحد أولًا، وهو التمثيل البياني للمعادلة المرتبطة بالمتباينة.
ضع رمز المساواة بدلًا من رمز المتباينة ثم أوجد قيمة x .

المتباينة الأصلية	$3x + 5 \leq 14$
باستبدال $\leq$ بـ $=$	$3x + 5 = 14$
بطرح العدد 5 من كلا الطرفين	$3x = 9$ ✓
بقسمة كلا الطرفين على 3	$x = 3$

مثّل $x = 3$ بيانيًّا.

الخطوة 2 اختبر النقطة (0, 0) بوصفها نقطة اختبار، وبتعويضها في المتباينة ينتج أن $5 < 14$

الخطوة 3 بما أن هذه العبارة صحيحة، إذن ظلل نصف المستوى الذي يحتوي النقطة (0, 0).



لاحظ أن مقطع المحور x لهذا التمثيل البياني هو 3، وبما أن نصف المستوى الواقع عن يسار مقطع المحور x هو المظلل، إذن حل هذه المتباينة هو المنطقة المظلّلة، فيكون حل هذه المتباينة هو $x \leq 3$.

تأكد

2A) $4x - 3 \geq 17$
$x \geq 5$

2B) $-2y + 6 > 12$
$x < 5$

إرشادات للدراسة

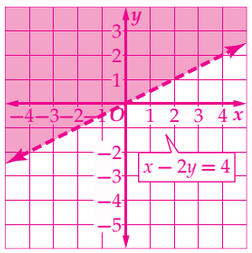
اختيار نقطة اختبار
يفضل اختيار نقطة الأصل عند اختيار نقطة اختبار لأنها تجعل الحسابات أبسط. وأما إذا وقعت نقطة الأصل على الحد، فيجب اختيار نقطة أخرى لا تقع على الحد.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 مثّل المتباينة $x - 2y < 0$ بيانيًّا.



اختبر النقطة (0 , 2) التي لا تقع على حدِّ المتباينة.

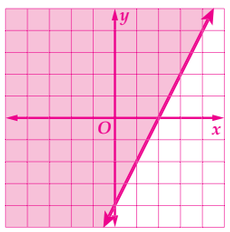
$x - 2y < 0$

$2 - 2(0) < 0$

$2 \not< 0$

إذن التّمثيل البياني للمتباينة هي المنطقة الواقعة فوق المستقيم المتقطع.

2 استعمل التمثيل البياني أدناه لحل المتباينة $2x + 3 \geq 7$. $x \leq 2$



التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي قم بإعداد عرض فيديو يُبيّن كيفية تمثيل متباينات القيمة المطلقة، ثم قم بتحميله إلى جميع الطلبة ليشاركوا، ويجدوا مصدرًا إضافيًّا يستعملوه خارج الصف.

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًّا

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال المتباينة الخطية، وتمثيلها البياني في تمثيل مواقف من واقع الحياة وتحليلها.

مثال إضافي

3 **تعليم:** قررت إدارة مدرسة إخضاع الطلبة الّذين يقل مجموع درجاتهم في كل من أعمال السنة، واختبار منتصف الفصل عن 30 درجة إلى دورة مكثفة في الرياضيات.

a) اكتب متباينة تَصِفُ مجموع تحصيل الطلبة الّذين يتوقعون إخضاعهم إلى دورة مكثفة، بفرض أن x تُمثّل درجة أعمال السنة، و y تُمثّل درجة اختبار منتصف الفصل .

$x + y < 30$

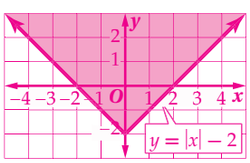
b) هل الطلبة الّذين حصلوا على 10 درجات في أعمال السنة، وَ 18 درجة في اختبار منتصف الفصل يقعون ضمن شروط الإخضاع للدورة؟ نعم

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا

مثال 4 يُبيّن التمثيل البياني لمتباينة القيمة المطلقة.

مثال إضافي

4 مَثّل المتباينة $y \geq |x| - 2$ بيانيًّا .



الربط مع واقع الحياة

تُزوّد معامل اللغات المتخصصة بأحدث الأجهزة التقنية، والتجهيزات الإلكترونية والصوتية المتطورة التي تنمّي مهارتَي المحادثة والاستماع لدى الدارسين، وتؤهلهم لاكتساب اللفظ الصحيح.

مثال 3 من واقع الحياة

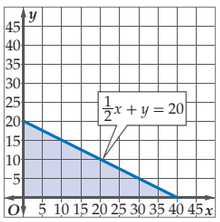
الحد المتصل

رسم: يقدم مركز تدريب نوعين من دروس تعلم اللغة الإنجليزية؛ الأول دروس مدتها 30 min للدرس الواحد، والثاني دروس مدتها 60 min للدرس الواحد. وقرر مدير المركز ألّا يزيد زمن دروس تعلم اللغة الإنجليزية على 20 h أسبوعيًّا.

a) اكتب متباينةً تمثّل عدد دروس تعلم اللغة الإنجليزية أسبوعيًّا، ثم مثّلها بيانيًّا.

لتكن x عدد الدروس التي مدتها 30 min، و y عدد الدروس التي مدتها 60 min. وبما أن مجموع الدروس يمكن أن يساوي 20 h، فإن المتباينة تحتوي على الرمز ≤ ؛ لذا يكون المستقيم الذي يمثّل الحد متصلًا. المتباينة هي $\frac{1}{2}x + y \leq 20$.

الخطوة 1 مثّل الحد $\frac{1}{2}x + y = 20$ بيانيًّا.



الخطوة 2 اختبر النقطة (0, 0) ، والتي لا تقع على الحد.

المتباينة الأصلية $\frac{1}{2}x + y \leq 20$

$(x, y) = (0, 0)$ $\frac{1}{2}(0) + (0) \stackrel{?}{\leq} 20$

صحيحة ✓ $0 \leq 20$

ظلّل المنطقة التي تحوي (0, 0).

b) هل يمكن أن يقدم المركز 25 درسًا من الدروس التي مدتها 30 min، و 15 درسًا من الدروس التي مدتها 60 min خلال أسبوعٍ ما؟ فسّر إجابتك.

النقطة (25, 15) تقع خارج المنطقة المظلّلة؛ لذا فهي لا تحقق المتباينة، وعليه فلا يمكن أن يقدم المركز ذلك العدد من الدروس خلال أسبوعٍ ما .

تأكد

3) مع صالح BD10 يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. إذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية BD2، وثمن تذكرة كل لعبةٍ عاديةٍ BD3، فاكتب متباينةً تصِف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا . انظر ملحق الإجابات.

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية في متغيرين. أولًا مثّل معادلة القيمة المطلقة المرتبطة بيانيًّا، وبعد ذلك حدّد ما إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم حدّد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

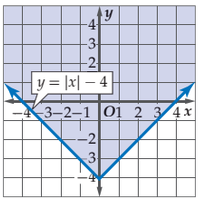
مثال 4

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا

مثّل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانيًّا.

بما أن المتباينة تحتوي على الرمز ≥، فإن الحد يكون متصلًا.

مثّل المعادلة المرتبطة $y = |x| - 4$، ثم اختبر باستعمال (0, 0).



المتباينة الأصلية $y \geq |x| - 4$

$(x, y) = (0, 0)$ $0 \stackrel{?}{\geq} |0| - 4$

صحيحة ✓ $0 \geq -4$

ظلّل المنطقة التي تحوي (0, 0).

تأكد

4A) مثّل المتباينة $y \leq 2|x| + 3$ بيانيًّا.

للتدريبين 3A, 3B انظر ملحق الإجابات

4B) مثّل المتباينة $y \geq 3|x + 1|$ بيانيًّا.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 64

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 5-1 انظر الهامش

1) $y \le 4$
2) $x \ge -6$
3) $x + y \le 0$
4) $3x + y > -8$

مثال 2 صفحة 65

استعمل التمثيل البياني لحل كل متباينة مما يأتي:

5) $7x + 1 < 15$ $x < 2$
6) $-3x - 2 \ge 11$ $x \le -4\frac{1}{3}$
7) $3y - 5 \le 34$ $y \le 13$
8) $4y - 21 > 1$ $y > 5\frac{1}{2}$

مثال 3 صفحة 66

9) مع عامر BD 17.6 ، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك. إذا كان سعر لتر الوقود BD 0.100، وسعر عبوة زيت المحرك BD 6.5، فأجب عما يأتي: انظر الهامش

a) اكتب متباينةً تمثّل هذا الموقف، حيث q عدد لترات الوقود، و g عدد علب زيت المحرك التي يمكنه شراؤها.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ 20 L من الوقود وشراء 4 علب زيت محرك؟ فسّر إجابتك.

مثال 4 صفحة 66

مثّل المتباينتين الآتيتين بيانيًّا. للتمرينين 11 , 10 انظر ملحق الإجابات

10) $y \ge |x + 3|$
11) $y - 6 < |x|$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 64

مثّل كل متباينة ممَّا يأتي بيانيًّا: للتمارين 17 – 12 انظر ملحق الإجابات

12) $x + 2y > 6$
13) $y \ge -3x - 2$
14) $2y + 3 \le 11$
15) $4x - 3y > 12$
16) $6x + 4y \le -24$
17) $y \ge 3x$

مثال 2 صفحة 65

استعمل التمثيل البياني لحل كل متباينة مما يأتي:

18) $10x - 8 < 22$ $x < 3$
19) $20x - 5 > 35$ $x > 2$
20) $4y - 77 \ge 23$ $y \ge 25$
21) $5y + 8 \le 33$ $y \le 5$
22) $35x + 25 < 6$ $x < -\frac{19}{35}$
23) $14x - 12 > -31$ $x > -\frac{19}{14}$

مثال 3 صفحة 66

24) **درجات:** تُحتسب درجات الطلبة في مادة الرياضيات في إحدى الكليات على أساس 60 درجة للاختبار النهائي، و 40 درجة للاختبارات الشهرية. ويتعين على كوثر الحصول على الدرجة 90 على الأقل؛ لتنال تقدير ممتاز في المادة.

a) المتباينة $x + y \ge 90$ تمثّل هذا الموقف، حيث x هي درجة كوثر في الاختبار النهائي، و y هي درجتها في الاختبارات الشهرية. مثّل هذه المتباينة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

b) اعتمادًا على التّمثيل البياني، إذا كانت درجتها في الاختبار النهائي 50، وفي الاختبارات الشهرية 35، فهل ستحصل على التقدير ممتاز أم لا؟ لا

مثال 4 صفحة 66

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 30–25 انظر ملحق الإجابات

25) $y > |3x|$
26) $y + 4 \le |x - 2|$
27) $y - 6 < |-2x|$
28) $y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right|$
29) $2y > |4x - 5|$
30) $-y \le |3x - 4|$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	31-14 ، 40 ، 55-42
ضمن ضمن المتوسط	37-13 فردي ، 38 ، 39 ، 40 ، 55-42
فوق فوق المتوسط	52-32 ، (اختياري: 55-53)

3 التدريب

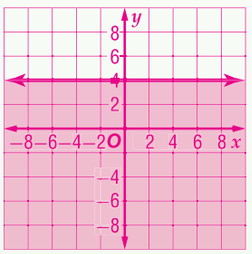
التقويم التكويني

استعمل التمارين 11 - 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

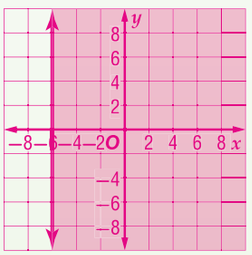
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

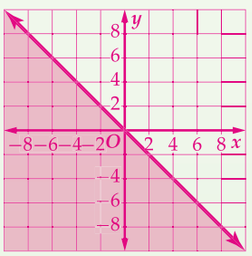
1)



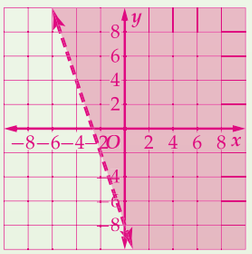
2)



3)

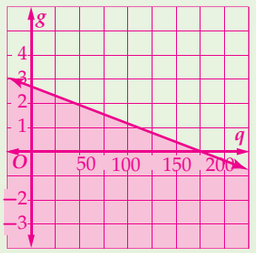


4)



9a) $0.1q + 6.5g \le 17.6$

9b)

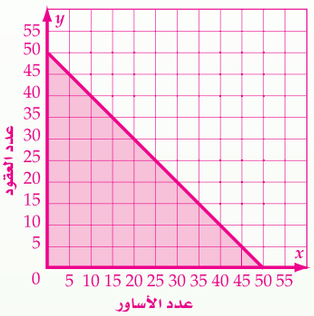


9c) لا؛ لأن (4 , 20) لا تقع في المنطقة المظلّلة

إجابات:

38a) $x + y \le 50$

38b)



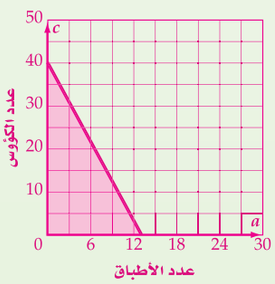
38c) إجابة ممكنة: 0 سوار و 50 عقدًا، أو 25 سوارًا و 25 عقدًا، أو 30 سوارًا و 20 عقدًا.

39a $1.5d$ تُمثّل ثمن شراء d من الأطباق، $0.5c$ تُمثّل ثمن c من الكؤوس.
وبما أنه مع سعاد 20 BD ، فإن رمز المتباينة سيكون $\le$.
إذن، ستكون المتباينة التي تُمثّل ثمن شراء d من الكؤوس وَ c من الأطباق هو $1.5d + 0.5c \le 20$.

39b نمثّل الحد وهو المستقيم $1.5d + 0.5c = 20$ بيانيًا . بما أن رمز المتباينة $\le$ ؛ لذا يكون المستقيم الذي يُمثّل الحد متصلًا. نختبر النقطة $(0\ ,\ 0)$ ؛ لمعرفة المنطقة التي سنظللها، والتي ستكون منطقة الحَلّ المحتملة.

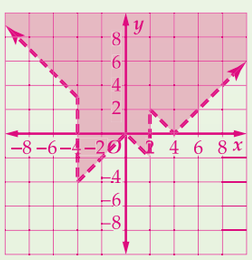
المتباينة الأصلية $1.5d + 0.5c \le 20$
$(x\ ,\ y) = (0\ ,\ 0)$ $1.5(0) + 0.5(0) \le 20$
صحيحة $0 \le 20$ ✓

إذن نظلّل المنطقة التي تحوي $(0\ ,\ 0)$.



39c إجابة ممكنة: 10 أطباق وَ 10 كؤوس أو 8 أطباق وَ 8 كؤوس أو 7 أطباق وَ 7 كؤوس

41)



تنبيه !

اكتشف الخطأ في التمرين 42، يجب أن يحدد الطلبة الشكل الذي تم تظليله بصورة صحيحة؛ لذا اطلب إليهم حل المتباينات، بحيث يكون y فقط في أحد طرفي المتباينة، قبل أن يحددوا أيهما صحيح.

31a) $2a + 1.5b \ge 100$، حيث a عدد الساعات التي يعملها بائعًا، b عدد الساعات التي يعملها سائقًا.

31) يؤدي حسين عملين؛ ليحقق دخلًا أسبوعيًا لا يقل عن 100 BD . إذا كان الأجر الذي يتقاضاه عن كل ساعة موضحًا في الجدول المجاور.

العمل	الأجر في الساعة
بائع في محل تجاري	BD 2
سائق أجرة	BD 1.5

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًا. انظر ملحق الإجابات

c) هل سيحصل حسين على المبلغ المطلوب إذا عمل 30 h أسبوعيًا في كل عمل؟ نعم

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًا: للتمارين 36–32 انظر ملحق الإجابات

32) $y \ge |-2x - 6|$ **33)** $y \le |x - 3| + 4$ **34)** $y - 3 > -2|x + 4|$

35) $|y| > |x|$ **36)** $|x - y| > 5$ **37)** $|x + 3y| \ge -2$

37) كل نقاط المستوى (يظلل المستوى كاملًا)

الربط مع واقع الحياة

يُصنع الخرز من طين الفيمو اللين، حيث يجفف في فرن حرارته عالية، ويمكن تشكيله إلى أشكال عديدة.

38) **زينة:** تصنع ميساء عقودًا وأساور من الخرز؛ لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، و y عدد العقود. انظر الهامش

a) اكتب متباينةً تُبيّن عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.

b) مثّل المتباينة بيانيًا.

c) أعطِ ثلاثة خيارات ممكنة لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

39) مع سعاد 20 BD، وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق d . وعددًا من الكؤوس c ؛ لتجهز لمناسبة اجتماعية. إذا كان سعر الطبق 1.5 BD ، وسعر الكأس 0.5 BD . انظر الهامش

a) اكتب متباينة تمثّل العدد الذي يمكن شراؤه من الأطباق والكؤوس .

b) مثّل المتباينة بيانيًا.

c) أعطِ ثلاثة حلول للمتباينة.

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **مسألة مفتوحة:** استعمل القيمة المطلقة؛ لتكوين متباينة على ألّا يقع حلّها في الرُّبعين الثاني أو الثالث.
$|y| < x$

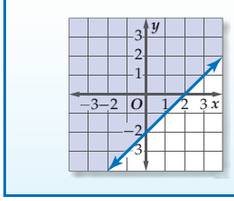
41) **تحدٍّ:** مثّل المتباينة الآتية بيانيًا: انظر الهامش

$$y > \begin{cases} |x + 1|\ , & x \le -4 \\ -|x|\ , & -4 < x < 2 \\ |x - 4|\ , & x \ge 2 \end{cases}$$

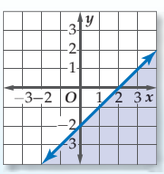
42) **اكتشف الخطأ:** مثّل كلٌّ من زيد ومصعب المتباينة $2 \ge y - x$ بيانيًا، أيُّهما تمثيله البياني صحيح؟ فسّر إجابتك.

42) مصعب؛ $x - y \ge 2$ يمكن كتابتها على الصورة $y \le x - 2$

زيد



مصعب

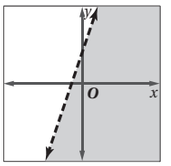


43) **تبرير:** متى يمكن تظليل منطقتين مختلفتين عند تمثيل متباينة القيمة المطلقة؟
فسر إجابتك. إجابة ممكنة: عندما تكون y و x كلتاهما داخل القيمة المطلقة، ومثال على ذلك $|x| \le |y|$.
وعند حدوث هذا يجب أن يقع حَلّ هذه المتباينة في منطقتين مختلفتين.

44) **اكتب:** اذكر حالةً لمتباينة قيمة مطلقة ليس لها حل. فسّر إجابتك.
إجابة ممكنة: $|y| < 0$. وحتى يكون لهذه المتباينة حَلّ، فإن القيمة المطلقة لـ y يجب أن تكون أقل من 0 ، وهذا مستحيل.

تدريب على اختبار معياري

45) ما المتباينة التي تمثيلها البياني كما في الشكل أدناه؟ **A**



A $y < 3x + 2$
B $y \le 3x + 2$
C $y > 3x + 2$
D $y \ge 3x + 2$

46) أيُّ الدوال الآتية مداها هو $\{y \mid y \le 0\}$؟ **D**

A $f(x) = -x$
B $f(x) = [\![x]\!]$
C $f(x) = |x|$
D $f(x) = -|x|$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-1) للتمارين 49 – 47 انظر ملحق الإجابات

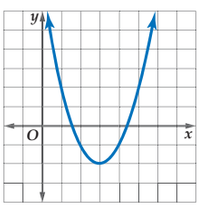
47) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \le x \le 3 \\ -2x, & x > 3 \end{cases}$

48) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ 2x, & -2 \le x \le 2 \\ -3x, & x > 2 \end{cases}$

49) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le -2 \\ x + 1, & 0 < x \le 6 \\ x - 5, & x > 6 \end{cases}$

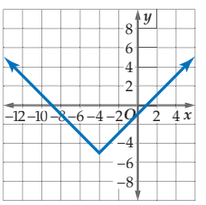
اكتب معادلة (قاعدة) كل دالة ممثلة بيانيًّا في كل شكل أدناه: (الدرس 5-1)

50)



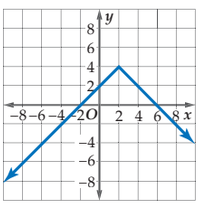
$y = (x - 3)^2 - 2$

51)



$y = |x + 4| - 5$

52)



$y = -|x - 2| + 4$

مراجعة المتطلبات السابقة

مثّل كل معادلة خطيّة مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 55 – 53 انظر الهامش

53) $y = 2x - 8$

54) $y = -\frac{3}{4}x + 2$

55) $3y - 4x = 24$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا اختلط الأمر بين المعادلات والمتباينات على بعض الطلبة،

فقم بحثّهم على مناقشة أوجه الشبه والاختلاف بين حَلّ المتباينات، وحَلّ المعادلات.

4 التقويم

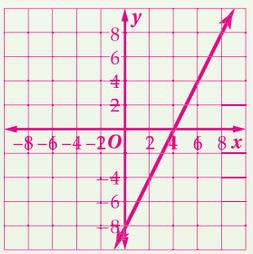
التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة كتابة الإجابة على السؤال: متى يكون حد المتباينة خطًّا متقطعًا، ومتى يكون خطًّا متصلًا؟

التقويم التكويني
تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 7-1,6-1 بإعطائهم اختبارًا قصيرًا 4 من مصادر الفصل 1.

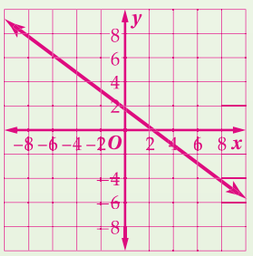
تنبيه !

تجنب الأخطاء اطلب إلى الطلبة أن يشرحوا كيف يمكنهم من خلال النظر إلى المتباينة التي أحد طرفيها y ، أن يحددوا إذا كانت المنطقة المظللة تقع فوق الحد أو تحته، أيضًا إذا كان الحد خطًّا متقطعًا أو متصلًا .
يكون التظليل تحت الحد في المتباينة «أصغر من»، بينما يكون التظليل فوق الحد في المتباينة «أكبر من»، ويكون الحد متصلًا إذا تضمنت المتباينة علاقة المساواة، وإلا فيكون متقطعًا.

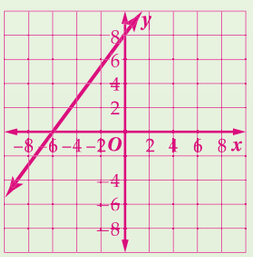
53)



54)



55)



1-8 حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا
Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

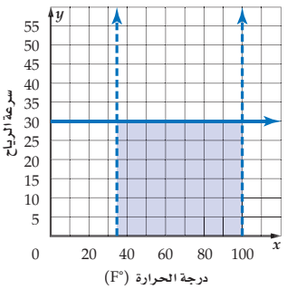
فيما سبق
درستُ حَلّ نظام من معادلتين خطيتين بيانيًا.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أحلّ نظام متباينات خطية بيانيًا.
- أحدّد إحداثيات النقاط التي تُمثّل رؤوس منطقة الحلّ.

المفردات الأساسية
نظام المتباينات الخطية
system of linear inequalities
منطقة الحلّ المحتملة
feasible region

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
عند إطلاق المركبات الفضائية تؤخذ الحالة الجوية في الاعتبار، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وألّا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدةً. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظامٍ من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.



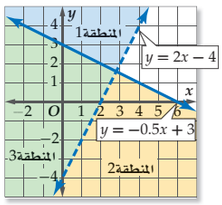
نظام المتباينات الخطية حلّ نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

مفهوم أساسي حَلّ أنظمة المتباينات الخطية
أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 مثّل كل متباينة في النظام بيانيًا، وظلّل منطقة الحلّ.

الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حَلّ متباينات النظام، والتي تُمثّل منطقة الحَلّ المحتملة للنظام.

مثال 1 مناطق الحلّ المتقاطعة
حُلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًا:
$y > 2x - 4$
$y \le -0.5x + 3$



حلُّ المتباينة $y > 2x - 4$ ← المنطقتين 1 , 3
حلُّ المتباينة $y \le -0.5x + 3$ ← المنطقتين 2 , 3
المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتَي حَلّ المتباينتين . وعليه؛ فتكون هي منطقة الحَلّ المحتملة للنظام.

تحقق:
لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة الحل المحتملة للنظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار. والتحقق من صحة الحَلّ بتعويض (0, 0) بدلًا من x, y في كلتا المتباينتين.

$y > 2x - 4$ | $y \le -0.5x + 3$
$0 \stackrel{?}{>} 2(0) - 4$ | $0 \stackrel{?}{\le} -0.5(0) + 3$
$0 \stackrel{?}{>} 0 - 4$ | $0 \stackrel{?}{\le} 0 + 3$
$0 > -4$ ✓ | $0 \le 3$ ✓

تأكد
حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا: للتدريبين 1A, 1B انظر ملحق الإجابات

(1A) $y \le -2x + 5$ ، $y > -\frac{1}{4}x - 6$

(1B) $y \ge |x|$ ، $y < \frac{4}{3}x + 5$

1-8 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-8
حَلّ نظام معادلتين خطيتين بيانيًّا.

الدرس 1-8
حَلّ نظام متباينات خطية بيانيًّا.
تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحَلّ.

ما بعد الدرس 1-8
استعمال البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحَلّ الأمثل لمسائل حياتية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- ماذا يعني الرمز "°F" ؟ يعني ان درجات الحرارة مقيسة حسب المقياس الفهرنهايتي .
- لماذا لم يُمثّل المستقيم الأفقي بخط منقط؟
لأن سرعة الرياح قد تصل إلى 30 عقدة.
- هل الشرط " درجة الحرارة 65°F، وسرعة الرياح 34 عقدة" يقع في المنطقة المظللة؟ وضح إجابتك. لا؛ لأن سرعة الرياح أكبر من 30 عقدة .

نظام المتباينات الخطية
المثالان 1,2 يُبيّنان كيفية حَلّ نظام متباينات خطية.

مصادر الدرس 1-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (72)	• تنويع التعليم، ص (72 , 74 , 75)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

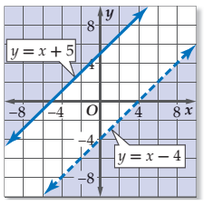
قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويُرمز إليها بأحد الرمزين Ø ، أو { }.

يمكن ألَّا تتقاطع منطقتا حَلّ متباينتين، وعليه فلا يوجد حَلّ للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحَلّ هي المجموعة الخالية.

مثال 2 مناطق الحل غير المتقاطعة



حُلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$y \geq x + 5$

$y < x - 4$

مثّل المتباينتين بيانيًّا، وبما أن منطقتَي الحَلّ لا تتقاطعان، فإنه لا توجد نقاط مشتركة بينهما؛ لذا فليس للنظام حَلّ. ومجموعة الحلّ هي المجموعة الخالية.

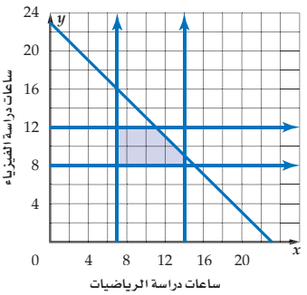
تأكد للتدريبين 2B , 2A انظر ملحق الإجابات

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

(2A) $y \geq -4x + 8$ $y < -4x + 4$

(2B) $y \geq |x|$ $y < 2x - 24$

مثال 3 من واقع الحياة كتابة نظام من المتباينات واستعماله



إدارة الوقت: لدى فاطمة 25h على الأكثر للاستعداد لأداء 3 اختبارات في الرياضيات والفيزياء والتاريخ، فوضعت جدولًا زمنيًّا؛ استعدادًا لذلك، فخصصت 2h لدراسة التاريخ، وخصصت من 7h إلى 14h لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من 8h إلى 12h. اكتب نظام متباينات خطيًّة يُمثّل هذا الموقف، ومثّله بيانيًّا.

الرياضيات: عدد ساعات الدراسة لا تقل عن 7h، ولا تزيد على 14h. $7 \leq x \leq 14$

الفيزياء: عدد ساعات الدراسة لا تقل عن 8h، ولا تزيد على 12h. $8 \leq y \leq 12$

إجمالي وقت الدراسة هو 25h ؛ منها 2h لدراسة مادة التاريخ، ويتبقى 23h على الأكثر لدراسة الرياضيات والفيزياء. $x + y \leq 23$

مثّل المتباينات بيانيًّا. أي زوج مرتب في منطقة الحل المحتملة للنظام يمثّل حلًّا للنظام؟ أحد الحلول الممكنة هو 10h لدراسة الفيزياء، و 12h لدراسة الرياضيات.

تأكد

3) سفر: خرج حسن وبدر في رحلة لزيارة بعض دول مجلس التعاون الخليجي برًّا، فتناوبا قيادة السيارة. إذا كانت فترات قيادة حسن للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن 4h، ولا تزيد على 8h، وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن 2h، ولا تزيد على 5h، وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يوميًّا لا يزيد على 10h، فاكتب نظام متباينات خطية يُمثّل هذا الموقف، ثم مثّله بيانيًّا. انظر الهامش

نظام المتباينات الخطية

مثال 3 يُبيّن كيفية كتابة أنظمة المتباينات الخطية، واستعمالها في حَلّ مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

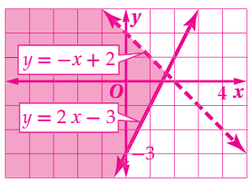
استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حُلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا :

$y \geq 2x - 3$

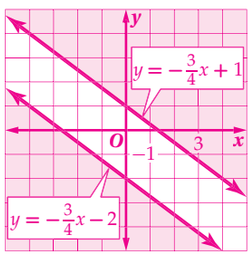
$y < -x + 2$



2 حُلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$y \geq -\frac{3}{4}x + 1$

$y \leq -\frac{3}{4}x - 2$



مجموعة الحل Ø

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي تأكد من أن الطلبة قد أدركوا أن أي نقطة في منطقة حَلّ نظام المتباينات يجب أن يحقق إحداثياها جميع متباينات النظام، واطلب إليهم أن يختاروا نقاطًا من مناطق مختلفة لاختبارها، ثم تحليل النتائج.

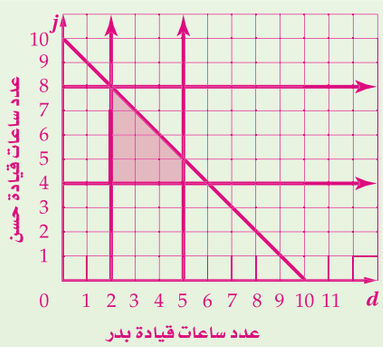
إجابة (تأكد):

3) افترض أن j عدد ساعات قيادة حسن للسيارة، وأن d عدد ساعات قيادة بدر للسيارة .

$j + d \leq 10$

$4 \leq j \leq 8$

$2 \leq d \leq 5$

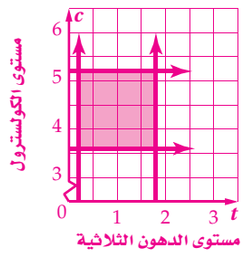


مثال إضافي

3 **صحة:** أوصى طبيب أحد المرضى بالمحافظة على مستوى الكولسترول بأن لا يقل عن 3.6 MMOL/L ولا يزيد عن 5.2 MMOL/L ، ومستوى الدهون الثلاثية بأن لا يقل عن 0.2 MMOL/L ولا يزيد عن 1.8 MMOL/L ، اكتب نظام متباينات، ومثله بيانيًّا مفترضًا أن مستوى الكولسترول هو c، ومستوى الدهون الثلاثية هو t.

$3.6 \le c \le 5.2$

$0.2 \le t \le 1.8$



إيجاد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة

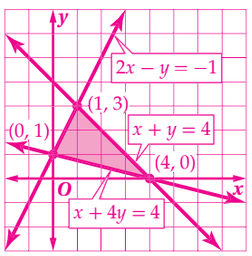
مثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة.

مثال إضافي

4 أوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحَلّ الناتجة عن التّمثيل البياني للنظام الآتي:

$2x - y \ge -1, x + y \le 4,$

$x + 4y \ge 4.$



إجابات (تأكد):

(4A) $(8, -4), (-3, 3), \left(\frac{4}{7}, -\frac{54}{7}\right)$

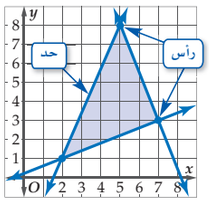
(4B) $(-2, 1), (3, 3), (7, -1)$

إرشادات للدراسة

حد المتباينة

إذا احتوت المتباينة على رمز $>$ أو $<$، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثل الحد بخطٍّ متقطع.

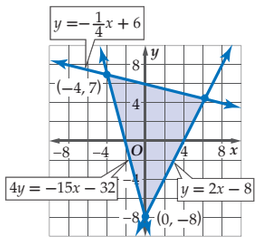
إيجاد رؤوس منطقة الحل المحتملة ينتج أحيانًا عن التَّمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلَّع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة؛ بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحدّدة للمنطقة (الحدود).



مثال 4 إيجاد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة

أوجد رؤوس منطقة الحَلّ الناتجة عن التَّمثيل البياني للنظام الآتي:

$y \ge 2x - 8, y \le -\frac{1}{4}x + 6, 4y \ge -15x - 32$.



الخطوة 1 مثّل كل متباينة بيانيًّا. وبالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن إيجاد رأسين من رؤوس منطقة الحل وهما الزوجان المرتبان $(0, -8)$, $(-4, 7)$. ولإيجاد الرأس الثالث نحلّ نظام المعادلات الخطية:

$y = 2x - 8$, $y = -\frac{1}{4}x + 6$.

الخطوة 2 عوِّض عن y بقيمتها في المعادلة الثانية.

بالتعويض عن y بـ $2x - 8$: $2x - 8 = -\frac{1}{4}x + 6$

بإضافة 8 لكلا الطرفين: $2x = -\frac{1}{4}x + 14$

بإضافة $\frac{1}{4}x$ لكلا الطرفين: $\frac{9}{4}x = 14$

بقسمة كلا الطرفين على العدد $\frac{9}{4}$: $x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$

الخطوة 3 أوجد قيمة y.

بالتعويض عن x بالعدد $6\frac{2}{9}$: $y = 2\left(6\frac{2}{9}\right) - 8$

خاصية التوزيع: $= 12\frac{4}{9} - 8$

بالتبسيط: $= 4\frac{4}{9}$

تحقق قارن بين الرأسين اللّذين وجدتهما، وبين الرأس الثالث في التَّمثيل البياني، ولاحظ أن الإحداثي x للرأس الثالث محصور بين العددين 7 , 6؛ لذا فإن القيمة $6\frac{2}{9}$ معقولة، وكذلك الإحداثي y محصور بين العددين 5 , 4؛ لذا فإن القيمة $4\frac{4}{9}$ معقولة أيضًا.

رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي $\left(6\frac{2}{9}, 4\frac{4}{9}\right), (0, -8), (-4, 7)$.

تأكد للتدريبين 4A , 4B انظر الهامش

أوجد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة الناتجة عن التَّمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

(4A)
$y \ge -3x - 6$
$2y \ge x - 16$
$11y + 7x \le 12$

(4B)
$5y \le 2x + 9$
$y \le -x + 6$
$9y \ge -2x + 5$

تنويع التعليم

ضمن فوق

إذا أظهر بعض الطلبة فهمًا كافيًا لحَلّ نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا،

فقم بالطلب إليهم كتابة إرشادات لمساعدة غيرهم في تمثيل نظام متباينات بيانيًّا، وإيجاد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة الناتجة بدقة ويسر.

تأكد من فهمك

المثالان 1 , 2 الصفحتان 70, 71

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا: للتمارين 3–1 انظر الهامش

1) $y \le 6$ ، $y > -3 + x$

2) $y \le -3x + 4$ ، $y \ge 2x - 1$

3) $y > -2x + 4$ ، $y \le -3x - 3$

مثال 3 صفحة 71

4) **مشتريات:** خصصت ليلى مبلغًا لا يتجاوز 35 BD لشراء نوعين من الأقلام؛ يُباع الأول في رزم تضم الواحدة منها 10 أقلام، وثمنها 3.5 BD، ويُباع الثاني في رزم تضم الواحدة منها 8 أقلام، وثمنها 2.5 BD. إذا أرادت ليلى شراء 40 قلمًا على الأقل من كلا النوعين. للفرعين a, b انظر الهامش

a) مثّل بيانيًّا نظام المتباينات الذي يُبيّن عدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

b) أعط 3 خيارات ممكنة لعدد الرزم التي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

مثال 4 صفحة 72

أوجد رؤوس منطقة الحل المحتملة الناتجة عن التَّمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: للتمرينين 6, 5 انظر ملحق الإجابات

5) $y \ge 2x + 1$ ، $y \le 8$ ، $4x + 3y \ge 8$

6) $y \ge -2x - 4$ ، $6y \le x + 28$ ، $y \ge 13x - 34$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 الصفحتان 70, 71

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا: للتمارين 15–7 انظر ملحق الإجابات

7) $x < 3$ ، $y \ge -4$

8) $y > 3x - 5$ ، $y \le 4$

9) $y < -3x + 4$ ، $3y + x > -6$

10) $y \ge 0$ ، $y < x$

11) $6x - 2y \ge 12$ ، $3x + 4y > 12$

12) $-8x > -2y - 1$ ، $-4y \ge 2x - 5$

13) $5y < 2x + 10$ ، $y - 4x > 8$

14) $3y - 2x \le -24$ ، $y \ge \frac{2}{3}x - 1$

15) $y > -\frac{2}{5}x + 2$ ، $5y \le -2x - 15$

مثال 3 صفحة 71

16) **عمل جزئي:** يعمل يوسف عملين جزئيين، ويتقاضى عن كل منهما أجرًا؛ فيتقاضى 9 BD عن كل يوم في العمل الأول، و 12 BD عن كل يوم في العمل الثاني. إذا علمت أنه يعمل مدة لا تزيد على 25 يومًا في كلا العملين شهريًّا، فمثّل بيانيًّا نظامًا من متباينتين يُبيّن عدد الأيام التي يعملها في كلٍّ من العملين؛ ليجمع مبلغًا لا يقل عن 925 BD في 8 شهورٍ. انظر ملحق الإجابات

مثال 4 صفحة 72

أوجد رؤوس منطقة الحل المحتملة الناتجة عن التَّمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: للتمارين 22-17 انظر ملحق الإجابات

17) $x \ge 0$ ، $y \ge 0$ ، $x + 2y < 4$

18) $y \ge 3x - 7$ ، $y \le 8$ ، $x + y > 1$

19) $x \le 4$ ، $y > -3x + 12$ ، $y \le 9$

20) $-3x + 4y \le 15$ ، $2y + 5x > -12$ ، $10y + 60 \ge 27x$

21) $8y - 19x < 74$ ، $38y + 26x \le 119$ ، $54y - 12x \ge -198$

22) $6y - 24x \ge -168$ ، $8y + 7x > 10$ ، $20y - 2x \le 64$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	33 - 7 ، 40 ، 53 - 42
ضمن ضمن المتوسط	23 - 7 فردي ، 32 - 26 زوجي ، 36 ، 40 ، 53 - 42
فوق فوق المتوسط	50 - 24 ، (اختياري: 53 - 51)

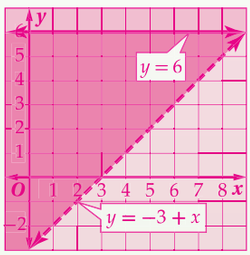
3 تدريب

التقويم التكويني

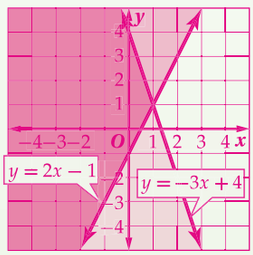
استعمل التمارين 6 - 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

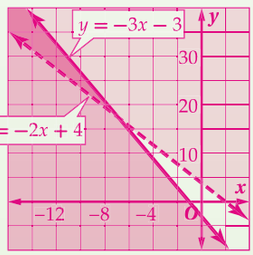
1)



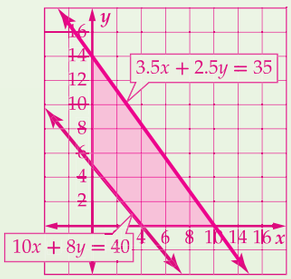
2)



3)



4a)



4b) إجابة ممكنة : 4 رزم من النوع الأول، و 5 رزم من النوع الثاني، أو 5 رزم من النوع الأول، و 6 رزم من النوع الثاني. أو 6 رزم من النوع الأول، و 5 رزم من النوع الثاني.

23 اتصالات: يجري فهد مكالمات هاتفية من هاتفه المحمول مدتها لا تزيد على 800 min، بشرط ألّا يقل عدد دقائق الاتصال نهارًا عن ضعف عددها ليلًا، ولا يقل عدد دقائق الاتصال ليلًا عن 200 min. اكتب نظام متباينات يُمثّل الموقف. انظر الهامش

24) أشجار: تصنف الأشجار في مناطق الغابات الاستوائية تبعًا للارتفاع، ومحيط الساق إلى أربع مجموعات، ويُبيّن الجدول أدناه ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى مناطق الغابات الاستوائية: انظر الهامش

المجموعة	الأشجار الكثيفة	الأشجار شبه الكثيفة	الأشجار المتوسطة الكثافة	الأشجار غير الكثيفة
الارتفاع (ft)	أكثر من 72	56 – 72	40 – 55	أقل من 39
محيط الساق (in)	أكثر من 60	48 – 60	34 – 48	أقل من 33

a. اكتب نظام متباينات خطية يمثّل مدى كلٍّ من الارتفاع h، ومحيط الساق c للأشجار شبه الكثيفة، ومثّله بيانيًّا.

b. ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها 48 ft؟ أوجد محيط ساقها المتوقّع.

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا: للتمارين 33 – 25 انظر ملحق الإجابات

25) $y \geq |2x + 4| - 2$
$3y + x \leq 15$

26) $y \geq |6 - x|$
$|y| \leq 4$

27) $|y| \geq x$
$y < 2x$

28) $y > -3x + 1$
$4y \leq x - 8$
$3x - 5y < 20$

29) $6y + 2x \leq 9$
$2y + 18 \geq 5x$
$y > -4x - 9$

30) $|x| > y$
$y \leq 6$
$y \geq -2$

31) $2x + 3y \geq 6$
$y \leq |x - 6|$

32) $8x + 4y < 10$
$y > |2x - 1|$

33) $x - 3y > 2$
$2x - y < 4$
$2x + 4y \geq -7$

الربط مع واقع الحياة

حثَّ الإسلام على استثمار الوقت والحرص عليه، فقال صلى الله عليه وسلم: "لا تزول قدما عبدٍ يوم القيامة حتى يُسأل عن أربع: عن عمره فيما أفناه وعن علمه ما عمل به، وعن ماله من أين اكتسبه وفيم أنفقه وعن جسمه فيما أبلاه.

رواه الترمذي من حديث ابن مسعود.

34) إدارة الوقت: يستثمر راشد وقت فراغه في ممارسة الرياضة، وتلاوة القرآن. إذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز 20 ساعةً أسبوعيًّا، ويقضي من 4 h إلى 10 h منها في ممارسة الرياضة، ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن 10 h، ولا يزيد على 14 h، فاكتب نظام متباينات خطية يُمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

أوجد رؤوس منطقة الحل المحتملة الناتجة عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: للتمارين 37 – 35 انظر ملحق الإجابات

35) $y \geq 2x - 12$
$y \leq -4x + 20$
$4y - x \leq 8$

36) $y \geq -x - 8$
$2y \geq 3x - 20$
$4y + x \leq 24$

37) $2y - x \geq -20$
$y \geq -3x - 6$
$y \leq -2x + 2$
$y \leq 2x + 14$

38) يريد معلم التربية البدنية أن يختار من 10 إلى 15 لاعبًا، ليشكّل فريقًا على أن يكون اللاعبون من طلاب الصفين الثاني والثالث الثانوي، ويكون عدد اللاعبين من الصف الثالث الثانوي أكثر من لاعبي الصف الثاني الثانوي. انظر ملحق الإجابات

a) اكتب نظام متباينات يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

b) اكتب جميع الاحتمالات الممكنة لعدد اللاعبين من كلا الصفين.

التركيز على المحتوى الرياضي

حَلّ أنظمة المتباينات حَلّ نظام من المتباينات الخطية هو مجموعة من الأزواج المرتبة يحقق كل منها جميع متباينات النظام وتمثيله البياني هو منطقة تحتوي جميع الحلول .

التعليم باستعمال التقنيات

نشرة إلكترونية: اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية؛ لعمل نشرة إلكترونية توضح كيفية تمثيل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا تتضمن كلًّا مما يأتي :

- متى يستعمل مستقيم متصل، أو مستقيم متقطع؛ لتمثيل حد المتباينة.
- كيفية تحديد منطقة التظليل.
- كيفية تفسير التّمثيل البياني للنظام لإيجاد حلوله.

إجابات :

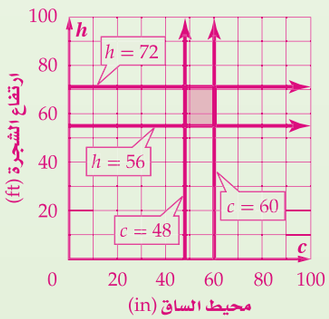
23 افرض أن d تُمثّل عدد دقائق الاتصال نهارًا، وأن n تُمثّل عدد دقائق الاتصال ليلًا. وبما أن مدة المكالمات لا تزيد على 800 min. لذا، فإن رمز المتباينة سيكون ≤ . لذلك، فإن نظام المتباينات هو:

عدد دقائق الاتصال لا تزيد على 800 min: $d + n \leq 800$

عدد دقائق الاتصال نهارًا لا يقل عن ضعف عددها ليلًا: $d \geq 2n$

عدد دقائق الاتصال ليلًا لاتقل عن 200 min: $n \geq 200$

24a) $48 \leq c \leq 60$ ، $56 \leq h \leq 72$



تنويع التعليم

فوق

المتعلمون الفرديون بيِّن للطلبة من خلال تمرين 16 أن أنظمة المتباينات الخطية تستعمل في حَلّ مسائل حياتية. اطلب إليهم أن يبحثوا في الصحف، والمجلات، وفي الإنترنت عن معلومات حياتية، وأن يستعملوها في صياغة أسئلة يمكن حلّها باستعمال أنظمة المتباينات الخطية، وبهذا تكون قد ساعدتهم على أن يستوعبوا مفهوم حَلّ أنظمة المتباينات الخطية.

24b) الأشجار متوسطة الكثافة 34 – 48 in

39 إدارة الأموال: يستثمر علي 10000 BD في مشروعين تجاريين. إذا كان المشروع الأول يدرّ ربحًا سنويًّا نسبته 6%، ويدرُّ المشروع الثاني ربحًا سنويًّا نسبته 10%، فما أقل مبلغ يمكن لعلي استثماره في المشروع الثاني على ألّا يقل ربحه في المشروعين بعد سنة واحدة عن 740 BD؟ انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

40) مسألة مفتوحة: اكتب نظامًا من متباينتين على أن يكون الحَلّ:

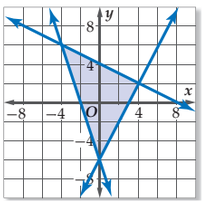
a. في الربع الثالث فقط. إجابة ممكنة: $x < -1, y < -2$

b. غير موجود. إجابة ممكنة: $y > 2, y < -2$

c. واقعًا على مستقيم. إجابة ممكنة: $y \geq x, y \leq x$

d. نقطة واحدة فقط. إجابة ممكنة: $y \geq |x|, y \leq -|x|$؛ الحل هو النقطة $(0, 0)$

41) تحدٍّ: تُمثّل المنطقة المظللة في المستوى الإحداثي المجاور حلًّا لنظامٍ من المتباينات. اكتب هذا النظام.



42) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًّا. صحيحة

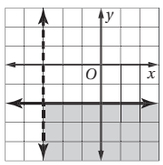
"النظام المكوّن من متباينتين خطيتين؛ إما أن يكون ليس له حل، أو أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول".

43) اكتب: وضّح في خطوات مكتوبة، طريقة تحديد المنطقة المظللة عند حَلّ نظام متباينات خطية بيانيًّا. انظر الهامش

41) إجابة ممكنة:
$y \geq 2x - 6$
$y \leq -0.5x + 4$
$y \geq -3x - 6$

تدريب على اختبار معياري

44) اختر نظام المتباينات فيما يأتي، بحيث يكون حلّه التمثيل البياني أدناه. B



A $y < -2$, $x < -3$

B $y \leq -2$, $x > -3$

C $x \leq -2$, $y > -3$

D $x < -3$, $y < -3$

45) مراجعة: لكي يكون الطالب عضوًا في فرقة العرض العسكري، يجب ألا يقل معدّله التراكمي عن نقطتين، وأن يحضر على الأقل خمسة تمارين بعد الدوام. اختر نظام المتباينات الذي يمثّل هذا الوضع؟ F

F $x \geq 2$, $y \geq 5$

G $x \leq 2$, $y \leq 5$

H $x < 2$, $y < 5$

J $x > 2$, $y > 5$

مراجعة تراكمية

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 6-1) للتمارين 46 – 48 انظر ملحق الإجابات

46) $x + y \leq 6$ **47)** $4x - 3y < 10$ **48)** $5x + 7y \geq -20$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 4-1) للتمرينين 49 , 50 انظر ملحق الإجابات

49) $f(x) = |x - 3|$ **50)** $h(x) = [\![x]\!] - 5$

مراجعة المتطلبات السابقة

إذا كان: $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = 2x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

51) $g(-2)$ -10 **52)** $f(-0.25)$ 4.5 **53)** $g(-0.75)$ -6.25

تنويع التعليم

فوق

توسّع مثّل النقاط $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$ على مستوى إحداثي، وَصِلْ بين كل نقطتين بقطعة مستقيمة لتكوّن منطقة مثلثة. اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يعرّف المنطقة المثلثة.

$y \geq 0$, $y \leq -x + 2$, $y \leq x + 2$

4 التقويم

تعلم لاحق دع الطلبة يطلعوا على الدرس 9-1، ثم يستنتجوا كيف يمكنهم ربط ما تعملوه في هذا الدرس بما يمكن أن يتعلموه في الدرس " 9-1البرمجة الخطية" .

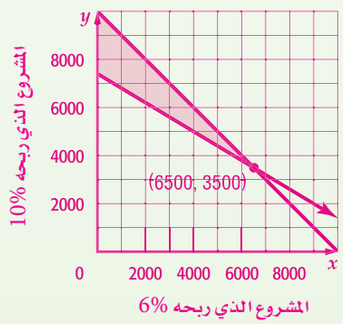
إجابات :

39 افرض أن x تُمثّل المبلغ المستثمر في المشروع الأول الذي يدرُّ ربحًا 6%، وأن y تُمثّل المبلغ المستثمر في المشروع الثاني الذي يدرُّ ربحًا 10%.

إذن نظام المتباينات هو:

مجموع الاستثمار في المشروعين أقل من أو يساوي 10000 BD $x + y \leq 10000$

أرباح المشروعين لا يقل عن 740 BD $0.06x + 0.10y \geq 740$



من نقاط تقاطع الرسم، فإن أقل مبلغ للربح هو 3500 BD .

43) إجابة ممكنة:

- ظلل منطقة حَلّ كل متباينة في النظام باستعمال نقطة اختبار.
- استعمل النقطة $(0, 0)$ كنقطة اختبار إذا كان حد المتباينة (المستقيم المُمثّل للمعادلة المرافقة للمتباينة) لا يمر بها. أما إذا كان حد المتباينة يمر بالنقطة $(0, 0)$ ، فاستعمل أي نقطة أخرى.
- ظلّل منطقة الحَلّ المحتملة، وهي المنطقة الناتجة من تقاطع مناطق حَلّ المتباينات.

1 التركيز

الهدف: استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لحَلّ أنظمة متباينات خطية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية .

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزِّع الطلبة في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم حُلّ نظام المتباينتين الخطيتين في المثال.

اطلب إلى كل مجموعة تتبع خطوات المثال من خلال التطبيق العملي للخطوات .

وضح للطلبة أنه عند نقلهم التّمثيل البياني من الآلة الحاسبة البيانية إلى ورقة يجب عليهم أن يرسموا محوري الإحداثيات، وأن يوضحوا على التّمثيل البياني نقاط التقاطع بين المستقيمات، ونقاط تقاطع كل مستقيم مع المحورين.

تدريب: اطلب إلى الطلبة حَلّ التمارين 1-9.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 6 ؛ لتقويم مدى قدرة الطلبة على استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل نظام متباينات خطية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلبة عن عدد نقاط منطقة الحَلّ في المثال. عدد لا نهائي من النقاط

معمل الآلة الحاسبة البيانية:

أنظمة المتباينات الخطية

Systems of Linear inequlities

الهدف
أستعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لحَلّ أنظمة متباينات خطية.

يمكنك تمثيل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية مستعملًا Y = menu. كما يمكنك أيضًا اختيار أساليب مختلفة للتمثيل البياني للتظليل فوق المستقيم أو تحته.

مثال حَلّ نظامٍ من متباينتين خطيتين

استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل النظام المكوّن من المتباينتين الآتيتين بيانيًّا في نافذة العرض القياسية:

$y \geq -3x + 4$

$y \leq 2x - 1$

الخطوة 1 أدخل $-3x + 4$ بوصفها قيمة لـ **Y1**. وبما أن y أكبر من $-3x + 4$، فظلِّل المنطقة الواقعة فوق المستقيم بالضغط على المفاتيح:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶

(–) 3 X,T,θ,n + 4 ENTER

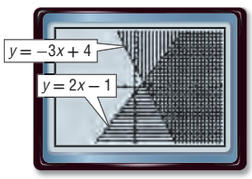
الخطوة 2 أدخل $2x - 1$ بوصفها قيمة لـ **Y2**. وبما أن y أقل من $2x - 1$ ، فظلِّل المنطقة تحت المستقيم بالضغط على المفاتيح:

◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2

X,T,θ,n – 1 ENTER

الخطوة 3 اعرض التَّمثيل البياني على شاشة العرض القياسية، وذلك بالضغط على:

ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

لاحظ نمط التظليل فوق المستقيم $y = -3x + 4$ ، وتحت المستقيم $y = 2x - 1$.

إن منطقة الحَلّ المحتملة هي المنطقة الناتجة عن تقاطع نمطَي التظليل، وهي المنطقة التي تحوي جميع النقاط التي تحقق النظام $y \leq 2x - 1$, $y \geq -3x + 4$.

تمارين:

استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لحلِّ كل نظام من متباينتين مما يأتي: للتمارين 9–1 انظر ملحق الإجابات

1) $y \geq 3$ ، $y \leq -x + 1$

2) $y \geq -4x$ ، $y \leq -5$

3) $y \geq 2 - x$ ، $y \leq x + 3$

4) $y \geq 2x + 1$ ، $y \leq -x - 1$

5) $2y \geq 3x - 1$ ، $3y \leq -x + 7$

6) $y + 5x \geq 12$ ، $y - 3 \leq 10$

7) $5y + 3x \geq 11$ ، $3y - x \leq -8$

8) $10y - 7x \geq -19$ ، $7y - 5x \leq 11$

9) $\frac{1}{6}y - x \geq -3$ ، $\frac{1}{5}y + x \leq 7$

التوسّع في المفهوم

اسأل:

- متى تنتمي نقطة تقاطع حدَّي المتباينتين إلى منطقة الحَلّ؟

تنتمي نقطة التقاطع إلى منطقة الحَلّ في حالة كون الحدين متصلين (غير متقطعين)؛ أي في حالة احتواء المتباينات على أحد الرمزين ≥ أو ≤ .

1-9 البرمجة الخطية
Linear Programming

فيما سبق
درست حَلّ أنظمة متباينات خطية بيانيًا.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
- أستعمل البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحَل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات الأساسية
القيود constraints
البرمجة الخطية linear programming
محدودة bounded
غير محدودة unbounded
الحلُ الأمثل optimize

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يقوم قسم الإنتاج بشركة ألومنيوم البحرين (ألبا) يوميًّا بصب نوعين من الألومنيوم المنصهر في قوالب على دفعات كما هو مبين في الجدول أدناه.

عدد القوالب التي يصب فيها الألومنيوم المنصهر يوميًّا			
النوع	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة القالب الواحد (BD)
الأول	9	11	36000
الثاني	12	18	135000

إذا كان عدد القوالب المطلوب إنتاجها من النوعين لا يقل عن 25 قالبًا يوميًّا، فكم قالبًا من كل نوع يجب إنتاجه يوميًّا لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

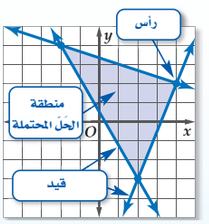
هناك **قيود** أو حدود على إنتاج الشركة ناجمة عن الطلب، والشحن وكفاءة المشغل، وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى تواجه الشركات في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة، وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه القضايا يمكن أن توجه عادة باستعمال البرمجة الخطية.

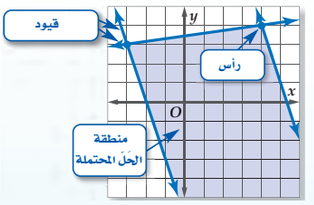
البرمجة الخطية هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالةٍ ما تحت قيودٍ معينةٍ، كلٌّ منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة.

مفهوم أساسي — منطقة الحَلّ المحتملة

أضف إلى مطويتك



تكون منطقة الحَلّ المحتملة **محدودة** أو محصورة بقيود، وتظهر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة عادةً عند رؤوس منطقة الحَلّ.



تكون منطقة الحَلّ المحتملة مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة**، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

مصادر الدرس 1-9

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (79)	• تنويع التعليم، ص (82 , 79)	• تنويع التعليم، ص (82)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

1-9 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-9
حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا.

الدرس 1-9
إيجاد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
استعمال البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحَلّ الأمثل لمسائل حياتية.

ما بعد الدرس 1-9
صياغة أنظمة معادلات خطية في أكثر من مجهولين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- ما تكلفة إنتاج 10 قوالب من النوع الأول؟ BD360000
- أيهما أقل تكلفة، إنتاج قالب من النوع الأول أم قالب من النوع الثاني؟ إنتاج قالب من النوع الأول
- هل تستطيع الشركة إنتاج 20 قالب من النوع الأول في الأسبوع الواحد؟ وضح إجابتك. لا؛ أكبر عدد من القوالب من النوع الأول يمكن إنتاجه هو 11 قالب

القيمة العظمى والقيمة الصغرى

المثالان 1, 2 يُبيّنان كيفية إيجاد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لدالة في منطقة حَلّ محتملة محدودة، وفي منطقة حَلّ محتملة غير محدودة.

التقويم التكويني

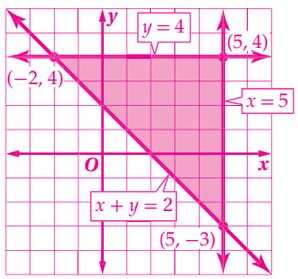
استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، وحدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، ثم أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$x \le 5$ ، $x + y \ge 2$

$y \le 4$ ، $f(x,y) = 3x - 2y$



للدالة قيمة عظمى عند (−3 , 5)، وهي 21 ، ولها قيمة صغرى عند (4 , −2) ، وهي −14

2 مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، وحدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، ثم أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$-x + 2y \le 2$

$x - 2y \le 4$

$x + y \ge -2$

$f(x,y) = 2x + 3y$

رؤوس منطقة الحل المحتملة هي: (0 , −2), (−2 , 0) ، لا يوجد قيمة عظمى، وتوجد قيمة صغرى عند النقطة (−2 , 0) ، وهي −6 .

انظر الهامش للتمثيل البياني.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x , y . وتُقرأ f of x و y

مثال 1 منطقة الحَل المحتملة المحدودة

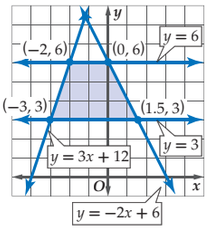
مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$3 \le y \le 6$

$y \le 3x + 12$

$y \le -2x + 6$

$f(x, y) = 4x - 2y$



الخطوة 1 مثّل المتباينات بيانيًّا، وحدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة.

الخطوة 2 أوجد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	← قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 ، وتكون عند النقطة (1.5, 3)، والقيمة الصغرى للدالة تساوي 20− ، وتكون عند النقطة (−2, 6).

تأكد للتدريبين **1A,1B** انظر ملحق الإجابات

مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

(1A

$-2 \le x \le 6$

$1 \le y \le 5$

$y \le x + 3$

$f(x, y) = -5x + 2y$

(1B

$-6 \le y \le -2$

$y \le -x + 2$

$y \le 2x + 2$

$f(x, y) = 6x + 4y$

تنبيه!

القيمة العظمى

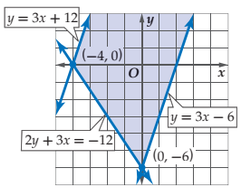
لا تفترض عدم وجود قيم عظمى إذا كانت منطقة الحل المحتملة غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدد ما إذا كانت هناك قيمة عظمى أو صغرى.

إذا نتج عن التَّمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ غير مغلقة، فإن منطقة الحَلّ المحتملة تكون غير محدودة.

مثال 2 منطقة الحَل المحتملة غير المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا ، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة (إن وجدت).

$2y + 3x \ge -12,\ y \le 3x + 12,\ y \ge 3x - 6,\ f(x, y) = 9x - 6y$:



مثّل المتباينات بيانيًّا، وأوجد قيمة الدالة عند رؤوس منطقة الحل المحتملة.

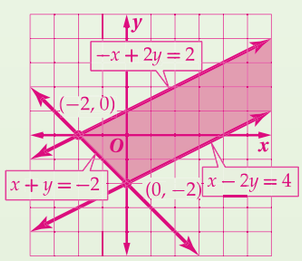
(x, y)	$9x - 6y$	$f(x, y)$
$(-4, 0)$	$9(-4) - 6(0)$	-36
$(0, -6)$	$9(0) - 6(-6)$	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36، وتكون عند النقطة (6− ,0)، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل المحتملة وهي (8 ,0)، وتُعطى القيمة 48− للدالة وهي أقل من 36−.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حُلّ الأمثلة باستعمال السبورة التفاعلية، ثم قم بحفظ الحلول على شكل أوراق ملاحظات، وأرسلها إلى الطلبة إلكترونيًّا؛ ليستعملوها كمرجع إضافي خارج الصف.

إجابة المثال الإضافي 2 :



تأكد

مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة (إن وجدت). للتدريبين 2A, 2B انظر ملحق الإجابات

(2A

$y \le 8$
$y \ge -x + 4$
$y \le -x + 10$
$f(x, y) = -6x + 8y$

(2B

$y \ge x - 9$
$y \le -4x + 16$
$y \ge -4x - 4$
$f(x, y) = 10x + 7y$

إيجاد الحلّ الأمثل يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحلّ الأمثل**، ويمكن الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

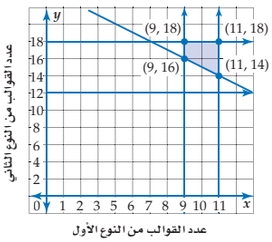
استعمال البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحلّ الأمثل

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.
الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.
الخطوة 3 مثّل نظام المتباينات بيانيًّا.
الخطوة 4 أوجد رؤوس منطقة الحلّ المحتملة.
الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.
الخطوة 6 عوّض إحداثيات الرؤوس في الدالة.
الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

أعمال: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية هذا الدرس، استعمل البرمجة الخطية؛ لإيجاد عدد القوالب التي يفترض إنتاجها يوميًّا؛ لتكون التكلفة أقل ما يمكن.



الخطوة 1 افترض أن a هو عدد القوالب من النوع الأول، و v هو عدد القوالب من النوع الثاني.

الخطوة 2
$9 \le a \le 11$
$12 \le v \le 18$
$a + v \ge 25$

الخطوتان 3 و 4 مثّل نظام المتباينات بيانيًّا كما في الشكل أعلاه، ثم حدّد رؤوس منطقة الحلّ المحتملة.

الخطوة 5 الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي $f(a, v) = 36000a + 135000v$

الخطوة 6

(a, v)	$36000a + 135000v$	$f(a, v)$	
(9, 16)	36000(9) + 135000(16)	2484000	
(9, 18)	36000(9) + 135000(18)	2754000	
(11, 14)	36000(11) + 135000(14)	2286000	← قيمة صغرى
(11, 18)	36000(11) + 135000(18)	2826000	← قيمة عظمى

الخطوة 7 يجب إنتاج 11 قالبًا من النوع الأول، و 14 قالبًا من النوع الثاني يوميًّا لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

الربط مع واقع الحياة

شهد القطاع الصناعي في مملكة البحرين تطورًا ملحوظًا حتى وصلت منتجات مصانع البحرين إلى معظم دول العالم، فكانت البحرين من أوائل الدول العالمية التي دخلت مجال صناعة الألومنيوم.

إرشادات للدراسة

منطقية الحلّ
اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

إيجاد الحَلّ الأمثل

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال البرمجة الخطية؛ لإيجاد الحَلّ الأمثل لمسائل حياتية.

مثال إضافي

3 **صناعة:** ينتج مشغل نوعين من الحقائب، ويتطلب صنع الحقيبة الواحدة من النوع الأول 4yd من القماش، و 1yd من الجلد. بينما يتطلب صنع الحقيبة الواحدة من النوع الثاني 2yd من القماش، و 3yd من الجلد. إذا توفر في المشغل 104yd من القماش، و 56yd من الجلد في أحد الأيام، فكم عليه أن ينتج من كل نوع؛ ليحصل على أكبر ربح، إذا كان ربحه في الحقيبة من النوع الأول BD2، وربحه في الحقيبة من النوع الثاني BD3.5؟ 20 حقيبة من النوع الأول، و 12 حقيبة من النوع الثاني.

التركيز في المحتوى الرياضي

البرمجة الخطية هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة على منطقة محددة بمتباينات خطية، وهي طريقة مفيدة جدًّا في حَلّ العديد من المسائل الحياتية.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في تمييز منطقة الحَلّ المحتملة للنظام،

فقم بالطلب إليهم استعمال ألوان مختلفة؛ لتظليل منطقة حَلّ كل متباينة بلون مختلف عن مناطق حَلّ المتباينات الأخرى، مما يساعد على فهم العلاقة بين مناطق حَلّ المتباينات المختلفة.

تنبيه!

تجنب الأخطاء من الضروري لجميع الطلبة اتباع الخطوات السبعة الواردة صفحة 64 عند استعمال البرمجة الخطية لحَلّ مسائل حياتية. لذا، حثهم على توضيح خطوات حلّهم وعنونتها.

تأكد

3) مجوهرات: يصوغ فهد من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. إذا كانت أجرة صياغة العقد 50 BD، وأجرة صياغة السوار 30 BD، وصاغ في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعةً من كلا النوعين عليه صياغتها؛ ليحصل على أكبر أجر؟ **25 عقدًا وَ 40 سوارًا**

تأكد من فهمك

المثالان 1 , 2
صفحة 78

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة (إن وجدت): للتمارين 6–1 انظر الهامش

1)
$y \le 5$
$x \le 4$
$y \ge -x$
$f(x, y) = 5x - 2y$

2)
$y \le -3x + 6$
$-y \le x$
$y \le 3$
$f(x, y) = 8x + 4y$

3)
$y \ge -3x + 2$
$9x + 3y \le 24$
$y \ge -4$
$f(x, y) = 2x + 14y$

4)
$-2 \le y \le 6$
$3y \le 4x + 26$
$y \le -2x + 2$
$f(x, y) = -3x - 6y$

5)
$-3 \le y \le 7$
$4y \ge 4x - 8$
$6y + 3x \le 24$
$f(x, y) = -12x + 9y$

6)
$y \le 2x + 6$
$y \ge 2x - 8$
$y \ge -2x - 18$
$f(x, y) = 5x - 4y$

مثال 3
صفحة 79

7) ثقافة مالية: يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات 200 h على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة 90 h على الأكثر، والجدول أدناه يُبيّن عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج، وضبط جودة نوعين من الغسالات.

الزمن اللازم لإنتاج الغسالة

	قسم الإنتاج	قسم ضبط الجودة
النوع الأول	5 h	2 h
النوع الثاني	4 h	2 h

a) اكتب نظام متباينات يمثّل هذا الموقف.

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا، وحدّد منطقة الحَلّ المحتملة. انظر ملحق الإجابات

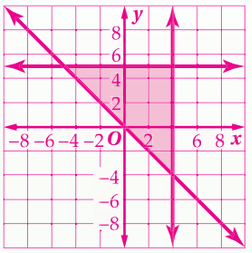
c) حدّد رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة. **(0 , 0) , (40 , 0) , (25 , 20) , (0 , 45)**

d) إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 BD، ومن النوع الثاني 50 BD، فاكتب دالة تُمثّل الربح الكلي لكلا النوعين. $f(x, y) = 80x + 50y$

e) ما عدد الغسالات التي يجب تصنيعها من كل نوع للحصول على أكبر ربح ممكن؟ أوجد قيمته.
40 من النوع الأول ، صفر من النوع الثاني ، 3200 BD

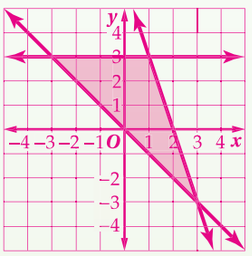
إجابات:

1)



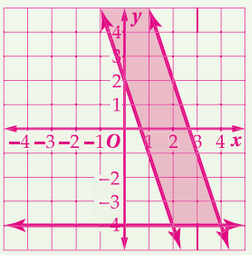
رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(4 , 5), (4 , −4), (−5 , 5)
القيمة العظمى هي 28
القيمة الصغرى هي −35

2)



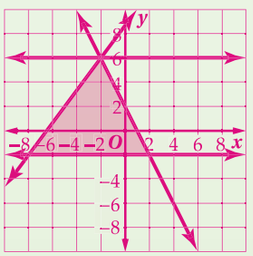
رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(1 , 3), (3 , −3), (−3 , 3)
القيمة العظمى هي 20
القيمة الصغرى هي −12

3)



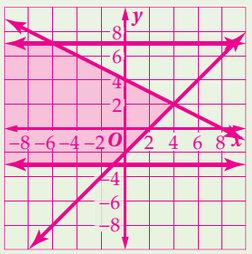
رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(2 , −4), (4 , −4)
لا توجد قيمة عظمى
القيمة الصغرى هي −52

4)



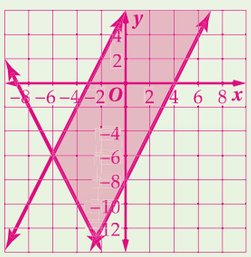
رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(2 , −2), (−8 , −2), (−2 , 6)
القيمة العظمى هي 36
القيمة الصغرى هي −30

5)



رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(4 , 2), (−1 , −3), (−6 , 7)
لا توجد قيمة عظمى
القيمة الصغرى هي −30

6)



رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(−2.5 , −13), (−6 , −6)؛
لا توجد قيمة صغرى
القيمة العظمى هي 39.5

7a) $x \ge 0 , y \ge 0$
$5x + 4y \le 200$
$2x + 2y \le 90$

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1
صفحة 78

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحلّ المحتملة، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة (إن وجدت): للتمارين 16–8 انظر ملحق الإجابات

8)
$-8 \le y \le -2$
$y \le x$
$y \le -3x + 10$
$f(x, y) = 5x + 14y$

9)
$2 \ge x \ge -3$
$y \ge -2x - 6$
$4y \le 2x + 32$
$f(x, y) = -4x - 9y$

10)
$x + 4y \ge 2$
$2x + 4y \le 24$
$2 \le x \le 6$
$f(x, y) = 6x + 7y$

11)
$x \ge -6$
$y + x \le -1$
$2x + 3y \ge -9$
$f(x, y) = -10x - 12y$

12)
$x \ge -8$
$3x + 6y \le 36$
$2y + 12 \ge 3x$
$f(x, y) = 10x - 6y$

13)
$y \ge |x - 2|$
$y \le 8$
$8y + 5x \le 49$
$f(x, y) = -5x - 15y$

14)
$y \le x + 4$
$y \ge x - 4$
$y \le -x + 10$
$y \ge -x - 10$
$f(x, y) = -10x + 9y$

15)
$-4 \le x \le 8$
$-8 \le y \le 6$
$y \ge x - 6$
$4y + 7x \le 31$
$f(x, y) = 12x + 8y$

16)
$-9 \le x \le -3$
$-9 \le y \le -5$
$3y + 12x \le -75$
$f(x, y) = 20x + 8y$

مثال 3
صفحة 79

17) صناعة: ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يُباع النوع الأول بسعر 25 BD، أما النوع الثاني فيُباع بسعر 35 BD. إذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يوميًّا، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 وحدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة التي يتطلب إنتاجها من كل نوع؛ ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟

17) 250 من النوع الأول وَ 200 من النوع الثاني

18) أعمال: يريد مدير مكتب سياحة وسفر طباعة كتيبات ونشرات دعائية. إذا كان الكتيب يتكون من 3 صفحات، والنشرة من صفحتين، وكانت تكلفة طباعة الكتيب 0.8 BD، والنشرة 0.4 BD، وقرّر مدير المكتب ألا يزيد عدد صفحات المطبوعات على 600 صفحة، وأن يطبع ما لا يقل عن 50 كتيبًا، و 150 نشرة، فما عدد الكتيبات والنشرات المطبوعة؛ لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟ **50 كتيبًا وَ 150 نشرة دعائية**

19) شحن: يشحن مصنع منتجاته بالتعاون مع شركة شحن مختصة في حاويات مبردة تبلغ حمولة الواحدة منها 4200 kg، وحجم الحيز الذي توضع فيه البضائع داخلها 480 ft^3، وتوضع المنتجات في أثناء الشحن في صناديق بمقاسين؛ صغيرة حجمها 3 ft^3 وتزن 25 kg، وكبيرة حجمها 5 ft^3، وتزن 50 kg، وأجرة شركة الشحن هي 5 BD عن كل صندوق من المقاس الصغير، و 8 BD عن كل صندوق من المقاس الكبير.

a) أوجد عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين؛ لتكون الأجرة أكبر ما يمكن. **160 صندوقًا صغيرًا، 0 صندوق كبير**

b) ما أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن؟ **800 BD**

الربط مع واقع الحياة

تدوير المواد يحمي الإنسان، ويقلل الاستهلاك، ويرشد الطاقة، ويقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

20) إعادة التدوير: يقوم مصنع بإعادة تدوير ما لايزيد على 1200 Ton من البلاستيك شهريًّا؛ لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لايقل عن 300 Ton في صنع الحاويات الصغيرة وما لا يقل عن 450 Ton في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحًا قدره 17.5 BD لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 20 BD لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة. فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحاويات؛ لتحقيق ذلك الربح؟

23250 BD ، 300 Ton لصنع الحاويات الصغيرة وَ 900 Ton لصنع الحاويات الكبيرة

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 7 - 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

إرشادات لحَلّ المسألة ذكّر الطلبة بأن القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لا تقعان دائمًا عند النقاط التي تكون إحداثياتها أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن؛ لأن القيمتين تعتمدان على الدالة $f(x, y)$.

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	18 - 8 ، 21 - 32
ضمن ضمن المتوسط	17 - 9 فردي ، 19 - 21 ، 23 - 32
فوق فوق المتوسط	19 - 32

4 تقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدهم الدرس 1-8 في فهم موضوع الدرس 1-9 .

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 1-8,1-9 بإعطائهم اختبارًا قصيرًا 5 من مصادر الفصل 1.

إجابة :

25) إذا كانت x عدد القوالب من النوع الأول، y عدد القوالب من النوع الثاني، نكتب نظام المتباينات

$9 \le x \le 11$

$12 \le y \le 18$

$x + y \ge 25$

ثم نُمثّل النظام، ونحدّد رؤوس منطقة الحَلّ، أما الدالة الخطية ذات الصلة التي ترغب الشركة في إيجاد القيمة الصغرى لها هي:

$f(x, y) = 36000\,x + 135000\,y$

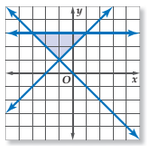
مسائل مهارات التفكير العليا

21) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظام متباينات خطية على أن تكون منطقة الحلّ المحتملة محدودة وتقع في الربع الرابع فقط، ومساحتها 20 وحدةً مربعةً. **إجابة ممكنة:** $4 \le x \le 9\ ,\ -6 \ge y \ge -2$

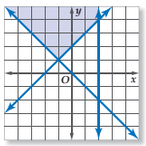
22) **تحدٍّ:** أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمتباينات: $y \ge |x| - 3,\ y \le -|x| + 3,\ x \ge |y|$. **4.5 وحدة مربعة**

23) **أيها لا ينتمي؟** حدِّد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى في كل شكل أدناه، وضح إجابتك.

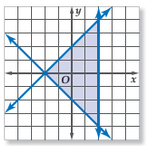
(a



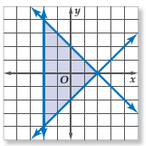
(b



(c



(d



23) منطقة الحَلّ في الشكل b غير محدودة، أما في الأشكال الثلاثة الأخرى فهي محدودة.

24) إجابة ممكنة: صحيحة دائمًا؛ إذا وجدت قيمة صغرى في منطقة غير محدودة فلا يمكن أن يوجد فيها قيمة عظمى؛ لأنه يمكن إيجاد قيمة أكبر من القيمة العظمى المقترحة.

24) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برّر إجابتك.

"المنطقة غير المحدودة لا يكون لها قيمة عظمى وقيمة صغرى في الوقت نفسه".

25) **اكتب:** استعمل المعلومات الواردة في فقرة "لماذا؟" في الصفحة 62 ؛ لشرح كيفية استعمال البرمجة الخطية في جدولة عدد القوالب التي يصب فيها الألومنيوم المنصهر يوميًّا، وتوضيح الدالة الخطية ذات الصلة التي ترغب الشركة في إيجاد القيمة الصغرى لها. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

26) يصنع نجار نوعين من الأثاث، ويستغرق مدة 1 h في صناعة كل قطعة من النوع الأول، ومدة 2 h في صناعة كل قطعة من النوع الثاني. إذا كان النجار ملتزمًا بصناعة ثلاث قطع على الأقل من النوع الأول، وقطعتين على الأقل من النوع الثاني يوميًّا، ولا يمكنه العمل أكثر من 10 ساعات عمل في اليوم، فاكتب نظامًا من المتباينات يُمثّل هذه الحالة.

$x + 2y \le 10\ ،\ y \ge 2\ ،\ x \ge 3$

27) **هندسة:** أيٌّ مما يأتي يُعدُّ وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16\ ,\ y = 3x - 5$؟ **D**

A مستقيمان لهما مقطع المحور y نفسه.

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما مقطع المحور x نفسه.

D مستقيمان متوازيان.

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا: (الدرس 1-7) للتمارين **30 – 28** انظر ملحق الإجابات

28) $3x + 2y \ge 6$ ، $4x - y \ge 2$

29) $4x - 3y < 7$ ، $2y - x < -6$

30) $3y \le 2x - 8$ ، $y \ge \frac{2}{3}x - 1$

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم المارِّ بزوج النقاط في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-2)

31) $(5, 1)$ ، $(8, -4)$ $y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3}$

32) $(3, 2)$ ، $(-3, 5)$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع تعتبر البرمجة الخطية وسيلة فعالة للتعرف على طرق إدارة العمل. اطلب إلى طلبتك إنشاء مشاريع أعمال مثل التي وردت في الأمثلة والتمارين، بحيث يقومون بتحديد التكاليف والأرباح المتوقّعة وتحليل المعلومات للوصول إلى أكبر ربح، ولزيادة حماسهم دعهم يختارون نوع العمل الّذي يفضلون، وليستعملوا الإنترنت كمصدر لمعلوماتهم.

الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

العلاقات والدوال (الدروس 1-1, 1-4, 1-5)

- الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المجال المقابل.
- الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة: هي الدالة التي تُكتب باستعمال أكثر من تعبير.
- تكوّن التحويلات الهندسية على التّمثيل البياني الأم عائلة التّمثيلات البيانية.

كتابة المعادلات الخطية (الدرسان 1-3 و1-2)

- صيغة ميل – مقطع: $y = mx + b$
- صيغة نقطة – ميل: $y - y_1 = m(x - x_1)$

شكل الانتشار وخط الانحدار (الدرس 1-4)

- تستعمل معادلة التنبؤ، للتنبؤ بقيمة متغير إذا عرفت قيمة متغير آخر.
- خط الانحدار هو الخط المطابق الأمثل للبيانات، وهو يساعد الباحثين على معرفة نزعة البيانات وعمل التنبؤات.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا (الدرس 1-7)

- يمكنك تمثيل المتباينة باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 حدّد ما إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم مثله بيانيًا.

الخطوة 2 اختر نقطةً لا تقع على حد المتباينة، واختبرها إذا كانت تحقق المتباينة أو لا.

الخطوة 3 إذا كانت النقطة المختارة تحقق المتباينة، فظلّل المنطقة التي تحوي النقطة، وإلّا فظلّل المنطقة الأخرى.

حُلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا (الدرس 1-8)

- يمكن إيجاد حلّ نظام متباينات خطية عن طريق تمثيل المتباينات بيانيًا، وإيجاد منطقة الحَلّ المحتملة.

البرمجة الخطية (الدرس 1-9)

- إيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة في منطقة على المستوى الإحداثي يحدِّدها نظام متباينات يُمثّل قيودًا على الدالة.
- إيجاد الحّل الأمثل يعني إيجاد السعر، أو الكمية التي تجعل الربح أكبر ما يمكن، أو التكلفة أقل ما يمكن.

مطويتك منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

المجال المقابل ص 12
دالة واحد لواحد ص 12
الدالة الشاملة ص 12
دالة تقابل ص 12
العلاقة المنفصلة ص 13
العلاقة المتصلة ص 13
اختبار الخط الرأسي ص 13
المتغير المستقل ص 15
المتغير التابع ص 15
رمز الدالة ص 15
صيغة ميل - مقطع ص 21
التنبؤ الخطي ص 25
صيغة نقطة - ميل ص 31
الموازي ص 33
العمودي ص 33
بيانات ذات متغيرين ص 40
شكل الانتشار ص 40
ارتباط موجب ص 40
ارتباط سالب ص 40
لا يوجد ارتباط ص 40
الخط المطابق ص 41
معادلة التنبؤ ص 41
معامل الارتباط ص 43
الخط المطابق الأمثل ص 43
خط الانحدار ص 43
الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة
خطية ص 48
الدالة الدرجية ص 48
دالة أكبر عدد صحيح ص 48
دالة القيمة المطلقة ص 50
عائلة التّمثيلات البيانية ص 57
التمثيل البياني الأم ص 57
الدالة الأم ص 57
الدالة الثابتة ص 57
الدالة المحايدة ص 57
الدالة التربيعية ص 57
الإزاحة ص 58
الانعكاس ص 59
محور الانعكاس ص 59
التمدد ص 59
المتباينة الخطية ص 64
الحد ص 64
نظام المتباينات الخطية ص 68
منطقة الحلّ المحتملة ص 68
القيود ص 77
البرمجة الخطية ص 77
محدودة ص 77
غير محدودة ص 77
الحَلّ الأمثل ص 79

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) تكون الدالة (منفصلة، واحدًا لواحد) إذا كان كل عنصر في المجال مرتبطًا بعنصر واحد فقط في المدى.

2) (مجال، مدى) العلاقة هو مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تكوّن العلاقة.

3) الدالة (الثابتة، المحايدة) هي الدالة الخطية $f(x) = x$.

4) تُسمى الدالة التي تكتب باستعمال تعبيرين أو أكثر دالة (خطية، معرفة بأكثر من قاعدة).

5) البيانات ذات المتغيّرين المُمثّلة على شكل نقاط في المستوى الإحداثي تُسمى (شكل الانتشار، الخط المطابق)

أكمل كل عبارة مما يأتي بالمفردة المناسبة من القائمة أعلاه:

6) _____ هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة تحت شروط معينة يُعبّر عنها بنظام من المتباينات. البرمجة الخطية

7) إيجاد _____ يعني إيجاد السعر الأفضل أو التكلفة الأنسب باستعمال البرمجة الخطية. الحَلّ الأمثل

8) منطقة الحلّ المفتوحة تُسمى _____. غير المحدودة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبة في حَلّ الأسئلة 8-1، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل 1.

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي الكلمات المتقاطعة ، والحروف المبعثرة ، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن الكلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت، أو على أوراق عمل مطبوعة.

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتأكد من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

اقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم أثناء حلّهم أسئلة دليل الدراسة والمراجعة. وبيّن لهم أن مطوياتهم يمكن أن تكون وسيلة مناسبة للمراجعة السريعة أثناء دراستهم استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

مداخلة إن كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها التمارين، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

بناء الاختبارات
التقـــويم

إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل من (صفحة 88 – 84) يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات؛ لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا، أو على جزء من الفصل الذي مازال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

إجابات:

9) المجال = {7 , 5 , 3 , 1}،
المدى = {8 , 6 , 4 , 2}،
دالة واحد لواحد، شاملة، تقابل.

10) المجال = {5 , 4 , 2 , 0 , −3}،
المدى = {5 , 4 , 2 , 0}،
دالة، ليست واحد لواحد، شاملة، ليست تقابل.

11) المجال = {3 , 1 , −2 , −4}،
المدى = {5 , 3 , 1 , −4}،
ليست دالة.

16) المجال = مجموعة الأعداد الطبيعية،
المدى = { ... , 41 , 37 , 33 , 29}،
دالة، منفصلة.

مراجعة الدروس

1-1 العلاقات والدوال (الصفحات 19-12)

حدّد مجال ومدى كل علاقة مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانت تمثّل دالة أم لا؟ وهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟
للتمارين 11-9 انظر الهامش

9) {(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)}

10) {(−3, 0), (0, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 2)}

11) {(−4, 1), (3, 3), (1, 1), (−2, 5), (3, −4)}

إذا كانت $f(x) = -3x + 2$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

12) $f(4)$ -10 **13)** $f(0)$ 2

14) $f(-a)$ $3a + 2$ **15)** $f(2w)$ $-6w + 2$

16) مناسبات: تتقاضى مؤسسة لتجهيز المناسبات 25 BD عن توصيل اللوازم لمكان المناسبة، و 4 BD أجرةً يوميةً عن كل طاولة. ويمكن تمثيل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند استئجار x طاولة بالمعادلة $y = 4x + 25$. أوجد مجال هذه المعادلة ومداها، ثم حدّد ما إذا كانت المعادلة دالة أم لا، وهل هي متصلة أم منفصلة؟ انظر الهامش

مثال 1

حدّد مجال ومدى العلاقة: {(−4, 3), (−1, 0), (−2, 4), (3, −1), (2, 6)}، ثم حدّد إن كانت تمثّل دالة أو لا، وهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

المجال = {3, 0, 4, −1, 6}، المدى = {3, 0, 4, −1, −2, 2, −4}

كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل؛ ممَّا يعني أن العلاقة تُمثّل دالة. والعناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المدى، إذن الدالة واحد لواحد.

المجال المقابل = المدى، إذن الدالة شاملة.

بما أن الدالة واحد لواحد وشاملة، إذن هي تقابل.

مثال 2

إذا كانت $f(x) = 4x - 3$، فأوجد $f(-2)$.

عوض عن x بـ -3 $f(-2) = 4(-2) - 3$
بالضرب $= -8 - 3$
بالتبسيط $= -11$

1-2 كتابة المعادلات بصيغة ميل - مقطع (الصفحات 30-21)

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الّذي يحقق الشروط في كل مما يأتي:

17) الميل 2−، ويمر بالنقطة $(-3, -5)$ $y = -2x - 11$

18) الميل $\frac{2}{5}$، ويمر بالنقطة $(-3, -1)$ $y = -2x - 11$

19) يمر بالنقطتين $(-2, 4)$ ، $(0, 8)$ $y = 2x + 8$

20) يمر بالنقطتين $(3, 5)$ و $(-1, 5)$ $y = 5$

21) أسماك الزينة: اشترى صالح حوضًا للأسماك بسعر 30 BD، وكانت التكلفة الشهرية للعناية بالحوض 5 BD. اكتب معادلة تمثّل التكلفة الكلية لحوض الأسماك بعد x من الأشهر. $y = 5x + 30$

مثال 3

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (9−, 0) ، (5, 2−)، ثم اكتب معادلته.

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$(x_1, y_1) = (-2, 5)$، $(x_2, y_2) = (0, -9)$ $= \frac{-9 - 5}{0 - (-2)}$
بالتبسيط $= \frac{-14}{2} = -7$

اكتب المعادلة.

صيغة نقطة – ميل $y - y_1 = m(x - x_1)$
بالتعويض $y - 5 = -7(x - (-2))$
بالتبسيط $y - 5 = -7(x + 2)$
خاصية التوزيع $y - 5 = -7x - 14$
بإضافة 5 لكل طرف $y = -7x - 9$

إذن، المعادلة هي $y = -7x - 9$.

1-3 كتابة المعادلات بصيغة نقطة - ميل (الصفحات 31-38)

اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل للمستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

22) الميل 5، ويمر بالنقطة (6, 3) $y-3=5(x-6)$

23) الميل 0، ويمر بالنقطة (−4, 2) $y-2=0$

24) يمر بالنقطة (1, 2)، ويوازي المستقيم $y=4x-3$ $y=4x-2$

25) يمر بالنقطة (−3, 5)، وعمودي على المستقيم $y=\frac{2}{3}x-8$ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

مثال 4

اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل للمستقيم المار بالنقطة (3, 4) وميله −2 .

صيغة نقطة - ميل $y-y_1=m(x-x_1)$

بالتعويض عن m بـ −2، (x_1, y_1) بـ (3, 4) $y-4=-2(x-3)$

1-4 شكل الانتشار وخط الانحدار (الصفحات 40-48)

مثّل شكل الانتشار بيانيًّا، وارسم الخط المطابق للبيانات، وصِفْ نوع الارتباط، ثم استعمل زوجين مرتبين؛ لكتابة معادلة التنبؤ للبيانات في كلٍّ مما يأتي:

26) كهرباء: يُبيّن الجدول أدناه قيمة فاتورة الكهرباء في إحدى الشركات خلال ستة أشهر. انظر الهامش

الشهر	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر
الفاتورة (BD)	72	114	164	198	224	185

27) متنزه: يُبيّن الجدول أدناه العدد السنوي بالآلاف لزوار أحد المصايف في الأعوام الخمسة الأخيرة. انظر الهامش

العام	1	2	3	4	5
عدد الزوار السنوي بالآلاف	44	42	39	31	24

مثال 5

يُبيّن الجدول أدناه عدد طلبة إحدى المدارس الإعدادية في أعوام مختلفة.

العام	1999	2000	2001	2002	2003	2004
عدد الطلاب	125	116	142	154	146	175

استعمل الزوجين المرتبين (1999, 125) و (2004, 175)؛ لكتابة معادلة التنبؤ.

صيغة الميل $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

بالتعويض $=\frac{175-125}{2004-1999}$

بالتبسيط $=\frac{50}{5}=10$

صيغة نقطة - ميل $y-y_1=m(x-x_1)$

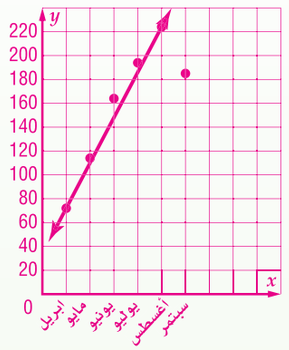
بالتعويض $y-125=10(x-1999)$

خاصية التوزيع $y-125=10x-19990$

بإضافة 125 لكلا الطرفين $y=10x-20115$

إجابات :

(26

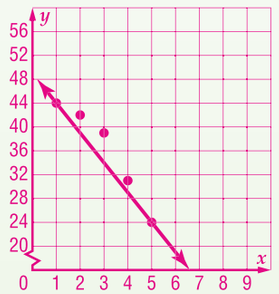


إجابة ممكنة:

باستعمال الزوجين
(1 , 72) , (5 , 224)

المعادلة $y=38x+34$

(27



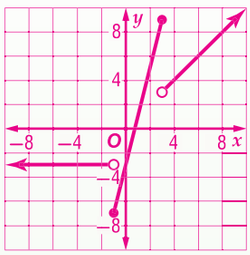
إجابة ممكنة:

باستعمال الزوجين
(1 , 44) , (5 , 24)

المعادلة $y=-5x+49$

إجابات:

(28)

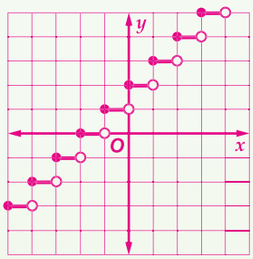


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq -7\}$

(29) $f(x) = \begin{cases} x-1 & , x \leq -2 \\ -2x & , -2 < x < 1 \\ 3 & , x \geq 1 \end{cases}$

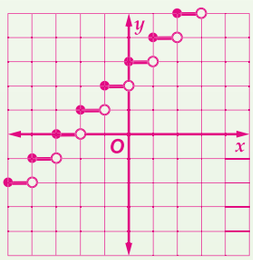
(30)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

(31)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

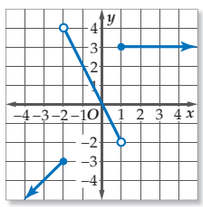
المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

1-5 دوال خاصة (الصفحات 49-55) للتمارين 31 – 28 انظر الهامش

(28) مثّل الدالة: $f(x) = \begin{cases} -3 & , x < -1 \\ 4x - 3 & , -1 \leq x \leq 3 \\ x & , x > 3 \end{cases}$

بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها.

(29) اكتب الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة التي لها التَّمثيل البياني أدناه.

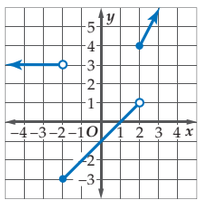


مثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها:

(30) $f(x) = [\![x]\!] + 2$ **(31)** $f(x) = [\![x + 3]\!]$

مثال 6

اكتب الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة التي لها التَّمثيل البياني المجاور:



دالة الجزء الأيسر هي $f(x) = 3$. الدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(-2, 3)$، تعني أن الدالة معرّفة عندما $x < -2$

دالة الجزء الأوسط هي $f(x) = x - 1$. وتعني كلٌّ من الدائرة المظلّلة عند النقطة $(-3, -2)$، والدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(2, 1)$، أن الدالة معرّفة عندما $-2 \leq x < 2$

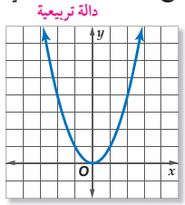
دالة الجزء الأيمن هي $f(x) = 2x$. والدائرة المظلّلة عند النقطة $(2, 4)$، تعني أن الدالة معرّفة عندما $x \geq 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , x < -2 \\ x - 1 & , -2 \leq x < 2 \\ 2x & , x \geq 2 \end{cases}$$

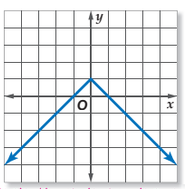
1-6 الدوال الأم والتّحويلات الهندسية (الصفحات 57-63)

حدّد نوع الدالة الممثّلة بيانيًّا في كل شكل أدناه:

(38) دالة تربيعية



(39) دالة قيمة مطلقة



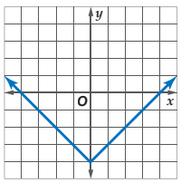
(40) صِفْ الإزاحة في $y = x^2 - 3$. إزاحة التمثيل البياني للدالة الأم $y = x^2$، 3 وحدات إلى أسفل

(41) صِفْ الانعكاس في $y = -x^2$. انعكاس التمثيل البياني للدالة الأم $y = x^2$ حول المحور x

(42) **إنشاءات:** تم إنشاء قوس كبير على مدخل أحد المباني، حيث يُعبّر عن شكل القوس بالدالة: $f(x) = -0.025x^2 + 3.64x - 0.038$. حدّد نوع هذه الدالة. دالة تربيعية

مثال 7

حدّد نوع الدالة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



بما أن التَّمثيل البياني هو حرف V، فإن الدالة هي دالة القيمة المطلقة.

مثال 8

صِفِ الإزاحة في التمثيل البياني للدالة $g(x) = |x + 6|$.

التَّمثيل البياني للدالة $g(x) = |x + 6|$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$، إلى اليسار 6 وحداتٍ.

1-7 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا (الصفحات 64-69)

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 51 – 43 انظر الهامش

(43) $x - 3y < 6$

(44) $y \geq 2x + 1$

(45) $2x + 4y \leq 12$

(46) $y < -3x - 5$

(47) $y > |2x|$

(48) $y \geq |2x - 2|$

(49) $y + 3 < |x + 1|$

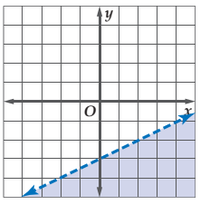
(50) $2y \leq |x - 3|$

(51) شراء: وفّر علي 6 BD؛ لشراء مجموعة من الدفاتر، والأسطوانات المدمجة، إذا كان سعر الدفتر الواحد 1 BD، وسعر الأسطوانة المدمجة 0.5 BD، فاكتب متباينةً تمثّل عدد الدفاتر والأسطوانات المدمجة التي يمكن شراؤها، ثم مثّلها بيانيًّا.

مثال 9

مثّل المتباينة $x - 2y > 6$ بيانيًّا.

بما أن المتباينة تحتوي على الرمز $>$ ، فإن حد المتباينة يكون متقطعًا. مثّل المعادلة المرافقة $x - 2y = 6$ بيانيًّا



اختبر باستعمال النقطة $(0, 0)$، والتي لا تقع حد المتباينة

$x - 2y > 6$

$0 - 2(0) \stackrel{?}{>} 6$

$0 > 6$ ✗

ظلل المنطقة التي لا تحوي $(0, 0)$

1-8 حَلّ أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا (الصفحات 70-75)

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا : للتمارين 56 – 52
انظر هامش الصفحة التالية

(52) $y < 2x - 3$
$y \geq 4$

(53) $|y| > 2$
$x > 3$

(54) $y \geq x + 3$
$2y \leq x - 5$

(55) $y > x + 1$
$x < -2$

(56) مجوهرات: أمضى صائغ مجوهرات ما لا يزيد على 3 h في صياغة الخواتم. إذا كان الزمن الذي يتطلبه تجهيز المعدات 15 min، والزمن الذي تتطلبه صياغة الخاتم الواحد 25 min، فاكتب نظام متباينات يصف الموقف، ومثّله بيانيًّا.

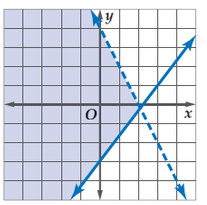
مثال 10

حُلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$y \geq \frac{3}{2}x - 3$

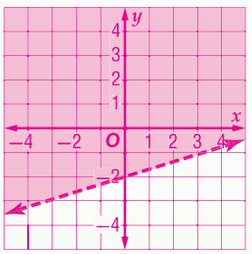
$y < 4 - 2x$

منطقة الحَلّ المحتملة هي المنطقة التي كل نقطة من نقاطها تحقق كلتا المتباينتين، وهي المنطقة المظلّلة في الشكل أدناه.

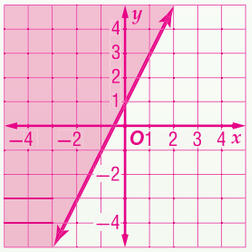


إجابات:

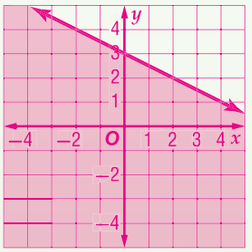
(43)



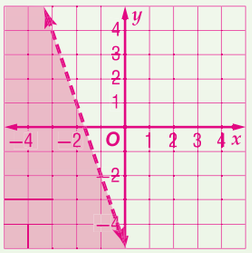
(44)



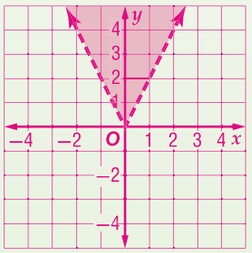
(45)



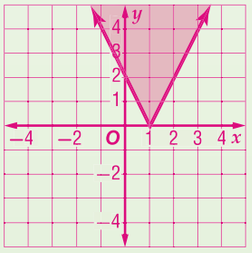
(46)



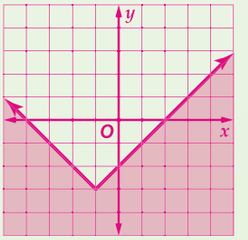
(47)



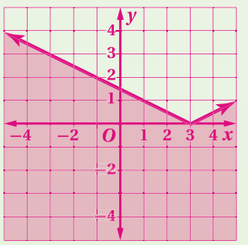
(48)



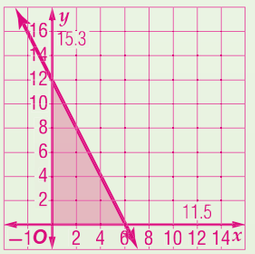
(49)



(50)

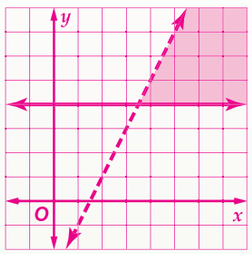


(51) $x + 0.5y \leq 6$

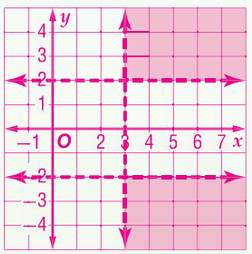


إجابات:

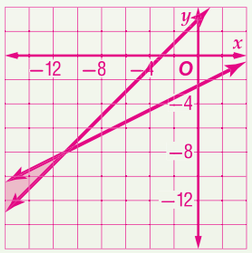
52)



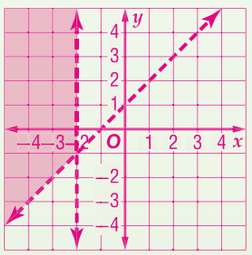
53)



54)

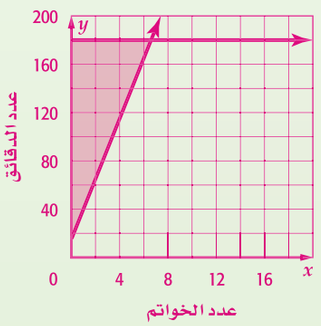


55)



56) $x \geq 0 , y \leq 180$

$y \geq 25x + 15$



1-9 البرمجة الخطية (الصفحات: 82-77)

تصنيع: استعمل المعلومات الآتية لحَلّ التمرينين 57, 58

يربح مصنع للأدوات الرياضية BD 0.5 في كل كرة قدم يصنعها، و BD 0.4 في كل كرة يد. ويستغرق قطع الجلد 2 h لكل 75 كرة قدم و 3 h لكل 60 كرة يد، وتستغرق الخياطة 3 h لكل 75 كرة قدم، و 2 h لكل 60 كرة يد. إذا كان لدى دائرة القطع 500 ساعة عمل، كما يتوافر لدى دائرة الخياطة 450 ساعة عمل، فأجب عما يأتي:

57) ما عدد كرات القدم وكرات اليد التي يجب تصنيعها؛ لتحقيق أكبر ربح ممكن للمصنع؟ **11250 كرة القدم و 0 كرة يد**

58) ما أكبر ربح يمكن للمصنع تحقيقه من هذين المنتجين؟ **BD 5625**

59) صناعة: ينتج مصنع نوعين من الأحذية على مرحلتين، ويحتاج الحذاء من النوع الأول إلى 2 h في المرحلة الأولى، و 1 h في المرحلة الثانية، ويحقق ربحًا قدره BD 20. أما الحذاء من النوع الثاني فيحتاج إلى 1 h في المرحلة الأولى، و 3 h في المرحلة الثانية، ويحقق ربحًا قدره BD 15. إذا كان مجموع ساعات العمل اليومي لموظفي المرحلة الأولى لا يزيد على 40 h، ولا يزيد على 60 h لموظفي المرحلة الثانية، فما أكبر ربح يمكن أن تحققه الشركة يوميًّا؟ وما عدد الأحذية الذي يحقق هذا الربح من كل نوع؟

BD 480 ، 12 حذاء من النوع الأول، و16 حذاء من النوع الثاني

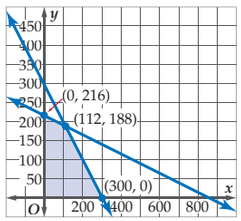
مثال 11

يزرع فيصل ما لا يزيد على 300 شتلة من نوعين من الأشجار في مزرعته التي مساحتها $5184\ m^2$، حيث تحتاج الشجرة الواحدة من النوع (A) إلى مساحة $6\ m^2$، ومن النوع (B) إلى $24\ m^2$؛ لتوفير مسافة كافية بين الأشجار. إذا كان سعر بيع الشتلة الواحدة من النوع (A) BD 0.8، وسعر بيع الشتلة الواحدة من النوع (B) BD 1.2، فما عدد الشتلات التي يجب بيعها من كل نوع ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

افترض أن a هي عدد الشتلات من النوع (A)، و b عددها من النوع (B).

$$a + b \leq 300 \quad , \quad 6a + 24b \leq 5184 \quad , \quad a \geq 0, b \geq 0$$

مثّل المتباينات بيانيًّا، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل المحتملة وهي: (0, 0), (300, 0), (112, 188), (0, 216) الحل .



دالة الربح هي :

$f(a, b) = 0.8a + 1.2b$.

القيمة BD 315.2 هي القيمة العظمى للربح، وتكون عند النقطة (112, 188)، لذلك إذا باع فيصل 112 شتلة من النوع (A)، و 188 شتلة من النوع (B)، فإن الربح يكون أكبر ما يمكن.

1) حدد مجال ومدى العلاقة في الجدول المجاور، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا. وإذا كانت دالة فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

x	y
-2	3
4	-1
3	2
6	3

المجال = $\{6, 3, 4, -2\}$
المدى = $\{3, 2, -1, 3\}$، دالة، ليست واحد لواحد، شاملة، ليست تقابل

2) **اختيار من متعدد:** أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, -3), (4, 1)$.

C

A $y = -x + 3$ **C** $y = x - 3$

B $y = -x - 3$ **D** $y = x + 3$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتباينات والدوال الآتية: للسؤالين 3 , 4 انظر ملحق الإجابات

3) $-2x + 5 \le 3y$ **4)** $y < 4|x - 1|$

5) $h(x) = \begin{cases} -x & , x < -2 \\ x + 2 & , 2 \ge x \ge -2 \\ 5 & , x > 2 \end{cases}$ انظر الهامش

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الذي يحقّق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

7) $y = \frac{4}{9}x - 4$ **8)** $y = -\frac{2}{3}x + 11$

6) الميل $= -5$، مقطع المحور y يساوي 11 $y = -5x + 11$

7) مقطع المحور x يساوي 9، مقطع المحور y يساوي -4

8) يمرّ بالنقطة $(-6, 15)$، ويوازي المستقيم $2x + 3y = 1$

9) يمرّ بالنقطة $(5, 2)$، وعمودي على المستقيم $x + 3y = 7$

9) $y = 3x - 13$

ترفيه: لحلّ الأسئلة 12 – 10، استعمل الجدول أدناه، والذي يُمثّل مقدار الانفاق على الترفيه سنويًّا في إحدى الدول خلال أربع سنوات متتالية. للسؤالين 10, 11 انظر ملحق الإجابات

العام	مقدار الإنفاق بملايين الدولارات
2000	30.4
2001	32.2
2002	34.6
2003	35.6

10) ارسم شكل الانتشار لهذا الجدول.

11) اكتب معادلة التنبؤ.

12) تنبأ بمقدار الإنفاق على الترفيه عام 2015. إجابة ممكنة: 57.4 مليون دولار

13) أوجد المجال والمدى للدالة $g(x) = [\![x]\!] + 2$.

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

صِفِ التحويل الهندسي في التمثيل البياني للدالتين الآتيتين:

14) $g(x) = x^2 + 5$ إزاحة التّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$ 5 وحدات إلى أعلى

15) $g(x) = -|x|$ انعكاس التّمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = |x|$ حول المحور x

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا: للسؤالين 16, 17 انظر ملحق الإجابات

16) $x + 2y \ge 7$
$3x - 4y < 12$

17) $3x + y < -5$
$2x - 4y \ge 6$

مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا، وعيّن إحداثيات الرؤوس لمنطقة الحل، ثم أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة (إن وجدت): للسؤالين 18, 19 انظر ملحق الإجابات

18)
$5 \ge y \ge -3$
$4x + y \le 5$
$-2x + y \le 5$
$f(x, y) = 4x - 3y$

19)
$x \ge -10$
$1 \ge y \ge -6$
$3x + 4y \le -8$
$2y \ge x - 10$
$f(x, y) = 2x + y$

20) تبلغ مساحة موقف للمركبات $600\,m^2$. وتحتاج السيارة الصغيرة إلى $6\,m^2$ من الفراغ، في حين تحتاج الحافلة إلى $30\,m^2$. ولا يستوعب الموقف أكثر من 60 مركبة. إذا كانت أجرة وقوف السيارة 0.3 BD، وأجرة وقوف الحافلة 0.8 BD، فما عدد مركبات كلٍّ من النوعين، التي يجب استقبالها لكي يحقق موقف المركبات أكبر ربح ممكن؟ انظر الهامش

21) **اختيار من متعدد:** ما ميل المستقيم الموازي للمستقيم $y - 2 = 4(x + 1)$؟

D

A -4 **C** $\frac{1}{4}$

B $-\frac{1}{4}$ **D** 4

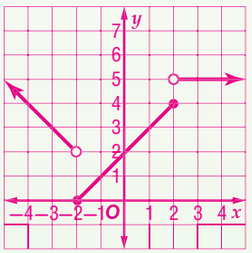
بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 1 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تُشكّل تحدِيًّا للطلبة.

إجابات:

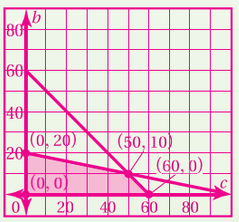
5)



20) الحل: افرض c = عدد السيارات،

b = عدد الحافلات.

$c \ge 0, b \ge 0, 6c + 30b \le 600$،
$c + b \le 60$



مثّل بيانيًّا المتباينات السابقة. إحداثيات رؤوس المنطقة المحتملة هي:
$(0, 0), (0, 20), (50, 10), (60, 0)$.

دالة الربح هي:
$f(c, b) = 0.3c + 0.8b$.

أكبر قيمة هي 23 BD ، وتقع عند النقطة $(50, 10)$. وعليه، فإن على الموقف أن يستقبل 50 سيارة و 10 حافلات؛ لتحقيق أكبر ربح ممكن.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-1، 1-2، 1-3، 1-4، 1-5، 1-6، 1-7، 1-8، 1-9	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (10)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجيات حَلّ الأسئلة ذات الإجابات القصيرة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

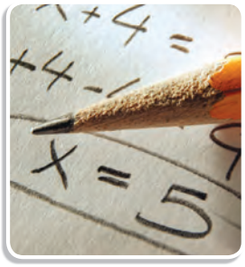
اسأل:

- ما الفرق بين الأسئلة ذات الإجابات القصيرة، وأسئلة الاختيار من متعدد؟

إجابة ممكنة: لا يوجد قائمة خيارات في الأسئلة ذات الإجابات القصيرة بل يجب أن تُكتب الإجابة.

- هل يمكن الحصول على جزء من الدرجة في الأسئلة ذات الإجابات القصيرة؟ إذا كان ذلك ممكنًا فكيف يكون؟

نعم، إجابة ممكنة:
بإعطاء إجابة صحيحة دون توضيح لخطوات الحَلِّ.
أو إعطاء قاعدة صحيحة وتطبيق خاطئ.



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة تتطلب منك أن تعطي الإجابة بالإضافة إلى شرح الحلّ، وتفسير وتبرير الخطوات.

استراتيجيات حلّ الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

يتم وضع درجات الأسئلة ذات الإجابات القصيرة عادةً باستعمال سلم تقدير، وفيما يأتي مثال على هذا السلم:

سلم تقدير	
المعيار	الدرجة
الدرجة الكاملة: الإجابة الصحيحة مع التبرير الكامل لكل خطوة.	2
درجة جزئية ليست كاملة • الإجابة صحيحة، ولكن التبرير والتوضيح غير كامل. • الإجابة غير صحيحة، ولكن التبرير صحيح وكامل.	1
بدون درجة: إما أن تكون الإجابة غير موجودة، أو ليست ذات معنى.	0

الخطوة 2

عندَ حلّ الأسئلة ذات الإجابات القصيرة، تذكّر ...

- توضيح تبريرك، أو كتابة طريقتك في حَلّ المسألة.
- كتابة كل خطوات الحلّ التي تقوم بها.
- التحقق من إجابتك إذا كان لديك الوقت.

مثال

اقرأ المسألة، وعيّن المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

عند قيام مها بتسخين محلول في المختبر، كانت درجات الحرارة بحسب الأوقات موضحة في الجدول المجاور.
أوجد المعادلة الخطية التي تُمثّل البيانات المدونة بالجدول.

الزمن (min)	درجة الحرارة (°C)
0	133.2
2	130.4
5	126.2
9	120.6

لإيجاد المعادلة الخطية نجد مقطع المحور y أولًا، وهو يساوي 133.2 ،

ثم نجد ميل المستقيم باختيار النقطتين (2, 130.4) ,(0, 133.2)

ونطبق صيغة الميل:

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{130.4 - 133.2}{2 - 0}$ ، $(x_1, y_1) = (0, 133.2)$ ، $(x_2, y_2) = (2, 130.4)$

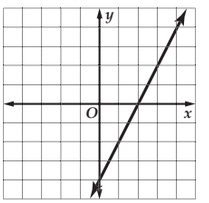
بالتبسيط $= -1.4$

إذن معادلة المستقيم $y = -1.4x + 133.2$

تمارين

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدّد المطلوب واستعمل المعطيات في الحلّ:

1) ما معادلة المستقيم الممثل بيانيًّا في الشكل أدناه؟ $y = 2x - 4$



2) يريد هشام أن يشتري معدات لرحلة بمبلغ لا يزيد عن 50 BD. إذا كان سعر الصنارة 12 BD ، وسعر الحصيرة 6 BD ، ويريد هشام أن يشتري اثنين على الأقل من كل نوع، فاكتب نظامًا من المتباينات الخطية يُمثّل الموقف، ثم مثّل منطقة الحَلّ بيانيًّا. أعطِ ثلاثة حلول مختلفة للنظام. انظر الهامش

3) تشتري علياء عقودًا خرزية بسعر الجملة، وهو 400 BD لكل 50 عقدًا، ويضاف إلى سعر كل عقد 3 BD؛ لكتابة حرف من أحرف الهجاء عليه. إذا باعت علياء العقد الواحد بمبلغ 20 BD، فكم عقدًا يجب أن تبيع ليكون ربحها 225 BD على الأقل؟ 39 عقدًا

مثال إضافي

ألعاب أطفال:

يعمل مصنع لمدة 15 ساعة يوميًّا كحد أقصى لإنتاج نوعين من ألعاب الأطفال، ويستغرق إنتاج اللعبة الواحدة من النوع الأول ساعة واحدة، واللعبة الواحدة من النوع الثاني ساعة ونصف.

إذا كان المصنع ملتزمًا بإنتاج 3 ألعاب من النوع الأول، ولعبتين من النوع الثاني على الأقل يوميًا لتغطية الطلب عليها، وكان ربحه في اللعبة الواحدة من النوع الأول 5 BD وفي اللعبة الواحدة من النوع الثاني 7 BD . فأوجد عدد الألعاب من كل نوع التي على المصنع بيعها يوميًا؛ ليحقق أكبر ربح ممكن.

12 لعبة من النوع الأول، ولعبتان من النوع الثاني.

3 التقويم

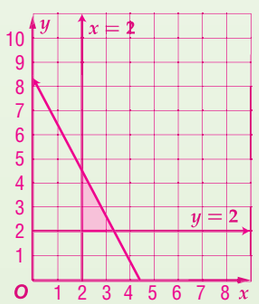
استعمل التمارين 3 – 1؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

إجابة:

2) $x \geq 2$

$y \geq 2$

$12x + 6y \leq 50$



إجابة ممكنة:

(2.5, 2.5) , (3, 2.1) , (2.1, 3)

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملًا لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

1) A صحيحة

B لا يدرك مفهوم علاقة أقوى.

C لا يدرك مفهوم علاقة أقوى.

D لا يدرك مفهوم علاقة أقوى.

2) A اختار جميع القيم الموجبة والصفر.

B اختار القيم الموجودة في المجال المقابل.

C صحيحة.

D اختار القيم السالبة الموجودة في الجدول.

3) A أخطأ في تحديد موقع النقطة.

B لم يدرك مفهوم حد المتباينة المتقطع.

C أخطأ في تحديد موقع النقطة.

D صحيحة.

4) A عكس إشارتي المتباينتين.

B عكس إشارة المتباينة الثانية.

C صحيحة.

D عكس إشارة المتباينة الأولى.

5) F حدِّد رأس.

G صحيحة.

H حدِّد رأس.

J حدِّد رأس.

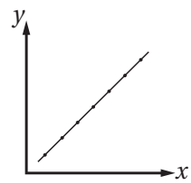
الفصل 1 اختبار معياري للفصل 1

أسئلة الاختيار من متعدد

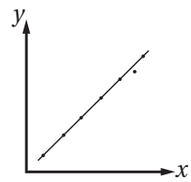
اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) أي الأشكال الآتية يُبيّن علاقة أقوى بين المتغيرين x, y؟ **A**

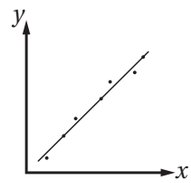
A



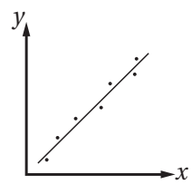
B



C



D



2) ما مجال العلاقة الموضحة بالجدول المجاور ؟ **C**

x	y
−3	4
1	−1
2	0
6	−3

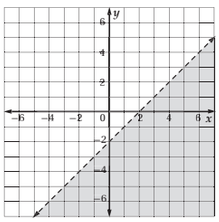
A $\{0, 1, 2, 4, 6\}$

B $\{-3, -1, 0, 4\}$

C $\{-3, 1, 2, 6\}$

D $\{-3, -1\}$

3) **اختيار من متعدد:** أي من النقاط الآتية تحقق المتباينة الممثلة بيانيًا في الشكل أدناه؟ **D**



A $(0, 0)$

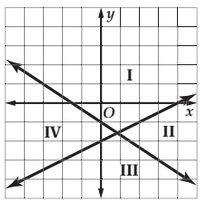
B $(2, 0)$

C $(2, 4)$

D $(4, -2)$

4) منطقة الحَلّ المحتملة لنظام المتباينات الآتي هي: **C**

$$y \le \frac{1}{2}x - 2$$
$$y \le -\frac{2}{3}x - 1$$



A المنطقة I

B المنطقة II

C المنطقة III

D المنطقة IV

5) النقطة التي لا تُمثّل رأسًا لمنطقة الحَلّ المحتملة لنظام المتباينات الخطية

$$x \ge 0, y \ge 0$$
$$y \le -2x + 6$$

هي: **G**

F $(0, 0)$

G $(0, 3)$

H $(0, 6)$

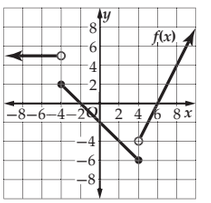
J $(3, 0)$

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

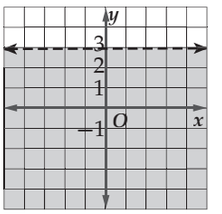
أجب عن كلٍّ مما يأتي:

6) اكتب الدالة المعرّفة الممثلة بيانيًّا أدناه بأكثر من قاعدة؟ انظر الهامش



7) ما مقطع المحور y للمعادلة $2y = 4x + 3$ ؟ $\frac{3}{2}$

8) ما المتباينة التي تمثيلها البياني كما في الشكل أدناه؟ $y < 3$



أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحلّ: انظر الهامش

9) يُعد عامل نوعين من أطباق الحلوى، ويحتاج النوع الأول إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوبين من السكر. والنوع الثاني يحتاج إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوب واحد من السكر. إذا كانت كمية الطحين المتوافرة 40 كوبًا، وكمية السكر المتوافرة 15 كوبًا، وكان ربح النوع الأول BD 1.2، وربح النوع الثاني BD0.8، فاستعمل هذه المعلومات في الإجابة عمَّا يأتي:

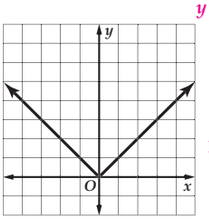
a) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية؛ ليُمثّل عدد الأطباق من كل نوع، الذي يستطيع العامل إعداده باستعمال الكميات المتوافرة لديه.

b) مَثّل نظام المتباينات الخطية الذي حصلت عليه في الفرع (a) بيانيًّا، واكتب نقاط رؤوس منطقة الحلّ المحتملة.

c) اكتب دالة تُمثّل الربح.

d) ما عدد الأطباق التي يجب أن يصنعها العامل من كل نوع؛ ليكون الربح أكبر ما يمكن، وما مقدار الربح في هذه الحالة؟

10) يُبين الشكل أدناه التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة الأم.



a) اكتب معادلة هذه الدالة. $y = |x|$

b) إذا أجرينا انعكاسًا للدالة الأم حول المحور x، ثم أجرينا إزاحة وحدتين إلى أعلى، فما الدالة الناتجة؟ $y = -|x| + 2$

c) إذا أجرينا إزاحة 3 وحدات إلى اليسار للدالة الأم، ثم وحدة واحدة إلى أسفل، فما الدالة الناتجة؟ $y = |x + 3| - 1$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟										
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فاذهب للدرس ...	1-4	1-1	1-7	1-8	1-9	1-5	1-2	1-7	1-9	1-6

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

بناء الاختبارات
التقـــويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل اختبارات TIMSS أو NAEP .

بديل الواجب المنزلي

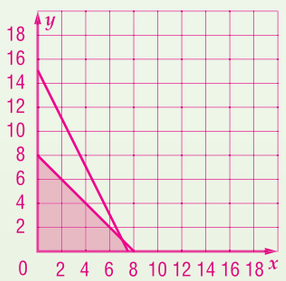
التهيئة للفصل الثاني تُعطى الأسئلة الواردة في الصفحة 95 واجبًا منزليًّا للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم المتطلبات السابقة للفصل 2.

إجابات:

6)
$$f(x) = \begin{cases} 5 & , x < -4 \\ -x - 2 & , -4 \le x \le 4 \\ 2x - 12 & , x > 4 \end{cases}$$

9a) $x \ge 0 , y \ge 0 , 5x + 5y \le 40 , 2x + y \le 15$

9b)



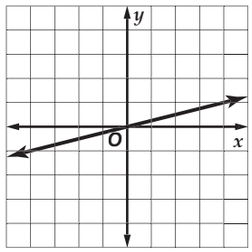
رؤوس منطقة الحل المحتملة هي:
$(0 , 0) , (0 , 8) , (7.5 , 0) , (7 , 1)$

9c) $P = 1.2x + 0.8y$

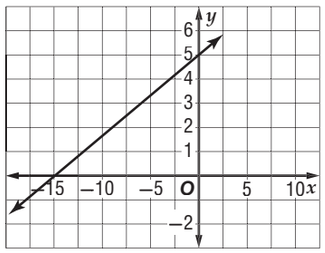
9d) يصنع 7 أطباق من النوع الأول، وطبق من النوع الثاني، مقدار الربح BD 9.2 .

التهيئة ، ص 11

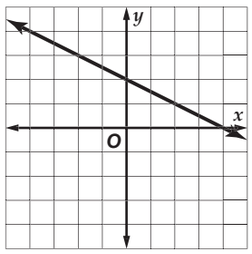
10)



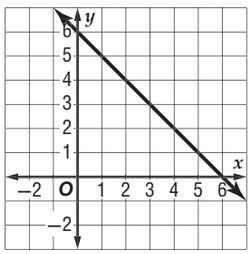
11)



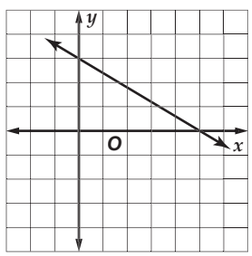
12)



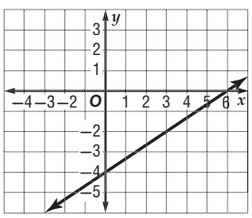
13)



14)

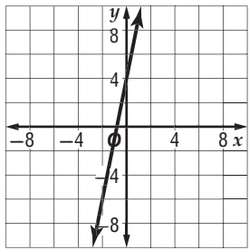


15)



الدرس 1-1 ، ص 12-19

5)

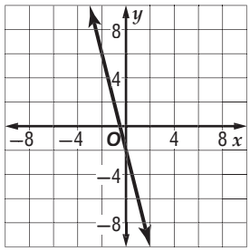


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية

دالة، واحد لواحد، شاملة، تقابل، متصلة

6)

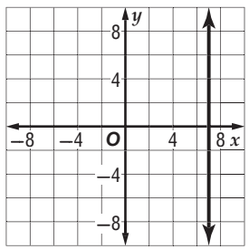


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية

دالة، واحد لواحد، شاملة، تقابل، متصلة

7)



المجال = $\{7\}$

المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية

ليست دالة

14) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \le 0\}$

دالة، ليست واحد لواحد ليست شاملة، ليست تقابل، متصلة

15) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \ge -8\}$

دالة، ليست واحد لواحد، ليست شاملة، ليست تقابل، متصلة

16) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

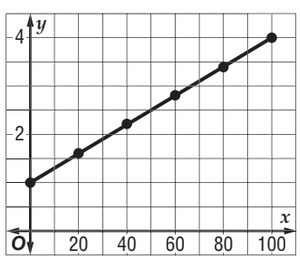
المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية

دالة، واحد لواحد، شاملة، تقابل، متصلة

19a)

$\{(0\ ,\ 1), (20\ ,\ 1.6), (40\ ,\ 2.2), (60\ ,\ 2.8), (80\ ,\ 3.4), (100\ ,\ 4)\}$

19b)



19c) المجال = $\{x \mid 0 \le x \le 100\}$

المدى = $\{y \mid 1 \le y \le 4\}$، العلاقة متصلة

19d) نعم تمثل دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل.

20a)

الدالة	عدد المرات الممكنة للتقاطع
$f(x)$	0, 1, 2
$g(x)$	0, 1
$h(x)$	1, 2, 3
$j(x)$	1

20b) الدالتان $j(x)$,$g(x)$ واحد لواحد، بينما الدالتين $h(x)$,$f(x)$ ليست واحد لواحد.

20c) الدالتان $j(x)$,$h(x)$ شاملة، بينما الدالتين $g(x)$,$f(x)$ ليست شاملة.

20d)

الدالة	خصائصها		
	واحد لواحد	شاملة	تقابل
$f(x)$	لا	لا	لا
$g(x)$	نعم	لا	لا
$h(x)$	لا	نعم	لا
$j(x)$	نعم	نعم	نعم

الدرس 1-1 (توسّع)، ص 20

3) متصلة، المجال، أو عدد الساعات هو مجموعة قيم أكبر من أو تساوي صفراً. لذا، فإن تمثيل الدالة البياني متصل.

4) منفصلة، المجال، أو عدد الركاب هو مجموعة من الأعداد الكلية. لذا، فإن تمثيل الدالة البياني يتكون من نقاط متباعدة.

5) إجابة ممكنة: الدالة التي تصف المبلغ المتجمع y من بيع x تذكرة هي دالة منفصلة؛ وذلك لأن قيم المجال هي أعداد كلية. والدالة التي تصف السعر y لـ x كيلوجرام من التفاح هي دالة متصلة؛ وذلك لأن قيم مجال هذه الدالة هي مجموعة القيم الأكبر من الصفر.

الدرس 2-1، ص 26

14 صيغة ميل – مقطع $y = mx + b$

$m = -1, (x, y) = (-1, 4)$ $4 = -1(-1) + b$

بالتبسيط $4 = 1 + b$

طرح 1 من كلا الطرفين $3 = b$

لذلك فإن المعادلة هي $y = -\frac{8}{3}x + 10\frac{1}{3}$

30 أوجد الميل:

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ $= \frac{5 - (-3)}{2 - 5}$

بالتبسيط $= \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$

أوجد مقطع المستقيم من المحور y

صيغة ميل – مقطع $y = mx + b$

$m = -\frac{8}{31}$ $(x, y) = (2, 5)$ $5 = \frac{-8}{3}(2) + b$

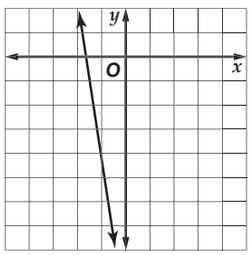
بالتبسيط $5 = -\frac{16}{3} + b$

إضافة $\frac{16}{3}$ – إلى كلا الطرفين $10\frac{1}{3} = b$

لذلك فإن المعادلة هي $y = -\frac{8}{3}x + 10\frac{1}{3}$

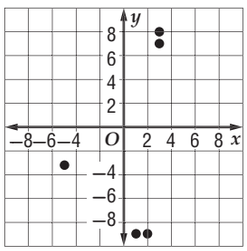
الدرس 3-1 (تأكد)، ص 31

1)

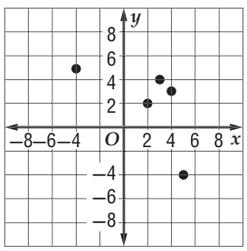


الدرس 3-1، ص 35

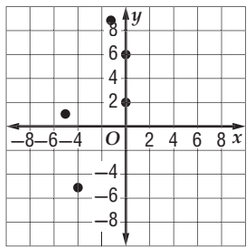
75)



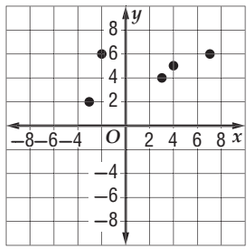
76)



(77

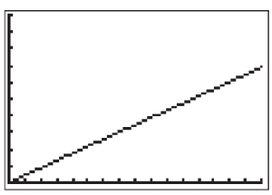


(78



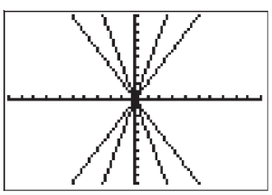
الدرس 3-1 (توسّع)، ص 39

1) $p = 0.43d$, 27.95 lb /in^2



[0, 80] scl: 5 by [0, 50] scl: 5

(2

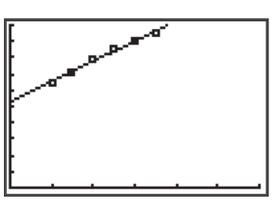


[–10, 10] scl: 1 by [–10, 10] scl: 1

المستقيمان اللذان يمثلان المعادلتين $y = -2x, y = -4x$ لهما ميلان سالبان، بحيث تتناقص قيم المتغير y عندما تتزايد قيم المتغير x ، بينما المستقيمان $y = 2x, y = 4x$ فلهما ميلان موجبان، وتتزايد قيم المتغير y عند تزايد قيم المتغير x . وجميع المعادلات السابقة تُمثّل مستقيمات تمر بنقطة الأصل، ولها معدل تغيّر ثابت.

الدرس 4-1، ص 48 – 47

(13



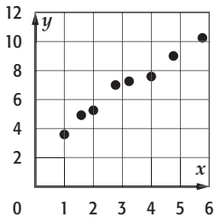
[0,12] scl: 1 by [0, 1000] scl: 100

$y = 61.8x + 654$

1.148 ألف دينار

15) يوضح معامل الارتباط مدى قرب النقاط الممثّلة للقيم الفعلية من خط الانحدار، كلما كانت النقاط قريبة من خط الانحدار، أو كان معامل الارتباط قريبًا من 1 أو –1، كان خط الانحدار أدق.

(17

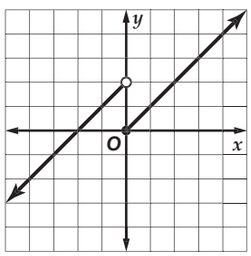


إجابة ممكنة: من الواضح أن الارتباط موجب قوي؛ وذلك يعني أن معامل الارتباط قريب من العدد 1. إذن a هي الجواب الصحيح

18) المعادلات الخطية تعطي صورة عن البيانات هل هي متزايدة، أو متناقصة، وتساعد في التنبؤ لبعض القيم.

الدرس 5-1 (تأكد)، 52

4)

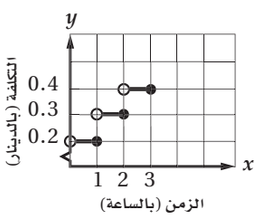


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية

الدرس 5-1، ص 55-53

4

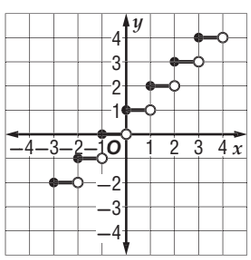
تكون تكلفة الوقوف لمدة ساعة أو جزء منها 0.2 BD . وتكون تكلفة الوقوف لمدة ساعتين أو جزءً منها، أي أكثر من ساعة ولغاية ساعتين 0.3 BD ، وهكذا سيكون التّمثيل على شكل دالة درجية.



المجال = $\{x \mid x > 0\}$

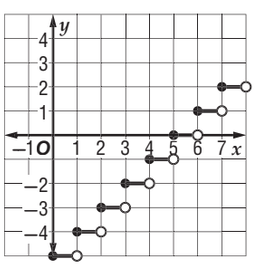
المدى = $\{ 0.2, 0.3, 0.4, \ldots \}$

(5



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

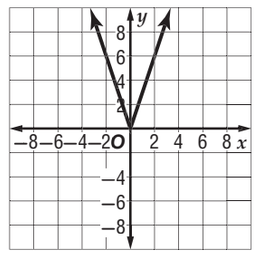
(6



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

(7

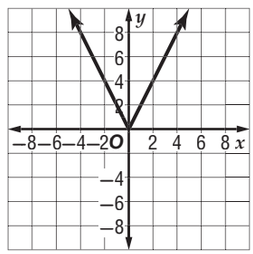


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

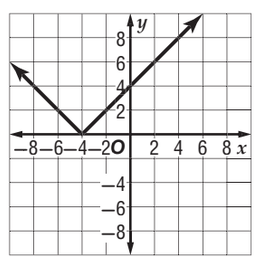
(8



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

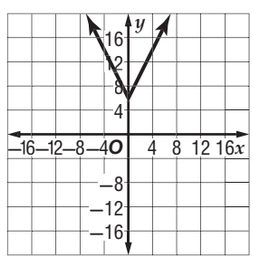
(9



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

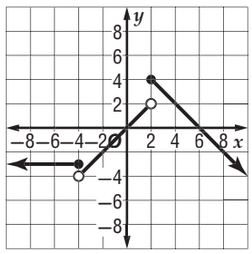
(10



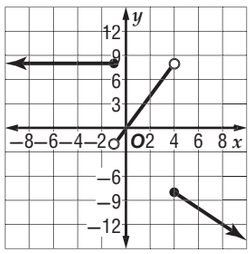
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 6\}$

(11



(12



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \leq 4\}$ المدى = $\{y \mid y \leq -8 \quad -2 < y \leq 8\}$

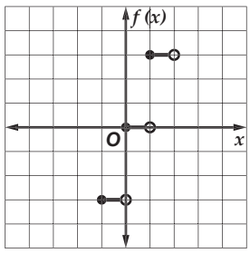
(13

$$g(x) = \begin{cases} x + 4 & , \ x < -2 \\ -3 & , -2 \leq x \leq 3 \\ -2x + 12 & , \ x > 3 \end{cases}$$

(14

$$g(x) = \begin{cases} 6 & , \ x \leq -5 \\ -x + 4 & , -5 < x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & , \ x \geq -2 \end{cases}$$

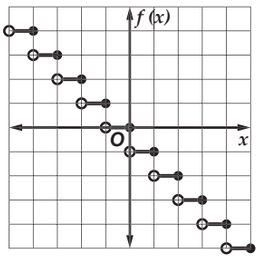
(15



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

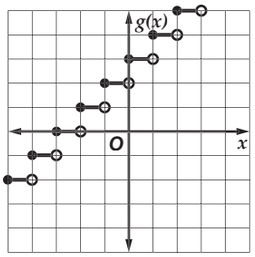
(16



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

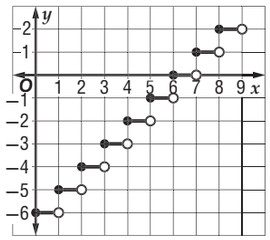
(17



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

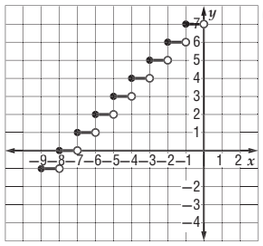
(18)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

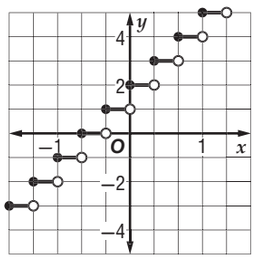
(19)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

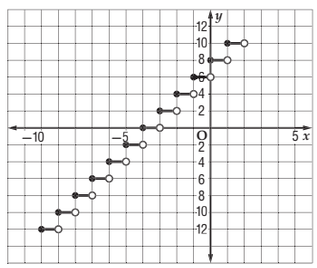
(20)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

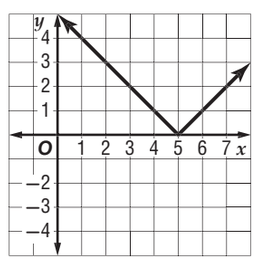
(21)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الزوجية

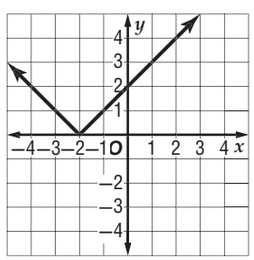
(22)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

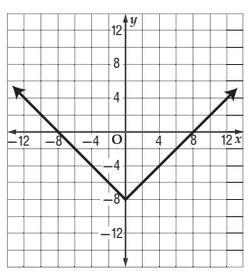
(23)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

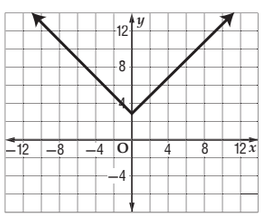
(24)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq -8\}$

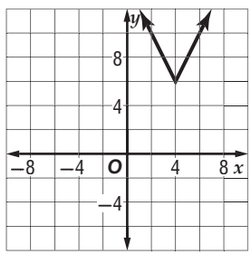
(25)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 3\}$

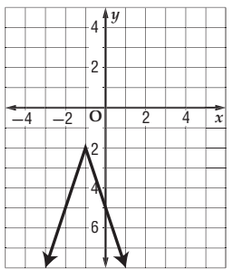
(26)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 6\}$

(27)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \leq -2\}$

(30)

$$g(x) = \begin{cases} -8 & , x \leq -6 \\ 0.25x + 2 & , -4 \leq x \leq 4 \\ 4 & , x > 6 \end{cases}$$

31 الجزء الأيسر من التّمثيل البياني يُمثّل الدالة $g(x) = -x - 4$، وبما أنه توجد دائرة مفتوحة عند النقطة $(-3 , -1)$، فإن الدالة معرفة لكل قيم $x < -3$.

والجزء الأوسط من التمثيل البياني يمثل الدالة $g(x) = x + 1$، وبما أنه توجد دائرتان مغلقتان عند النقطتين $(1 , 2)$ ، $(-3 , -2)$ ، فإن الدالة معرفة لكل قيم $-3 \leq x \leq 1$.

والجزء الأيمن من التّمثيل البياني يُمثّل الدالة $g(x) = -6$. وبما أنه يوجد دائرة مفتوحة عند النقطة $(4 , -6)$ ، فإن هذهِ الدالة معرفة لكل قيم $x > 4$. ولذلك، فإن الدالة تكون:

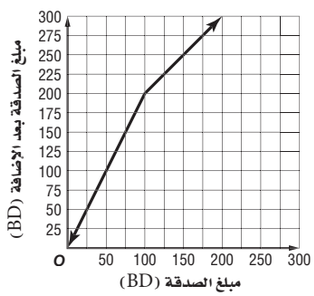
$$g(x) = \begin{cases} -x - 4 & , x < -3 \\ x + 1 & , -3 \leq x \leq 1 \\ -6 & , x > 4 \end{cases}$$

(32)

$$g(x) = \begin{cases} -9 & , x < -5 \\ x + 4 & , 0 \leq x \leq 3 \\ x - 3 & , x > 7 \end{cases}$$

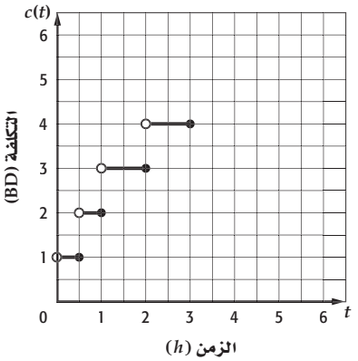
(33b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x \leq 100 \\ x + 100 & , x > 100 \end{cases}$$



(34b)

$$c(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 2 & , \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 3 & , 1 < t \leq 2 \\ 4 & , 2 < t \leq 3 \end{cases}$$



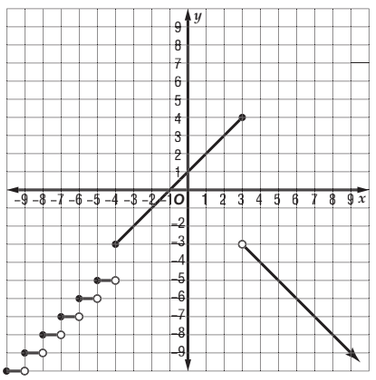
35 $f(x) = x\,,\ x > 0$

$f(x) = -x\,,\ x < 0$

$f(x) = 1\,,\ x = 0$

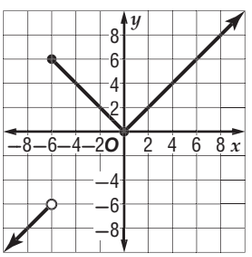
إذن، $f(x) = |x| + 1$

37



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \le 4\}$

38



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

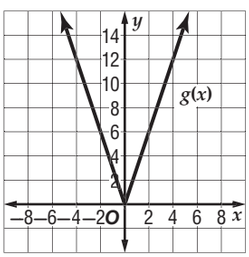
المدى = $\{y \mid y \le 0$ أو $y \ge -6\}$

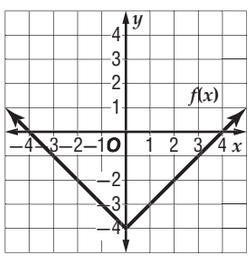
39a

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	3	6	9	12

39b





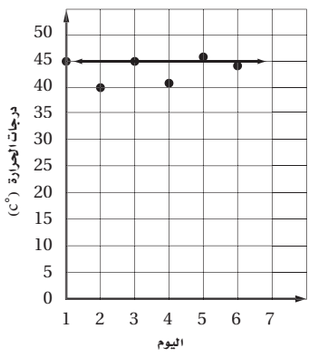
39c

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0
الميل		-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	3	6	9	12
الميل		-3	-3	-3	-3	3	3	3	3

اختبار منتصف الفصل، ص 56

10



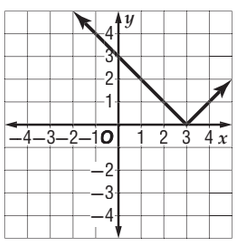
11 باستعمال النقطتين

$(2\,,\,40)$ ، $(5\,,\,46)$

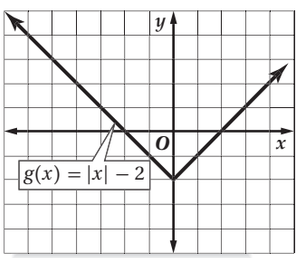
$y = 2x + 36$

12 50

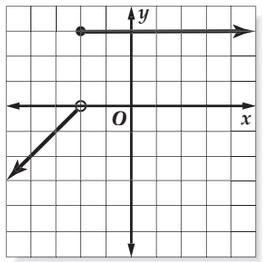
13



14

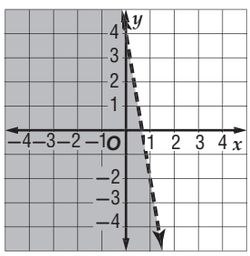


(15)

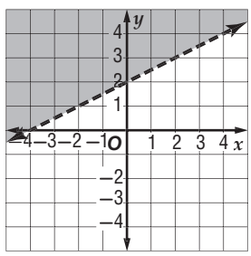


الدرس 7-1 (تأكد)، ص 65، 66

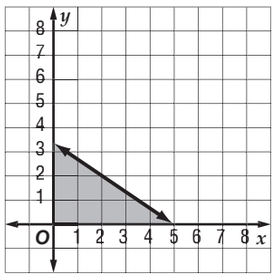
(1A)



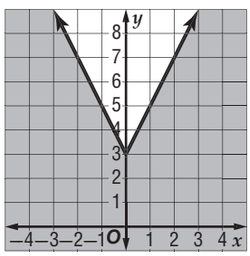
(1B)



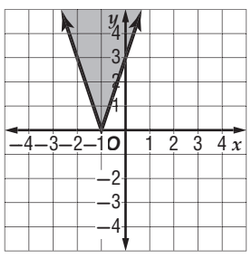
(3) $2x + 3y \leq 10$



(4A)

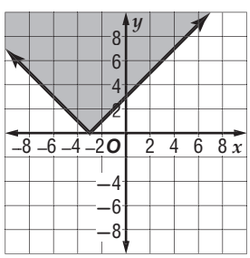


(4B)

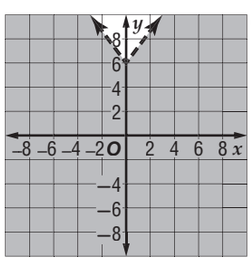


الدرس 7-1، ص 67-69

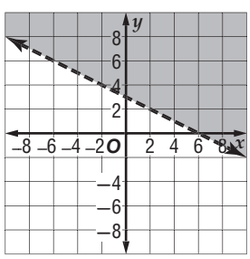
(10)



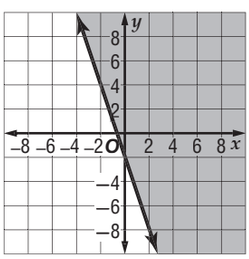
(11)



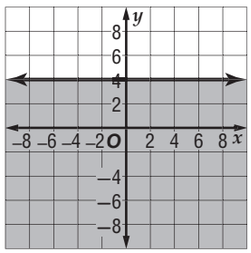
(12)



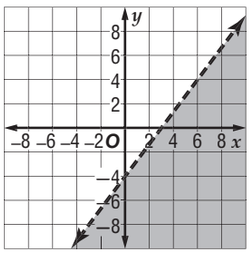
(13)



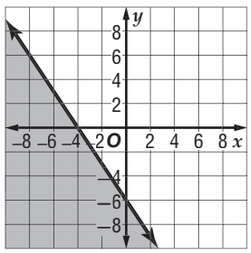
(14)



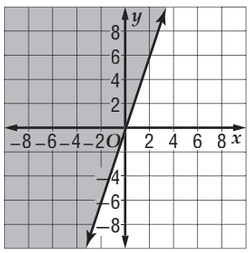
(15)



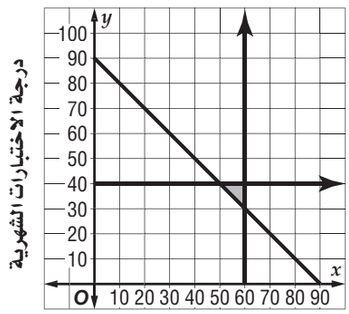
(16)



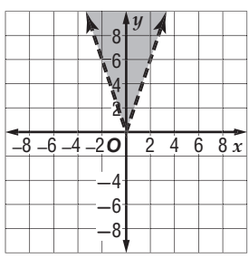
(17)



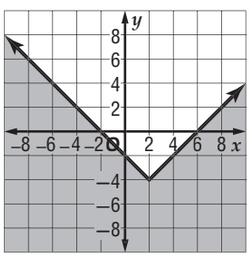
(24a)



(25)



(26)



27 المتباينة الأصلية $y - 6 < |-2x|$

بإضافة 6 إلى كلا الطرفين $y < |-2x| + 6$

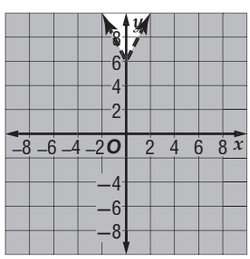
ارسم منحنى $y = |-2x| + 6$. بما أن رمز المتباينة $<$. لذا، فإن الحد يكون متقطعًا. اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لاتقع على حد المتباينة.

$y < |-2x| + 6$

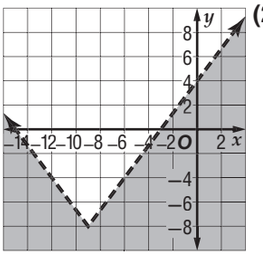
$(x, y) = (0, 0)$ $0 \stackrel{?}{<} |-2(0)| + 6$

صحيحة ✓ $0 < 6$

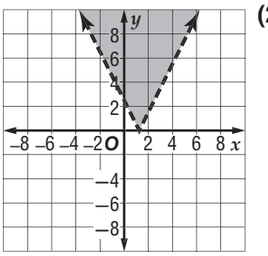
ظلّل المنطقة التي تحوي $(0, 0)$.



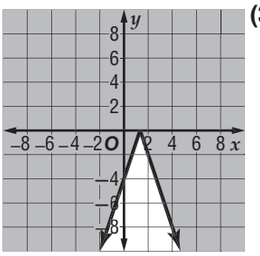
(28)



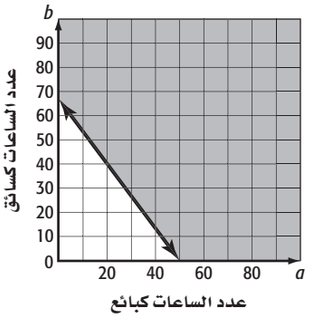
(29)



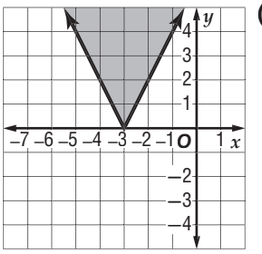
(30)



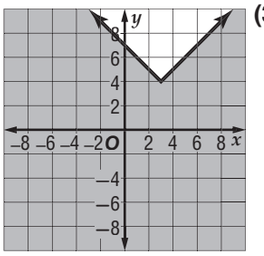
(31b)



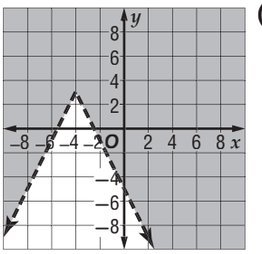
(32)



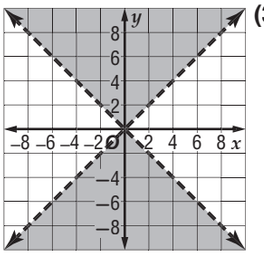
(33)



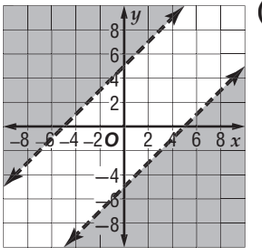
(34)



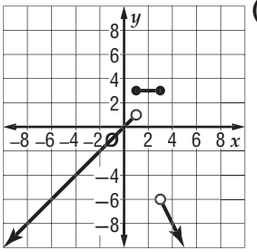
(35)



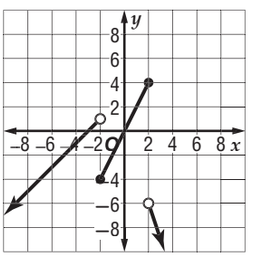
(36)



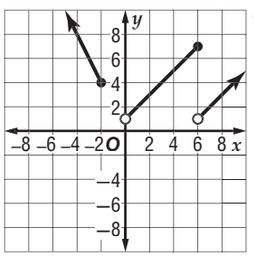
(47)



(48)

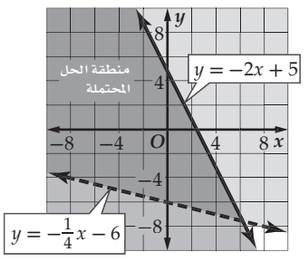


(49)

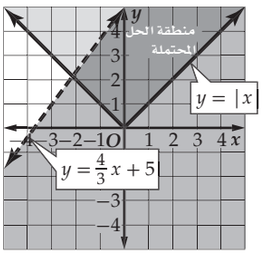


الدرس 8-1 ، (تأكد) ، ص 70, 71:

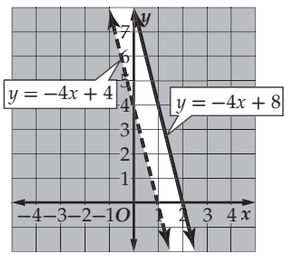
(1A)



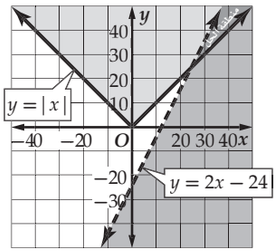
(1B)



(2A)



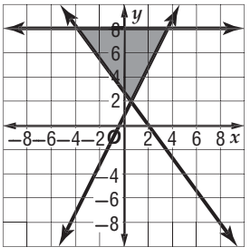
(2B)



مجموعة الحل هي ∅.

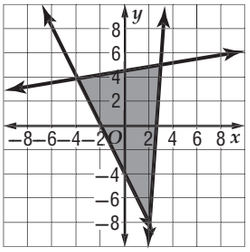
الدرس 8-1 ، ص 73-75:

(5)



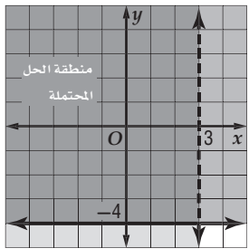
رؤوس منطقة الحل المحتملة هي (0.5, 2) , (−4 8) , (3.5,8)

(6)

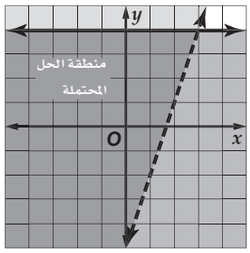


رؤوس منطقة الحل المحتملة هي (2, −8) , (3, 5) , (4, 4)

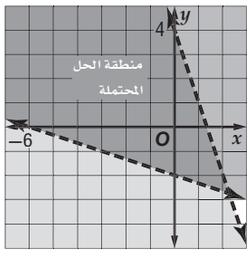
(7



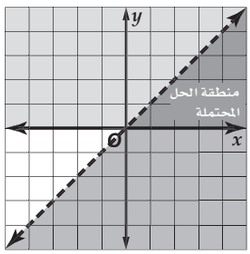
(8



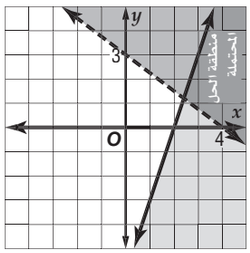
9 حلّ $y < -3x + 4$ هي المنطقة الواقعة عن يسار حد المستقيم، وحلّ $3y + x > -6$ هي المنطقة الواقعة فوقها، ومنطقة التقاطع تُمثّل منطقة الحل المحتملة للنظام.



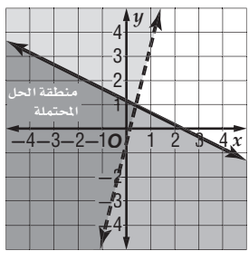
(10



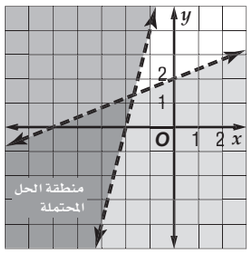
(11



(12

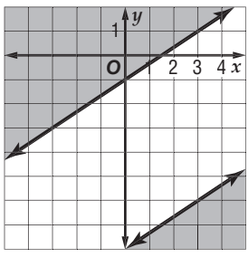


(13

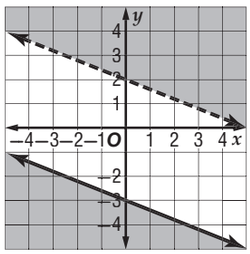


مجموعة الحل هي ∅ .

(14

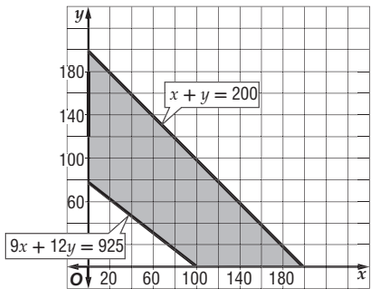


(15

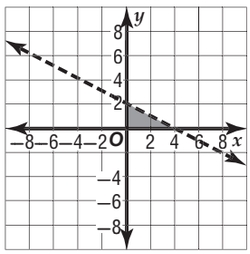


مجموعة الحل هي ∅ .

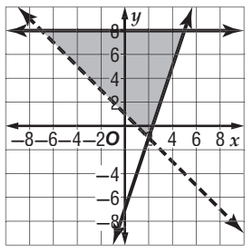
(16



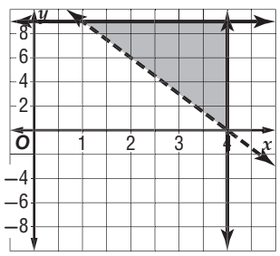
(17 (0, 2), (4, 0), (0, 0)



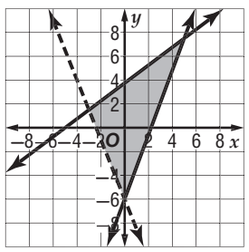
(18 (2, −1), (5, 8), (−7, 8)



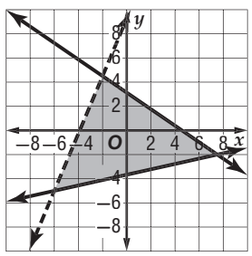
(19 (1, 9), (4, 0), (4, 9)



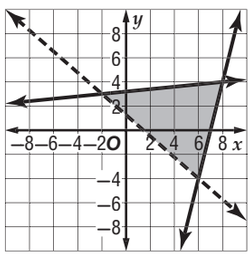
(20 (−3, 1.5), (5, 7.5), (0, −6)



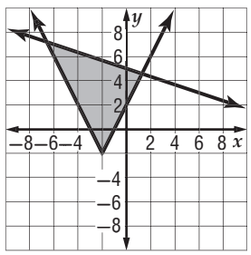
(21 (−6, −5), (−2, 4.5), (7.5, −2)



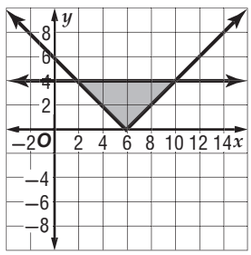
(22 (8, 4), (6, −4), (−2, 3)



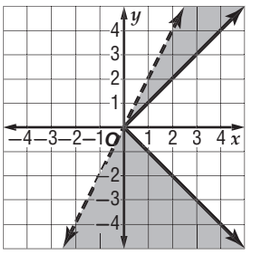
(25



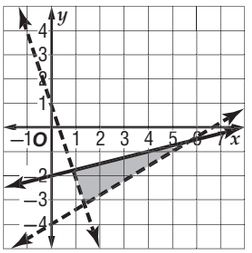
(26



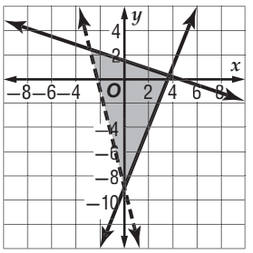
(27



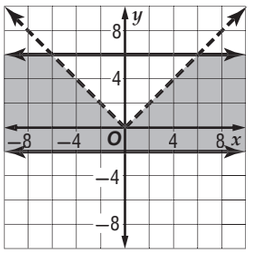
(28



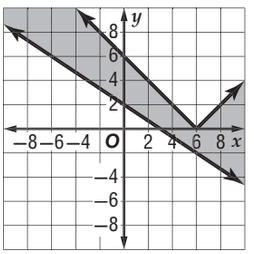
(29



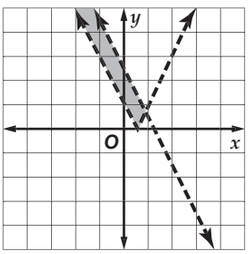
(30



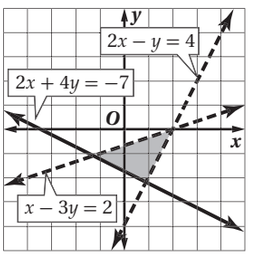
(31



(32



(33

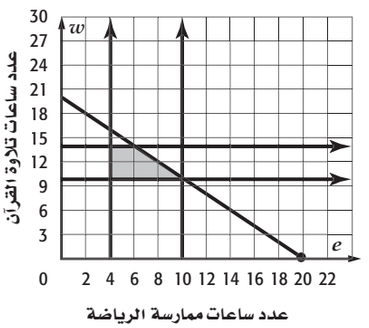


34) افرض أن w هي عدد ساعات تلاوة القرآن، و e هي عدد ساعات ممارسة الرياضة

$w + e \leq 20$

$4 \leq e \leq 10$

$10 \leq w \leq 14$



(35 $(0, 2), \left(5\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right), \left(4\frac{4}{17}, 3\frac{1}{17}\right), (2.8, -6.4)$

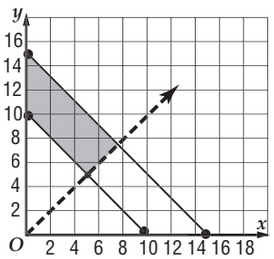
(36 $(-6, -2), \left(-3\frac{13}{17}, 6\frac{16}{17}\right), \left(9\frac{1}{7}, 3\frac{5}{7}\right), (0.8, -8.8)$

(37 $(-4, 6), (-3, 8), (4.8, -7.6), \left(1\frac{1}{7}, -9\frac{3}{7}\right)$

(38a إذا كان عدد طلاب الصف الثاني x، وعدد طلاب الصف الثالث y

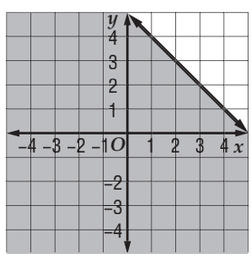
$y > x$, $x + y \geq 10$

$x + y \leq 15$

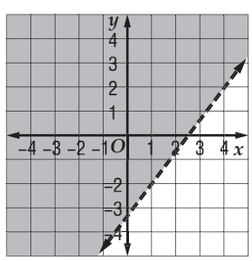


(38b $(4, 6), (5, 6), (3, 7), (4, 7), (5, 7), (6, 7), (2, 8), (3, 8),$
$(4, 8), (5, 8), (6, 8), (7, 8), (1, 9), (2, 9), (3, 9), (4, 9),$
$(5, 9), (6, 9), (0, 10), (1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10),$
$(5, 10), (0, 11), (1, 11), (2, 11), (3, 11), (4, 11), (0, 12),$
$(1, 12), (2, 12), (3, 12), (0, 13), (1, 13), (2, 13), (0, 14),$
$(1, 14), (0, 15)$

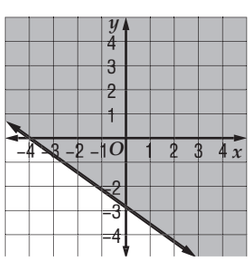
(46



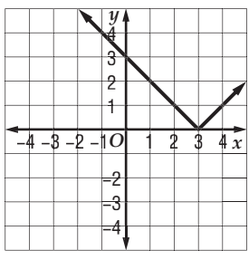
(47



(48



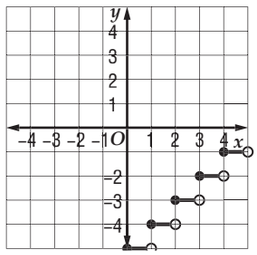
(49



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

(50

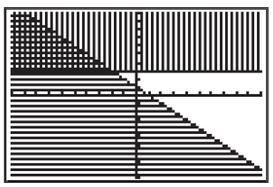


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

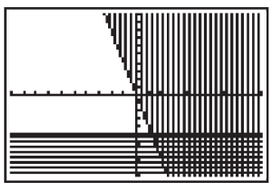
الدرس 8-1 (توسّع)، ص 76:

(1



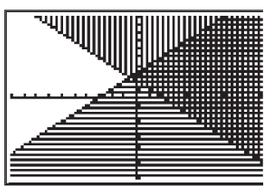
[–10, 10] scl: 1 by [–10, 10] scl: 1

(2



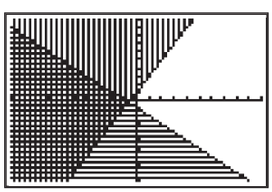
[–10, 10] scl: 1 by [–10, 10] scl: 1

(3



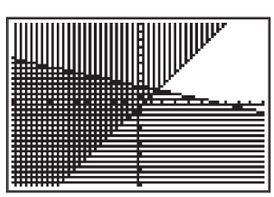
[–10, 10] scl: 1 by [–10, 10] scl: 1

(4



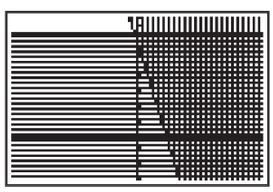
[–10, 10] scl: 1 by [–10, 10] scl: 1

(5



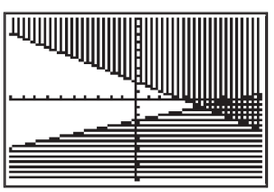
[–10, 10] scl: 1 by [–10, 10] scl: 1

(6

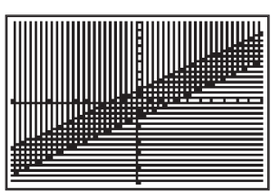


[–10, 10] scl: 1 by [–5, 15] scl: 1

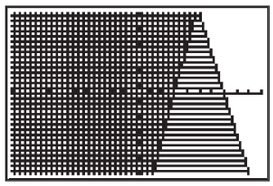
(7



(8



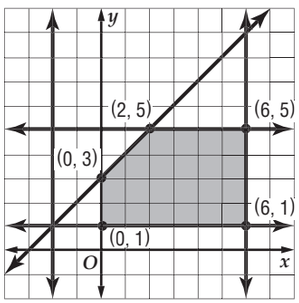
(9



[–10, 10] scl: 1 by [–10, 10] scl: 1

الدرس 9-1 (تأكد)، ص 78, 79:

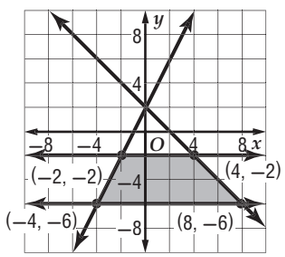
(1A



القيمة الصغرى 28– عند النقطة (1 , 6)

القيمة العظمى 6 عند النقطة (3 , 0)

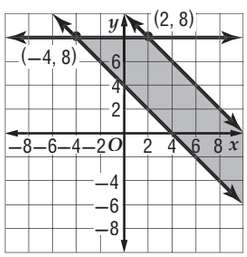
(1B



القيمة الصغرى 48 – عند النقطة (6– , 4 –)

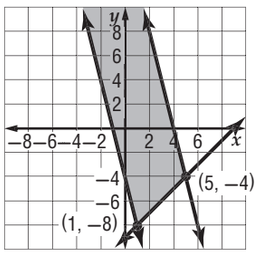
القيمة العظمى 24 عند النقطة (6– , 8)

(2A



القيمة العظمى 88 عند النقطة (8 , 4 –)، لا توجد قيمة صغرى

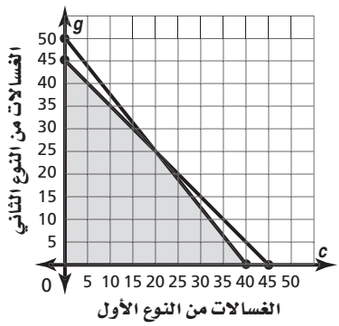
(2B



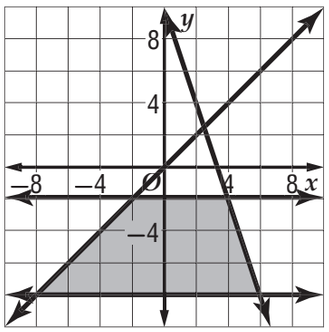
القيمة الصغرى 46 – عند النقطة (8 – ,1)، لا توجد قيمة عظمى

الدرس 9-1 ، ص 82-81:

(7b



(8

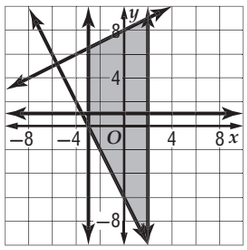


رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:

(6 , −8) , (4 , −2) , (−2 , −2) , (−8 , −8)

القيمة العظمى هي 8 – ، القيمة الصغرى هي 152–

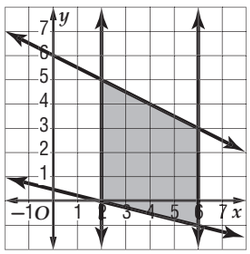
9



رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(2 , – 10) , (– 3 , 0) , (– 3 , 6.5) ,
(2 , 9)، عوض بهذه الرؤوس في الدالة، $f(x , y) = 4x - 9y$ نجد أن:
القيمة العظمى هي 82 عند النقطة (2 , −10)، القيمة الصغرى هي 89 – عند النقطة (2 , 9)

(x , y)	$-4x - 9y$	$f(x , y)$
(2 , −10)	−4(2) − 9(−10)	82
(−3 , 0)	−4(−3) − 9(−0)	12
(−3 , 6.5)	−4(−3) − 9(6.5)	70.5
(2 , 9)	−4(2) − 9(9)	−89

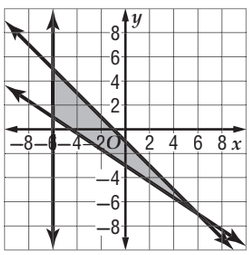
(10



رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:

(2 , 5), (6 , 3), (6 , –1), (2 , 0)؛
القيمة العظمى هي 57 ، القيمة الصغرى هي 12

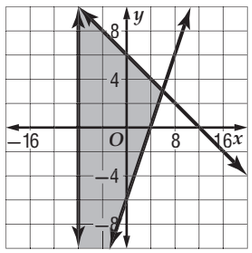
(11



رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:

(−6 , 5) , (6 , −7) , (−6 , 1)
القيمة العظمى هي 48
القيمة الصغرى هي 0

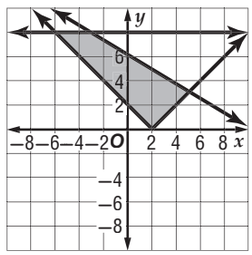
12



رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(6 , 3) , (– 8 , 10) , (– 8 , –18)
عوض بهذه الرؤوس في
الدالة، $f(x,y) = 10x - 6y$ نجد أن:
القيمة العظمى هي 42 عند النقطة (6 , 3)،
القيمة الصغرى هي 140 – عند النقطة
(–8 , 10)

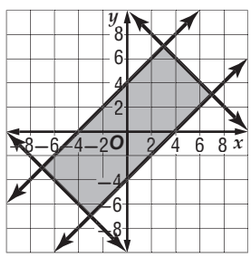
(x , y)	$-4x - 9y$	$f(x , y)$
(6 , 3)	10(6) – 6(3)	42
(–8 , 10)	10(–8) – 6(10)	–140
(–8 , –18)	10(–8) – 6(–18)	28

13



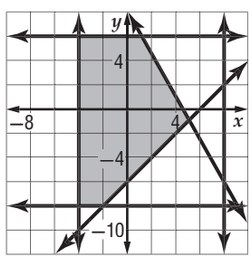
رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(2 , 0), (5 , 3), (– 3 , 8), (– 6 , 8)
القيمة العظمى هي 10–
القيمة الصغرى هي 105–

14



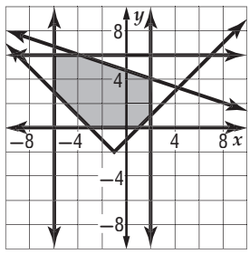
رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(3 , 7), (7 , 3) , (– 3 , – 7) , (– 7 , – 3)
القيمة العظمى هي 43
القيمة الصغرى هي 43 –

15



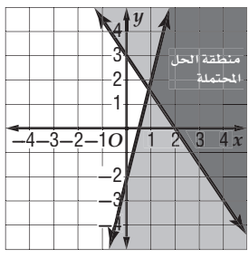
رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(5 , –1), (1 , 6), (–2 , – 8), (– 4 , – 8), (– 4 , 6)
القيمة العظمى هي 60
القيمة الصغرى هي 112–

16

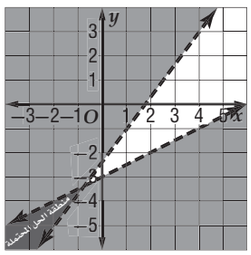


رؤوس منطقة الحَلّ المحتملة هي:
(– 4 , 6) , (2 , 4) , (2 , 1) , (1 , 0),
(– 6 , 6) , (– 6 , 3) , (– 3 , 0) ،
القيمة العظمى هي 26
القيمة الصغرى هي 18–

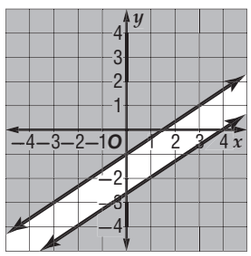
28



29



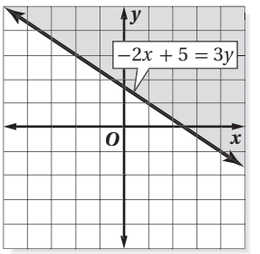
30



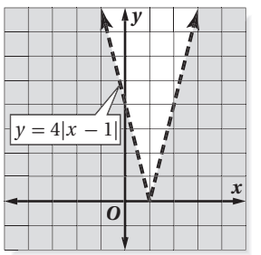
مجموعة الحل ∅

اختبار الفصل، ص 89:

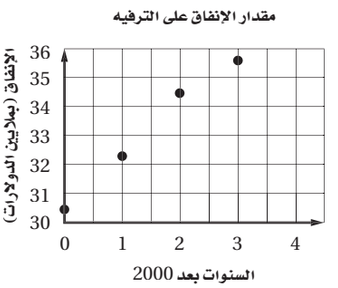
3)



4)

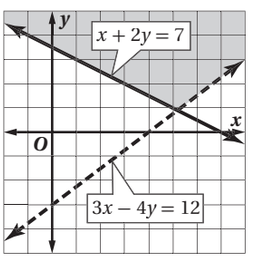


10)

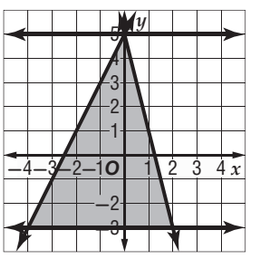


11) إجابة ممكنة:
باستعمال النقطتين (30.4 , 0) وَ (32.2 , 1)،
معادلة التنبؤ هي $y = 1.8x + 30.4$

16)

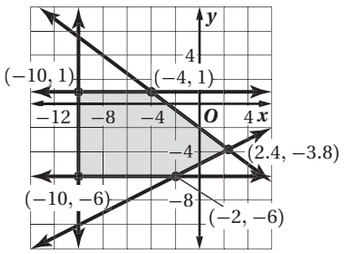


17)



18) رؤوس منطقة الحل المحتملة هي $(-4, -3), (0, 5), (2, -3)$
القيمة العظمى هي 17
القيمة الصغرى هي -15

19) رؤوس منطقة الحل المحتملة هي:
$(-10, 1), (-4, 1), (2.4, -3.8), (-2, -6), (-10, -6)$
القيمة العظمى هي 1
القيمة الصغرى هي -6



الفصل 2

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (95)

	الدرس 2-1 — 3 حصص	الدرس 2-1 توسع — حصة	الدرس 2-2 — 3 حصص	الدرس 2-3 — 3 حصص
العنوان	مقدمة في المصفوفات	معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات	العمليات على المصفوفات	ضرب المصفوفات
الأهداف	• تنظيم بيانات في مصفوفة. • استعمال العمليات على المصفوفات؛ لتحليل البيانات.	• استعمال الجداول الالكترونية؛ لتنظيم البيانات وعرضها.	• جمع المصفوفات وطرحها. • ضرب مصفوفة في عدد.	• ضرب المصفوفات. • استعمال خصائص ضرب المصفوفات.
المفردات الأساسية	المصفوفة العنصر الرتبة مصفوفة الصف مصفوفة العمود المصفوفة المربعة المصفوفة الصفرية المصفوفات المتساوية		الضرب في عدد حقيقي.	
تمثيلات متعددة	ص (101)			
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص(12) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • تدريس الجبر باليدويات دون ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • حاسوب يتضمن برنامج الجداول الإلكترونية.	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص(13) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص(14) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• الإنترنت	• حاسوب	• عرض تقديمي	• نظام استجابة
تنويع التعليم	ص (101, 102)		ص (106, 109)	ص (111, 112)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (102)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

المصفوفات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(17) حصة	(2) حصة	(19) حصة

الدرس 4-2 — 3 حصص	الدرس 5-2 — 3 حصص	توسّع 5-2 — حصة
المحدّدات وقاعدة كرامر	**النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية**	**معمل الآلة الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة**
• حساب المحدّدات. • حل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.	• إيجاد النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2 × 2 • كتابة معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين خطيتين وحلها.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية والمصفوفة الموسعة؛ لحَلّ نظام من المعادلات الخطية.
المحدّد محدّد من الرتبة الثانية محدّد من الرتبة الثالثة قاعدة الأقطار مصفوفة المعاملات قاعدة كرامر	المصفوفة المحايدة النظير الضربي للمصفوفة المعادلة المصفوفية مصفوفة المتغيرات مصفوفة الثوابت	
مصادر الفصل 2 • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص(15) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الجداول الإلكترونية ضمن • تدريس الجبر باليدويات دون ضمن • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة و المعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص(16) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 4 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • آلة حاسبة بيانية.
• السبورة التفاعلية	• مدونة	• الآلة الحاسبة البيانية
ص (120, 123, 126)	ص (129, 132)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (135, 136)
- اختبار الفصل، ص (137)
- اختبار معياري تراكمي، ص (140-141)

التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 2	المرجع		المرجع
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الثاني، ص (95)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (95)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد، تأكد من فهمك	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم		دليل المعلم
	تنبيه !	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	مصادر الفصل
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم	دليل الدراسة والمعالجة	
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (102)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 2 ، ص (136-134)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل ، ص (137)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري تراكمي ، ص (140,141)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 2**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطوّلة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات			

الفصل 2

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون حدّد الطلبة الّذين يعرفون كيف يؤدون العمليات على المصفوفات باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. واطلب إليهم إعداد قائمة بسلسلة المفاتيح التي يحتاجون إليها، ثم اطلب إليهم أن يوضحوا لزملائهم الّذين يجدون صعوبة في ذلك، كيف يستعملون الآلة الحاسبة البيانية؛ لأداء العمليات على المصفوفات.

البديل 2 دون المتوسط دون

ارسم على السبورة جدول بيانات على أن يتكوّن من ثلاثة أعمدة وصفين على الأقل. وعندما تخبر الطلبة بأن البيانات في الجدول يمكن أن تُمثَّل في مصفوفة، امسح عناوين الصفوف والأعمدة، وارسم قوس مصفوفة حول البيانات، واستعمل هذه المصفوفة؛ لتقديم المفردات المتعلقة بالمصفوفات مثل: العنصر، الرتبة، الصف، العمود، إلخ.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

حفِّز الطلبة لكي يستعملوا نظامًا من المعادلات الخطية؛ لاشتقاق قاعدة كرامر، وفيما يأتي إحدى الطرق لعمل ذلك:

استعمل النظام الآتي $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$، حُل كلتا المعادلتين في x لتحصل على: $x=\frac{f-ey}{d}, x=\frac{c-by}{a}$.

ساوِ بين هاتين القيمتين، وحُلّ المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$$\frac{c-by}{a}=\frac{f-ey}{d} \text{ أي } y=\frac{dc-af}{db-ae}$$

وبطريقة مماثلة، حُلّ كلتا المعادلتين الأصليتين بالنسبة للمتغير y لتحصل على:

$$y=\frac{c-ax}{b}, y=\frac{f-dx}{e}$$

ساوِ بين هاتين القيمتين، $\frac{c-ax}{b}=\frac{f-dx}{e}$.

حُلّ المعادلة في x، $x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$.

اطلب إلى الطلبة مقارنة قيم x، y بالقيم الناتجة عند استعمال قاعدة كرامر.

الفصل 2

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 2

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال العمليات المناسبة؛ لحل مسائل تتضمن أعدادًا نسبية.
- تمثيل العلاقات باستعمال الجداول.
- تحويل المعادلات إلى صور أخرى وحلّها.

الفصل 2

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تنظيم البيانات
- تحليل مواقف لأنظمة من المعادلات الخطية في متغيرين أو أكثر، وكتابة صيغ لها لحلّ مسائل.
- استعمال المصفوفات؛ لحَلّ أنظمة من المعادلات الخطية.

ما بعد الفصل 2

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- تعريف الدوال، ووصِفْ خصائصها، والتحويل بين الصيغ اللفظية، والعددية، والبيانية، والرمزية.
- استعمال الدّوال وخصائصها؛ لنمذجة مسائل من واقع الحياة وحلّها.

نظرة على الدروس

2-1 مقدمة في المصفوفات

تُعرّف المصفوفات على أنها طريقة لتنظيم البيانات وتحليلها، وتُوصف المصفوفة بدلالة رتبتها؛ فمثلاً المصفوفة التي تتكوّن من m صفًّا، و n عمودًا تكون مصفوفة من الرتبة $m \times n$.

- مصفوفة الصف هي مصفوفة تتكوّن من صف واحد.
- مصفوفة العمود هي مصفوفة تتكوّن من عمود واحد.
- المصفوفة المربعة، مصفوفة لها العدد نفسه من الصفوف والأعمدة.
- المصفوفة الصفرية، مصفوفة جميع عناصرها أصفار.
- المصفوفتان المتساويتان هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها، وكل عنصر في إحداهما يساوي العنصر المناظر له في الأخرى.

2-2 العمليات على المصفوفات

يتعيّن عند جمع مصفوفتين أو طرحهما أن تتحقق أولاً من أن لهما الرتبة نفسها، ثم يُحسب مجموع العناصر المتناظرة أو الفرق بينها، ويكون لمصفوفة ناتج الجمع أو الطرح الرتبة نفسها للمصفوفتين الأصليتين.

ونجد حاصل ضرب مصفوفة في عدد حقيقي بضرب كل عنصر في المصفوفة بهذا العدد، ويكون للمصفوفة الناتجة رتبة المصفوفة الأصلية نفسها. فمثلًا؛

$$2\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-2) & 2(1) & 2(0)\\ 2(4) & 2(-1) & 2(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 8 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

وللتحقق من خصائص العمليات على المصفوفات، يتطلع الطالب على الأمثلة التي توضح خصائص الإبدال، والتجميع على عملية جمع المصفوفات، وخاصية التوزيع لضرب عدد حقيقي في مصفوفة.

2-3 ضرب المصفوفات

عند ضرب مصفوفتين، فإنه من المهم أولاً تحديد إن كان حاصل الضرب مُعرّفاً، فيمكن ضرب مصفوفتين فقط، إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. فمثلاً؛ يكون حاصل الضرب $A_{m \times n} \cdot B_{n \times t}$ مصفوفة رتبتها $m \times t$. يدمج (يجمع) نواتج ضرب عناصر صف في المصفوفة الأولى مع عناصر عمود في المصفوفة الثانية، وتكون نتيجة ذلك عنصرًا واحدًا فقط، كما هو موضح بالمثال الآتي:

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(2)+-2(5) & 3(4)+-2(1)\\ 1(2)+4(5) & 1(4)+4(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 10\\ 22 & 8\end{bmatrix}$$

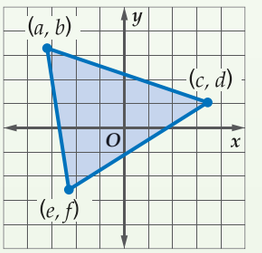
ويحقق ضرب المصفوفات خاصيتي التجميع والتوزيع، أما خاصية الإبدال فلا تتحقق على ضرب المصفوفات.

2-4 المحدّدات وقاعدة كرامر

لكل مصفوفة مربعة محدّد، ويمكن إيجاد قيمة محدّد المصفوفة من الرتبة 2×2 بحساب حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر، أما محدّد المصفوفة من الرتبة 3×3 فيمكن إيجاد قيمته باستعمال قاعدة الأقطار.

إذا عُلمت إحداثيات رؤوس مثلث، فعندئذ يمكن استعمال محدّد؛ لإيجاد مساحته. فمثلاً؛ مساحة المثلث الذي رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي $|A|$ ، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



ويمكن استعمال قاعدة كرامر لحَلّ أنظمة المعادلات الخطية باتباع الخطوات الآتية:

- اكتب كل معادلة بالصورة القياسية $ax + by = c$.
- اجعل كل متغير يساوي كسرًا كلّ من بسطه ومقامه محدّد، على أن يتكوّن محدد المقام من معاملات المتغيرات، أما محدد البسط فيختلف من متغير إلى آخر؛ لأنه عبارة عن محدد مصفوفة معاملات المتغيرات بعد استبدال معاملات المتغير المراد إيجاد قيمته بالثوابت في نظام المعادلات، ولا يكون للنظام حَلّ، إذا كانت قيمة محدِّد المقام يساوي صفرًا.

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

المصفوفة المحايدة هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي 1 وباقي العناصر الأخرى أصفار، وعند ضرب مصفوفة في المصفوفة المحايدة، فإن الناتج هو المصفوفة الأصلية.

وتكون المصفوفتان المربعتان إحداهما نظير ضربي للأخرى، إذا كان حاصل ضربهما هو المصفوفة المحايدة. ويُكتب النظير الضربي للمصفوفة من الرتبة 2×2 على صورة حاصل ضرب عاملين هما:

- العامل الأول كسر بسطه 1، ومقامه هو محدّد المصفوفة المعطاة.
- العامل الثاني: هو المصفوفة الناتجة من تبديل عنصري القطر الرئيس أحدهما مكان الآخر، وضرب عناصر القطر الآخر في العدد -1 . إذا كانت قيمة المحدد لمصفوفة من الرتبة 2×2 يساوي صفرا، فإنه لايوجد لها نظيرًا ضربيًا.

وتُستعمل معادلة مصفوفية واحدة للتعبير عن نظام المعادلات الخطية يتكوّن أحد طرفيها من مصفوفة المعاملات مضروبة في مصفوفة عمود المتغيرات. أما الطرف الآخر للمعادلة فيتكوّن من مصفوفة عمود الثوابت. وإذا أردت حلّ النظام، فاضرب كل طرف في المعادلة في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

الفصل 2 المصفوفات
Matrices

فيما سبق
درستُ حل نظام من المعادلات .

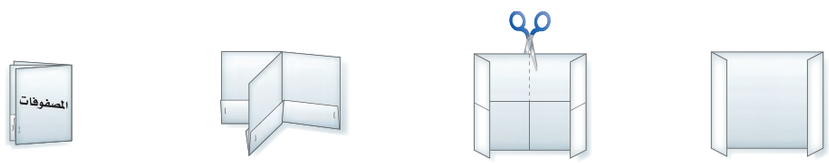
والآن
الأفكار العامة
- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات، وأجد قيمة المحددات.
- أجد النظير الضربي لمصفوفة.
- أستعمل المصفوفات؛ لحل نظام من المعادلات.

لماذا؟
تنظيم البيانات غالبًا ما تستعمل المصفوفات؛ لتنظيم البيانات فمثلًا؛ إذا نُظّم الطلبة المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلبة المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

مطويتك منظم أفكار

المصفوفات: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك في الفصل 2 ، مبتدئًا بورقة من دفتر الملاحظات.

1. اثنِ حافة الورقة بعرض 2cm بموازاة الضلعين القصيرين.
2. اطوِ الورقة الناتجة إلى أرباع، ثم قصّ كما في الشكل.
3. أعد الطي، ثم ثبّت الجيوب مستعملًا الدبّاسة.
4. اكتب على كلّ جيب عنوانًا لدرس من دروس الفصل.



الفصل 2 ملاحظات

مشروع الفصل

تنظيم النشاط الرياضي

يستعمل الطلبة ماتعلموه عن المصفوفات؛ لتنظيم البيانات وتحليلها.

يتوزع الطلبة المشاركون في النشاط الرياضي بالصفوف الثلاثة لإحدى المدارس الثانوية على رياضات أربع هي كرة القدم، كرة السلة، الكرة الطائرة، تنس الطاولة.

- دوّن عموديًّا أسماء الصفوف الثلاثة بالمدرسة.
- دوّن أفقيًّا أنواع الرياضات الأربع الممثلة للنشاط الرياضي بالمدرسة، كما بالشكل أدناه:

	كرة القدم	كرة السلة	الكرة الطائرة	تنس الطاولة
الصف 1				
الصف 2				
الصف 3				

- سجّل أعداد المشاركين في كل رياضة من كل صف؛ لتشكّل مصفوفة أعداد يدل كل رقم فيها على عدد المشاركين في رياضة ما من الصف المعنيّ، وضع صفرًا إذا لم يكن هناك مشاركون في إحدى الرياضات من أحد الصفوف.
- هل ترى أن ذلك يساعد على سهولة البحث عن عدد المشاركين في نشاط رياضي معين بالمدرسة؟
- أوجد عدد الطلبة المشاركين في كل نشاط على حدة من الصفوف الثلاثة.
- أوجد عدد الطلبة المشاركين في جميع الأنشطة لكل صف.
- أوجد عدد جميع الطلبة المشاركين في جميع الأنشطة.

المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف : عملية ضرب المصفوفة في عدد حقيقي تعني ضرب كل عنصر من عناصرها في هذا العدد.

مثال : إذا كانت $T = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ، فإن:

$$3T = \begin{bmatrix} (3)(5) & (3)(11) \\ (3)(-3) & (3)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 33 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}$$

سؤال: ماذا تعني عملية ضرب المصفوفات في عدد حقيقي ؟ تعني أن يضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في العدد الحقيقي.

المطويات منظم أفكار

غرضها يدّون الطلبة ملاحظاتهم حول المصفوفات بإعطاء أمثلة وكتابة ملاحظات في بطاقات، ووضعها في جيوب المطوية.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوّين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل؛ لتدوين ملاحظاتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجِّع الطلبة أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

مسرد مفردات الطالب ص (1, 2)

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضاً للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل الثاني

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة .

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أوجد النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يأتي: (مهارة سابقة)

1) 4 $-4, \frac{1}{4}$
2) -15 $15, -\frac{1}{15}$
3) 0.2 $-0.2, 5$
4) -1.35 $1.35, -\frac{20}{27}$
5) $-\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$
6) $2\frac{1}{3}$ $-2\frac{1}{3}, \frac{3}{7}$

بسّط كل تعبير مما يأتي: (مهارة سابقة)

7) $6(x+2y)$ $6x+12y$
8) $4(x+5)-3$ $4x+17$
9) $-4(3x)-(7x-6)$ $-19x+6$
10) $5(2x-5)-\frac{1}{3}(4x+1)$ $\frac{26}{3}x-\frac{76}{3}$
11) $6(2x-1)-3(y-x)+0.5(4x-6)$ $17x-3y-9$

حُلّ نظام المعادلتين في كلٍّ مما يأتي بطريقة التعويض أو الحذف: (مهارة سابقة)

12) $2x-y=-1$, $y=x+3$ $(2,5)$
13) $2x-5y=-18$, $3x+4y=19$ $(1,4)$
14) $4y+6x=-6$, $x=y-8$ $(-5,6)$
15) $4x+2y=4$, $5y-x=35$ $(-2,6)$

16) **هدايا:** توزّع مدرسة هدايا (حقائب وأقلامًا) كل عام على المتفوقين، وقد بلغ إجمالي ثمنها هذا العام 534 BD، وكان سعر الحقيبة 30 BD، وسعر القلم 9 BD، أمّا في العام السابق فبلغ إجمالي ثمن الهدايا 448 BD، وكان سعر الحقيبة 25 BD، وسعر القلم 8 BD. اكتب نظامًا من معادلتين، ثم حُلَّه لتجد عدد الحقائب والأقلام التي توزّعها المدرسة في كل عام، علمًا بأن الحقائب والأقلام لها العدد نفسه في العامين.

انظر الهامش

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي للعدد -5

النظير الجمعي للعدد -5 هو العدد x ، بحيث إن $-5+x=0$؛ لذا فإن $x=5$

النظير الضربي للعدد -5 هو العدد x، حيث إن $-5x=1$؛ لذا فإن $x=-\frac{1}{5}$.

مثال 2

بسّط التعبير $\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$=\frac{3}{4}(8x)-\frac{3}{4}(4)+3x$ خاصية التوزيع

$=6x-3+3x$ بالتبسيط

$=9x-3$ بجمع الحدود المتشابهة

مثال 3

حُلّ نظام المعادلتين الآتي بطريقة التعويض أو الحذف:

$3y=x-9$

$4x+5y=2$

بما أن معامل x في المعادلة الأولى هو 1، فاستعمل طريقة التعويض. أولًا: حُلّ المعادلة بالنسبة للمتغير x.

$3y=x-9 \rightarrow x=3y+9$

$4(3y+9)+5y=2$ بتعويض $3y+9$ بدلًا من x

$12y+36+5y=2$ خاصية التوزيع

$17y=-34$ بجمع الحدود المتشابهة

$y=-2$ بقسمة الطرفين على 17

ولإيجاد قيمة x ، استعمل المساواة $y=-2$ في المعادلة الأولى.

$3(-2)=x-9$ بالتعويض عن y بـ -2

$-6=x-9$ بالضرب

$3=x$ بإضافة 9 لكلا الطرفين

إذن الحل هو $(3,-2)$.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومُخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا ... فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصادر الآتية :
مصادر الفصل	بنك المفاهيم و المهارات. تدريبات المهارات
دليل المعلم	مشروع الفصل 2، ص (94)
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من التمارين،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين :
مصادر الفصل	دليل الدراسة و المعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابة :

16) $30x+9y=534$

$25x+8y=448$

عدد الحقائب $=16$

عدد الأقلام $=6$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

حَلّ مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.

الدرس 2-1

تنظيم بيانات في مصفوفة.
استعمال العمليات على المصفوفات؛ لتحليل البيانات.

ما بعد الدرس 2-1

استعمال المصفوفات، لحَلّ أنظمة من المعادلات الخطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- كم عدد الصفوف في مصفوفة الهاتف المحمول؟ 4
- كم عدد الأعمدة في مصفوفة الهاتف المحمول؟ 3
- ما العدد الظاهر في الصف 3، والعمود 2؟ 256

رتبة المصفوفة وعناصرها

مثال 1 يبيّن كيفية تحديد رتبة المصفوفة، وتحديد عناصرها.

2-1 مقدمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

فيما سبق
درستُ حَلّ مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أنظّم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على المصفوفات؛ لتحليل البيانات.

المفردات الأساسية
المصفوفة matrix
العنصر element
الرتبة order
مصفوفة الصف row matrix
مصفوفة العمود column matrix
المصفوفة المربعة square matrix
المصفوفة الصفرية zero matrix
المصفوفات المتساوية equal matrices

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

حصل ناصر على عدة عروض؛ لشراء هاتف محمول بحسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة نظَّم البيانات في مصفوفة كما يأتي:

	النوع	سعة الذاكرة	السعر
العرض الأول	a	512	420
العرض الثاني	b	512	399
العرض الثالث	c	256	315
العرض الرابع	d	128	289

تنظيم البيانات **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات، أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة، بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال الحروف الكبيرة.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف

4 أعمدة

العنصر 1− موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8− موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.

يمكن تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًّا و n عمودًا يُقال عنها: مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة A في الأعلى هي مصفوفة من النوع 4×3، أو من الرتبة 4×3؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. والرمز a_{12} يدل على عنصر في المصفوفة A، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة B.

مثال 1 رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$؛ للإجابة عما يأتي:

a) حدّد رتبة المصفوفة A.

$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ صفان

3 أعمدة

بما أن A فيها صفان و3 أعمدة، فإن رتبتها 3×2.

b) ما قيمة العنصر a_{21}؟

$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$

صف 2

عمود 1

بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2، والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

تأكد

استعمل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$؛ للإجابة عما يأتي:

1A) ما رتبة المصفوفة B؟ 3×2

1B) ما قيمة العنصر b_{32}؟ -1

قراءة الرياضيات
يدل الرمز a_{ij} على العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفة A.

مصادر الدرس 2-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (101)	• تنويع التعليم، ص (101, 102)	• تنويع التعليم، ص (102)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

مصفوفة صف تحوي صفًّا واحدًا.
$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

مصفوفة عمود تحوي عمودًا واحدًا.
$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

المصفوفة المربعة عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.
$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

المصفوفة الصفرية جميع عناصرها أصفار.
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ المصفوفتان متساويتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.

مثال 2 حلّ معادلات تحوي مصفوفات

حُلّ $\begin{bmatrix} y \\ 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2x \\ 31+4y \end{bmatrix}$

بما أن المصفوفتين متساويتان، فإن العناصر المتناظرة فيهما متساوية، ونحصل على المعادلتين:

$y = 6 - 2x$

$3x = 31 + 4y$

يمكن حل هذا النظام من المعادلات بطريقة التعويض:

المعادلة الثانية	$3x = 31 + 4y$
بالتعويض عن y بـ $6 - 2x$	$3x = 31 + 4(6 - 2x)$
خاصية التوزيع	$3x = 31 + 24 - 8x$
بإضافة $8x$ إلى الطرفين	$11x = 55$
بقسمة الطرفين على 11	$x = 5$

لإيجاد قيمة y، عوّض عن x بـ 5 في أيٍّ من المعادلتين:

المعادلة الأولى	$y = 6 - 2x$
بالتعويض عن x بـ 5	$y = 6 - 2(5)$
بالتبسيط	$y = -4$

الحل هو $(5, -4)$.

تأكد

2) حُلّ $\begin{bmatrix} 5x+2 & y-4 \\ 0 & 4z+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $(2, -4, -1)$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

حَلّ معادلات تحوي مصفوفات

مثال 2 يبيّن كيفية حل معادلة تحوي مصفوفات.

مثالان إضافيان

1) **a)** حدّد رتبة المصفوفة G إذا كانت $G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 2×4

b) أوجد قيمة العنصر a_{12}. -1

2) حُلّ $\begin{bmatrix} y \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & -2 \\ 2y & +x \end{bmatrix}$ $(1, 1)$

إرشادات للمعلم الجديد

استيعاب الرموز أكد للطلبة أن رتبة المصفوفة تُعطى دائمًا على الصورة "عدد الصفوف في عدد الأعمدة".

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.

مثال 3 من واقع الحياة — تنظيم البيانات في مصفوفة

كرة القدم: رصد مدرب فريق المدرسة لكرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات العام الدراسي فكانت على النحو الآتي:

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 مرة قطع الكرة، 4 أهداف.	ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 مرة قطع الكرة، 11 هدفًا.	ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 مرة قطع الكرة، 4 أهداف.

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًّا بحسب عدد التسديدات.

b) حدّد رتبة المصفوفة، وما قيمة a_{23}؟

إرشادات للدراسة

عرض البيانات

يكون من الممكن أحيانًا تبديل عناصر الصفوف، وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تُمثل معلومات من واقع الحياة.

a)

	الأهداف	قطع الكرة	التمريرات	التسديدات	المباريات
ماجد	11	40	170	43	18
ياسر	4	30	20	31	20
معاذ	4	15	113	24	12

b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة؛ لذا فإن رتبة المصفوفة، 5 × 3، وقيمة العنصر a_{23} الموجود في الصف 2، والعمود 3 هي 20.

تأكد

3) يُبيّن الجدول المجاور الأسعار بالدينار لأربعة أنواع من الفطائر بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

	كبيرة	وسط	صغيرة
الجبن	0.5	0.35	0.25
الزعتر	0.4	0.3	0.2
البيض	0.55	0.4	0.3
اللحم	0.6	0.5	0.4

A) نظّم هذه البيانات في مصفوفةٍ، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًّا. انظر الهامش

B) حدّد رتبة المصفوفة. 3 × 4

C) ما قيمة العنصر a_{21}؟ 0.25

تحليل البيانات عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحيانًا معلومات ذات معنى. وفي أحيان أخرى لا تعطي أي معلومات ذات معنًى.

تنظيم البيانات

مثال 3 يبيّن كيفية تنظيم بيانات من واقع الحياة في مصفوفة.

مثال إضافي

3 **جامعة:** يريد حمد الالتحاق بإحدى الجامعات الثلاث A, B, C. وقد جمع معلومات تتعلق برسوم الدراسة (X)، والسكن والطعام (Y)، وعدد الطلبة (Z) في الجامعات الثلاث A, B, C

الجامعة A: $X = \text{BD}\,6160$, $Y = \text{BD}\,5958$, $Z = 26160$

الجامعة B: $X = \text{BD}\,6293$, $Y = \text{BD}\,7250$, $Z = 30409$

الجامعة C: $X = \text{BD}\,5352$, $Y = \text{BD}\,6280$, $Z = 12609$

a) نظّم البيانات في مصفوفة D، على أن تُرتب الأعمدة على النحو الآتي: رسوم التسجيل، والسكن والطعام، وعدد الطلبة.

$$D = \begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6160 & 5958 & 26160 \\ 6293 & 7250 & 30409 \\ 5352 & 6280 & 12609 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3 × 3

وما قيمة العنصر d_{32}؟ 6280

التعليم باستعمال التقنيات

الإنترنت اطلب إلى الطلبة، البحث على شبكة الإنترنت عن بيانات تثير اهتمامهم، مثل: عدد الحجاج لثلاث دول خلال ثلاث سنوات، ثم بيّن لهم كيف يستعملون المصفوفة؛ لتنظيم هذه البيانات.

إجابة (تأكد):

3A)

	كبيرة	وسط	صغيرة
الزعتر	0.4	0.3	0.2
الجبن	0.5	0.35	0.25
البيض	0.55	0.4	0.3
اللحم	0.6	0.5	0.4

مثال 4 تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم (في مثال 2) استعمال المصفوفة، للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة فأجب:

a) اجمع عناصر كلٍّ من العمودين 2 و 3 ، وفسّر النتائج.

مجموع عناصر عمود 2 يساوي 98، وهو يُمثّل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال المباريات جميعها.

مجموع عناصر عمود 3 يساوي 303، وهو يُمثّل العدد الكلي لتمريرات اللاعبين خلال جميع المباريات.

	الأهداف	قطع الكرة	التمريرات	التسديدات	المباريات
	11	40	170	43	18
	4	30	20	31	20
	4	15	113	24	12

b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2، ويقسم المجموع على 3 ، فما الناتج؟

الناتج هو 33 تقريبًا.

c) هل هذا هو المعدل الدقيق ؟ فسّر إجابتك.

لا، ليس للاعبين العدد نفسه من المباريات؛ لذا فإن إيجاد معدل عناصر عمود 2 لن يحدد المعدل الدقيق للتسديدات، ويتعين على المدرب بدلًا من ذلك قسمة مجموع عناصر العمود 2 على مجموع عناصر العمود 1 ، حيث سيكون المعدل الدقيق 1.96.

d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى ؟ فسّر إجابتك.

لا؛ لأن عناصر الصف عبارة عن خمسة أنواع مختلفة من البيانات.

تأكد

4) يبيّن الجدول المجاور عدد المركبات القادمة والمغادرة على جسر الملك فهد من 2007–2010 م من مملكة البحرين. للفروع a – c انظر الهامش

عدد المركبات القادمة والمغادرة على جسر الملك فهد من 2007 إلى 2010 م		
السنة	القادمة	المغادرة
2007	3413943	3302441
2008	3807636	3810870
2009	3377762	3441221
2010	4169061	4602708

موقع الجهاز المركزي للمعلومات بمملكة البحرين. http://www.cio.gov.bh

A) نظّم البيانات في مصفوفة .

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف، أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى؟

4D) معدل عناصر كل صف ليس له معنى، ولكن معدل عناصر كل عمود يعطي معدل المركبات القادمة، أو المغادرة من 2007–2010م.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 96

حدّد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ 2×4

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ 4×1

3) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$ 3×2

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي:

4) a_{32} -8 **5)** a_{11} 1 **6)** a_{33} 2 **7)** a_{24} 9

مثال 2 صفحة 97

8) حُلّ المعادلة $[x + 2y \quad 4x + 1] = [9 \quad 13]$. $(3, 3)$

تحليل البيانات

مثال 4 يُبيّن كيفية استعمال المصفوفات؛ لتحليل البيانات، باستعمال العمليات على صفوف وأعمدة المصفوفة.

مثال إضافي

4 استعمل المصفوفة الموجودة في المثال الإضافي 3.

$$D = \begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{matrix} X & Y & Z \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 6160 & 5958 & 26160 \\ 6293 & 7250 & 30409 \\ 5352 & 6280 & 12609 \end{bmatrix}$$

للإجابة عن الفروع a – d:

a) أوجد الوسط لعناصر العمود 1، وفسّر معنى القيمة الناتجة.

BD 5935؛ تدل على أن الوسط لرسوم الدراسة في الجامعات الثلاث هو BD 5935.

b) أي الجامعات الثلاث تكلفتها الإجمالية هي الأقل؟ الجامعة C

c) هل يزوّدنا جمع عناصر الصفوف ببيانات لها معنى؟ فسّر إجابتك.

لا؛ لأن أول عنصرين في أي صف بالدنانير، على حين أن العنصر الثالث يُمثّل عدد الطلبة.

d) هل يزوّدنا جمع عناصر العمود الثالث ببيانات ذات معنى؟ نعم، جمع عناصر العمود الثالث يعطي عدد جميع الطلبة المُسجلّين في الجامعات الثلاث.

التركيز في المحتوى الرياضي

المصفوفات توفر المصفوفة طريقة لتنظيم البيانات، كما أن لكل عنصر فيها غرضًا خاصًّا. ولكي تكون المصفوفتان متساويتين، يجب أن يكون لهما الرتبة نفسها، وكل عنصر في المصفوفة الأولى يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة الثانية.

إجابات (تأكد):

4A)

	المغادرة	القادمة
2007	3302441	3413943
2008	3810870	3807636
2009	3441221	3377762
2010	4602708	4169061

4B) 14768402؛ مجموع عدد المركبات القادمة على جسر الملك فهد من 2007 إلى 2010م

15157240؛ مجموع عدد المركبات المغادرة على جسر الملك فهد من 2007 إلى 2010م

4c) 6716384؛ مجموع عدد المركبات القادمة والمغادرة على جسر الملك فهد سنة 2007م

7618506؛ مجموع عدد المركبات القادمة والمغادرة على جسر الملك فهد سنة 2008م

6818983؛ مجموع عدد المركبات القادمة والمغادرة على جسر الملك فهد سنة 2009م

8771769؛ مجموع عدد المركبات القادمة والمغادرة على جسر الملك فهد سنة 2010م

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 9-1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

9a)

	طماطم	باذنجان	كوسة	خيار
المزرعة 1	500	488	570	540
المزرعة 2	820	800	1015	850

9c) 2098، نعم؛ تُمثّل مجموع عدد صناديق الخضروات التي تنتجها المزرعة 1، 3485 تُمثّل مجموع عدد صناديق الخضروات التي تنتجها المزرعة 2 .

22a)

	المخزن الثالث	المخزن الثاني	المخزن الأول
خلاص	2750	3000	2000
برحي	1500	1175	1200
سكري	1700	2250	500

22c) مجموع عناصر الصف الأول 7750
مجموع عناصر الصف الثاني 3875
مجموع عناصر الصف الثالث 4450؛
ويُمثّل كل مجموع إجمالي الكيلوجرامات الموجودة في المخازن الثلاثة من كل نوع على الترتيب.

المثالان 4 , 3
الصفحتان 99, 98

9) زراعة: يُبيّن الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

a) نظّم البيانات في مصفوفة. انظر الهامش
b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟ الباذنجان
c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسّر إجابتك.
d) اجمع عناصر كل عمود، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسّر إجابتك. المجاميع هي: 1320, 1288, 1390, 1585 ،نعم؛ ويُمثّل كل مجموع إجمالي عدد الصناديق التي تنتجها المزرعتان معًا من الخيار، والكوسة، والباذنجان، والطماطم على الترتيب.

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 96

حدّد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

10) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$ 1×2 **11)** $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ 2×2 **12)** $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 2×4

13) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ 3×3 **14)** $\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$ 3×1 **15)** $\begin{bmatrix} 115 \end{bmatrix}$ 1×1

إذا كانت: $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي:

16) a_{21} -9 **17)** b_{22} 19 **18)** b_{13} $2x$ **19)** a_{12} y

مثال 2
صفحة 97

20) حلّ المعادلة $\begin{bmatrix} 4x-3 & 3y \\ 7 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 7 & 2z+1 \end{bmatrix}$. $(3 , -5 , 6)$

مثال 3
صفحة 98

نظّم البيانات في الجدول أدناه في مصفوفة:

21)

الاسم	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
إبراهيم	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
أحمد	187	189	211	587

	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
ابراهيم	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
أحمد	187	189	211	587

مثال 3
صفحة 98

22) تخزين: ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه 2000 kg (خلاص)، و 1200 kg (برحي)، و 500 kg (سكري)، والثاني فيه 3000 kg (خلاص)، و 1175 kg (برحي)، و 2250 kg (سكري)، والثالث فيه 2750 kg (خلاص)، و1500 kg (برحي)، و 1700 kg (سكري). للفرعين a, c انظر الهامش

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.
b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، وماذا يُمثّل هذا المجموع؟
c) أوجد مجموع عناصر كل صف، وماذا يُمثّل هذا المجموع؟

22b) مجموع عناصر العمود الأول :3700، مجموع عناصر العمود الثاني: 6425، مجموع عناصر العمود الثالث: 5950 ؛ ويُمثل كل مجموع عدد الكيلوجرامات من التمر التي يحويها كل مخزن.

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	22-10 ، 34 ، 35 ، 37-44
ضمن ضمن المتوسط	26 - 10 زوجي ، 27 ، 28 ، 30 ، 32-35 ، 37-44
فوق فوق المتوسط	41-23 ، (اختياري: 42-44)

إذا كانت: $B=\begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي:

23) a_{32} 15 **24)** b_{21} $4x$ **25)** b_{12} -3 **26)** a_{21} x

27) طقس: يوضح الجدول المجاور درجات الحرارة العظمى (H) والصغرى (L) في مدينة ما خلال خمسة أيام من شهر أغسطس. استعمل هذا الجدول لحل الفرعين a,b:

الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
H 45	H 45	H 46	H 44	H 43
L 27	L 27	L 30	L 26	L 25

a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة.

$\begin{bmatrix} 43 & 44 & 46 & 45 & 45 \\ 25 & 26 & 30 & 27 & 27 \end{bmatrix}$

b) ما رتبة المصفوفة في الفرع a؟ 2×5

إذا كانت: $B=\begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} x^2+4 & y+6 \\ x-y & 2-y \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي:

28) a_{11} x^2+4 **29)** a_{22} $2-y$ **30)** b_{31} $-y$ **31)** b_{23} $-4x$

الربط مع واقع الحياة

بعد إعادة تعريف كلمة "كوكب" عام 2006، تبيّن أن بلوتو لم يعد يعتبر كوكبًا. وهو أحد 40 كويكبًا.

المصدر:
National Geographic

32) فلك: استعمل الجدول المجاور الذي يُبيّن بُعد بعض الكواكب عن الأرض والشمس؛ للإجابة عن الفروع a–c:

الكوكب	البُعد عن الشمس (مليون ميل)	البُعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	744
أورانس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

a) نظّم البيانات في مصفوفة. انظر الهامش

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟ 7×2

c) ما قيمة العنصر a_{42}؟ 370

33) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين تأثير قلب الصفوف والأعمدة في المصفوفة.

الاسم	عدد التمريرات الحاسمة	عدد الأهداف
محمود	8	3
محسن	6	5
سلطان	1	8
عبدالله	4	2

a) جدولة: نظّم البيانات في مصفوفة على أن تكون أسماء اللاعبين في صف. انظر الهامش

b) جبري: أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

c) جدولة: بدّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف. انظر الهامش

d) جبري: أوجد مجاميع عناصر كل صف. تمريرات حاسمة: 19، أهداف: 18

e) تحليل: هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟ لا؛ عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة، فإن البيانات لا تتأثر.

33b) مجموع عدد التمريرات الحاسمة 19، مجموع عدد الأهداف 18

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الاجتماعيون اطلب إلى الطلبة مناقشة أمثلة لأشياء شاهدوها، ومُثّلت بياناتها في صفوف وأعمدة.

إجابات:

32a)

	الأرض	الشمس
عطارد	57	36.00
الزهرة	26	67.24
المريخ	35	141.71
المشتري	370	483.88
زحل	744	887.14
أورانس	1607	1783.98
نبتون	2680	2796.46

33a)

	أهداف	تمريرات
محمود	3	8
محسن	5	6
سلطان	8	1
عبدالله	2	4

33c)

	عبدالله	سلطان	محسن	محمود
تمريرات	4	1	6	8
أهداف	2	8	5	3

تمثيلات متعددة في التمرين 33، يستعمل الطلبة جدول معلومات، والمصفوفة، والعمليات الحسابية؛ لاستكشاف معلومات نُظمت في مصفوفة.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) إجابة ممكنة:
خاطئة، المصفوفة المربعة التي فيها 4 أعمدة فيها 4 صفوف، لذلك لن يكون فيها عنصر في الصف الخامس.

34) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة. وفسّر إجابتك.

المصفوفة C مربعة، ولها أربعة أعمدة، وتحوي العنصر c_{53}.

35) **اكتشف الخطأ:** حدّدت كلٌّ من ياسمين وسارة قيمة العنصر b_{32} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$، هل توصلت إحداهما للحلّ الصحيح؟ فسّر إجابتك.

لا، العنصر b_{32} هو العنصر الثاني في الصف الثالث وهو 2.

ياسمين	سارة
قيمة العنصر b_{32} هي 5.	العنصر b_{32} غير موجود في المصفوفة B ؛ لأن B مصفوفة من النوع 3×2.

36) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من المتغيرات x, y, z التي تحقق المعادلة: **(−5, −12, −8)**

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 3x + 4z \\ 7x - 8z & 5y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z - 5x + 1 & 5y - 2x \\ 3y - 4z & 12x + 2y \end{bmatrix}$$

38) يمكن ترتيب البيانات المتعلقة بالتخصصات المختلفة والجامعات في مصفوفة؛ لتسهيل مقارنة البيانات بعضها ببعض.

37) **مسألة مفتوحة:** كوّن مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة، تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى. انظر الهامش

38) **اكتب:** اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

تدريب على اختبار معياري

39) نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

	ضد	مؤيد
المرشح الأول	771	1553
المرشح الثاني	1633	689
المرشح الثالث	229	2088

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي ليس صحيحًا؟ **D**

A هناك 771 صوتًا ضد المرشح الأول.

B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

مراجعة تراكمية

40) **أعمال:** يصنع مصنع ملابس قمصانًا وتنورات من القماش نفسه. وكل قميص يحتاج ساعة واحدة لفصّله وساعة أخرى لخياطته. أما التنورة فيحتاج قصُّها إلى ساعتين، وتحتاج خياطتها إلى ثلاث ساعات. إذا علمت أن قسم التفصيل لا يعمل في الأسبوع أكثر من 120 h، وقسم الخياطة لا يعمل أكثر من 150 h خلال المدة نفسها، وكانت الأرباح على النحو الآتي: 1.2 DB لكل قميص، 1.8 DB لكل تنورة. فكم قطعة من كل نوع يجب أن ينتج المصنع أسبوعيًّا ليكون ربحه أكبر ما يمكن؟ (الدرس 8-1) **0 تنورة، 120 قميصًا**

41) **ثقافة مالية:** يبيع مخبز كعكة الشوكولاتة وكعكة الفواكه معًا في صناديق تحوي من 6 إلى 12 كعكة من كلا النوعين، بحيث يحوي كل صندوق ثلاث كعكات على الأقل من كل نوع. فما عدد كعكات كل صندوق من كلا النوعين؛ ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 8-1)
3 كعكات شوكولاتة، 9 كعكات فواكه

النوع	كعكة الشوكولاتة	كعكة الفواكه
التكلفة	BD 1.9	BD 1.3
سعر البيع	BD 4.4	BD 3.9

مراجعة المتطلبات السابقة

احسب قيمة كل تعبير مما يأتي إذا كان: $w = 3, x = -2, y = 4, z = 0.5$:

42) $4x - 6y + 2z$ **−31**

43) $5w + 2(x - z) + 2y$ **18**

44) $4[3(2z + y) - 2(w + x)]$ **52**

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكِّر الطلبة في التمرين **35**، بأنه عند تحديد عنصر ما في مصفوفة، فإن رقم الصف يوضع دائمًا قبل رقم العمود.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة ذكر خصائص أخرى للمصفوفات، يتوقّعون دراستها.

إجابة:

37) إجابة ممكنة:

	الطول	الوزن	العمر
أحمد	140	53	12
محمد	150	60	15
حسن	130	45	12

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة كتابة مصفوفة M على أن تكون رتبتها 3×2 ، وعناصر الصف الأول فيها مختلفة، وكل عنصر في الصف الثاني يساوي مثلي العنصر m_{12}.

إجابة ممكنة: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

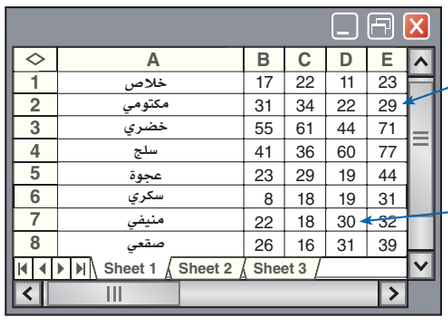
تُستعمل **الجداول الإلكترونية**؛ لتنظيم البيانات وعرضها وتحليلها، حيث يتم إدخالها في برنامج الجداول الإلكترونية في صفوف وأعمدة كما في المصفوفات. وبعد ذلك يمكن استعمالها؛ لعمل الرسوم، أو إجراء الحسابات.

مثال

جمع محل لبيع التمور بيانات عن مبيعاته في أربعة أسابيع متتالية، ونظّمها في الجدول المجاور. أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية .

مبيعات محل تمور خلال 4 أسابيع متتالية بالكيلوجرامات				
نوع التمر	1	2	3	4
خلاص	17	22	11	23
مكتومي	31	34	22	29
خضري	55	61	44	71
سلج	41	36	60	77
عجوة	23	29	19	44
سكري	8	18	19	31
منيفي	22	18	30	32
صقعي	26	16	31	39

استعمل العمود A للنوع، والعمود B لمبيعات الأسبوع الأول ، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثاني، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث، والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.



تمارين:

1) أدخل البيانات الواردة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس في برنامج الجداول الإلكترونية. انظر أعمال الطلبة

2) قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية، وتنظيمها في المصفوفة. انظر الهامش

3) يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف أو الأعمدة في الجداول الإلكترونية باستعمال الأمر (SUM) . للفروع a—c انظر الهامش

a) يمكنك إيجاد مجموع مدخلات العمود B باستعمال الصيغة =SUM(B1:B8) . أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا B9, C9, D9, E9 ؛ لتجد مجاميع مدخلات الأعمدة الأخرى. ماذا تُمثّل مجاميع مدخلات هذه الأعمدة؟

b) أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا F1 حتى F8؛ لإيجاد مجاميع مدخلات الصفوف عن 1 إلى 8. ماذا تمثّل هذه المجاميع في هذه الحالة؟

c) أوجد مجموع مدخلات الصف 9، ومجموع مدخلات العمود F. ماذا تلاحظ؟ فسّر إجابتك.

1 التركيز

الهدف

- استعمال الجداول الإلكترونية؛ لتنظيم البيانات وعرضها.

المواد اللازمة

- حاسوب يتضمن برنامج الجداول الإلكترونية.

إرشادات التدريس

اطلب إلى الطلبة، صقل مهاراتهم في استعمال الجداول الإلكترونية، عن طريق إدخال البيانات الموجودة في المثال. واقترح عليهم كتابة عناوين وصفية داخل الخلايا في أعلى الأعمدة، مما يسهل فهم النتائج وتفسيرها.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة، على أن يشترك الطالب الذي يمتلك معلومات جيدة عن برنامج الجداول الإلكترونية، مع طالب آخر لديه خبرة أقل في هذا المجال.

تدريب اطلب إلى الطلبة أن يحلوا التمرينين 1 و 2 .

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 3؛ لتقويم مدى مهارة الطلبة في استعمال صيغ الجمع في برنامج الجداول الإلكترونية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلبة عن بنية برنامج الجداول الإلكترونية المستعمل. واسألهم على سبيل المثال؛ أي الخلايا تحتوي على البيانات، وأيها تحتوي على العناوين التي تحدّد نوع البيانات؟ واطلب إليهم مقارنة بنية برنامج الجداول الإلكترونية ببنية المصفوفة.

إجابات:

2) كلاهما يستعمل الصفوف والأعمدة، لكن في برنامج الجداول الإلكترونية تُميّز الصفوف باستعمال الأعداد على حين تُميّز الأعمدة باستعمال الحروف. أما في المصفوفة تُميّز كل من الصفوف والأعمدة باستعمال الأعداد.

3a) مجاميع عناصر الأعمدة 346 ,236 ,234 ,223 ؛ وكل مجموع يُمثّل إجمالي ما بيع من التمور في كل أسبوع من الأسابيع الأربعة

3b) خلاص 73، مكتومي 116، خضري 231، سلج 214، عجوة 115، سكري 76، منيفي 102، صقعي 112؛ وكل مجموع يُمثّل إجمالي ما بيع بالكيلوجرامات من كل نوع من أنواع التمور في الأسابيع الأربعة.

3c) المجموع في كلتا المجموعتين هو 1039. مجموع حاصل جمع الصفوف يساوي مجموع حاصل جمع الأعمدة؛ لأن كلًّا منهما يُمثّل مجموع ما بيع من كل أنواع التمور في جميع الأسابيع.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

تنظيم البيانات في مصفوفات.

الدرس 2-2

جمع المصفوفات وطرحها.

ضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

ما بعد الدرس 2-2

استعمال المصفوفات؛ لحَلّ أنظمة من المعادلات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما معدل النفقات الأسبوعية للمعرض 2 في البحرين؟
  BD 1800
- ما موقع معدل النفقات الأسبوعية للمعرض الأول في كل مصفوفة؟
  الصف1 ، العمود 1
- كيف يمكن أن تجد إجمالي المبيعات الأسبوعية للمعرض الثاني في الشركة لجميع المناطق؟
  اجمع العناصر الموجودة في الصف 2، والعمود 2 في المصفوفات الثلاث.

جمع المصفوفات وطرحها

مثال 1 يبيّن كيفية جمع مصفوفتين وطرحهما.

2-2 العمليات على المصفوفات
Operations with Matrices

فيما سبق
درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات.

والآن

الأفكار الرئيسة
- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

المفردات الأساسية
الضرب في عدد حقيقي
scalar multiplication

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
لدى وكيل سيارات فروع في كلٍّ من البحرين والرياض وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض. وتُبيّن المصفوفات أدناه معدل النفقات، والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	البحرين		الرياض		جدة	
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض الأول	122000	1700	145000	1900	109500	1050
المعرض الثاني	145500	1800	225000	2400	135000	1800
المعرض الثالث	160000	1800	290000	2700	150500	1800

جمع المصفوفات وطرحها يمكن جمع مصفوفتين، أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها.

مفهوم أساسي جمع المصفوفات وطرحها

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$، فإن $A + B$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$، ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A و B، وكذلك $A - B$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

بالرموز

$$\begin{matrix} A & + & B & = & A+B \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} A & - & B & = & A-B \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة
إذا كان $A + B = C$
فإن $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$.

مثال 1 جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت: $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

(a) $A + B$

بالتعويض
$$A + B = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$
بجمع العناصر المتناظرة
$$= \begin{bmatrix} 16+(-4) & 2+(-1) \\ -9+(-3) & 8+(-7) \end{bmatrix}$$
بالتبسيط
$$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $B - C$

بالتعويض
$$B - C = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$
بما أن المصفوفتين B, C لهما رتبتان مختلفتان، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $B - C$.

تأكد

أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي إن أمكن:

(1A) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

(1B) $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

(1A) $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}$

(1B) $\begin{bmatrix} -13 & 5 & 9 \\ -11 & -1 & 11 \end{bmatrix}$

مصادر الدرس 2-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (106)	• تنويع التعليم، ص (106)	• تنويع التعليم، ص (106, 109)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الضرب في عدد حقيقي يمكن ضرب أي مصفوفة في عدد حقيقي، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الحقيقي. وتُسمى هذه العملية **الضرب في عدد حقيقي**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الضرب في عدد حقيقي

التعبير اللفظي حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times n$ في عدد حقيقي k هو مصفوفة kA من الرتبة $n \times m$، وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروبًا في العدد الحقيقي k.

بالرموز

$$k \cdot A = kA$$

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال

$$-3\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

إذا كان $kA = B$

فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

مثال 2

ضرب مصفوفة في عدد حقيقي

إذا كانت $R = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$، فأوجد $5R$.

بالتعويض

$$5R = 5\begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

بضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد 5

$$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$

تأكد

2) إذا كانت $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$، فأوجد $-4T$.

$$\begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 & 8 \\ 4 & 16 & 8 & -36 \end{bmatrix}$$

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص جمع المصفوفات

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C لها الرتبة نفسها، ولأي عدد حقيقي k:

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات $A + B = B + A$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $(A + B) + C = A + (B + C)$

خاصية التوزيع للضرب في عدد $k(A + B) = kA + kB$

يمكن إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات، وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **a)** إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A + B$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A - B$ (إن أمكن).

بما أن رتبة المصفوفة A لا تساوي رتبة المصفوفة B، فلا يمكن طرحهما.

الضرب في عدد حقيقي

مثال 2 يبيّن كيفية ضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

مثال إضافي

2 إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$،

فأوجد $2A$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على معرفة سابقة

بيّن للطلبة أن ضرب مصفوفة في عدد حقيقي هو شبيه باستعمال خاصية التوزيع لإيجاد $3(x + y)$.

تنبيه!

معالجة أخطاء مفاهيمية لمساعدة طلبتك على معرفة السبب في أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها عند جمعهما أو طرحهما؛ اقترح عليهم محاولة جمع مصفوفة من الرتبة 2×3 مع مصفوفة من الرتبة 3×2

التركيز في المحتوى الرياضي

جمع المصفوفات وطرحها يتطلب جمع مصفوفتين أو طرحهما، أن يكون لهما الرتبة نفسها. ويتم جمع مصفوفتين أو طرحهما، بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها في المصفوفتين. وتنطبق خاصيتا الإبدال والتجميع على جمع المصفوفات.

105 الدرس 2-2 العمليات على المصفوفات

العمليات على المصفوفات

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية إجراء عدة عمليات على المصفوفات.

مثالان إضافيان

3 إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-1\end{bmatrix}$$

فأوجد $4A-3B$.

$$\begin{bmatrix}14&9\\-4&3\end{bmatrix}$$

4 **أعمال:** تتطلب صناعة كل قطعة في مصنع كراسي وخزائن كميات مختلفة من الأدوات المعدنية كما هو مبين في المصفوفتين الآتيتين:

الكرسي:

	طويلة	قصيرة
مسامير	10	6
براغي	8	4

الخزانة:

	طويلة	قصيرة
مسامير	4	8
براغي	3	4

عبّر بمصفوفة عن إجمالي احتياجات المصنع من الأدوات المعدنية السابقة؛ لتصنيع 3 كراسي و4 طاولات.

$$\begin{bmatrix}46&50\\36&28\end{bmatrix}$$

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير يمكن أن يكون جمع مصفوفتين وطرحهما تحديًا لعدد من الطلبة. لذا، شجعهم على تطوير استراتيجيات تساعدهم على معرفة موقعهم في المصفوفة. فقد يجدون أن وضع دائرة على الأعداد التي يجمعونها أو يطرحونها هي طريقة مفيدة، أو استعمال لون معين أو الإشارة بأصابعهم إلى العددين الّذين يجرون عليهما الحسابات.

مثال 3 العمليات على المصفوفات

إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}-9&12\\2&-6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-4&-8\\2&-3\end{bmatrix}$، فأوجد $-4B-3A$.

بالتعويض
$$-4B-3A=-4\begin{bmatrix}-4&-8\\2&-3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-9&12\\2&-6\end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفة في الأعداد الحقيقية
$$=\begin{bmatrix}-4(-4)&-4(-8)\\-4(2)&-4(-3)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3(-9)&3(12)\\3(2)&3(-6)\end{bmatrix}$$

بالتبسيط
$$=\begin{bmatrix}16&32\\-8&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-27&36\\6&-18\end{bmatrix}$$

بطرح العناصر المتناظرة
$$=\begin{bmatrix}16-(-27)&32-36\\-8-6&12-(-18)\end{bmatrix}$$

بالتبسيط
$$=\begin{bmatrix}43&-4\\-14&30\end{bmatrix}$$

تأكد

3) إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}-5&3\\6&-8\\2&9\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}12&5\\5&-4\\4&-7\end{bmatrix}$، فأوجد $-6B+7A$. $\begin{bmatrix}-107&-9\\12&-32\\-10&105\end{bmatrix}$

الربط مع واقع الحياة

المخطط المالي
يستعمل المخطّط المالي المصفوفات؛ لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

يمكن استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية.

مثال 4 استعمال العمليات على المصفوفات

أعمال: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية الدرس؛ لإيجاد معدل المبيعات، والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.

لحساب المبيعات في خمسة أسابيع، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5، وجمع المصفوفات الناتجة معًا.

ضرب كل مصفوفة في العدد 5 ثم الجمع
$$5\begin{bmatrix}1700&122000\\1800&145500\\1800&160000\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1900&145000\\2400&225000\\2700&290000\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1050&109500\\1800&135000\\1800&150500\end{bmatrix}$$

تطبيق قاعدة الضرب في ثابت
$$=\begin{bmatrix}8500&610000\\9000&727500\\9000&800000\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9500&725000\\12000&1\,125000\\13500&1\,450000\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5250&547500\\9000&675000\\9000&752500\end{bmatrix}$$

بجمع المصفوفات

	المبيعات	النفقات
المعرض الأول	1882500	23250
المعرض الثاني	2527500	30000
المعرض الثالث	3002500	31500

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة
عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تُمثّل البيانات المتناظرة.

تأكد

4) ارجع إلى فقرة «لماذا؟» في بداية الدرس، لإيجاد معدل المبيعات، والنفقات السنوية لجميع المعارض على فرض أن السنة 52 أسبوعًا تقريبًا. انظر الهامش

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون اللفظيون / اللغويون قد يجد بعض الطلبة أن التكلم مع أنفسهم بهدوء أو على نحوٍ صامت، أثناء عملهم على المصفوفات أمر مفيد. فعلى سبيل المثال، يمكنهم ترديد الكلمات (صف في عمود) ليذكّروا أنفسهم كيف تكتب رتبة المصفوفة. وقد يجدون أيضًا أنه من المفيد لهم عند الضرب في عدد حقيقي، القول على سبيل المثال، "5 في 1 يساوي 5، و 5 في سالب 3 يساوي سالب 15"؛ مما يمكّنهم من استعمال أكثر من حاسة من حواسهم بهذه الطريقة للتحقق من حساباتهم.

إجابة (تأكد):

4)

	المبيعات	النفقات
المعرض الأول	19578000	241800
المعرض الثاني	26286000	312000
المعرض الثالث	31226000	327600

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 104

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: للتمارين 4 - 1 انظر الهامش

1) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 2 صفحة 105

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي: للتمرينين 6 ,5 انظر الهامش

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مثال 3 صفحة 106

استعمل المصفوفات: $C=\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$؛ لإيجاد ناتج كلٍّ مما يأتي: للتمرينين 8 ,7 انظر الهامش

7) $4B - 2A$

8) $-8C + 3A$

مثال 4 صفحة 106

9) خضراوات: يُبيّن الجدول المجاور عدد ملجرامات البوتاسيوم، والفسفور، والكالسيوم الموجودة في الكيلوجرام الواحد من أربعة أنواع من الخضراوات.

النوع (kg)	بوتاسيوم	فسفور	كالسيوم
البروكلي	503	114	68
الكرنب	323	55	24
القرنبيط	194	44	22
البامية	482	112	128

a) أوجد الفروق بين عدد ملجرامات البوتاسيوم، وعدد ملجرامات الكالسيوم الموجودة في الكيلوجرام الواحد من كل نوع من الخضراوات. اكتب الفروق في مصفوفة عمود.

b) ماذا يعني كل صفٍّ في الجدول ؟

c) أي نوع من الخضراوات يحتوي الكيلوجرام الواحد منه على أكبر عدد من ملجرامات البوتاسيوم، الفسفور، الكالسيوم؟ البروكلي، البروكلي، البامية

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 104

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

10) $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix}$ انظر الهامش

الأمثلة 4 ,3 ,2 الصفحتان 105, 106

12) أعمال: يبيّن الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم وجبات سريعة. إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 10%، فأجب: للفروع a – d انظر الهامش

المشروب	صغير (BD)	وسط (BD)	كبير (BD)
غازي	0.3	0.4	0.5
شاي	0.2	0.3	0.4
قهوة	0.2	0.3	0.4
عصير	0.4	0.5	0.6

a) اكتب المصفوفة C التي تُمثّل الأسعار الحالية .

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة C فيه؛ لإيجاد المصفوفة N التي تُمثّل الأسعار الجديدة؟

c) أوجد المصفوفة N.

d) أوجد المصفوفة C – N. ماذا تُمثّل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	19 - 10 ، 26 ، 27 ، 43 - 29
ضمن ضمن المتوسط	25 - 11 فردي ، 26 ، 27 ، 43 - 29
فوق فوق المتوسط	40 - 20 ، (اختياري: 43 - 41)

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 9-1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

2) غير ممكن

3) $\begin{bmatrix} -2 & -18 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 7 & 31 & -14 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 18 & 12 & 0 \\ -6 & 42 & -24 \\ -12 & -18 & 21 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -90 & 54 & -12 & -18 \\ -36 & 66 & -84 & 12 \\ -24 & 48 & 60 & -162 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ -14 & 38 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 50 & 36 \\ -87 & 41 \end{bmatrix}$

11) لإيجاد ناتج جمع مصفوفتين ، يجب أن يكون لكل منهما الرتبة نفسها. وبما أن رتبة احدى المصفوفتين هي 2×2 ورتبة المصفوفة الثانية 3×2 ، فإنه من غير الممكن إيجاد ناتج جمعهما.

12a) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$

12b) 1.1

12c) $\begin{bmatrix} 0.33 & 0.44 & 0.55 \\ 0.22 & 0.33 & 0.44 \\ 0.22 & 0.33 & 0.44 \\ 0.44 & 0.55 & 0.66 \end{bmatrix}$

12d) $\begin{bmatrix} 0.03 & 0.04 & 0.05 \\ 0.02 & 0.03 & 0.04 \\ 0.02 & 0.03 & 0.04 \\ 0.04 & 0.05 & 0.06 \end{bmatrix}$

تُمثّل هذه المصفوفة الزيادة في سعر كل صنف.

9a) $\begin{bmatrix} 435 \\ 299 \\ 172 \\ 354 \end{bmatrix}$

9b) عدد ملجرامات البوتاسيوم، والفوسفور، والكالسيوم الموجودة في الكيلوجرام الواحد لكل نوع من أنواع الخضراوات.

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" ، مع ذكر السبب: للتمارين 18–13 انظر الهامش

13) $\begin{bmatrix}-5\\8\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}19\\-2\\4\\7\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}4&-3&3\\-8&12&1\\0&-1&5\\7&-9&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3&-8&12\\-11&-5&3\\-1&22&-9\\-6&31&9\end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix}62\\-37\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}34&76&-13\end{bmatrix}$

16) $\begin{bmatrix}2&4&11\\-6&12&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8&-9&-3\\5&14&0\end{bmatrix}$

17) $\begin{bmatrix}5\\-9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9\\16\end{bmatrix}$

18) $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&3\\8&-3\end{bmatrix}$

19) **كتب:** تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، و 5000 كتاب تاريخي، و 5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000 كتاب علمي، و 10000 كتاب تاريخي، و 2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، و 700 كتاب تاريخي، و800 كتاب أدبي. للفروع a–d انظر الهامش

a) رتِّب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وارمز إليها بالرموز A, B, C .

b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وعبّر عن ذلك بمصفوفة.

c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C؟

d) أوجد المصفوفة $A+B$. وهل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة ؟ فسر إجابتك.

الربط مع واقع الحياة

تعدّ مكتبة جامعة البحرين من أكبر المكتبات العامة في المملكة، حيث أنشئت عام 1986م . وتخدم الطلبة وأعضاء هيئة التدريس.

وتتفرع مكتبات الجامعة إلى ثلاث مكتبات رئيسة ومكتبة قانونية، إلى جانب عدد من مكتبات مراكز الدراسات المتخصصة.

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب: للتمارين 25–20 انظر الهامش

20) $-3\begin{bmatrix}18&-6&-8\\-5&-3&12\\0&3x&-y\end{bmatrix}$

21) $-4\begin{bmatrix}-7\\4\\-3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-8\\3x\\-9\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}4\\x-6\\12\end{bmatrix}$

22) $-5\left(\begin{bmatrix}4&-8\\8&-9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-2\\-3&-6\end{bmatrix}\right)$

23) $-6\left(\begin{bmatrix}6&3y\\4x+1&-2\\-9&xy\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5&-6\\8&-7\\x+2&2x\end{bmatrix}\right)$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" ، مع ذكر السبب:

24) $-2\begin{bmatrix}-9.2&-8.4\\5.6&-4.3\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}4.1&-2.9\\7.2&-8.2\end{bmatrix}$

25) $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix}12&-16\\15&8\end{bmatrix}+\frac{2}{3}\begin{bmatrix}21&18\\-4&-6\end{bmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا

26) **برهان:** برهن على أن عملية جمع المصفوفات من الرتبة 2 × 2 إبدالية . انظر ملحق الإجابات

27) **برهان:** برهن على أن عملية جمع المصفوفات من الرتبة 2 × 2 تجميعية . انظر ملحق الإجابات

28) **تحدٍّ:** إذا كانت:

$A=\begin{bmatrix}-3&-4\\8&6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5&-1\\2&-4\end{bmatrix}, 3A-4B+6C=\begin{bmatrix}13&22\\10&4\end{bmatrix}$، فأوجد عناصر المصفوفة C.

$\begin{bmatrix}7&5\\-1&-5\end{bmatrix}$

إجابات :

13) $\begin{bmatrix}-24\\10\\-3\\-7\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}7&5&-9\\3&17&-2\\1&-23&14\\13&-40&-5\end{bmatrix}$

15) غير ممكن

16) $\begin{bmatrix}-6&13&14\\-11&-2&-3\end{bmatrix}$ **17)** $\begin{bmatrix}-7\\-32\end{bmatrix}$

18) غير ممكن

19a) $A=\begin{bmatrix}10000\\5000\\5000\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}15000\\10000\\2500\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}4000\\700\\800\end{bmatrix}$

19b) $\begin{bmatrix}29000\\15700\\8300\end{bmatrix}$ **19c)** $\begin{bmatrix}6000\\4300\\4200\end{bmatrix}$

19d) $\begin{bmatrix}25000\\15000\\7500\end{bmatrix}$ ، نعم؛ يمثل ناتج الجمع عدد الكتب من الأنواع الثلاثة في المكتبتين.

20) $\begin{bmatrix}-54&18&24\\15&9&-36\\0&-9x&3y\end{bmatrix}$

21) $\begin{bmatrix}-16\\4x+14\\-75\end{bmatrix}$

22) $-5\left(\begin{bmatrix}4&-8\\8&-9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-2\\-3&6\end{bmatrix}\right)$

بجمع العناصر المتناظرة $=-5\begin{bmatrix}4+4&-8+(-2)\\8+(-3)&-9+(-6)\end{bmatrix}$

بالتبسيط $=-5\begin{bmatrix}8&-10\\5&-15\end{bmatrix}$

بضرب كل عنصر في العدد 5− $=\begin{bmatrix}-5(8)&-5(-10)\\-5(5)&-5(-15)\end{bmatrix}$

بالضرب $=\begin{bmatrix}-40&50\\-25&75\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-6&-18y+36\\-24x-54&54\\-6x+42&-6xy-12x\end{bmatrix}$

24) $\begin{bmatrix}2&28.4\\-40&41.4\end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix}5&24\\-\frac{167}{12}&-10\end{bmatrix}$

29) تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين A, B، ثم برّر إجابتك. للفروع a–e انظر الهامش

a) إذا كانت $A+B$ معرّفة، فإن $A-B$ معرّفة.

b) إذا كان k عددًا حقيقيًّا، فإن kA و kB معرّفتان.

c) إذا كانت $A-B$ غير معرّفة، فإن $B-A$ غير معرّفة.

d) إذا كانت A وَ B لهما عدد العناصر نفسه، فإن $A+B$ معرّفة.

e) إذا كانت kA و kB معرفتين، فإن $kA + kB$ معرّفة.

30) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على مصفوفتين A و B، على أن تكون $4B - 3A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. انظر الهامش

31) اكتب: اشرح كيف تجد $4D - 3C$ لأي مصفوفتين C, D لهما الرتبة نفسها. انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار معياري

32) إجابة قصيرة: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $A + B$.

$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

33) يبيّن الجدول أدناه الأجور اليومية والأسبوعية لأنواع مختلفة من السيارات.

	يوميًا	أسبوعيًا
حجم صغير	BD12.99	BD67.99
حجم متوسط	BD17.99	BD98.99
حجم كبير	BD25.99	BD145.99
باص صغير	BD35.99	BD201.99

a) نظّم هذه البيانات في مصفوفة من الرتبة 2×4. انظر الهامش

b) إذا ارتفع الإيجار بمقدار 15%، فنظّم البيانات الجديدة في مصفوفة من الرتبة 2×4. انظر الهامش

مراجعة تراكمية

إذا كانت $C = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 16 & 4 & x \\ -2 & 9 & y \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -5 & x \\ 8 & 4y \end{bmatrix}$، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي: (الدرس 2-1)

34) a_{32} $4y$ **35)** c_{13} 3 **36)** b_{32} غير موجودة

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا. (الدرس 6-1) للتمارين 39–37 انظر ملحق الإجابات

37) $y \geq |2x + 5| + 3$ **38)** $y \leq 2|x - 4|$ **39)** $y \geq -2|x + 3| + 1$

مثّل بيانيًّا نظام المتباينات الآتي: (الدرس 7-1) انظر ملحق الإجابات

40) $4x + 2y > 8$ ، $4y - 3x \leq 12$

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كل تعبير مما يأتي:

41) $4(2x - 3y) + 2(5x - 6y)$ $18x - 24y$

42) $-3(2a - 5b) - 4(4b + a)$ $-10a - b$

43) $-7(x - y) + 5(y - x)$ $-12x + 12y$

تنويع التعليم

فوق

توسّع تُبيّن المصفوفة الآتية المبالغ التي يملكها 4 أشخاص بالدينار $\begin{bmatrix} 200000 & 21350 \\ 420000 & 360000 \end{bmatrix}$

ما العدد الذي يجب أن يضرب في المصفوفة ليعطي مصفوفة جديدة تمثّل المبالغ بعد دفع الزكاة التي تبلغ نسبتها 2.5%؟ 0.975

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي وزع طلبة الصف إلى مجموعات، واطلب إلى كل مجموعة إعداد عرض يظهر طريقة إجراء كل عملية على المصفوفات: الجمع، الطرح، أو الضرب في عدد حقيقي.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى كل طالب أن يكتب كيف ساعدته المفاهيم السابقة على جمع المصفوفتين وطرحهما في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 1-2 ، 2-2 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 2.

إجابات:

29a) دائمًا؛ إذا كانت $A + B$ معرّفة، فإن A ، B لهما الرتبة نفسها. وإذا كانت A ، B لهما الرتبة نفسها، فإن $A - B$ معرّفة.

29b) دائمًا.

29c) دائمًا؛ إذا كانت $A - B$ غير معرّفة، فإن A ، B لهما رتب مختلفة. وعليه تكون $A - B$ غير معرّفة.

29d) أحيانًا؛ يجب أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها حتى يمكن إجراء عملية الجمع عليهما.

29e) أحيانًا؛ يجب أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها حتى يمكن إجراء عملية الجمع عليهما.

30) إجابة ممكنة:

$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

33a)

$\begin{bmatrix} 12.99 & 67.99 \\ 17.99 & 98.99 \\ 25.99 & 145.99 \\ 35.99 & 201.99 \end{bmatrix}$

33b)

$\begin{bmatrix} 14.94 & 78.19 \\ 20.69 & 113.84 \\ 29.89 & 167.89 \\ 41.39 & 232.29 \end{bmatrix}$

2-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-3

ضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

الدرس 2-3

ضرب المصفوفات.

استعمال خصائص ضرب المصفوفات.

ما بعد الدرس 2-3

استعمال المصفوفات؛ لحل نظام من المعادلات الخطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- يُبيّن الجدول أن فريق كرة السلة المدرسي سجل 6 أهداف خارج منطقة الثلاثة في عام 2004. فكم عدد النقاط التي سجلها خارج منطقة الثلاثة في تلك السنة ؟ 18
- ما مجموع النقاط التي سجلها الفريق من عام 2003 إلى عام 2006 من داخل منطقة الثلاثة إذا احتسب الهدف بنقطتين ؟ 1632

ضرب المصفوفات

مثال 1 يبيّن كيفية تحديد رتبة مصفوفة ناتج الضرب.

2-3 ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

فيما سبق
درستُ ضرب المصفوفات في عدد حقيقي.

والآن

الأفكار الرئيسة
- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يُبيّن الجدول المجاور أنواع الأهداف وعددها التي سجَّلها فريق كرة السلة المدرسي في 4 مواسم متتالية.

نوع الهدف	الموسم وعدد الأهداف			
	2003	2004	2005	2006
من منطقة نقطتين	153	217	197	249
من منطقة ثلاث نقاط	12	6	7	8
من رمية حرة	82	146	102	158

يمكن تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأهداف B، كما يمكن التعبير عن مصفوفة عدد النقاط لكل نوع من الأهداف بالمصفوفة P .

مصفوفة عدد الأهداف B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عدد النقاط P

(من رمية حرة، من منطقة ثلاث نقاط، من منطقة نقطتين)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ويمكن استعمال ضرب المصفوفات؛ لإيجاد عدد النقاط التي أحرزها الفريق في كل موسم.

ضرب المصفوفات يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$ ، فإن حاصل الضرب هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.

$$A \cdot B = AB$$

$$m \times r \quad r \times t \quad m \times t$$

(متساويان — رتبة AB)

إرشادات للدراسة

أحيانًا تكتب $A_{m \times n}$ لتعبر عن مصفوفة A رتبتها $m \times n$.

مثال 1 رتبة مصفوفة حاصل الضرب

حدد ما إذا كانت عملية ضرب المصفوفات معرفة في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

a) $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2}$

$$A \cdot B = AB$$

$$3 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 3 \times 2$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ معرّفة، ورتبتها 3×2 .

b) $A_{5 \times 3} \cdot B_{5 \times 4}$

$$A \cdot B$$

$$5 \times 3 \quad 5 \times 4$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ غير معرّفة.

تأكد

حدد ما إذا كانت عملية ضرب المصفوفات معرفة في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1A) $A_{4 \times 6}$ ، $B_{6 \times 2}$ 4×2

1B) $A_{3 \times 2}$ ، $B_{3 \times 2}$ غير معرفة

مصادر الدرس 2-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (111)	• تنويع التعليم، ص (111)	• تنويع التعليم، ص (111, 112)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

يمكن إيجاد حاصل ضرب مصفوفتين، بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب، ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي

ضرب المصفوفات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة AB هو مجموع حواصل ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة A في عناصر العمود r من المصفوفة B بالترتيب.

بالرموز

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & AB \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

مثال 2

ضرب المصفوفات المربعة

أوجد XY إذا كانت $Y = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$

$$XY = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1: اضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة X في عناصر العمود الأول من المصفوفة Y بالترتيب، ثم اجمع حواصل الضرب، وضع النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من المصفوفة XY .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6(-5) + (-3)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & \mathbf{6(-4) + (-3)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول ، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ \mathbf{-10(-5) + (-2)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & \mathbf{-10(-4) + (-2)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: بسّط المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

تأكد

2) إذا كانت $V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد UV . $\begin{bmatrix} 64 & -50 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$

تنبيه!

المحافظة على التركيز من السهل أن تفقد التركيز عند ضرب المصفوفات، وربما تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا تقوم بضربها عند إيجاد عناصر مصفوفة الضرب.

ضرب المصفوفات

مثال 2 يبيّن كيفية ضرب مصفوفتين مربعتين.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدّد إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ معرّفة، وإذا كانت كذلك ،فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة .

a) $A_{3\times4} \cdot B_{4\times2}$ مصفوفة حاصل الضرب معرّفة، ورتبتها هي 3×2.

b) $A_{3\times2} \cdot B_{4\times3}$ مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ غير معرّفة.

2 أوجد RS إذا كانت:

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

تنبيه!

معالجة الأخطاء شجّع الطلبة على أن يعرضوا عملهم كاملًا في أثناء ضرب مصفوفتين مما يسمح لهم بملاحظة الأخطاء الحسابية إن وجدت.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا كان بعض الطلبة بحاجة لتدريب أكثر على المصفوفات ،

فاطلب إليهم ترتيب مقاعد الفصل؛ لتشكيل مصفوفات، على أن يرمز كل مقعد إلى عنصر في المصفوفة، واطلب إليهم إعداد 24 بطاقة كبيرة تظهر قيم عناصر مصفوفتين على صورة $B_{3\times4}$, $A_{4\times3}$ بوساطة مقاعد الطلبة، وأعط كل طالب يجلس في هاتين المصفوفتين بطاقة؛ لتبين العنصر الذي يمثله ذلك الموقع . ثم اطلب إليهم نمذجة ضرب المصفوفة $AB = C$ ، مبتدئين برسم المصفوفة 4×4 على السبورة ووضع خط لكل عنصر من عناصر C، ثم دع الطلبة يجروا عملية الضرب، ويجمعوا النتائج، ثم يكتبوها في الموقع الصحيح من المصفوفة على السبورة.

ضرب المصفوفات

مثال 3 يبيّن كيفية حل مسائل من واقع الحياة عن طريق ضرب مصفوفتين لهما رتب مختلفة.

مثال إضافي

3 **مسابقة علمية:** تتنافس ثلاث فرق في الجولة النهائية لمسابقة علمية، بحيث يمنح الفريق 3 نقاط لكل فوز، ونقطة واحدة لكل تعادل. أي فريق سيربح المسابقة؟

الفريق	الفوز	التعادل
الأول	5	4
الثاني	6	3
الثالث	4	5

الفريق الثاني سيربح المسابقة بمجموع نهائي 21 نقطة.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة

اعرض على الطلبة شرائح لمسائل مختلفة على ضرب المصفوفات، واسألهم إن كانت مصفوفة حاصل الضرب ممكنة أو لا لكل مسألة منها. واطلب إليهم الإجابة بـ A إن كان حاصل الضرب ممكنًا، و B إن لم يكن كذلك. واختر طالبًا لكل مثال؛ لتوضيح ذلك.

يمكن استعمال ضرب المصفوفات في عدة مواقف حياتية.

مثال 3 من واقع الحياة — ضرب المصفوفات

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربع فرق، تُمنح 7 نقاط لكل من يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين أعداد السّباحين في المراكز الثلاثة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

الربط مع واقع الحياة

من فوائد السباحة للجسم أنها تقوي العضلات، وتساهم في حرق سعرات حرارية، وتخفف من الضغط والتوتر النفسي.

افهم: يمكن إيجاد النقاط النهائية التي أحرزها كل فريق بضرب أعداد السّباحين في مصفوفة عدد النقاط لكل من المراكز: الأول والثاني والثالث.

خطط: اكتب كلًّا من أعداد السّباحين والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين، ورتِّب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة أعداد السّباحين.

أعداد السّباحين: $R = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ النقاط: $P = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

حل: اضرب المصفوفتين.

$$RP = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7)+7(4)+3(2) \\ 8(7)+9(4)+1(2) \\ 10(7)+5(4)+3(2) \\ 3(7)+3(4)+6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تُبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كل من الفرق A, B, C, D على الترتيب؛ لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.

تحقق: المصفوفة R من الرتبة 3×4 ، والمصفوفة P من الرتبة 1×3 ؛ لذا فإن حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 1×4

تأكد

3) كرة السلة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات؛ لتحديد الموسم الذي أحرز فيه فريق كرة السلة أكثر عددٍ من النقاط، وعدد النقاط التي أحرزها في ذلك الموسم. 2006، 680 نقطة

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب المسألتين الآتيتين على السبورة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

واطلب إلى الطلبة إيجاد كل منهما، ثم التنبؤ بناتج ضرب $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ،

ثم اطلب إليهم إجراء عملية الضرب؛ للتحقق من صحة التنبؤ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

خصائص ضرب المصفوفات تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.

مثال 4 اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a GH

$$GH = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6-5 & 3-24-35 \\ 8+4+0 & 12+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

b HG

$$HG = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -10+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $GH \neq HG$.

تأكد

4) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فهل $AB = BA$ ؟

4) $AB = \begin{bmatrix} -8 & 19 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$, $AB \neq BA$.

يتضح من المثال 4 أن الخاصية الإبدالية لا تتحقق في ضرب المصفوفات؛ لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

مثال 5 اختبار خاصية التوزيع

إذا كان $L = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $J = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a $J(K+L)$

بالتعويض
$$J(K+L) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

بجمع المصفوفتين
$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين
$$= \begin{bmatrix} -2+8 & 2+12 \\ 5-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

b $JK + JL$

$$JK + JL = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

البرهان والأمثلة المضادة

لإثبات صحة خاصية في جميع الحالات، يجب إثبات صحتها في الحالة العامة. ولبيان خطأ خاصية يكفي إعطاء مثال مضاد لها.

خصائص ضرب المصفوفات

مثال 4 يُبيّن أن خاصية الإبدال لا تتحقق في ضرب المصفوفات.

مثال 5 يُبيّن أن خاصية التوزيع تتحقق في المصفوفات.

مثالان إضافيان

4 إذا كانت:

$K = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a KL $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$

b LK $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -15 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5 إذا كانت:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a $A(B+C)$ $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

b $AB + AC$ $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على معرفة سابقة اطلب إلى الطلبة مقارنة العمليات في المثال 5 بالعمليات التي استعملوها سابقًا عند تطبيق خاصية التوزيع على الأعداد الحقيقية والتعابير الجبرية.

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+4(-1) & 2(2)+4(3) \\ -5(3)+(-2)(-1) & -5(2)+(-2)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-4)+4(3) & 2(-1)+4(0) \\ -5(-4)+(-2)(3) & -5(-1)+(-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $J(K+L) = JK + JL$.

تأكد

5) استعمل المصفوفات $T = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ ، $S = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $R = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$؛ لتحدد ما إذا كان $(S+T)R = SR + TR$ أو لا.

5) $(S+T)R = \begin{bmatrix} 15 & 38 \\ 1 & 45 \end{bmatrix}$

$SR + TR = \begin{bmatrix} 15 & 38 \\ 1 & 45 \end{bmatrix}$

$(S+T)R = SR + TR$

في المثال 5 كانت خاصية توزيع الضرب على الجمع صحيحة، ويمكن إثبات أن هذه الخاصية صحيحة دائمًا إذا كانت نواتج الضرب والجمع معرَّفة.

بعض خصائص الضرب مبينة في الجدول أدناه.

مفهوم أساسي — خصائص ضرب المصفوفات

أضف إلى مطويتك

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C ، ولأي عدد حقيقي k ، على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أيٍّ منها معرَّفًا:

خاصية التجميع لضرب المصفوفات	$(AB)C = A(BC)$
خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$C(A+B) = CA + CB$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(A+B)C = AC + BC$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 110

حدد ما إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $A_{2\times4} \cdot B_{4\times3}$ 2×3 **2)** $C_{5\times4} \cdot D_{5\times4}$ غير معرّفة **3)** $E_{8\times6} \cdot F_{6\times10}$ 8×10

مثال 2 صفحة 111

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -14 & 2 \\ -32 & 41 \end{bmatrix}$ **5)** $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 44 \\ 8 & -34 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix}$ انظر الهامش **7)** $\begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ غير معرّفة **9)** $\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -44 \\ 25 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ **11)** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 9(-2)+-2(6) & 9(4)+-2(-7) \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -18-12 & 36+14 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -30 & 50 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 9 & 90 & -9 \\ -6 & -60 & 6 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} 26 & 14 & -31 \\ -22 & -9 & -9 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} -16 & -1 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$

التركيز في المحتوى الرياضي

ضرب المصفوفات يتعين قبل إجراء عملية ضرب مصفوفتين، أن تحدد إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب معرّفة أو لا.

ويمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد الأعمدة في الأولى يساوي عدد الصفوف في الثانية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 14-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	33-15، 43، 44، 56-46
ضمن المتوسط	33-15 فردي، 34، 42-36 زوجي، 43، 44، 56-46
فوق المتوسط	54-34، (اختياري: 55, 56)

مثال 3
صفحة 112

12) لياقة بدنية: يُبيّن الجدول المجاور عدد المشتركين في دورات اللياقة في المستويين الأول والثاني.

إذا كانت رسوم الاشتراك الشهري 110 BD، ورسوم الاشتراك لستة أشهر 165 BD، ورسوم الاشتراك السنوي 439 BD، فأجب:

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية		
الاشتراك	المستوى الأول	المستوى الثاني
الشهري	35	28
ستة أشهر	32	17
السنوي	18	12

a) اكتب مصفوفة عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة رسوم الاشتراك. انظر الهامش

b) أوجد المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني. BD 28185

المثالان 5 , 4
الصفحة 113

استعمل المصفوفات $Z=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ -8 & -4\end{bmatrix}$ ، $Y=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ -1 & 9\end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix}-10 & -3\\ 2 & -8\end{bmatrix}$ ؛ لتحديد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة: للتمرينين 13, 14 انظر الهامش

13) $XY=YX$

14) $X(YZ)=(XY)Z$

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 110

حدد ما إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

15) $P_{2\times3}\cdot Q_{3\times4}$ 2×4

16) $A_{5\times5}\cdot B_{5\times5}$ 5×5

17) $M_{3\times1}\cdot N_{2\times3}$ غير معرّفة

18) $X_{2\times6}\cdot Y_{6\times3}$ 2×3

19) $J_{2\times1}\cdot K_{2\times1}$ غير معرّفة

20) $S_{5\times2}\cdot T_{2\times4}$ 5×4

مثال 2
صفحة 111

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-10\\ 6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}26\end{bmatrix}$

22) $\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -7\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}12 & -42\\ -6 & 21\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-3 & -7\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\ 9 & -3\end{bmatrix}$ انظر الهامش

24) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -3\\ 7 & -2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-6 & 3\\ 44 & -19\end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\ -4 & -10 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & -9\end{bmatrix}$ غير معرّفة

26) $\begin{bmatrix}-6 & 4 & -9\\ 2 & 8 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-70\\ 58\end{bmatrix}$

27) $\begin{bmatrix}2 & 9 & -3\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\ -6 & 7\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-40 & 64\\ 22 & 1\end{bmatrix}$

28) $\begin{bmatrix}-4\\ 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}12 & 4\\ -24 & -8\end{bmatrix}$

مثال 3
صفحة 112

29) عقارات: لدى مؤسسة عقارية 3 مبانٍ للإيجار، ويبين الجدول المجاور تقسيمات هذه الأبنية. إذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا 22 BD، وللغرفة التي تحوي سريرين 25 BD، وللجناح 36 BD.

تقسيمات الأبنية السكنية			
المبنى	غرفة بسرير واحد	غرفة بسريرين	جناح
1	3	2	2
2	2	3	1
3	4	3	0

a) اكتب مصفوفة تمثّل تقسيمات الأبنية، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف. انظر الهامش

b) أوجد مصفوفة تمثّل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها. $\begin{bmatrix}\text{BD } 188\\ \text{BD } 155\\ \text{BD } 163\end{bmatrix}$

c) ما مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها؟ BD 506

تنبيه!

معالجة الأخطاء أثناء التطبيقات الواقعية التي تتضمن ضرب مصفوفتين، حتى إن أمكن إبدال رتبة كل مصفوفة، فإن الضرب سيكون ذا معنى في اتجاه واحد فقط.

إجابات:

12a) $\begin{bmatrix}110 & 165 & 439\end{bmatrix}\begin{bmatrix}35 & 28\\ 32 & 17\\ 18 & 12\end{bmatrix}$

13) لا؛ $\begin{bmatrix}53 & -87\\ -2 & -60\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}62 & -33\\ 28 & -69\end{bmatrix}$

14) نعم؛

$X(YZ)=\begin{bmatrix}431 & 295\\ 490 & 242\end{bmatrix}$،

$(XY)Z=\begin{bmatrix}431 & 295\\ 490 & 242\end{bmatrix}$

29a) $I=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}220\\ 250\\ 360\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-3 & -7\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\ 9 & -3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-3 & -7\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\ 9 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3(4)+(-7)(9) & -3(4)+(-7)(-3)\end{bmatrix}$ بضرب الصف الأول من المصفوفة الأولى في كل عمود من المصفوفة الثانية

$=\begin{bmatrix}-3(4)+(-7)(9) & -3(4)+(-7)(-3)\\ -2(4)+(-1)(9) & -2(4)+(-1)(-3)\end{bmatrix}$ بضرب الصف الثاني من المصفوفة الأولى في كل عمود من المصفوفة الثانية

$=\begin{bmatrix}-12+(-63) & -12+21\\ -2+(-9) & -8+3\end{bmatrix}$ بالضرب

$=\begin{bmatrix}-75 & 9\\ -17 & -5\end{bmatrix}$ بالجمع

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا على أجزاء من الورق إذا كان ضرب المصفوفة 4×3 في المصفوفة 2×3، ممكنًا أو غير ممكن، وتفسير إجاباتهم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-2 بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 2.

إجابات

30) نعم؛

$$k(PQ) = \begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 4 & -12 \end{bmatrix},$$

$$P(kQ) = \begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

31) لا؛

$$PQR = \begin{bmatrix} -22 & 240 \\ 44 & -12 \end{bmatrix},$$

$$RQP = \begin{bmatrix} 34 & -40 \\ -220 & -44 \end{bmatrix}$$

32) نعم؛

$$PR + QR = \begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix},$$

$$(P + Q)R = \begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix}$$

33) لا؛

$$R(P + Q) = \begin{bmatrix} 34 & -6 \\ -64 & -30 \end{bmatrix}$$

$$PR + QR = \begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix}$$

36)

$$\begin{bmatrix} 36.75 & -10 - 4.5y \\ -6x - 4.5y - 12 & 2x + 4 + 3y^2 \\ -83.4 & 3.6y + 26 \end{bmatrix}$$

38)

$$\begin{bmatrix} -1.5x - 1.5y + 15 \\ y^2 + xy - 3x - 6 \\ 1.2x + 1.2y - 39 \end{bmatrix}$$

39)

$$\begin{bmatrix} 36.75x + 50.25y + 30 \\ -6x^2 - 18x - 10.5xy - 13.5y^2 - 12y - 12 \\ -83.4x - 94.2y - 78 \end{bmatrix}$$

42)

$$\begin{bmatrix} 15x + 69y - 12 \\ -18y^2 + 42.75y - 18xy + 20.25x \end{bmatrix}$$

المثالان 5 ، 4
صفحة 113

استعمل $k = 2$ ، $R = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ ، $Q = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ ، $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ؛ لتحدد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة: للتمارين 33–30 انظر الهامش

30) $k(PQ) = P(kQ)$

31) $PQR = RQP$

32) $PR + QR = (P + Q)R$

33) $R(P + Q) = PR + QR$

الربط مع واقع الحياة

تنمو أزهار الزنبق من بصيلات محرشفة، وتأخذ الأزهار شكل أبواق، في كل منها 6 بتلات .

المصدر: Hallmark

34) تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 باقة من زهر جوري، و 150 باقة من زهر نرجس، و 100 باقة من زهر زنبق، وسعر شراء الباقة من كل نوع مبين في الجدول المجاور، وكذلك سعر بيع الباقة بعد تغليفها وتنسيقها.

للفروع a – c انظر ملحق الإجابات

الزهور	سعر الشراء	سعر البيع
جوري	BD 0.50	BD 3.00
نرجس	BD 1.5	BD 6
زنبق	BD 2	BD 7

a) نظّم البيانات في مصفوفات، واستعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور.

b) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور .

c) استعمل العمليات على المصفوفات؛ لإيجاد ربح المحل من بيع الزهور.

استعمل المصفوفات $Z = \begin{bmatrix} -3 \\ x + y \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ x + 2 & y \\ 13 & 1.2 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix}$ ؛ لإيجاد ناتج الضرب في كل مما يأتي إذا كان ممكنًا: للتمارين 42, 39, 38, 36 انظر الهامش

35) XY غير معرّفة **36)** YX **37)** ZY غير معرّفة **38)** YZ

39) $(YX)Z$ **40)** $(XZ)X$ غير معرّفة **41)** $X(ZZ)$ غير معرّفة **42)** $(XX)Z$

مسائل مهارات التفكير العليا

43) برهان: بيّن أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من الرتبة 2×2 . انظر ملحق الإجابات

a) خاصية التوزيع للضرب في عدد.

b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع.

c) خاصية التجميع للضرب.

d) خاصية التجميع للضرب في عدد.

44) مسألة مفتوحة: اكتب مصفوفتين A ، B ، بحيث $A \neq B$ ، على أن تكون $AB = BA$.

44) إجابة ممكنة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

45) تحدٍّ: أوجد قيم a, b, c, d التي تجعل $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$ صحيحة. $a = 2, b = 1, c = 3, d = 4$

46) اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا"؟ بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات الألعاب الرياضية. يمكن إيجاد عدد النقاط التي أحرزها الفريق في كل موسم. فمثلًا لإيجاد عدد النقاط في موسم 2003م، فإنه يتم ضرب العمود الأول من مصفوفة عدد الأهداف في مصفوفة عدد النقاط. وهكذا لأي موسم.

تدريب على اختبار معياري

47) **اختيار من متعدد:** ما حاصل ضرب $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ؟ **D**

A $\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & -6 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 11 & -1 \end{bmatrix}$

D الضرب غير ممكن

48) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟ **C**

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A 1×4 **B** 3×3 **C** 4×1 **D** 4×3

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-2) للتمارين 51–49 انظر الهامش

49) $4\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

50) $5\left(2\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right)$

51) $-4\left(\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right)$

أوجد رتبة المصفوفة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-2)

52) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$ 1×2

53) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$ 2×2

54) $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -3 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$ 4×2

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة كل مقدار مما يأتي:

55) $2(7-3)-5(4-3)$ 3

56) $4((3)(2)-(-1)(3))+4(6-3)$ 48

إجابات:

49) $\begin{bmatrix} 42 & -24 \\ -42 & -31 \end{bmatrix}$

50) $\begin{bmatrix} -5 & -20 \\ -100 & -30 \end{bmatrix}$

51) $\begin{bmatrix} -80 & -44 \\ 68 & 4 \end{bmatrix}$

الدرس 2-3 ضرب المصفوفات 117

الفصل 2 اختبار منتصف الفصل

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، واطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

المعالجة

بناء على نتائج اختبار منتصف الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلبة.

مطوياتك متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حلّ أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 2-1 إلى 3-2 .

إجابات:

5a) الأسبوع الأول: $\begin{bmatrix}25 & 14 & 18 & 5\\44 & 10 & 13 & 8\end{bmatrix}$

الأسبوع الثاني: $\begin{bmatrix}32 & 26 & 15 & 4\\18 & 38 & 17 & 2\end{bmatrix}$

5b) $\begin{bmatrix}57 & 40 & 33 & 9\\62 & 48 & 30 & 10\end{bmatrix}$

14a) $\begin{bmatrix}10 & 10 & 15\\25 & 35 & 45\end{bmatrix}$

14b) $2\begin{bmatrix}10 & 10 & 15\\25 & 35 & 45\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20 & 20 & 30\\50 & 70 & 90\end{bmatrix}$

14c) $\begin{bmatrix}10 & 10 & 15\\25 & 35 & 45\end{bmatrix}$

عدد القمصان والبناطيل الإضافية التي يحتاج إلى تخزينها.

حدد رتبة كل مصفوفة مما يأتي: (الدرس 2-1)

1) $\begin{bmatrix}3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$ 1×5

2) $\begin{bmatrix}10 & -6 & 18 & 0\\-7 & 5 & 2 & 4\\3 & 11 & 9 & 7\end{bmatrix}$ 3×4

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\-5 & 1\\-3 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -9 & 2\\0 & 10 & 4\end{bmatrix}$، فحدد:

3) a_{21} -5

4) b_{22} 10

5) يُبيّن الجدول أدناه مبيعات محلي ألبسة أطفال في أسبوعين مختلفين: (الدرس 2-2)

المحل	الأسبوع	الملابس المبيعة			
		قميص	بلوزة	قبعة	بنطال
A	1	25	14	18	5
	2	32	26	15	4
B	1	44	10	13	8
	2	18	38	17	2

a) اكتب مصفوفة مبيعات كل أسبوع.

b) أوجد مجموع مبيعات الأسبوعين باستعمال جمع المصفوفات. للفرعين a, b انظر الهامش.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-2)

6) $\begin{bmatrix}0 & 15\\-6 & -10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 0\\-3 & 5\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-8 & 15\\-3 & -15\end{bmatrix}$

7) $-3\begin{bmatrix}3 & 5 & 12\\0 & -1 & 3\\9 & 6 & -5\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-9 & -15 & -36\\0 & 3 & -9\\-27 & -18 & 15\end{bmatrix}$

8) $2\begin{bmatrix}-1\\5\\-6\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-3x\\2\\x\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}x-2\\3\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-15x+4\\9\\4x-15\end{bmatrix}$

9) **اختيار من متعدد:** ما ناتج $2\begin{bmatrix}3 & 5\\-6 & 0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}9 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$؟ (الدرس 2-2) **A**

A $\begin{bmatrix}42 & 6\\-4 & 12\end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix}21 & 3\\-2 & 6\end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix}12 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix}27 & -5\\-12 & 0\end{bmatrix}$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-3)

10) $\begin{bmatrix}-2 & 3\\1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\0 & 5 & -6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-6 & 17 & -26\\3 & 29 & -32\end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix}-4 & 0 & -1\\0 & 1 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$ غير معرّفة

12) $\begin{bmatrix}4 & -2 & -7\\6 & 3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\5\\3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-39\\18\end{bmatrix}$

13) **اختيار من متعدد:** إذا كانت المصفوفة XY من الرتبة 3×2، والمصفوفة X من الرتبة 3×4، فما رتبة المصفوفة Y؟ (الدرس 2-3) **D**

A 2×3 **B** 3×2 **C** 3×4 **D** 4×2

14) **مبيعات:** يُبيّن الجدول أدناه موجودات أحد محلات الألبسة الرياضية من القمصان والبناطيل، وقد قرر صاحب المحل مضاعفة عدد القمصان قبيل فصل الصيف. (الدرس 2-2)

النوع	صغير	وسط	كبير
قميص	10	10	15
بنطال	25	35	45

a) اكتب مصفوفة A التي تمثّل عدد القمصان والبناطيل في المحل قبل مضاعفة العدد. للفروع a–c انظر الهامش

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة A لإيجاد المصفوفة M التي تمثل عدد القمصان والبناطيل بعد مضاعفته؟ أوجد M.

c) ماذا تمثل المصفوفة $M-A$ في هذه الحالة؟

15) **اختيار من متعدد:** ما ناتج (الدرس 2-3)

$\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$؟ **A**

A $\begin{bmatrix}8 & -12\end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix}8\\-12\end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix}8 & -4\\0 & 0\\0 & -8\end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\-4 & 0 & -8\end{bmatrix}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 3-2, 2-2, 2-1	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (94)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

2-4 المحدّدات وقاعدة كرامر
Determinants and Cramer's Rule

فيما سبق
درست حل أنظمة من المعادلات جبريًا.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أحسب المحدّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات الأساسية
المحدد determinant
محدد من الرتبة الثانية second-order determinant
محدد من الرتبة الثالثة third-order determinant
قاعدة الأقطار diagonal rule
مصفوفة المعاملات coefficient matrix
قاعدة كرامر Cramer's Rule

www.obeikaneducation.com

قراءة الرياضيات
المحددات
يرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$.

لماذا؟
لتحديد المنطقة التي يعيش فيها أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام حدد العالم أن المنطقة مثلثة الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحددات لحساب مساحتها.

المحددات كل مصفوفة مربعة لها **محدد**، ويسمى محدد المصفوفة من الرتبة 2×2 **بمحدد من الرتبة الثانية**.

مفهوم أساسي — محدد من الرتبة الثانية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي قيمة محدد من الرتبة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$
القطر الرئيسي

مثال
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$$

مثال 1 — محدد من الرتبة الثانية

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

تعريف المحدد من الرتبة الثانية: $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - 8(-4)$

بالتبسيط: $= 45 + 32$

$= 77$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

تعريف المحدد من الرتبة الثانية: $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6)$

بالتبسيط: $= 0 - 24$

$= -24$

تأكد

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

(1A) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$ 22

(1B) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$ −73

2-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4
حل أنظمة من المعادلات الخطية جبريًّا.

الدرس 2-4
حساب المحدّدات.
حل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

ما بعد الدرس 2-4
استعمال المصفوفات لحل أنظمة من المعادلات الخطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- ما الطريقة التي تعرفها سابقًا لإيجاد مساحة سطح المثلث؟
باستعمال الصيغة $A = \frac{1}{2}bh$
- لماذا يصعب استعمال الصيغة السابقة في هذه الحالة؟ لأنه قد يكون من الصعب تحديد ارتفاع المثلث .

المحدّدات

مثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد قيمة محدّد من الرتبة الثانية.

مصادر الدرس 2-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (120)	• تنويع التعليم، ص (120, 123)	• تنويع التعليم، ص (123, 126)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

تُسمى محددات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محددات من الرتبة الثالثة**. ويمكن حساب هـذه المحددات باستعمال **قاعدة الأقطار**.

مفهوم أساسي قاعدة الأقطار

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 أعد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحدد.

الخطوة 2 أوجد حواصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر الموازية له المبينة، ثم اجمع نواتجها.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

الخطوة 3 أوجد حواصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر الموازية له المبينة، ثم اجمع نواتجها.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

الخطوة 4 لإيجاد قيمة المحدد نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

مثال 2 من واقع الحياة استعمال قاعدة الأقطار

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار .

الخطوة 1 أعد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحدد.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

الخطوة 2 أوجد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

$$-4(2)(3) = -24 \qquad 4(2)(9) = 72$$
$$5(6)(4) = 120 \qquad -8(6)(-4) = 192$$
$$9(-3)(-8) = 216 \qquad 3(-3)(5) = -45$$

الخطوة 3 اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة.

المجموع الثاني	المجموع الأول
$-24 + 120 + 216 = 312$	$72 + 192 + (-45) = 219$

الخطوة 4 اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$219 - 312 = -93$$

فتكون قيمة المحدد هي -93.

تأكد

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

(2A $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ -48

(2B $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ -60

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار؛ لإيجاد المحدد للمصفوفات من الرتبة 3 × 3 فقط .

وتوجد طريقة أخرى تسمى طريقة **المفكوك بالمحددات الصغرى**، والمحدد الأصغر لعنصر هو محدد المصفوفة الناتجة بعد الصف والعمود الذي يقع فيه ذلك العنصر، ويمكن إيجاد مفكوك المحدد من الرتبة الثالثة بطريقة المفكوك بالمحددات الصغرى باستعمال عناصر أي صف أو أي عمود، حيث تضرب عناصر الصف أو العمود في المحدد الأصغر لها، ويضرب الناتج في إشارة موقع العنصر، ثم تجمع النواتج.

وتحدد موقع إشارة العنصر كما هو بالشكل أدناه.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

في مثال 2 يمكن إيجاد مفكوك المحدد بهذه الطريقة باستعمال عناصر الصف الأول كالآتي:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -48 - 24 - 21$$

$$= -93$$

المحدّدات

مثال 2 يُبيّن كيفية استعمال قاعدة الأقطار؛ لحساب محددات من الرتبة الثالثة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد قيمة $4\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ 4

2 أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

باستعمال قاعدة الأقطار -8

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

حُلّ بعض الأمثلة مع الطلبة، واحتفظ بهذه الحلول في صفحة ملاحظات، ثم أرسلها في نهاية الدرس بالبريد الإلكتروني إلى طلبتك، أو اعرضها على موقع المدرسة الإلكتروني (إن وجد)؛ فقد يساعد ذلك الطلبة على التركيز خلال الدرس بدلًا من محاولة كتابة الحسابات المدوّنة على السبورة.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا استعمل الطلبة حساب المحدّد عن طريق قاعدة الأقطار لأول مرة،

فقم بتشجيعهم على كتابة كل خطوة في الإجراءات، واطلب إليهم مقارنة عملهم بأعمال زملائهم؛ لإيجاد أي خطأ في حساباتهم أو في الطريقة التي استعملوها.

تستعمل المحددات أيضًا؛ لإيجاد مساحة سطح المثلث. إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكن استعمال الصيغة أدناه؛ لإيجاد مساحة سطح المثلث.

إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

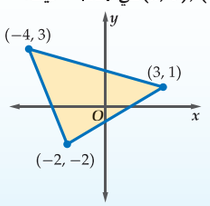
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مساحة سطح المثلث

التعبير اللفظي مساحة سطح المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي $|A|$ ، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



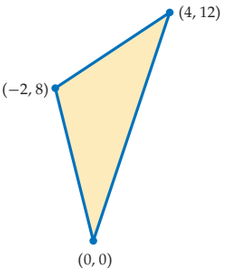
مثال

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال 3 من واقع الحياة

حساب مساحة سطح المثلث باستعمال المحددات

علم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت رؤوس المنطقة التي يعيش فيها النمر على المستوى الإحداثي موضحة في الشكل المجاور، بحيث إن كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل 1 km على سطح الأرض، فاستعمل المحددات؛ لإيجاد مساحة سطح المنطقة.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$(a, b) = (0, 0)$
$(c, d) = (4, 12)$
$(e, f) = (-2, 8)$

قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

بجمع نواتج ضرب عناصر الأقطار

$0 + 0 + 32 = 32$ $\qquad -24 + 0 + 0 = -24$

مساحة سطح المثلث

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \left(\frac{1}{2}\right)[32 - (-24)] = 28$$

بما أن وحدة واحدة على المستوى تُعادل 1 km على سطح الأرض. لذا، فإن الوحدة المربعة تساوي $1\,km^2$، فتكون مساحة المنطقة التي يعيش فيها النمر هي $28\,km^2$.

تأكد

3) يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها. إذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي (11, 9), (6, 4), (3, 15)، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة 0.5km، فما مساحة المنطقة المثلثة الشكل التي يقفون عند رؤوسها؟ $8.75\,km^2$

الربط مع واقع الحياة

يعيش النمر في مناطق تصل مساحاتها إلى $100\,km^2$ ، ويحرس النمر منطقته التي يعيش فيها، ويعرفها بتتبع أثره وأماكن روثه.

المصدر: National Geographic

المحدّدات

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال المحددات؛ لحساب مساحة سطح مثلث في موقف من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 **مسح الأراضي:** عيّن فريق للمسح الأرضي ثلاث نقاط على خريطة بحيث شكّلت رؤوس منطقة مثلثة. واستعملوا شبكة إحداثيات تمثّل كل وحدة منها 10 mi لتعيين رؤوس المثلث، فكانت هذه الرؤوس تقع في النقاط $(0, -1), (-2, -6), (3, -2)$.

استعمل المحددات؛ لإيجاد مساحة سطح المثلث. $850\,mi^2$

التركيز في المحتوى الرياضي

المحدّدات ترتبط كل مصفوفة مربعة بعدد حقيقي يُسمى محدد المصفوفة. و يُسمى محدد المصفوفة من الرتبة 2 × 2، محدد من الرتبة الثانية، وهي تساوي الفرق بين حاصل ضرب العناصر في كلا القطرين. ويُسمى محدد المصفوفة من الرتبة 3 × 3، محدد من الرتبة الثالثة، ويمكن حسابها باستعمال طريقة تُسمى قاعدة الأقطار.

تنبيه!

تجنب الأخطاء اطلب إلى الطلبة عمل لوحة تبين خطوات إيجاد محدد مصفوفة من الرتبة 3 × 3، باستعمال أقلام تخطيط ملونة؛ لتحديد الأقطار بصورة واضحة.

قاعدة كرامر

مثال 4 يُبيّن كيفية استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من معادلتين خطيتين في متغيرين.

مثال إضافي

4 حُلّ النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$5x + 4y = 28$

$3x - 2y = 8$

$(4, 2)$

قراءة الرياضيات

المحددات

تستعمل المحددات؛ لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أو لا .

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات خطية متعدد المتغيرات بعد ترتيب النظام **بمصفوفة المعاملات**.

قاعدة كرامر يمكنك استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات خطية، إذا كانت قيمة المحدد لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحدد صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$، حيث $C = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو (x, y)، حيث $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$، وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدد مصفوفة المعاملات C صفرًا، لا يكون للنظام حل وحيد.

مثال 4 حل نظام من معادلتين خطيتين في متغيرين

حُلّ النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر $\begin{matrix} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = -29 \end{matrix}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\|C\|}$	قاعدة كرامر	$y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\|C\|}$
$= \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$	بالتعويض	$= \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$
$= \dfrac{15(4) - (-29)(-6)}{5(4) - (3)(-6)}$	بحساب المحددات	$= \dfrac{5(-29) - 3(15)}{5(4) - (3)(-6)}$
$= \dfrac{60 - 174}{20 + 18}$	بالضرب	$= \dfrac{-145 - 45}{20 + 18}$
$= -\dfrac{114}{38}$	بالجمع والطرح	$= -\dfrac{190}{38}$
$= -3$	بالتبسيط	$= -5$

حل النظام هو $(-5, -3)$

تحقق

$x = -3, y = -5$ بالتبسيط

$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$

$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$

$15 = 15$ ✓

$x = -3, y = -5$ بالتبسيط

$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$

$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$

$-29 = -29$ ✓

تأكد

حُلّ كل نظام مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

(4A) $\begin{matrix} 7x + 3y = 37 \\ -5x - 7y = -41 \end{matrix}$ $(4, 3)$

(4B) $\begin{matrix} 8x - 5y = 70 \\ 9x + 7y = 3 \end{matrix}$ $(5, -6)$

122 الفصل 2 المصفوفات

يمكن استعمال قاعدة كرامر؛ لحل نظام من ثلاث معادلات خطية في ثلاثة متغيرات أيضًا.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات خطية

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax+by+cz=m \\ fx+gy+hz=n \\ jx+ky+\ell z=p \end{matrix}$ ، حيث $C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو (x, y, z) ، حيث $x=\dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ ، $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ ، $z=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

مثال 5

حل نظام مكوّن من ثلاث معادلات خطية

حُلّ النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر $\begin{matrix} 4x+5y-6z=-14 \\ 3x-2y+7z=47 \\ 7x-6y-8z=15 \end{matrix}$

$x=\dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ ، $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ ، $z=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$

$=\dfrac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}}$ ، $=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}}$ ، $=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix}}$

$=\dfrac{3105}{621}=5$ ، $=-\dfrac{1242}{621}=-2$ ، $=\dfrac{2484}{621}=4$

وعليه فيكون حل النظام هو $(5, -2, 4)$

تحقق

$4(5)+5(-2)-6(4) \stackrel{?}{=} -14$

$20-10-24 \stackrel{?}{=} -14$

$-14=-14$ ✓

$3(5)-2(-2)+7(4) \stackrel{?}{=} 47$

$15+4+28 \stackrel{?}{=} 47$

$47=47$ ✓

$7(5)-6(-2)-8(4) \stackrel{?}{=} 15$

$35+12-32 \stackrel{?}{=} 15$

$15=15$ ✓

تأكد

حُلّ كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

(5A) $\begin{matrix} 3x+5y+2z=-7 \\ -4x+3y-5z=-19 \\ 5x+4y-7z=-15 \end{matrix}$ $\left(\frac{23}{22}, -\frac{57}{22}, \frac{31}{22}\right)$

(5B) $\begin{matrix} 6x+5y+2z=-1 \\ -x+3y+7z=12 \\ 5x-7y-3z=-52 \end{matrix}$ $(-4, 5, -1)$

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.

قاعدة كرامر

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات خطية.

مثال إضافي

5 حُلّ النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$2x+y-z=-2$

$-x+2y+z=-0.5$

$x+y+2z=3.5$

$(0.5, -1, 2)$

تنبيه!

معالجة الأخطاء من المهم التنبيه عند حل نظام من ثلاث معادلات خطية في ثلاثة متغيرات، على أن البسط بالنسبة للمتغير x وجد عن طريق استبدال معاملات المتغير x بالحدود الثابتة للنظام. وكذلك، نجد البسط لكل من المتغيرين y ، z عن طريق استبدال المعاملات للمتغير y ، والمتغير z ، على الترتيب، بالحدود الثابتة للنظام.

التركيز في المحتوى الرياضي

قاعدة كرامر إحدى فوائد استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات خطية في ثلاثة متغيرات، هي أنه إذا كان النظام له حل وحيد، فيمكن لقاعدة كرامر أن تعطي قيمة أي متغير من المتغيرات الثلاثة دون الحاجة إلى إيجاد قيم المتغيرات الأخرى. أما إذا كانت قيمة المحدد تساوي صفرًا، فإن قاعدة كرامر لا تعطي حلًّا، ولكنها تشير إلى أن النظام إما أن يكون غير مستقل (له عدد لا نهائي من الحلول)، أو غير متسق (ليس له حل).

تنويع التعليم

ضمن فوق

إذا رغب بعض الطلبة في مراجعة ما تعلموه عن المصفوفات،

فاطلب إليهم كتابة فقرة مختصرة تعبر عن رأيهم بشأن الطرق المتعددة التي تعلموها في التعامل مع المصفوفات. واطلب إليهم التعليق على المواضيع التي وجدوها فعّالة ومفيدة، والمواضيع التي وجدوها صعبة ومربكة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 17 - 1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي ذكّر الطلبة بأن قاعدة كرامر لا تطبق عندما يساوي محدد مصفوفة المعاملات صفرًا؛ لأن الحل سوف يحوي كسرًا مقامه صفر، مما يجعله غير معرّف.

تأكد من فهمك

مثال 1
صفحة 119

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ — 26

2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$ — −12

3) $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ — −128

4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$ — 0

مثال 2
صفحة 120

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ — انظر ملحق الإجابات

6) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$ — −80

7) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ — −284

8) $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ — 302

9) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ — 72

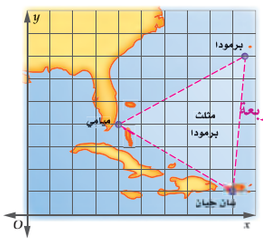
10) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$ — 139

الربط مع واقع الحياة

مثلث برمودا منطقة جغرافية مثلثة الشكل تقع قرابة الساحل الشرقي لمدينة فلوريدا الأمريكية.

مثال 3
صفحة 121

11) **جغرافيا:** استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة التي تُظهر منطقة مثلث برمودا؛ للإجابة عما يأتي:



a) احسب مساحة سطح منطقة مثلث برمودا على الخريطة. — 15.75 وحدة مربعة

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 mi في الواقع، فأوجد مساحة سطح منطقة مثلث برمودا الحقيقية. — $482343.75\ mi^2$

مثال 4
صفحة 122

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

12) $4x - 5y = 39$, $3x + 8y = -6$ — (6, −3)

13) $10c - 7d = -59$, $6c + 5d = -63$ — (−8, −3)

مثال 5
صفحة 123

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

14) $4x - 2y + 7z = 26$, $5x + 3y - 5z = -50$, $-7x - 8y - 3z = 49$ — (−3, −5, 4)

15) $-3x - 5y + 10z = -4$, $-8x + 2y - 3z = -91$, $6x + 8y - 7z = -35$ — $\left(\frac{66}{7}, -\frac{116}{7}, -\frac{41}{7}\right)$

16) $6x - 5y + 2z = -49$, $-5x - 3y - 8z = -22$, $-3x + 8y - 5z = 55$ — (−3, 7, 2)

17) $-9x + 5y + 3z = 50$, $7x + 8y - 2z = -60$, $-5x + 7y + 5z = 46$ — (−4, −2, 8)

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 ,1
الصفحتان 119, 120

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

18) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ — −102

19) $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$ — 3

20) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$ — 83

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	34-18، 41، 51-43
ضمن ضمن المتوسط	38-19 فردي، 40، 41، 51-43
فوق فوق المتوسط	52-35 ، (اختياري: 54 , 53)

(21) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ **(22)** -135 **(23)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ **124** **(24)** $\begin{vmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix}$ **63**

(25) $\begin{vmatrix} -8 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -4 \end{vmatrix}$ **0** **(26)** $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & -8 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ **-13** **(27)** $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix}$ **-459**

المثال 3 صفحة 121

قرطاسية: **(27)** تبيع مكتبة دفاتر محاضرات ومجموعات أدوات هندسية، إذا اشترى ماجد دفترين ومجموعتين من الأدوات الهندسية بمبلغ 8.96 BD، في حين اشترى عامر دفترًا واحدًا وثلاث مجموعات هندسية بمبلغ 9.46 BD، فاستعمل قاعدة ؛ لإيجاد سعر كل من الدفتر والمجموعة الهندسية؟ **BD 1.99 , BD 2.49**

المثالان 4, 5 الصفحتان 122, 123

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

(28) $6x - 5y = 73$, $-7x + 3y = -71$ **$(8, -5)$**

30 انظر الهامش $-4c - 5d = -39$, $5c + 8d = 54$

(29) $10a - 3b = -34$, $3a + 8b = -28$ **$(-4, -2)$**

(31) $-6f - 8g = -22$, $-11f + 5g = -60$ **$(5, -1)$**

(32) $5x - 4y + 6z = 58$, $-4x + 6y + 3z = -13$, $6x + 3y + 7z = 53$ **$(4, -2, 5)$**

(33) $8x - 4y + 7z = 34$, $5x + 6y + 3z = -21$, $3x + 7y - 8z = -85$ **$(-3, -4, 6)$**

(34) علم الآثار: وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات (5, 9), (4, 7), (0, 3) على الخريطة. إذا كانت كل وحدة على الخريطة تمثل 1 m، فأوجد مساحة سطح المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط. **$2\ m^2$**

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي: **(38)** $\left(-\frac{6187}{701}, -\frac{2904}{701}, -\frac{4212}{701}\right)$

(35) $6a - 7b = -55$, $2a + 4b - 3c = 35$, $-5a - 3b + 7c = -37$ **$(-1, 7, -3)$**

(36) $3a - 5b - 9c = 17$, $4a - 3c = 31$, $-5a - 4b - 2c = -42$ **$(4, 8, -5)$**

(37) $4x - 5y = -2$, $7x + 3z = -47$, $8y - 5z = -63$ **$(-8, -6, 3)$**

(38) $7x + 8y + 9z = -149$, $-6x + 7y - 5z = 54$, $4x + 5y - 2z = -44$

الربط مع واقع الحياة

يستعمل علماء الآثار شبكات وخرائط في مواقع التنقيب عن الآثار لتسجيل المواقع التي وجدوا فيها هذه الآثار.

المصدر: College of Staten Island Library

39 **صناعة:** ينتج مصنع 3 أحجام من علب الهدايا، حجمًا صغيرًا بتكلفة 1.15 BD للعلبة، وحجمًا متوسطًا بتكلفة 1.75 BD للعلبة، وحجمًا كبيرًا بتكلفة 2.25 BD للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الأحجام، بتكلفة إجمالية قدرها 2238.75 BD. **للفرعين a,b انظر الهامش**

a) استعمل قاعدة كرامر؛ لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

b) إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح 1.25 BD بعد زيادة قليلة في الحجم، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

إجابات:

30

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} -39 & -5 \\ 54 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{-39(8) - 54(-5)}{-4(8) - 5(-5)}$$

$$= \frac{-312 + 270}{-32 + 25}$$

$$= \frac{-42}{-7} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -39 \\ 5 & 54 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{-4(54) - 5(-39)}{-4(8) - 5(-5)}$$

$$y = \frac{-216 + 195}{-32 + 25}$$

$$= \frac{-21}{-7} = 3$$

39a

افرض أن عدد العلب المتوسطة $= x$

لذلك فإن عدد العلب الصغيرة $= 2x$

وافرض أن عدد العلب الكبيرة $= y$

$$x + 2x + y = 1385$$

$$\Rightarrow 3x + y = 1385$$

$$1.75x + 1.15(2x) + 2.25y = 2238.75$$

$$\Rightarrow 4.05x + 2.25y = 2238.75$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1385 & 1 \\ 2238.75 & 2.25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4.05 & 2.25 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1385(2.25) - 2238.75(1)}{3(2.25) - 4.05(1)}$$

$$= \frac{3116.25 - 2238.75}{6.75 - 4.05}$$

$$= \frac{877.5}{2.7} = 325$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1385 \\ 4.05 & 2238.75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4.05 & 2.25 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{3(2238.75) - 4.05(13885)}{3(2.25) - 4.05(1)}$$

$$= \frac{6716.25 - 5609.25}{6.75 - 4.05}$$

$$= \frac{1107}{2.7} = 410$$

إذن، عدد العلب المنتجة من الحجم الصغير $= 2(325)$

$= 650$

وعدد العلب المنتجة من الحجم المتوسط $= 325$

وعدد العلب المنتجة من الحجم الكبير $= 410$

39b تكلفة الانتاج = تكلفة انتاج العلب الصغيرة + تكلفة انتاج العلب المتوسطة + تكلفة انتاج العلب الكبيرة

تكلفة الانتاج $= 1.25(650 - 140) + 1.75(325 + 125) + 2.25(410 + 35)$

$= 637.50 + 787.50 + 1001.25$

$= \text{BD}\,2426.25$

40) **بستنة:** أراد حمد إنشاء حديقة مثلثة الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططًا في المستوى الإحداثي، فكانت رؤوس الحديقة على المستوى $(-3, 4), (2, 6), (-1, 7)$. أوجد المساحة الحقيقية لسطح الحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل مترًا على سطح الأرض. $12.5\,m^2$

مسائل مهارات التفكير العليا

41) **تبرير:** ما الذي يمكن استنتاجه فيما يتعلق بحل نظام معادلات خطية، إذا كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي صفرًا؟

42) **تحدٍّ:** أوجد محدد مصفوفة من الرتبة 3×3، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } m+n \text{ زوجيًّا} \\ m+n & \text{إذا كان } m+n \text{ فرديًّا} \end{cases}$$ 0

43) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

a) المحدد يساوي صفرًا. للفروع a–c انظر الهامش

b) المحدد يساوي 25.

c) جميع العناصر أعداد سالبة، والمحدد يساوي 32−.

44) **اكتب:** صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين في متغيرين إذا كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي صفرًا.

41) إجابة ممكنة: لا يوجد حل وحيد للنظام. فهناك عدد لا نهائي من الحلول أو لا يوجد حل.

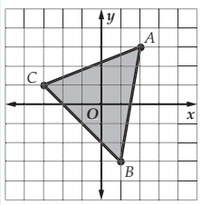
44) إجابة ممكنة: إذا كان المحدد لمصفوفة المعاملات لنظام معطى من الرتبة 2×2 يساوي 0، فلا يوجد حل وحيد للنظام. يمكن ألا يكون للنظام حل، ويكون المستقيمان في هذه الحالة متوازيين، أو يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول حيث يكون المستقيمان منطبقين.

تدريب على اختبار معياري

45) ما قيمة x التي تجعل $\begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ تساوي 24؟ D

A 15
B 9
C −9
D −15

46) مساحة سطح المثلث المُبيّن في الشكل المجاور إلى أقرب عدد صحيح هي: C



A 10 وحدات مربعة
B 12 وحدة مربعة
C 14 وحدة مربعة
D 16 وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت مصفوفة الضرب معرّفة في كل مما يأتي أو لا، وإذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة: (الدرس 3-2)

47) $A_{4\times2} \cdot B_{2\times6}$ معرّفة، 4×6 **48)** $C_{5\times4} \cdot D_{5\times3}$ غير معرّفة **49)** $E_{2\times7} \cdot F_{7\times1}$ معرّفة، 2×1

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-1) للتمارين 52–50 انظر ملحق الإجابات

50) $f(x) = |x-3| - 4$ **51)** $f(x) = -|x| - 4$ **52)** $f(x) = |x-1| + 2$

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ كل نظام مما يأتي:

53) $2x - 5y = -26$, $5x + 3y = -34$ **(−8, 2)**

54) $4y + 6x = 10$, $2x - 7y = 22$ $\left(\frac{79}{25}, -\frac{56}{25}\right)$

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب النظام الآتي على السبورة

$$2x + 4y = 10$$
$$-x - 2y = 3$$

واطلب إلى الطلبة استعمال قاعدة كرامر لحل النظام إذا كان ذلك ممكنًا، وأن يشرحوا سبب استعمال أو عدم استعمال قاعدة كرامر لحل النظام. لا تستعمل قاعدة كرامر؛ لأن المحدد يساوي صفرًا.

ثم اطلب إليهم تمثيل كل معادلة بيانيًّا وشرح سبب عدم وجود حل للنظام.

المستقيمان الممثلان للمعادلتين متوازيان.

تنبيه!

خطأ شائع ذكّر الطلبة بطرح ناتج ضرب القطرين عند حساب قيمة المحدّد.

إرشادات للمعلم الجديد

المفردات نبّه الطلبة على أن المساحة الجانبية لمجسم تشير إلى مجموع مساحات جميع أوجه المجسم ما عدا القاعدة أو القاعدتين.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى كل طالب أن يخبر زميله بالإرشادات والطرق التي تساعده على تذكّر ترتيب الحسابات في العمليات التي تحتاج إلى عدة خطوات في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 4-2 بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 2.

إجابات:

43a) إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

43b) إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

43c) إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5

حل أنظمة المعادلات الخطية جبريًّا.

الدرس 2-5

إيجاد النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2.

كتابة معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين خطيتين، وحلها.

ما بعد الدرس 2-5

استعمال المصفوفات الموسّعة؛ لحل أنظمة من المعادلات الخطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما الذي تم التعبير عنه بالعدد 3 في المصفوفة الأولى؟ يوجد ثلاث علب مقبّلات في الوجبة العائلية.
- ما رتبة مصفوفة ناتج ضرب المصفوفة من الرتبة 3×3 في المصفوفة من الرتبة 3×1؟ 3×1
- أوجد ناتج ضرب المصفوفتين $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix}$. $[w + 2s]$

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية
Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

فيما سبق

درست حل نظام معادلات خطية جبريًا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2.
- أكتب معادلة مصفوفية لنظام من معادلتين خطيتين وأحلها .

المفردات الأساسية

المصفوفة المحايدة identity matrix

النظير الضربي للمصفوفة inverse matrix

المعادلة المصفوفية matrix equation

مصفوفة المتغيرات variable matrix

مصفوفة الثوابت constant matrix

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تبين القائمة المجاورة أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة وعلبة المقبلات وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، s تمثل سعر علبة المقبلات، d تمثل سعر علبة العصير.

المصفوفة المحايدة ونظير المصفوفة الضربي تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر، إذا كان حاصل ضربهما 1 وهو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **المصفوفة المحايدة** هي مصفوفة مربعة، إذا ضُربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها، كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

المصفوفة المحايدة من الرتبة 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المحايدة من الرتبة 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي — **المصفوفة المحايدة لعملية الضرب**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي المصفوفة المحايدة لعملية الضرب I، هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي (من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين) 1، وباقي العناصر أصفار.

لأي مصفوفة مربعة A لها رتبة المصفوفة المحايدة I نفسها، فإن $A \cdot I = I \cdot A = A$.

بالرموز إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان A, B مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $AB = BA = I$، فإن المصفوفة B تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** A، وكذلك تُسمى المصفوفة A نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة B. وإذا كان للمصفوفة A نظير ضربي، فإنه يُرمز إليه بالرمز A^{-1}، حيث $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

مصادر الدرس 2-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (129)	• تنويع التعليم، ص (132)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

المصفوفة المحايدة والنظير الضربي للمصفوفة

مثال 1 يُبيّن كيفية تحديد إذا كان زوج من المصفوفات يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أو لا.

مثال اضافي

1 حدّد إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أو لا.

a) $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ،

$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

نعم، كل منهما تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.

b) $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

لا؛ لا تمثل أي منهما نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

التركيز في المحتوى الرياضي

المصفوفات المحايدة يطلق على العناصر في الصف i، والعمود i في المصفوفة المربعة $n \times n$ عناصر القطر الرئيس. في المصفوفة المحايدة التي هي مصفوفة مربعة يكون كل عنصر من عناصر قطرها الرئيس 1، وتكون بقية العناصر أصفارًا.

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

مثال 1 التحقق من النظير الضربي

حدد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أو لا:

a) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين A, B تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $A \cdot B = B \cdot A = I$.

بكتابة المعادلة $A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بما أن $A \cdot B \neq I$، فإن أيًّا منهما لا تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

b) $F = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

كلٌّ من المصفوفتين F, G تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $F \cdot G = G \cdot F = I$.

بكتابة المعادلة $F \cdot G = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{15}{8}-\frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4}+\frac{6}{4} & -\frac{10}{8}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بكتابة المعادلة $G \cdot F = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{10}{8} & -\frac{15}{4}+\frac{30}{8} \\ \frac{3}{4}-\frac{6}{8} & -\frac{5}{4}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بما أن $F \cdot G = G \cdot F = I$، فإن كلًّا من المصفوفتين F, G نظير ضربي للأخرى.

تأكد

حدد ما إذا كانت المصفوفتان تمثل كل منهما نظيرًا ضربيًّا للأخرى أو لا:

1) $X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ كل من X, Y تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى

بعض المصفوفات ليس لها نظير ضربي، وتستطيع تحديد ما إذا كان لمصفوفة ما نظير ضربي أو لا باستعمال المحددات.

مفهوم أساسي النظير الضربي للمصفوفة من الرتبة 2 × 2

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$، وذلك إذا كان $ad - bc \neq 0$

لاحظ أن $ad - bc$ هي قيمة محدد A. لذا فإذا كانت قيمة محدد مصفوفةٍ ما يساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

التعليم باستعمال التقنيات

مدّونة اطلب إلى الطلبة توضيح ما الذي يعنيه عدم وجود نظير ضربي لمصفوفة المعاملات في نظام من المعادلات، وتحقق من تضمينهم أمثلة في توضيحاتهم. وتلخيصها في ملف .

مثال 2 إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة مما يأتي إن وجد:

(a $P = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

بحساب المحدد $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$

بما أن قيمة المحدد لا تساوي صفرًا، فإن P^{-1} (النظير الضربي) موجود .

تعريف النظير الضربي للمصفوفة من الرتبة 2 × 2 $P^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$a = 7, b = -5, c = 2, d = -1$ $= \frac{1}{7(-1) - (-5)(2)}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

بالتبسيط $= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

تحقق أوجد حاصلي ضرب المصفوفتين. وإذا كان كلٌّ من حاصلي الضرب يساوي I، فإن كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} + \frac{10}{3} & \frac{35}{3} - \frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & \frac{10}{3} - \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \checkmark$$

(b $Q = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

بحساب المحدد $\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$

بما أن قيمة المحدد تساوي صفرًا ، فإن Q^{-1} ليس موجودًا.

تأكد

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة مما يأتي، إن وجد:

(2A $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ **(2B** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

المعادلات المصفوفية يمكن استعمال المصفوفات؛ لتمثيل نظام من المعادلات وحله، فمثلًا: يمكن كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام المعادلتين الآتي:

$$\begin{matrix} x + 2y = 9 \\ 3x - 6y = 3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو الآتي:

$$\begin{matrix} A & \cdot & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مصفوفة الثوابت: الثوابت في النظام فقط

مصفوفة المتغيرات: المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة المعاملات

إرشادات للدراسة

النظير الضربي

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات خطية فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات A نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

مثال إضافي

2 أوجد النظير الضربي لكل من المصفوفتين الآتيتين، إن وجد:

(a $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(b $T = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

لا يوجد نظير ضربي.

(2A $\begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{bmatrix}$ **(2B** $\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

تنويع التعليم

ضمن

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة كتابة مقارنة بين النظير الضربي للمصفوفة والنظيرين الجمعي والضربي للعدد.

المعادلات المصفوفية

مثال 3 يُبيّن كيفية كتابة نظام من المعادلات الخطية لنموذج من واقع الحياة، ثم استعمال المعادلة المصفوفية لهذا النظام.

مثال إضافي

3 **تأجير الآلات:** تخطط إدارة مدرسة لإقامة يوم مفتوح لطلبة المرحلة الابتدائية. إذا كانت أجرة آلة صنع الفشار BD 6، وأجرة براد الماء BD 7، ودفعت الإدارة BD 66 لاستئجار 10 أجهزة من النوعين المذكورين، فكم جهازًا استأجرت من كل نوع؟ 4 آلات لصنع الفشار، 6 برادات ماء.

التركيز في المحتوى الرياضي

حل نظام من المعادلات باستعمال A^{-1}

إذا كان لنظام المعادلات الخطية $AX = B$ حل وحيد، فإن الحل يُعبر عنه بالمعادلة $X = A^{-1}B$، حيث A مصفوفة المعاملات، B مصفوفة الثوابت، X مصفوفة المتغيرات. وإذا لم يكن هناك حل أو يوجد عدد لا نهائي من الحلول للنظام، فإن مصفوفة المعاملات لا يوجد لها نظير ضربي.

ثم حُلّ المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تحل بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

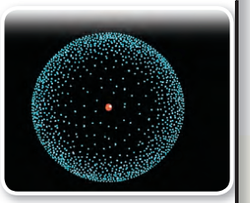
	المعادلة	
$ax = b$		$AX = B$
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	بضرب كل طرف في النظير الضربي للمعامل إن وجد	$A^{-1}AX = A^{-1}B$
$1x = \frac{b}{a}$	$A^{-1}A = I$, $\left(\frac{1}{a}\right)a = 1$	$IX = A^{-1}B$
$x = \frac{b}{a}$	$IX = X$, $1x = x$	$X = A^{-1}B$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية على الصورة $AX = B$ ، هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

مثال 3 من واقع الحياة — حل نظام من معادلتين خطيتين في متغيرين

كيمياء: الصيغة الجزيئية للجلوكوز هي $C_6H_{12}O_6$، والتي تبين بأن جزيء الجلوكوز فيه 6 ذرات كربون (C) و 12 ذرة هيدروجين (H)، و 6 ذرات أكسجين (O). ويزن جزيء واحد من الجلوكوز 180 وحدة كتلة ذرية، ووزن ذرة الأكسجين 16 وحدة كتلة ذرية. (الصيغة الجزيئية للجلوكوز والسكر مدوّنة في الجدول الآتي):

السكر	الصيغة الجزيئية	(وحدة كتلة ذرية)
الجلوكوز	$C_6H_{12}O_6$	180
السكروز	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342



الربط مع واقع الحياة

وحدة الكتلة الذرية: هي وحدة لقياس وزن الذرات. وهي وحدة وزن نسبية؛ لأنها تقيس الوزن بالنسبة لذرة الهيدروجين؛ لذا فإن جزيء النيتروجين الذي يزن 14 وحدة كتلة ذرية، يساوي وزن 14 ذرة هيدروجين.

a) اكتب نظام معادلات يمثل وزن كل ذرة.

افترض c تمثل وزن ذرة الكربون.
افترض h تمثل وزن ذرة الهيدروجين.

الجلوكوز: معادلة الجلوكوز
$6c + 12h + 6(16) = 180$
بالتبسيط
$6c + 12h + 96 = 180$
بطرح 96 من كل طرف
$6c + 12h = 84$

السكّروز: معادلة السكّروز
$12c + 22h + 11(16) = 342$
بالتبسيط
$12c + 22h + 176 = 342$
بطرح 176 من كل طرف
$12c + 22h = 166$

b) اكتب المعادلة المصفوفية لنظام المعادلات.

حدّد مصفوفات المعاملات والمتغيرات والثوابت، ثم اكتب المعادلة المصفوفية.

$$\begin{matrix} 6c + 12h = 84 \\ 12c + 22h = 166 \end{matrix} \rightarrow \underset{A}{\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 22 \end{bmatrix}} , \underset{X}{\begin{bmatrix} c \\ h \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 84 \\ 166 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 166 \end{bmatrix}$$

c) حُل المعادلة المصفوفية في الفرع b باستعمال النظير الضربي؛ لإيجاد وزن كل من ذرتي الكربون، والهيدروجين.

الخطوة 1 أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$A^{-1} = \frac{1}{132-144}\begin{bmatrix} 22 & -12 \\ -12 & 6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 22 & -12 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 اضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$-\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 22 & -12 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 22 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c \\ h \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 22 & -12 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 84 \\ 166 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c\\h\end{bmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-144\\-12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c\\h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}$$

الحل هو (12, 1). إذن وزن ذرة الكربون يساوي 12 وحدة كتلة ذرية، ووزن ذرة الهدروجين يساوي 1 وحدة كتلة ذرية.

تأكد

3) كتب: أنفقت عائشة في معرض للكتب 11.25 BD لشراء 3 كتب علمية و4 كتب ثقافية. في حين أنفقت فاطمة 15.75 BD لشراء 3 كتب علمية و 10 كتب ثقافية. إذا كانت الكتب العلمية تُباع بالسعر نفسه x، والكتب الثقافية تُباع بالسعر نفسه y، فما سعر الكتاب العلمي؟ **2.75 BD**

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 128

حدد ما إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى في كل مما يأتي:

1) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$ لا

2) $F=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{bmatrix}$ نعم

مثال 2 صفحة 129

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة في كل مما يأتي إن وجد: للتمرينين 3,4 انظر الهامش

3) $\begin{bmatrix}6 & -3\\-1 & 0\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-3 & 0\\5 & 2\end{bmatrix}$

مثال 3 صفحة 130

5) نقود: مع أحمد 24 قطعة نقدية من 25 files، 50 files، بحيث تبلغ قيمة ما معه 0.850 BD. ما عدد قطع 25 files، 50 files التي معه؟ **16 قطعة 25 fils، 9 قطع 50 fils**

حُل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال النظير الضربي:

6) $-2x+y=9,\ x+y=3$ **(−2, 5)**

7) $4x-2y=22,\ 6x+9y=-3$ **(4, −3)**

8) $-2x+y=-4,\ 3x+y=1$ **(1, −2)**

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 128

حدد ما إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى في كل مما يأتي:

9) $K=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}$ لا

10) $M=\begin{bmatrix}0 & 2\\4 & 5\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ لا

11) $R=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, S=\begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 2\end{bmatrix}$ لا

مثال 2 صفحة 129

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة في كل مما يأتي إن وجد: للتمارين 15–12 انظر الهامش

12) $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}1 & -1\\-6 & -1\end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix}-5 & -4\\4 & 2\end{bmatrix}$

مثال 3 صفحة 130

16) تريد مها خلط لونين من ألوان الطعام لاستعماله لتزيين الكيك، اللون الأحمر الذي تركيزه 25% واللون الأزرق الذي تركيزه 50% للحصول على 25ml من اللون البنفسجي بتركيز 44%، فكم مللترًا تحتاج مها من كل من اللونين الأحمر والأزرق للحصول على المطلوب؟ **6ml من اللون الأحمر، 19ml من اللون الأزرق**

حُل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال النظير الضربي:

17) $-x+y=4,\ -x+y=-4$ لا يوجد حل

18) $-x+y=3,\ -2x+y=6$ **(−3, 0)**

19) $x+y=4,\ -4x+y=9$ **(−1, 5)**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	26-9، 37-28
ضمن ضمن المتوسط	25-9 فردي، 26، 37-28
فوق فوق المتوسط	37-26

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 8 - 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

3) $\begin{bmatrix}0 & -1\\-\frac{1}{3} & -2\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0\\\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\-\frac{6}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}$

15)

$$\begin{vmatrix}-5 & -4\\4 & 2\end{vmatrix}=-5(2)-4(-4)=6$$

اذن يوجد نظير ضربي للمصفوفة

تعريف النظير

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{vmatrix}d & -b\\-c & a\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{-5(2)-(-4)(4)}\begin{vmatrix}2 & 4\\-4 & -5\end{vmatrix}$$

$a=-5,\ b=-4,\ c=4,\ d=2$

بالتبسيط

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\\frac{-2}{3} & \frac{-5}{6}\end{bmatrix}$$

تنبيه!

اكتشف الخطأ نبه الطلبة في السؤال 26، إلى أن جميع المعادلات في النظام يجب أن تكتب مع متغيراتها بالترتيب نفسه قبل استعمال الصيغة المصفوفية.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة وصف كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية؛ لحل نظام من معادلتين خطيتين في متغيرين.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 5-2 بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 2.

إجابة:

30) إجابة ممكنة: أولًا، رتب كل المعاملات للنظام في مصفوفة معاملات. ثانيًا، رتّب المتغيرات في مصفوفة متغيرات. ثالثًا، رتب الثوابت في مصفوفة ثوابت. رابعًا، أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات. خامسًا: اضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات. سادسًا، تحقق من الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية. ويُعد استعمال معادلة مصفوفية أكثر فاعلية عندما يكون لديك نظام ليس من السهل إجراء العمليات الحسابية على معاملاته مثل أن تكون كسورًا اعتيادية، أو كسورًا عشرية، أو أعداد كبيرة، أو أن هناك أكثر من ثلاثة متغيرات، لكن يُعد استعمال طريقة التعويض أو الحذف أكثر فاعلية عندما تكون الأعداد صغيرة، وأن يكون هناك متغيران أو ثلاثة متغيرات فقط، أو أحد المتغيرات يمكن تعريفه بدلالة متغير آخر.

20) $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $3x + y = 3$, $5x + 3y = 6$

21) لا يوجد حل $y - x = 5$, $2y - 2x = 8$

22) $(1.5, 0)$ $4x + 2y = 6$, $6x - 3y = 9$

23) $(-5, 0)$ $1.6y - 0.2x = 1$, $0.4y - 0.1x = 0.5$

24) $(-30, -8)$ $4y - x = -2$, $3y - x = 6$

25) $\left(\frac{3}{4}, 3\right)$ $2y - 4x = 3$, $4x - 3y = -6$

مسائل مهارات التفكير العليا

26) **اكتشف الخطأ:** أنشأت كل من هاجر و فاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

27) **تحدٍّ:** صف المعادلة المصفوفية لنظام معادلتين خطيتين في متغيرين ذات العدد اللانهائي من الحلول.

28) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وبرِّر إجابتك.

"المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

29) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل.

30) **اكتب:** اشرح كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل أنظمة معادلات. انظر الهامش

26) هاجر؛ لقد وضعت فاطمة 3 للمتغير x بدلًا من 4.

27) النظام يجب أن يحتوي على المعادلتين نفسهما أو معادلتين إحداهما هي حاصل ضرب عدد في المعادلة الأخرى.

28) أحيانًا، إجابة ممكنة: يكون لمصفوفة مربعة نظير ضربي إذا كان محددها لا يساوي 0.

29) إجابة ممكنة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

تدريب على اختبار معياري

31) تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر، حجمًا صغيرًا بسعر 1 BD، وحجمًا متوسطًا بسعر 1.5 BD، وحجمًا كبيرًا بسعر 2 BD، إذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 75 BD، فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟ C

A 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي: (الدرس 3-2)

32) -54 $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$

33) -62 $\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

34) 551 $\begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{bmatrix}$

أوجد حاصل ضرب كل مما يأتي إن أمكن: (الدرس 3-3)

35) $[-4]$ $[5 \quad 2]\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

36) غير معرّفة $[3 \quad 5]\cdot\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

37) غير معرّفة $[5 \quad 2]\cdot\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب النظام الآتي على السبورة:

$$-3x + y = 5$$
$$-4x - 2y = 20$$

ثم اطلب إلى الطلبة حل هذا النظام بأربعة طرق مختلفة (التمثيل البياني، جبريًّا، استعمال قاعدة كرامر، استعمال النظير الضربي للمصفوفة)، ثم اطلب إليهم أن يقارنوا ويوضحوا نقاط الاختلاف بين هذه الطرق باستعمال معايير مثل سهولة الاستعمال وسرعته. حل هذا النظام هو $(-3, -4)$.

يمكنك حل نظام معادلات خطية باستعمال مفتاح MATRIX في الآلة الحاسبة البيانية؛ إذ تحتوي **المصفوفة الموسعة** على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي إلى اليمين يحوي الثوابت. وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل تحديد حل نظام من المعادلات.

مثال

اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتي، ثم حُلّ هذا النظام باستعمال الآلة الحاسبة البيانية:

$$2x + y + z = 1$$
$$3x + 2y + 3z = 12$$
$$4x + y + 2z = -1$$

الخطوة 1 اكتب المصفوفة الموسعة ثم أدخلها في الآلة الحاسبة البيانية.

المصفوفة الموسعة $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$

ابدأ بإدخال المصفوفة بالضغط على المفاتيح:

2nd [MATRIX] ▶ ▶ ENTER 3 ENTER 4 ENTER 2 ENTER 1

ENTER 1 ENTER 1 ENTER 3 ENTER 2 ENTER 3 ENTER 12

ENTER 4 ENTER 1 ENTER 2 ENTER (−) 1 ENTER

الخطوة 2 أوجد الصورة المختزلة للمصفوفة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية بالضغط على:

2nd [QUIT] 2nd [MATRIX] ▶ ALPHA [B] 2nd [MATRIX]

ENTER) ENTER

ادرس الصورة المختزلة للمصفوفة، والتي سوف تظهر كما في الشكل المجاور. لاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى تمثل مصفوفة محايدة من الرتبة 3 × 3، وتستنتج من الصف الأول أن $x = -4$، ومن الصف الثاني أن $y = 3$، ومن الصف الثالث أن $z = 6$. وبذلك يكون الحل هو $(-4, 3, 6)$.

تمارين:

اكتب مصفوفة موسّعة لكل نظام معادلات مما يأتي، ثم حُلّها باستعمال الآلة الحاسبة البيانية: للتمارين 6-1 انظر ملحق الإجابات

1) $3x + 2y = -4$, $4x + 7y = 13$

2) $2x + y = 6$, $6x - 2y = 0$

3) $2x + 2y = -4$, $7x + 3y = 10$

4) $4x + 6y = 0$, $8x - 2y = 7$

5) $6x - 4y + 2z = -4$, $2x - 2y + 6z = 10$, $2x + 2y + 2z = -2$

6) $5x - 5y + 5z = 10$, $5x - 5z = 5$, $5y + 10z = 0$

1 التركيز

الهدف

استعمال الآلة الحاسبة البيانية والمصفوفة الموسعة؛ لحل نظام من المعادلات الخطية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

الفت نظر الطلبة إلى أن الآلة الحاسبة البيانية تسمح لهم بأداء عمليات صفية على المصفوفات، ويسمح الاستعمال المتتالي للعمليات الصفية بتحويل المصفوفة إلى الصيغة المختزلة. والصيغة 5: Reduced Row-Echelon Form تنجز كل الخطوات مرة واحدة؛ أيْ أنها تختصر كثيرًا من الوقت.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلبة في مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة. ثم اطلب إليهم استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتنفيذ الخطوتين 1, 2 من المثال، ومن التمرين 1.

- الفت نظرهم إلى أنه إذا فُقد أحد المتغيرات في معادلة من نظام من المعادلات، فإن معامله يجب أن يكون صفرًا.

التدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 6-2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 6؛ لتقويم مدى إتقان الطلبة لطريقة حل نظام من المعادلات الخطية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلبة عن الطريقة التي يفضلونها لحل نظام من معادلتين في متغيرين من بين طريقة الآلة الحاسبة البيانية أو الطريقة المعروضة في الدرس 2-5. واطلب إليهم أيضًا اختيار طرقهم المفضلة لحل نظام من المعادلات الخطية، وأن يفسروا خياراتهم.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبة في حَلّ الأسئلة 9 -1، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل 2.

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة ، والحروف المبعثرة ، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن الكلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت، أو على أوراق عمل مطبوعة.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المصفوفات (الدرس 1-2)

- المصفوفة: هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين.
- المصفوفات المتساوية لها الرتبة نفسها، وعناصرها المتناظرة متساوية.

العمليات على المصفوفات (الدرسان 2-2 و 2-3)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لها الرتبة نفسها، وذلك بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها.
- لضرب مصفوفة في عدد حقيقي k ، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.
- يمكن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

المحددات وقاعدة كرامر (الدرس 2-4)

- قيمة المحدد من الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ تساوي $ad - bc$.
- لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة تستعمل قاعدة الأقطار.
- تستعمل قاعدة كرامر ؛ لحل أنظمة المعادلات الخطية.

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الدرس 2-5)

- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1، وباقي العناصر أصفار.
- تكون كل من المصفوفتين نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي مصفوفة الوحدة.
- لحل معادلة مصفوفية أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم اضرب طرفي المعادلة في هذا النظير مع مراعاة الترتيب؛ لأن ضرب المصفوفات غير إبدالي.

مطويتك منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

المصفوفة ص 96	محدد من الرتبة الثانية ص 191
العنصر ص 96	محدد من الرتبة الثالثة ص 120
الرتبة ص 96	قاعدة الأقطار ص 120
مصفوفة الصف ص 97	مصفوفة المعاملات ص 122
مصفوفة العمود ص 97	قاعدة كرامر ص 122
المصفوفة المربعة ص 97	المصفوفة المحايدة ص 127
المصفوفة الصفرية ص 97	النظير الضربي للمصفوفة ص 127
المصفوفات المتساوية ص 97	المعادلة المصفوفية ص 129
الضرب في عدد حقيقي ص 105	مصفوفة المتغيرات ص 129
المحدد ص 121	مصفوفة الثوابت ص 129

اختبر مفرداتك

اختر المفردة الصحيحة من قائمة المفردات أعلاه لتكمل كل عبارة مما يأتي:

1) المصفوفة هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين.

2) عند الضرب في عدد حقيقي فإننا نضرب جميع عناصر المصفوفة في ذلك العدد.

3) تُسمى المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات مصفوفة الثوابت .

4) كل قيمة في المصفوفة تُسمى عنصرًا .

5) يُسمى عدد الصفوف × عدد الأعمدة في المصفوفة رتبة المصفوفة.

6) المصفوفة المحايدة هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1، وباقي العناصر أصفار.

7) المصفوفة الصفرية هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار.

8) قيمة محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ يساوي -1.

9) إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين هو مصفوفة الوحدة، فإن كلتا المصفوفتين تكون نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل تمارين دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

2-1 مقدمة في المصفوفات (الصفحات 96-102)

10) نادٍ رياضي: يُبيّن الجدول أدناه عدد المشتركين شهريًّا وسنويًّا في نادٍ رياضي في 3 رياضات مختلفة:

	اللياقة البدنية	السباحة	تخفيض الوزن
اشتراك شهري	31	108	64
اشتراك سنوي	68	9	42

a) نظّم بيانات الجدول في مصفوفة. انظر الهامش

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×2

c) ما قيمة العنصر a_{23}؟ 68

d) ما قيمة العنصر a_{11}؟ 64

e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول والثاني، وفسِّر النتائج. انظر الهامش

مثال 1

يُبيّن الجدول أدناه عدد زوار متحف في الفترة الصباحية والفترة المسائية خلال 3 أيام:

	اليوم الأول	اليوم الثاني	اليوم الثالث
الفترة الصباحية	37	19	26
الفترة المسائية	69	58	75

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الزوار. $\begin{bmatrix} 37 & 19 & 26 \\ 69 & 58 & 75 \end{bmatrix}$

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×2

c) اجمع عناصر كل من الصفين 1 و 2، وفسِّر النتائج.
مجموع الصف الأول يساوي 82، الذي يمثل عدد الزوار في الفترة الصباحية. ومجموع الصف الثاني يساوي 202، الذي يمثل عدد الزوار في الفترة المسائية.

2-2 العمليات على المصفوفات (الصفحات 104-109)

أوجد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix}$

12) $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix} -3 & 27 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

مثال 2

أوجد ناتج $2B + 3A$، إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$3A = 3\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, 2B = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$

$2B + 3A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$

2-3 ضرب المصفوفات (الصفحات 110-117)

أوجد ناتج كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

13) $\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix}$ $[62]$

14) $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 11 \end{bmatrix}$ غير ممكن

15) اشترى راشد 4 عبوات حليب، و 2 kg من التفاح، و 3 kg من البطاطس، وكيسًا واحدًا من الأرز، وتبين المصفوفة أدناه سعر عبوة الحليب، و 1 kg من التفاح، و 1 kg من البطاطس، وكذلك سعر كيس الأرز.

أرز	بطاطس	تفاح	حليب
2.5	0.3	1	1.5

استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد. BD 11.4

مثال 3

أوجد XY؛ إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$XY = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix}$ بضرب الصفوف في الأعمدة

$= \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix}$ بالتبسيط

مراجعة الدروس

المعالجة إن كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها التمارين، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

10a) $\begin{bmatrix} 64 & 108 & 31 \\ 42 & 9 & 68 \end{bmatrix}$

10e) مجموع عناصر الصف الأول يساوي 203

مجموع عناصر الصف الثاني يساوي 119

وتمثل إجمالي المشتركين في جميع الرياضات شهريًّا وسنويًّا.

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حل المسألة، فذكرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 2 ، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 2 .

إجابات:

21) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

22) $\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

2-4 المحددات وقاعدة كرامر (الصفحات 119-126)

أوجد قيمة كل محدد مما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$ -34

17) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ -44

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

18) $3x - y = 0$, $5x + 2y = 22$ $(2, 6)$

19) $5x + 2y = 4$, $3x + 4y + 2z = 6$, $7x + 3y + 4z = 29$ $(2, -3, 6)$

20) اشترت شيماء 3 أساور، وعقدين بمبلغ BD 85، واشترت ليلى سوارين و 4 عقود بمبلغ BD 110. إذا كان للعقود التي اشترتها كل منهما السعر نفسه، وكذلك الأساور، فأوجد سعر كل من العقد الواحد، والسوار الواحد.

العقد BD 20، السوار BD 15

مثال 4

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

تعريف المحدد: $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 2(-6)$

بالتبسيط: $= 20 + 12 = 32$

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام:

$2a + 6b = -1$, $a + 8b = 2$

قاعدة كرامر: $a = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$, $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$

بحساب المحددات: $= \dfrac{-8 - 12}{16 - 6}$, $= \dfrac{4 + 1}{16 - 6}$

بالتبسيط: $= \dfrac{-20}{10} = -2$, $= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

الحل هو $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الصفحات 127-132)

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

22) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$ للتمرينين 21 , 22 انظر الهامش

23) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ لا يوجد نظير ضربي

حُلّ المعادلة المصفوفية في كل مما يأتي:

24) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(8, -12)$

25) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ $(2, 1)$

26) اشترى سعود 2 kg من المكسرات و 2 kg من القهوة بمبلغ BD 14. واشترى ناصر 3 kg من المكسرات و 1 kg من القهوة بمبلغ BD 17. ما سعر الكيلوجرام الواحد من كلا النوعين؟ مكسرات BD 5 ، قهوة BD 2

مثال 6

حُلّ المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$.

الخطوة 1: أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$A^{-1} = \frac{1}{-12 - (-15)} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اضرب طرفي المعادلة في النظير الضربي.

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 90 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

إذن الحل (30, 9) .

حدد العناصر الآتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2&2&7\\9&1&1\\8&0&8\end{bmatrix}$$

1) a_{22} 1

2) a_{31} 8

للأسئلة 6–3 انظر الهامش

أوجد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $-3\begin{bmatrix}4a\\0\\-3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-3&0\\1&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4\\-6&0\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}2&0\\-3&5\\1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix}-5&7\\6&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0&-2\\9&0&1\end{bmatrix}$

7) **ثقافة مالية:** تبيع مكتبة 3 مجموعات من الكتب التعليمية للأطفال. ويُبيّن الجدول أدناه تكلفة كل مجموعة وسعر بيعها. إذا باعت المكتبة 20 مجموعة من الكتب التربوية، و 32 مجموعة من الكتب العلمية، و14 مجموعة من القصص.

المجموعة	التكلفة	سعر البيع (BD)
تربوية	10	12
علمية	9	11
قصص	13	15

a) نظّم البيانات في مصفوفات، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية. للفرعين a, b انظر الهامش

b) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة. BD 132

8) إذا كان $A=\begin{bmatrix}3&8\\-3&-4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-7&5\\5&-4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-4&7\\2&0\end{bmatrix}$، فأوجد ناتج $AB-AC$

$\begin{bmatrix}15&-38\\-3&22\end{bmatrix}$

9) استعمل المحددات؛ لإيجاد مساحة سطح $\triangle xyz$ الذي رؤوسه $x(1,2), y(3,6), z(-1,4)$. 6 وحدات مربعة

10) **اختيار من متعدد:** أوجد قيمة محدد المصفوفة:

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&2&4\\-2&5&6\end{bmatrix}$$

A -44 C $\frac{1}{44}$

B 44 D $-\frac{1}{44}$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة من مما يأتي، إن وجد:

11) $\begin{bmatrix}5&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0\\0&1\end{bmatrix}$ لا يوجد لها نظير ضربي

12) $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}6&3\\8&4\end{bmatrix}$ لا يوجد لها نظير ضربي

14) $\begin{bmatrix}-3&-2\\6&4\end{bmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات مما يأتي:

15) $2x-y=-9$ $(-2,5)$
$x+2y=8$

16) $x-y+2z=0$ $(4,2,-1)$
$3x+z=11$
$-x+2y=0$

17) $6x+2y+4z=2$ $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$
$3x+4y-8z=-3$
$-3x-6y+12z=5$

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 2 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

المعالجة: بناء على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًا للطلبة.

إجابات:

3) $\begin{bmatrix}-12a-8\\12\\5\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-6&-12\\-28&4\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}6\\-19\\-5\end{bmatrix}$

6) غير ممكن

7a) $[20\quad 32\quad 14]\cdot\begin{bmatrix}10\\9\\13\end{bmatrix}=[670]$

التكلفة الكلية = BD670

7b) $[20\quad 32\quad 14]\cdot\begin{bmatrix}12\\11\\15\end{bmatrix}=[802]$

المبلغ الكلي = BD802

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصادرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (94)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف استعمال نماذج الإجابة الشبكية عند حل أسئلة اختبارات معيارية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- هل تعرضت يومًا لامتحان يتطلب تظليل دائرة مناظرة؛ لإجابة صحيحة في ورقة الإجابة؟

  ستختلف إجابات الطلبة.

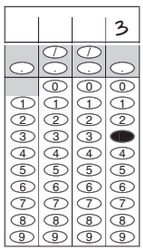
- ما نوع الأخطاء التي وقعت فيها عند استعمال مثل هذا النوع من ورقة الإجابة؟

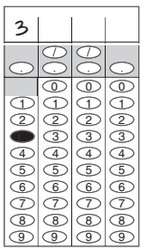
  إجابة ممكنة: القفز عن إحدى الإجابات. تظليل عدة دوائر، تظليل أكثر من دائرة في العمود الواحد، إدخال الأرقام بصورة غير صحيحة.

أسئلة الإجابات الشبكية

من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بالإضافة إلى أسئلة الاختيار من متعدد، وأسئلة الإجابات القصيرة، وأسئلة الإجابات المطولة، أسئلة الإجابات الشبكية. ففي هذا النوع من الأسئلة قم بتظليل الإجابة في الدائرة الصحيحة على الورقة المدرجة بحسب إجابتك.

استراتيجيات حل أسئلة الإجابات الشبكية

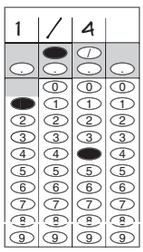


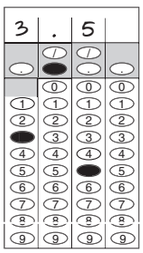


الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية ثم حلّها.

- تأكد من أن إجابتك لها معنى.
- تحقق من حلك، إذا سمح لك الوقت بذلك.





الخطوة 2

اكتب إجابتك في صندوق الإجابة.

- اكتب عددًا واحدًا فقط أو رمزًا في كل صندوق على ورقة الإجابة.
- لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج صناديق الإجابة.
- يمكن أن تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كلية، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.

الخطوة 3

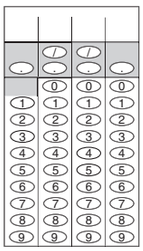
أَدخل الإجابة في نموذج الإجابة الشبكية.

- ظلّل فقط دائرة واحدة لكل صندوق إجابة، وتأكد أنك ظللت القيمة المناظرة التي في الصندوق.
- ظلّل بصورة واضحة وكاملة.

مثال

اقرأ المسألة، وعيّن المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

يزيد طول مستطيل عن عرضه بـ 3m. إذا كان محيطه 27m، فأوجد طوله؟



اقرأ المسألة بعناية. يمكن حل المسألة باستعمال نظام معادلات. افترض أن x, y تمثل بُعدي المستطيل، والنظام الآتي يمثل هذه الحالة.

$$2x + 2y = 27$$
$$x - y = 3$$

يمكن حل نظام المعادلات جبريًّا، ومع ذلك فإن من الأسرع والأسهل استعمال المصفوفات والآلة الحاسبة لحل النظام.

حل المسألة

أدخل مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت في الآلة الحاسبة البيانية وحل باستعمال النظير الضربي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 27 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5.25 \\ 8.25 \end{bmatrix}$$

طول المستطيل 8.25m.

8	.	2	5

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، واستعمل معطيات المسألة لحلها.

1) لدى عائشة 23 ورقة نقدية من الفئات BD 5، BD 10، BD 20. والقيمة الكلية لتلك الأوراق النقدية 210 BD. وكان عدد الأوراق النقدية من فئة BD 5 يساوي عدد تلك التي من فئة BD 10. كم ورقة نقدية من فئة BD5 مع عائشة؟ **10**

2) أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$. **12**

3) أوجد قيمة محدد المصفوفة H، إذا كانت

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$ **234**

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الآتي، ثم حُلّ النظام باستعمال الآلة الحاسبة البيانية وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من المائة:

4) $x - 3y = 5$
$2x + y = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$x = 1.14$
$y = -1.29$

مثال إضافي

إجابة شبكية اشترى ياسر 47 kg من الفاصولياء والطماطم بسعر BD 28.25، إذا كان سعر 1 kg من الفاصولياء BD 0.75، وسعر 1 kg من الطماطم BD 0.50، فكم كيلو جرامًا من الطماطم اشترى ياسر؟

2	8

3 التقويم

استعمل التمارين 4 – 1؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملًا لإجابات الطلبة عن كل فقرة؛ فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية.

1) A إساءة تفسير الكلمة الدالة على العملية الصحيحة.
B الإجابة الصحيحة.
C إساءة تفسير الكلمة الدالة على العملية الصحيحة.
D عكس المصفوفتين.

2) A خَمنّ الإجابة.
B الإجابة الصحيحة.
C خَمنّ الإجابة.
D لم يدرك متى يكون ضرب المصفوفات معرّفاً.

3) A قلب رتبة AB .
B ساوى بين رتبتي A ، B .
C ساوى بين رتبتي AB ، B .
D الإجابة الصحيحة.

4) A أوجد المجموع لحاصل ضرب الأقطار بصورة غير صحيحة.
B أوجد المجموع لحاصل ضرب الأقطار بصورة غير صحيحة.
C أوجد المجموع لحاصل ضرب. الأقطار بصورة غير صحيحة.
D الإجابة الصحيحة.

5) A الإجابة الصحيحة.
B أخطأ في تحديد المنطقة 2 .
C أخطأ في تحديد المنطقة 1 .
D أخطأ في تحديد المنطقتين 1 ، 2.

6) A الإجابة الصحيحة.
B عكس الصفوف والأعمدة.
C حسب عدد العناصر بدلًا من عدد الأعمدة.
D خَمنّ الإجابة.

7) A خلط بين رمز القيمة المطلقة ورمز أكبر عدد صحيح.
B الإجابة الصحيحة.
C لم يدرك أثر الإشارة "−".
D خَمنّ الإجابة.

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ مما يأتي:

1) تُبيّن المصفوفة L المعدّل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينةٍ ما، وتُبيّن المصفوفة H المعدّل الشهري لدرجات الحرارة العظمى في تلك المدينة .

$$L = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

ما العملية التي يمكن استعمالها؛ لإيجاد الفرق بين المعدّل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدّل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟ **B**

A $L + H$ **B** $H - L$
C $H \times L$ **D** $L - H$

2) ما ناتج $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [\,3 \quad 1\,]$، إذا كان ذلك ممكنًا؟ **B**

A $[\,-3\,]$ **B** $[\,11\,]$
C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$ **D** الضرب غير معرف

إرشادات للاختبارات

سؤال 2 رتبة حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة 2×1 في مصفوفة من الرتبة 1×2 هي 1×1 .

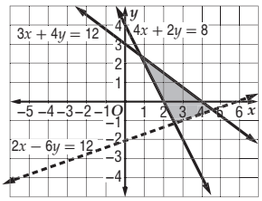
3) إذا كانت رتبة المصفوفة AB تساوي 2×3 ، ورتبة المصفوفة A تساوي 3×4 . فما رتبة المصفوفة B ؟ **D**

A 2×3 **B** 3×4
C 3×2 **D** 4×2

4) إذا كانت $D(-6, 2), E(3, 5), F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$، فما مساحة سطح هذا المثلث؟ **D**

A 54.5 وحدة مربعة **C** 60 وحدة مربعة
B 58 وحدة مربعة **D** 61.5 وحدة مربعة

5) ما النظام الذي يمثِّل حله المنطقة المظللة في الشكل أدناه؟ **A**



A $4x + 2y \geq 8,\ 3x + 4y \leq 12,\ 2x - 6y < 12$
B $4x + 2y \geq 8,\ 3x + 4y \geq 12,\ 2x - 6y < 12$
C $4x + 2y \leq 8,\ 3x + 4y \leq 12,\ 2x - 6y < 12$
D $4x + 2y \leq 8,\ 3x + 4y \geq 12,\ 2x - 6y < 12$

6) ما رتبة المصفوفة $D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ؟ **A**

A 4×2 **C** 4×8
B 2×4 **D** 8×4

7) أي من الدوال الآتية يكون مداها $\{y \mid y \geq 0\}$ ؟ **B**

A $f(x) = [\![x]\!]$
B $f(x) = |-x + 1|$
C $f(x) = -|x|$
D $f(x) = -[\![x]\!] + 1$

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

8) هل يوجد للمصفوفة B نظير ضربي؟ برِّر إجابتك.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

إجابة ممكنة: لا؛ لأن محدد المصفوفة يساوي 0.

9) احسب قيمة محدد المصفوفة:

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

10) يستعمل حمد شبكة إحداثيات ليصمم أرضية جديدة في فناء منزله. إذا كانت الأرضية تمثل حل نظام المتباينات $y \le -x + 32, x \le 16, y \ge 0, x \ge 0, \ y \le 20$، وكانت كل وحدة على شبكة الإحداثيات تمثل 1 ft على سطح الأرض، فما مساحة سطح الأرضية بالقدم المربعة؟ 312

11) مع عمر 14 ورقة نقدية من فئة الدينار، وخمسة دنانير. إذا كانت القيمة الكلية لهذه القطع النقدية هي BD42، فاستعمل هذه المعلومات للإجابة عن كل سؤال مما يأتي:

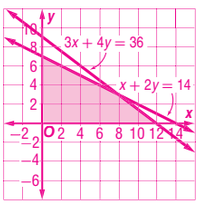
a) افترض أن d تمثل عدد الأوراق من فئة الدينار الواحد التي يملكها عمر، و q عدد الأوراق من فئة خمسة دنانير التي يملكها. اكتب نظام معادلات يمثّل هذه الحالة.
$d + q = 14 \ , \ d + 5q = 42$

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن أن تستعمل؛ لإيجاد قيم كل من q، d. انظر الهامش

c) حُلّ المعادلة المصفوفية في الفرع b باستعمال النظير الضربي. ما عدد الأوراق من فئة الدينار الواحد وفئة خمسة دنانير التي يملكها عمر؟
7 من فئة BD 1 ، 7 من فئة BD 5

12) مثّل بيانيًّا نظام المتباينات أدناه، ثم حدد رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

$x \ge 0 \ , \ y \ge 0$
$x + 2y \le 14$
$3x + 4y \le 36$
$f(x, y) = 8x + 12y$



الرؤوس (8,3)، (12,0)، (0,7)، (0,0)
القيمة العظمى = 100 عند (8 , 3)

13) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، ومتى لا يمكن ضربهما، وأعط مثالًا على ذلك. انظر الهامش

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فاذهب للدرس...	2-2	2-3	2-3	2-4	1-7	2-1	1-4	2-5	2-4	1-7	2-5	1-8	2-3

إجابات:

11b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 42 \end{bmatrix}$

13) إجابة ممكنة: إذا كانت رتبة المصفوفة A هي $m \times n$، ورتبة المصفوفة B هي $c \times d$، فإن AB موجودة إذا وفقط إذا كان $n = c$. تحقق من أمثلة الطلبة.

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين؛ لتختبر مدى تقدم الطلبة.

بناء الاختبارات
التقـــويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل اختبارات TIMSS أو NAEP.

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل الثالث تعطى الأسئلة في صفحة (127) واجبًا منزليًّا للطلبة لتقويم مدى امتلاكهم المتطلبات السابقة للفصل 3.

الدرس 2–2، ص 108، 109

26) افرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. لتوضيح خاصية الإبدال على جمع المصفوفات من الرتبة 2×2، بيِّن أن $A + B = B + A$.

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \quad \text{تعريف الجمع على المصفوفات}$$

$$= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix} \quad \text{الخاصية التبديلية على جمع الأعداد الحقيقية}$$

$$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{تعريف الجمع على المصفوفات}$$

$$= B + A \quad \text{بالتعويض}$$

27) أفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}$

لإثبات أن خاصية التجميع صحيحة على جميع المصفوفات من الرتبة 2×2 نبيّن أن: $(A + B) + C = A + (B + C)$

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} \quad \text{تعريف الجمع على المصفوفات}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+e)+j & (b+f)+k \\ (c+g)+m & (d+h)+n \end{bmatrix} \quad \text{تعريف الجمع على المصفوفات}$$

$$= \begin{bmatrix} a+(e+j) & b+(f+k) \\ c+(g+m) & d+(h+n) \end{bmatrix} \quad \text{خاصية التجميع على الجمع على الأعداد الحقيقية}$$

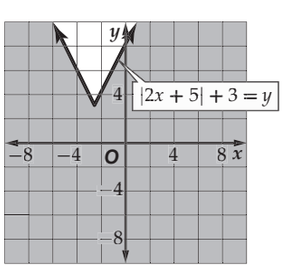
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+j & f+k \\ g+m & h+n \end{bmatrix} \quad \text{تعريف الجمع على المصفوفات}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} \right) \quad \text{تعريف الجمع على المصفوفات}$$

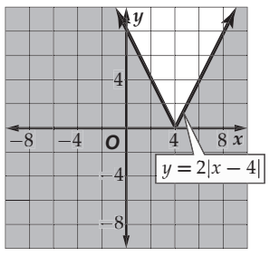
$$= A + (B + C) \quad \text{بالتعويض}$$

31) إجابة ممكنه: أولاً أضرب كل عنصر من عناصر D في العدد 4، ثم أضرب كل عنصر من عناصر C في العدد 3. وأخيراً أطرح العناصر في المصفوفة $3C$ من العناصر المناظرة في المصفوفة $4D$، فتكون النتيجة المصفوفة $4D - 3C$.

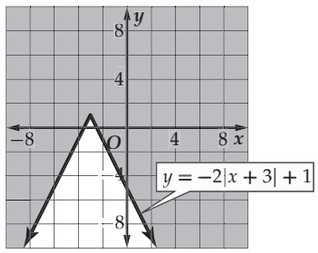
37)



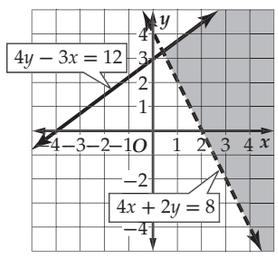
38)



39)



40)



الدرس 3–2، ص 116

34) مصفوفة الشراء $A = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$

مصفوفة البيع $B = \begin{bmatrix} 3.00 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

مصفوفة عدد الزهور $C = \begin{bmatrix} 200 & 150 & 100 \end{bmatrix}$

a) مصفوفة المبلغ الكلي لشراء الزهور $= AC$

$$AC = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 150 & 100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.50(200) + 1.5(150) + 2(100) \end{bmatrix} \quad \text{بضرب الأعمدة في الصفوف}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 + 225 + 200 \end{bmatrix} \quad \text{بالضرب}$$

بالتبسيط $= \begin{bmatrix} 525 \end{bmatrix}$

إذن المبلغ $= \quad BD525$

b) مصفوفة المبلغ الكلي لبيع الزهور $= BC$

$$BC = \begin{bmatrix} 3.00 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 150 & 100 \end{bmatrix}$$

بضرب الأعمدة في الصفوف $= 3.00(200) + 6(150) + 7(100)$

بالضرب $= 600 + 900 + 700$

بالتبسيط $= 2200$

إذن المبلغ $= BD2200$

c) مصفوفة الربح = مصفوفة مبلغ البيع – مصفوفة مبلغ الشراء

$$D = \begin{bmatrix} 2200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 525 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1675 \end{bmatrix}$$

إذن الربح $= BD1675$

43a) بالتعويض $c(A+B) = c\left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\right)$

تعريف جمع المصفوفات $= c\begin{bmatrix} a+w & b+x \\ d+y & e+z \end{bmatrix}$

تعريف ضرب المصفوفات في ثابت $= \begin{bmatrix} ca+cw & cb+cx \\ cd+cy & ce+cz \end{bmatrix}$

تعريف جمع المصفوفات $= \begin{bmatrix} ca & cb \\ cd & ce \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cw & cx \\ cy & cz \end{bmatrix}$

بالتعويض $= cA + cB$

(43b

$$C(A+B)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}j & k\\ m & n\end{bmatrix}\right)$$ بالتعويض

$$=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e+j & f+k\\ g+m & h+n\end{bmatrix}$$ تعريف جمع المصفوفات

$$=\begin{bmatrix}a(e+j)+b(g+m) & a(f+k)+b(h+n)\\ c(e+j)+d(g+m) & c(f+k)+d(h+n)\end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$=\begin{bmatrix}ea+ja+gb+mb & fa+ka+hb+nb\\ ec+jc+gd+md & fc+kc+hd+nd\end{bmatrix}$$ خاصيتي التوزيعية والإبدالية على الضرب

$$=\begin{bmatrix}ea+gb+ja+mb & fa+hb+ka+nb\\ ec+gd+jc+md & fc+hd+kc+nd\end{bmatrix}$$ الخاصية الإبدالية على الجمع

$$=\begin{bmatrix}ea+gb & fa+hb\\ ec+gd & fc+hd\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}ja+mb & ka+nb\\ jc+md & kc+nd\end{bmatrix}$$ تعريف جمع المصفوفات

$$=CA+CB$$ تعريف جمع المصفوفات

$$(A+B)C=\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$$ بالتعويض

$$=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$$ تعريف جمع المصفوفات

$$=\begin{bmatrix}(a_{11}+b_{11})c_{11}+(a_{12}+b_{12})c_{21} & (a_{11}+b_{11})c_{12}+(a_{12}+b_{12})c_{22}\\ (a_{21}+b_{21})c_{11}+(a_{22}+b_{22})c_{21} & (a_{21}+b_{21})c_{12}+(a_{22}+b_{22})c_{22}\end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$=\begin{bmatrix}a_{11}c_{11}+b_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+b_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22}\\ a_{21}c_{11}+b_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}+b_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+b_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}+b_{22}c_{22}\end{bmatrix}$$ خاصية التوزيع والتبديل للضرب

$$=\begin{bmatrix}a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}\\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}+b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}+b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{bmatrix}$$ الخاصية التبديلية على الجمع

$$=\begin{bmatrix}a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}\\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}+b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}+b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{bmatrix}$$ تعريف جمع المصفوفات

$$=\begin{bmatrix}a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}\\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}\\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\end{bmatrix}$$ تعريف جمع المصفوفات

$$=AC+BC$$

إذن $(A+B)C=AC+BC$

(43c

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$ بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$ خاصية التوزيع

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$ الخاصية الإبدالية على الجمع

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{bmatrix}$$ تعريف الخاصية التوزيعية

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$= A(BC)$$ بالتعويض

(43d

$$c(AB) = c\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$$ بالتعويض

$$= c\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}$$ تعريف الضرب في عدد حقيقي

$$= \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$ خاصية التوزيع

$$= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$= c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$ تعريف الضرب في عدد حقيقي

$$= (cA)B$$ بالتعويض

$$= c\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$$ بالتعويض

$$= c\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{11}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات في عدد حقيقي

$$= \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$ الخاصية التوزيعة

$$= \begin{bmatrix} a_{11}cb_{11} + a_{12}cb_{21} & a_{11}cb_{12} + a_{12}cb_{22} \\ a_{21}cb_{11} + a_{22}cb_{21} & a_{21}cb_{12} + a_{22}cb_{22} \end{bmatrix}$$ الخاصية الإبدالية

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \end{bmatrix}$$ تعريف ضرب المصفوفات

$$= A(cB)$$ بالتعويض

الدرس 4-2، ص 126 - 124

5 اكتب أول عمودين من المصفوفة، ثم أوجد حاصل ضرب عناصر الأقطار.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -5 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$3(2)(4) = 24$

$-2(-5)(-3) = -30$

$2(-4)(1) = -8$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -5 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$-3(2)(2) = -12$

$1(-5)(3) = -15$

$4(-4)(-2) = 32$

أوجد ناتج المجموعة الأولى:

$24 + (-30) + (-8) = -14$

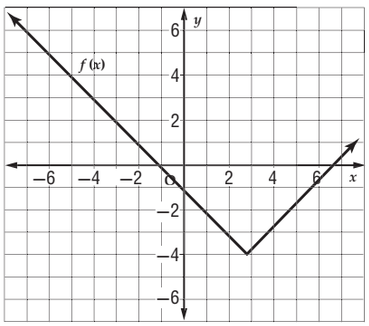
وناتج المجموعة الثانية:

$-12 + (-15) + 32 = 5$

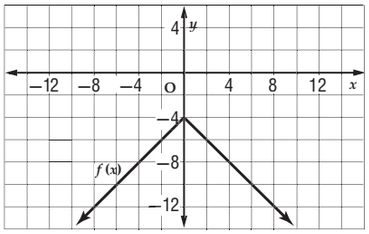
اذن المحدد $= 5 - 14-$

$= 19-$

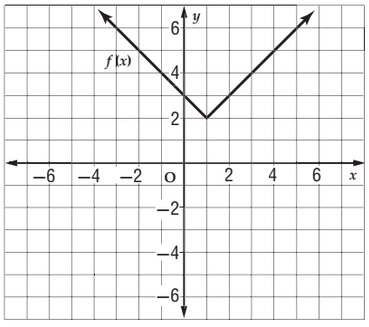
(50)



(51)



(52)



الدرس 5-2 (التوسع)، ص 133

1) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 7 & 13 \end{array}\right], \left(-\frac{54}{13}, \frac{55}{13}\right)$

2) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right], (1.2, 3.6)$

3) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & 10 \end{array}\right], (4, -6)$

4) $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 0 \\ 8 & -2 & 7 \end{array}\right], \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

5) $\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right], (-2, -1, 2)$

6) $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \end{array}\right], (1.25, -0.5, 0.25)$

الفصل 3

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (143)

	الدرس 3-1 3 حصص	توسع 3-1 نصف حصة	الدرس 3-2 3 حصص	توسع 3-2 حصة
العنوان	تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا	معمل الآلة الحاسبة البيانية: تمثيل البيانات الواقعية	حل المعادلات التربيعية بيانيًا	معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل المعادلات التربيعية بيانيًا
الأهداف	• تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا. • إيجاد القيم العظمى والصغرى للدوال التربيعية وتفسيرها.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل نقاط البيانات عندما تكون المعادلة التربيعية هي الأنسب.	• حل معادلات تربيعية بيانيًا. • تقدير الحلول للمعادلات التربيعية بيانيًا.	• استعمال الالة الحاسبة البيانية لحل المعادلات التربيعية.
المفردات الأساسية	الدالة التربيعية الحدّ التربيعي الحد الخطي الحد الثابت القطع المكافئ محور التماثل الرأس القيمة العظمى القيمة الصغرى		المعادلة التربيعية الصيغة القياسية الجذر الصفر	
تمثيلات متعددة	ص (135)			
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة و المعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص(17) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة و المعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص(18) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 1 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون • تدريس الجبر باليدويات ضمن دون	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية
التقنيات لكل درس	مشروع حاسب آلي		جهاز العرض	
تنويع التعليم	ص (148, 151)		ص(161, 164)	

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الدوال التربيعية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(18) حصة	(2) حصة	(20) حصة

الدرس 3-3 (3 حصص)	الدرس 3-4 (حصتان)	الدرس 3-5 (حصتان)	توسع 3-5 (حصة)	استكشاف 3-6 (نصف حصة)	الدرس 3-6 (حصتان)
حل المعادلات التربيعية بالتحليل	**الأعداد المركبة**	**القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميز**	**معمل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما**	**معمل الآلة الحاسبة البيانية: عائلة القطوع المكافئة**	**التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية**
• كتابة معادلات تربيعية بالصورة التحليلية. • حل معادلات تربيعية بالتحليل.	• إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة. • إجراء العمليات على الأعداد المركبة.	• حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام. • استعمال المميز؛ لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.	• كتابة المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتقصي شكل القطع المكافئ.	• كتابة دالة تربيعية بصيغة الرأس. • استعمال التحويلات في تمثيل الدوال التربيعية المكتوبة بصيغة الرأس.
الصورة التحليلية طريقة التوزيع بالترتيب	الوحدة التخيلية العدد التخيلي البحت العدد المركب عددان مركبان مترافقان	القانون العام المميز			صيغة الرأس
ص(151)	ص(159)				
مصادر الفصل 3 • دليل الدراسة و المعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص(19) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة و المعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص(20) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 2 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون • تدريس الجبر باليدويات ضمن دون	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة و المعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص(21) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 3 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون		**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة و المعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص(22) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 4 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون • تدريس الجبر باليدويات ضمن دون
• الكاميرا التوثيقية	• السبورة التفاعلية	• نظام استجابة			• السبورة التفاعلية
ص(167، 172)	ص(175)	ص(182، 185)			ص(195، 197)

التقويم التكويني
• اختبار منتصف الفصل، ص (153)

التقويم الختامي
• دليل الدراسة والمراجعة ص (199–202)
• اختبار الفصل، ص (203)
• اختبار تراكمي، ص(206, 207)

التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 3	المرجع		المرجع
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الثالث، ص (127)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (143)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد، تأكد من فهمك	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم		
	تنبيه !	دليل المعلم		
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (173)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 3، ص (202-199)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (203)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري تراكمي، ص (206, 207)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات			
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 3**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطوّلة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات			

الفصل 3

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون اجعل الطلبة يعملون شكل أزواج على قطع الجبر؛ لتساعدهم في كتابة خمس معادلات والتي يمكن حلها بالتحليل. زوّد الطلبة بالقطع x ، x^2 ، وقطعة الوحدة. اجعلهم يستعملون القطع؛ لتحليل الدالة التربيعية.

x	1	1
x	1	1
x	1	1
x^2	x	x

$y = x^2 + 5x + 6$

$(x + 3)(x + 2)$

المتعلمون البصريون اطلب إلى الطلبة أن يعملوا ملصق ويدّونوا عليه الحالات المختلفة للجذور وأنواعها التي تنتج عند حل المعادلة التربيعية، ويقوموا بكتابة معادلة كمثال على كل حالة ، ثم يمثلوا المعادلة بيانيًّا مع توضيح كيف أن قيمة المميز تشير إلى عدد ونوع الجذور.

البديل 2 دون المتوسط دون

زود الطلبة بورقة بيانية وشفافية، اطلب إليهم أن يضعوا الشفافية فوق الورقة البيانية وليمثلوا الدالة $y = x^2$. على الشفافية، ثم ليقوموا بتحريك الشفافية لإزاحة التمثيل البياني إلى أعلى، إلى أسفل، إلى اليسار أو إلى اليمين. ناقش معادلة كل تمثيل جديد.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اجعل الطلبة يستمعوا تسجيلات لأصوات تبدأ خافتة ثم تعلو لمستوى معين ثم تبدأ مرة أخرى بالانخفاض. اطلب من الطلبة أن يصفوا كيف يمكن تمثيل هذه الأصوات بقطع مكافئ، واسألهم كيف يحددوا إذا كان للصوت قيمة عظمى أو صغرى.

الفصل 3 التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 3

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تقريب الأعداد غير النسبية.
- حل متباينات خطية بيانيًا.
- استعمال طرق تتضمن التحليل؛ لتحويل المعادلات من صورة إلى أخرى، وحلها.

الفصل 3

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تحديد مجال الدالة التربيعية، ومداها.
- تحليل مواقف تتضمن دوالَّ تربيعية، وتكوين معادلات تربيعية لحل المسائل.
- حل المعادلات التربيعية باستعمال التمثيل البياني، الطرائق الجبرية ، والقانون العام.
- استعمال الأعداد المركّبة؛ لوصف حلول المعادلات التربيعية.
- كتابة الدوال التربيعية إذا علمت جذورها.
- تحديد الدوال الأم بما فيها الدوال التربيعية وتمثيلها بيانيًّا.
- استعمال الدوال الأم من أجل استقصاء تأثير التغير في كل من a, h, k على التمثيل البياني للدالة المكتوبة بالصيغة: $y = a(x - h)^2 + k$ ، ووصفه، والتنبؤ به.

ما بعد الفصل 3

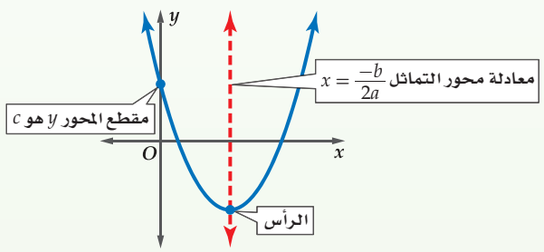
الإعداد لما قبل حساب التفاضل والتكامل

- تحديد مجال الدالة ومداها باستعمال التمثيلات البيانية، الجداول، والرموز.
- استعمال الارتباطات بين قيم خاصة للدالة، والنقاط على التمثيل البياني للدالة، والصيغة الرمزية للدوال.
- تطبيق التحويلات الهندسية على الدوال الأم.

نظرة على الدروس

3-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

يسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية بالقطع المكافئ، ولجميع هذه القطوع المكافئة محور تماثل، و رأس، ومقطع المحور y ، بعض القطوع مفتوحة إلى أعلى، وبعضها الآخر مفتوحة إلى أسفل.



إحدى طرق التمثيل البياني للدالة التربيعية هي تكوين جدول لبعض القيم. ومن المفيد أن يحوي الجدول رأس القطع، ونقطة تقاطعه مع المحور y. بعد تمثيل النقاط الموجودة في الجدول يوصل بينها بمنحنى ممهد. فيأخذ المنحنى شكل الحرف U عند نقطة الرأس وليس الحرف V. وينتهي طرفا الشكل بأسهم تدل على أنه مستمر إلى ما لا نهاية.

3-2 حل المعادلات التربيعية بيانيًّا

أي معادلة تربيعية بالصيغة:

$ax^2 + bx + c = 0$

ترتبط بدالة مرافقة:

$f(x) = ax^2 + bx + c$. وأصفار الدالة هي الإحداثيات x لنقطتي تقاطع المنحنى مع المحور x في التمثيل البياني لها، وهي حلول أو جذور المعادلة التربيعية المرافقة للدالة. يكون للمعادلة التربيعية حل حقيقي واحد، أو حلّان حقيقيان، أو حلان مركبان.

إحدى طرق إيجاد حلول المعادلة التربيعية هو تمثيلها بيانيًّا.

إن إيجاد مقطع المحور x (جذور المعادلة) من التمثيل البياني دون استعمال الآلة الحاسبة البيانية عادة تعطي تقديرًا غير دقيق للحل.

ويمكن التحقق من صحة الحلول عندما تكون أعدادًا صحيحة بتعويضها في المعادلة الأصلية.

الدوال التربيعية

3-3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل

يجب كتابة المعادلة التربيعية بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ قبل البدء بحلها بطريقة التحليل، بعدما يتم تحليل كثيرة الحدود ، يتم مساواة كل عامل بالصفر وتُحل المعادلات الناتجة.

في تحليل كثيرة الحدود من الدرجة الثانية أو أكثر تكتب كحاصل ضرب كثيرات حدود لها درجة أقل من درجتها. طرق التحليل المستعملة في حل المعادلات التربيعية تتضمن طرق تحليل ثلاثية الحدود، والفرق بين مربعين.

3-4 الأعداد المركبة

تم تقديم الأعداد المركبة في هذا الدرس ليس فقط كرمز i ، ولكن كنظام عددي جديد يسمى نظام الأعداد المركبة. و يعتبر نظام الأعداد الحقيقية مجموعة جزئية من هذا النظام الجديد. وتكتب الأعداد المركبة بالصيغة الآتية $a + bi$، حيث a ، b أعداد حقيقية، و i هو عدد مربعه يساوي -1، أو $i = \sqrt{-1}$. ويسمى العدد المركب الذي على صيغة bi عدد تخيلي بحت.

يعامل العدد المركب $a + bi$ كثنائي حدود. وتجرى عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على الإعداد المركبة كما تجرى على ثنائي الحدود مع فارق واحد هو تعويض -1 بدلًا من i^2 أينما ظهر i^2 في المقدار.

3-5 القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميّز

يمكن استعمال القانون العام لحل أي معادلة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$. ولتحديد جذور المعادلة عوّض عن قيم كل من a , b , c في الصيغة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، ثم بسّط المقدار الناتج.

يسمّى المقدار $b^2 - 4ac$ بالمميّز، وتستعمل قيمته في معرفة عدد جذور المعادلة ونوعها. وإيجاد المميّز طريقة سريعة؛ للتحقّق عند حل المعادلات التربيعية.

- إذا كان المميّز موجبًا، فيوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.
- وإذا كان المميّز صفرًا، فيوجد للمعادلة جذر حقيقي واحد .
- وإذا كان المميّز سالبًا، فيوجد للمعادلة جذران مركبان.

3-6 التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

يمكن كتابة المعادلات التربيعية باستعمال صيغة الرأس أي $y = a(x - h)^2 + k$ ، (h, k) هو رأس التمثيل البياني للمعادلة (القطع المكافئ)، ومعادلة محور التماثل هو $x = h$ ، و تمثل k الإزاحة الرأسية للقطع المكافئ ، h الإزاحة الأفقية له. وتحدد قيمة a اتجاه فتحة القطع وشكله.

- إذا كانت $a > 0$ ، فإن التمثيل البياني للدالة مفتوح إلى أعلى.
- إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني للدالة مفتوح إلى أسفل.

تساعد المعلومات التي يمكن إيجادها عند كتابة المعادلة التربيعية باستعمال صيغة الرأس على تمثيلها بيانيًّا.

مشروع الفصل

الجسور المعلقة

يستعمل الطلبة ما تعلموه حول الدوال التربيعية؛ لإيجاد معادلة مقطع لتصميم هندسي له شكل قطع مكافئ.

- اطلب إلى الطلبة اختبار تصميمات معمارية لمقطعها شكل قطع مكافئ. مثل أقواس بوابات، جسور ، ...
- اطلب إليهم تعيين مستويات إحداثية لهذه المقاطع.
- اطلب إليهم إيجاد معادلة القطع المكافئ. وذلك باختيار نقاط من القطع أو باستعمال خصائص القطع.
- اطلب إليهم تحديد القيمة العظمى أو الصغرى، وتفسيرها.
- اطلب إليهم عمل تصميم هندسي مشابه للتصميم الذي قاموا بإيجاد معادلته.

المفردات الأساسية قدّم مفردات خطوات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: الدالة التربيعية هي دالة يمكن كتابتها على الصورة:
$f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0$

مثال: $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$

سؤال: حدد قيم a, b, c في الدالة أعلاه.

$a = 5\ ,\ b = 3\ ,\ c = -2$

مطوياتك منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلبة ملاحظاتهم أثناء دراستهم للدوال التربيعية في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل؛ لتدوين ملاحظاتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجِّع الطلبة أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

مسرد مفردات الطالب، ص (1, 2)

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضاً للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

الفصل 3

الدوال التربيعية
Quadratic Functions

فيما سبق

درست تمثيل الدوال والمتباينات الخطية بيانيًا.

والآن

الأفكار العامة

- أمثّل الدوال التربيعية بيانيًا.
- أحل المعادلات التربيعية.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

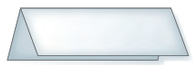
لماذا؟

الجسور المعلقة يمكن استعمال الدوال التربيعية؛ لنمذجة ظواهر حقيقية مثل حركة جسم ساقط. كما يمكن استعمال الدوال التربيعية؛ لنمذجة الأشكال والتصميمات المعمارية مثل الأسلاك الداعمة لبعض الجسور المعلقة.

مطوياتك منظم أفكار

الدوال التربيعية: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الثالث حول الدوال التربيعية.
ابدأ بورقة أبعادها 28 cm × 21 cm.

1. **اثن الورقة بعرض** 5 cm بصورة موازية للضلع الأطول.
2. **اثن الورقة بصورة موازية** للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.
3. **ثبّت الحافتين** الطرفيتين للثنية كما يظهر في الشكل أدناه.
4. **عنون الأقسام الأربعة بالعناوين:** الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.



التهيئة للفصل الثالث

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة .

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي ، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

إذا كان $g(x) = -x^2 + 4x - 4$ ، $f(x) = 2x^2 - 6$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

1) $f(1)$ -4
2) $f(4)$ 26
3) $f(0)$ -6
4) $f(-2)$ 2
5) $g(0)$ -4
6) $g(-1)$ -9
7) $g(2)$ 0
8) $g(0.5)$ -2.25

أسماك: استعمل المعطيات الآتية لحل السؤالين 9, 10 :

يسبح سمك التونة بسرعة ثابتة مقدارها 9 mi/h ، ولا يتوقف عن الحركة حتى نهاية حياته. (مهارة سابقة)

9) اكتب دالة لنمذجة هذا الموقف. $f(x) = 9x$

10) أوجد قيمة الدالة لتقدير المسافة التي قطعتها سمكة تونة عمرها سنتان؟ 157680 mi

حلِّل كل مقدار مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن قابلًا للتحليل فاكتب عبارة "مقدار أولي". للأسئلة 11- 18 انظر الهامش

11) $x^2 + 11x + 30$
12) $x^2 - 13x + 36$
13) $x^2 - x - 56$
14) $x^2 - 5x - 14$
15) $x^2 + x + 2$
16) $x^2 + 10x + 25$
17) $x^2 - 22x + 121$
18) $x^2 - 9$

19) **طول الأرضية:** إذا كانت مساحة أرضية غرفة للمعيشة $(x^2 + 11x + 28)\ m^2$، وكان عرضها $(x + 4)\ m$، فكم مترًا طولها؟ $(x + 7)$ m

مراجعة سريعة

مثال 1

إذا كان $g(x) = 0.5x^2 + 2x - 1$ ، $f(x) = 3x^2 + 2$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

a $f(3)$

الدالة الأصلية: $f(x) = 3x^2 + 2$

بالتعويض عن x بـ 3: $f(3) = 3(3)^2 + 2$

بالتبسيط: $= 27 + 2 = 29$

b $g(-4)$

الدالة الأصلية: $g(x) = 0.5x^2 + 2x - 1$

بالتعويض عن x بـ -4: $g(-4) = 0.5(-4)^2 + 2(-4) - 1$

بالضرب: $= 8 + (-8) - 1$

بالتبسيط: $= -1$

مثال 2

حلِّل المقدار $x^2 - x - 2$ تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن قابلًا للتحليل فاكتب عبارة "مقدار أولي".

لإيجاد معاملات الحدود التي تحوي x يجب أن نجد عددين حاصل ضربهما يساوي (-2) ، ومجموعهما يساوي -1. العددان هما $-2, 1$ ؛ لأن $(1)(-2) = -2, 1 + (-2) = -1$

لذا نعيد كتابة المقدار $x^2 - x - 2$ على النحو الآتي:

المقدار الأصلي: $x^2 - x - 2$

بالتعويض عن $-x$ بـ $(x - 2x)$: $= x^2 + x - 2x - 2$

خاصية التجميع: $= (x^2 + x) + (-2x - 2)$

بإخراج العامل المشترك: $= x(x + 1) - 2(x + 1)$

خاصية التوزيع: $= (x + 1)(x - 2)$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومُخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة" إذا ... فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصادر الآتية :
مصادر الفصل	بنك المفاهيم و المهارات. تدريبات المهارات
دليل المعلم	مشروع الفصل 3، ص(142)
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من التمارين،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين :
مصادر الفصل	دليل الدراسة و المعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

11) $(x + 6)(x + 5)$
12) $(x - 4)(x - 9)$
13) $(x - 8)(x + 7)$
14) $(x + 2)(x - 7)$
15) مقدار أولي
16) $(x + 5)^2$
17) $(x - 11)^2$
18) $(x + 3)(x - 3)$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-1

تحليل الدوال الممثلة بيانيًا.

الدرس 3-1

تحليل خصائص التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.

إيجاد القيم العظمى والصغرى للدوال التربيعية وتفسيرها.

ما بعد الدرس 3-1

حل المعادلات التربيعية باستعمال التمثيل البياني.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- هل $y = -8x^2 - 49x - 75$ معادلة خطية؟ فسّر ذلك. لا؛ لأنها تحتوي على الحد x^2.
- هل يشكل مسار النافورة خطًا مستقيمًا؟ لا
- كيف تصف شكل الماء عندما ينطلق؟ إجابة ممكنة: منحنى متماثل يُطلق عليه قطع مكافئ.

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا
Graphing Quadratic Functions

لماذا؟

شكلت نافورة الملك حمد التي أهداها لشعب البحرين عام 2004 معلمًا مميزًا وبارزًا بين جسر الشيخ عيسى وجسر الشيخ حمد باتجاه محافظة المحرق، ويبلغ ارتفاعها 404 ft، ويمكن تمثيل حركة المياه في النافورة بمعادلات تربيعية. كما يمكنك استعمال التمثيلات البيانية لهذه المعادلات لتوضيح مسار المياه.

فيما سبق درستُ تحليل الدوال الممثلة بيانيًا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أمثّل الدوال التربيعية بيانيًا.
- أجد القيم العظمى والصغرى للدوال التربيعية وأفسرها.

المفردات الأساسية

الدالة غير الخطية nonlinear function

الدالة التربيعية quadratic function

الصورة القياسية standard form

القطع المكافئ parabola

محور التماثل axis of symmetry

الرأس vertex

القيمة الصغرى minimum value

القيمة العظمى maximum value

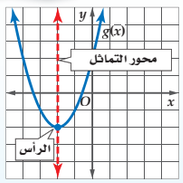
متماثل symmetry

www.obeikaneducation.com

خصائص الدوال التربيعية درست سابقًا الدوال الخطية، وهناك أيضًا **دوالّ غير خطية** تختلف أشكال تمثيلاتها البيانية. **فالدوال التربيعية** مثلاً هي دوال غير خطية، ويمكن كتابتها على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$، وتُسمى هذه الصورة **بالصورة القياسية** للدالة التربيعية، ويسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية **قطعًا مكافئًا**. وتتماثل القطوع المكافئة حول مستقيم يتوسطها يُسمى **محور التماثل**، يقطع القطع المكافئ في نقطة واحدة تُسمى **الرأس**.

مفهوم أساسي الدوال التربيعية

أضف إلى مطويتك



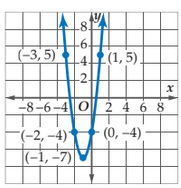
الدالة الأم	$f(x) = x^2$
الصورة القياسية	$g(x) = ax^2 + bx + c$
شكل التمثيل البياني	قطع مكافئ
معادلة محور التماثل	$x = -\frac{b}{2a}$
مقطع المحور y	c

ويكون التمثيل البياني لِـ $y = ax^2 + bx + c$ مفتوحًا إلى أعلى، إذا كان $a > 0$، وتمثّل أدنى نقطة فيه نقطة **القيمة الصغرى**، ويكون مفتوحًا إلى أسفل، إذا كان $a < 0$، وتمثّل أعلى نقطة فيه نقطة **القيمة العظمى**، وتمثّل نقطتا القيمة العظمى أو القيمة الصغرى رأس القطع.

مثال 1 التمثيل البياني للقطع المكافئ

استعمل جدول القيم؛ لتمثيل الدالة $y = 3x^2 + 6x - 4$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

x	y
5	1
−4	0
−7	−1
−4	−2
5	−3



مثّل الأزواج المرتبة بيانيًّا، ثُم صِل بينها بمنحنى ممهد. يمتد التمثيل البياني للقطع المكافئ إلى ما لا نهاية من كلا طرفيه، ومجاله هو جميع الأعداد الحقيقية R، ومداه هو $\{y \mid y \geq -7\}$؛ لأن -7 هي القيمة الصغرى.

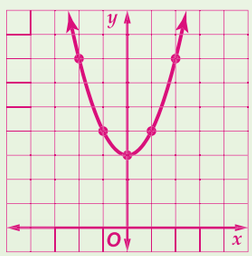
تأكد

1) استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $y = x^2 + 3$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها. انظر الهامش

إجابة (تأكد):

1)

x	y
−2	7
−1	4
0	3
1	4
2	7



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

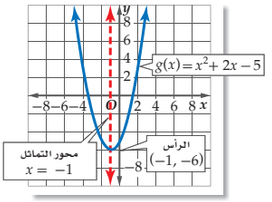
المدى = $\{y \mid y \geq 3\}$

مصادر الدرس 3-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (148)	• تنويع التعليم، ص (148, 151)	• تنويع التعليم، ص (151)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الأشكال **المتماثلة** هي تلك الأشكال التي يكون نصفاها متطابقين تمامًا. فالقطع المكافئ هو شكل متماثل وله محور تماثل، وكل نقطة في نصف القطع المكافئ إلى يسار محور التماثل تقابلها نقطة في النصف الآخر له.

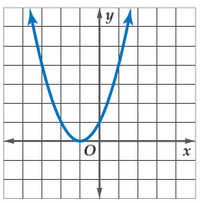
ومن الأسهل عادة تحديد الرأس أولًا عند إيجاد الخصائص من التمثيل البياني، والّذي يمثل إما نقطة عظمى أو نقطة صغرى للقطع المكافئ.



مثال 2 تحديد خصائص القطع المكافئ من تمثيله البياني

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي:

(a)

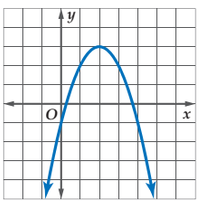


الخطوة 1 أوجد الرأس.
بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى، فالرأس يمثل النقطة الصغرى له، وهي $(-1, 0)$.

الخطوة 2 أوجد معادلة محور التماثل
بما أن محور التماثل هو المستقيم الّذي يمر بالرأس، ويقسم القطع المكافئ إلى نصفين متطابقين، لذا فإن معادلة محور التماثل هي $x = -1$.

الخطوة 3 أوجد مقطع المحور y
بما أن مقطع المحور y هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع المحور y، وهي النقطة $(0, 1)$. لذا، فإن مقطع المحور y هو 1 .

(b)



الخطوة 1 أوجد الرأس.
بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل، فالرأس يمثّل النقطة العظمى له، وهي $(2, 3)$.

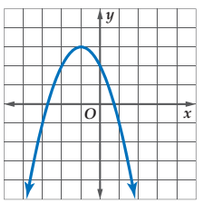
الخطوة 2 أوجد معادلة محور التماثل.
بما أن محور التماثل هو المستقيم الّذي يمر بالرأس، ويقسم القطع المكافئ إلى نصفين متطابقين؛ لذا تكون معادلة محور التماثل هي $x = 2$.

الخطوة 3 أوجد مقطع المحور y.
بما أن مقطع المحور y هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع المحور y، وهي النقطة $(0, -1)$؛ لذا يكون مقطع المحور y هو -1 .

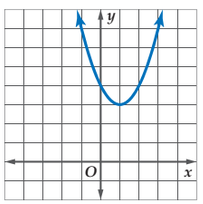
تأكد

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي: انظر الهامش

(2A)



(2B)



خصائص الدوال التربيعية

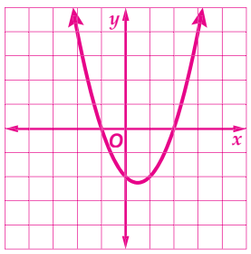
مثال 1 يُبيّن كيفية استعمال جدول القيم؛ لتمثيل الدالة التربيعية بيانيًّا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استعمل جدول القيم؛ لتمثيل الدالة $y = x^2 - x - 2$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq -2\frac{1}{4}\}$

الرأس ومحور التماثل

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد الرأس ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y للقطع المكافئ.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل ورقة الرسم البياني على السبورة خلال هذا الدرس في أثناء حل أمثلة تمثيل الدوال التربيعية.

إجابات (تأكد):

2A) الرأس $(-1, 3)$
معادلة محور التماثل $x = -1$
مقطع المحور y هو 2

2B) الرأس $(1, 3)$
معادلة محور التماثل $x = 1$
مقطع المحور y هو 4

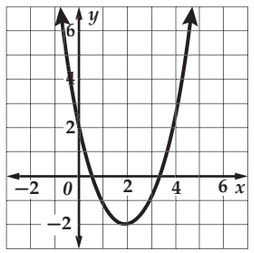
الرأس ومحور التماثل

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الرأس ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لدالة تربيعية.

مثالان إضافيان

2 أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي:

(A

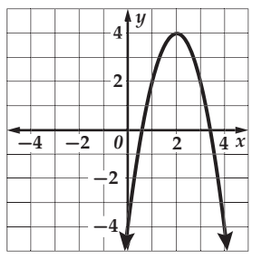


الرأس هو $(2, -2)$

معادلة محور التماثل هي $x = 2$

مقطع المحور y هو 2

(B



الرأس هو $(2, 4)$

معادلة محور التماثل هي $x = 2$

مقطع المحور y هو -4

3 أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y، للدالتين الآتيتين:

(A $x = -2x^2 - 8y - 2$

الرأس هو $(-2, 6)$

معادلة محور التماثل هي $x = -2$

مقطع المحور y هو -2

(B $y = 3x^2 + 6x - 2$

الرأس هو $(-1, -5)$

معادلة محور التماثل هي $x = -1$

مقطع المحور y هو -2

مثال 3 تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة دالته

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y لكل دالة مما يأتي:

(a $y = 2x^2 + 4x - 3$

صيغة معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$

$a = 2, b = 4$ $x = -\frac{4}{2 \times 2}$

بالتبسيط $x = -1$

معادلة محور التماثل هي $x = -1$.

ولإيجاد إحداثيي الرأس، خذ القيمة الناتجة عن معادلة محور التماثل، واعتبرها الإحداثي x لرأس القطع المكافئ، ثم عوّضها في معادلة القطع المكافئ لإيجاد الإحداثي y.

المعادلة الأصلية $y = 2x^2 + 4x - 3$

$x = -1$ $= 2(-1)^2 + 4(-1) - 3$

بالتبسيط $= -5$

إذن، الرأس هو $(-1, -5)$.

مقطع المحور y يقع دائمًا عند النقطة $(0, c)$. لذلك، فإن مقطع المحور y هو -3

(b $y = -x^2 + 6x + 4$

صيغة معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$

$a = -1, b = 6$ $x = -\frac{6}{2(-1)}$

بالتبسيط $x = 3$

معادلة محور التماثل هي $x = 3$.

المعادلة الأصلية $y = -x^2 + 6x + 4$

$x = 3$ $= -(3)^2 + 6(3) + 4$

بالتبسيط $= 13$

الرأس هو $(3, 13)$.

مقطع المحور y هو 4.

إرشادات للدراسة

المقطع الصادي

الإحداثي الصادي للمقطع الصادي هو الحد الثابت (ج) للدالة التربيعية في الصورة القياسية

تأكد

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y لكل دالة مما يأتي:

(3A $y = -3x^2 + 6x - 5$

(3B $y = 2x^2 + 2x + 2$

3A) الرأس هو $(1, -2)$
معادلة المحور التماثل هي $x = 1$
مقطع المحور y هو -5

3B) الرأس هو $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$
معادلة المحور التماثل هي $y = -\frac{1}{2}$
مقطع المحور y هو 2

سوف تتعلم كيف تحدد إن كان القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى أو إلى أسفل، وإذا كان الرأس يمثّل نقطة صغرى أو نقطة عظمى.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

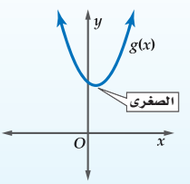
القيمة العظمى و الصغرى

التعبير اللفظي يكون التمثيل البياني للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$،

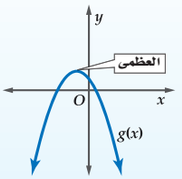
- مفتوحًا إلى أعلى وله قيمة صغرى عندما $a > 0$.
- مفتوحًا إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما $a < 0$.
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي أكبر من أو تساوي القيمة الصغرى، أو جميع الأعداد الحقيقية التي أصغر من أو تساوي القيمة العظمى.

أمثلة

a موجبة



a سالبة



مثال 4

القيم العظمى أو الصغرى

لتكن $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$، فأجب عما يأتي:

a) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

في الدالة $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$، $a = -2, b = -4, c = 6$.

بما أن a عدد سالب، فالتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى أسفل، ويكون للدالة قيمة عظمى.

b) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي y للرأس.

الإحداثي x للرأس هو $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(-2)} = -1$

الدالة الأصلية $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

$x = -3$ $f(1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 6$

بالتبسيط $f(-1) = 8$

إذن القيمة العظمى تساوي 8

c) حدد مجال الدالة ومداها.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية التي أصغر من أو تساوي القيمة العظمى، أي هو $\{y \mid y \leq 8\}$.

تأكد

لتكن $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$، فأجب عما يأتي:

4A) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى. قيمة صغرى

4B) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة. -3

4C) حدد مجال الدالة ومداها. المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \geq -3\}$

تنبيه!

القيم الصغرى والقيم العظمى

لا تنسَ إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس (س، ص)، حيث إن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثّل الإحداثي الصادي له.

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

مجال الدالة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية، بينما المدى هو جميع الأعداد الحقيقة الأكبر من القيمة الصغرى أو تساويها، أو جميع الأعداد الحقيقية الأقل من القيمة العظمى أو تساويها.

القيم العظمى أو الصغرى لدالة تربيعية

مثال 4 يُبيّن كيفية تحديد ما إذا كان للدالة التربيعية قيمة عظمى أو صغرى، وطريقة إيجاد هذه القيمة.

مثال إضافي

4 لتكن $g(x) = -x^2 - 2x - 2$، فأجب عما يأتي:

A) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى.
قيمة عظمى

B) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة. -1

C) حدّد مجال الدالة ومداها.
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى = $\{y \mid y \leq -1\}$

التركيز في المحتوى الرياضي

الرأس تُسمّى النقطة التي تكون عندها القيمة صغرى أو عظمى للقطع المكافئ رأس القطع. وعندما تكتب الدالة التربيعية بالصورة القياسية $y = ax^2 + bx + c$، ويكون (a) موجبًا، يكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أعلى، ورأسه النقطة الممثلة للقيمة الصغرى، أما عندما يكون (a) سالبًا، فيكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أسفل، ورأسه النقطة الممثّلة للقيمة العظمى.

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا تعلّمت كيفية إيجاد العديد من الخصائص المهمة للدوال التربيعية.

مفهوم أساسي تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

أضف إلى مطويتك

لتمثيل الدالة $g(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ بيانيًّا، اتبع الخطوات الآتية:

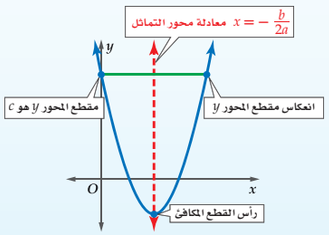
الخطوة 1 أوجد معادلة محور التماثل.

الخطوة 2 أوجد الرأس، وحدّد ما إذا كان يمثّل نقطة صغرى أو نقطة عظمى.

الخطوة 3 أوجد مقطع المحور y.

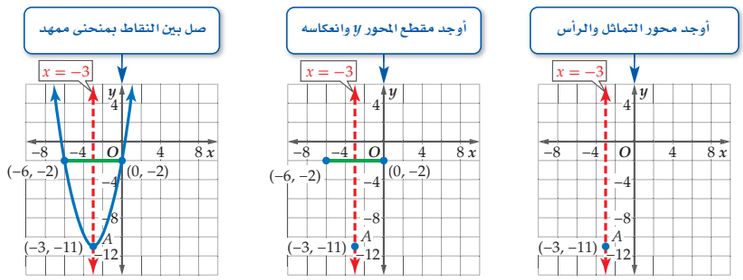
الخطوة 4 استعمل التماثل، لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.

الخطوة 5 صِل بين النقاط بمنحنى ممهد.



إن معرفة موقع كل من محور التماثل، ومقطع المحور y، ونقطة الرأس تساعد على تمثيل الدالة التربيعية.

فمثلًا، محور تماثل الدالة $y = x^2 + 6x - 2$ في الشكل أدناه هو $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(1)} = -3$.



مثال 5 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

مثّل الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$ بيانيًّا:

الخطوة 1 أوجد معادلة محور التماثل.

صيغة معادلة محور التماثل $x = \frac{-b}{2a}$

$a = 1, b = 4$ $x = \frac{-4}{2 \times 1}$

بالتبسيط $x = -2$

إرشادات للدراسة

التماثل والنقاط

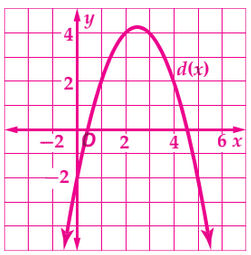
النقاط الواقعة على الطرفين المتقابلين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يمينًا ويسارًا، كما تبعد بعدًا متساويًا من الرأس.

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال خصائص الدالة التربيعية؛ لتمثيلها بيانيًّا.

مثال إضافي

5 مثّل $d(x) = -x^2 + 5x - 2$ بيانيًّا.



تمثيل الدوال التربيعية

يحتاج الطلبة عند استعمالهم خاصية التماثل لتمثيل القطع المكافئ إلى إيجاد عدد قليل من النقاط فقط، ثم إيجاد صور هذه النقاط بالنسبة لمحور التماثل. اقترح عليهم التحقّق من الصور بتعويضها في المعادلة الأصلية.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا كان الطلبة بحاجة إلى تمثيلات مرئية لفهم مفهوم الرأس ومحور التماثل،

فاطلب إليهم إنشاء جدول قيم، وتمثيل الدالة $y = x^2 + 6x + 8$ بيانيًّا على ورقة مربعات، ورفع أوراقهم باتجاه الضوء، ثم طي القطع المكافئ لينطبق على نفسه، واستعمال خطوط الطي الظاهرة على أوراقهم؛ لتعيين الرأس، ومحور التماثل، والقيمة الصغرى.

معادلة محور التماثل هي $x = -3$، الرأس هو $(-3, -1)$، القيمة الصغرى هي -1

الخطوة 2 أوجد الرأس، وحدّد ما إذا كان يمثّل نقطة صغرى أو عظمى.

المعادلة الأصلية $y = x^2 + 4x + 3$

$x = -2$ $= (-2)^2 + 4(-2) + 3$

بالتبسيط $= -1$

يقع الرأس عند النقطة $(-2, -1)$، وبما أن a موجبة، فالتمثيل يكون مفتوحًا إلى أعلى؛ لذا يمثّل الرأس نقطة صغرى.

الخطوة 3 أوجد مقطع المحور y.

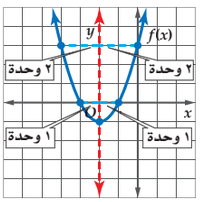
المعادلة الأصلية $y = x^2 + 4x + 3$

$x = 0$ $= (0)^2 + 4(0) + 3$

بالتبسيط $= 3$

مقطع المحور y يساوي 3

الخطوة 4 يقسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متطابقين، لذا فإنه لكل نقطة تقع على أحد الجزأين توجد نقطة تناظرها في الجزء الآخر، وتبعد المسافة نفسها عن المستقيم الّذي يمثّل محور التماثل، وللنقطتين الإحداثي y نفسه.



الخطوة 5 صِل بين النقاط بمنحنى ممهد.

تأكد

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: انظر الهامش

(5A) $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$ **(5B)** $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

يمكنك استعمال خصائص الدوال التربيعية وجدول قيم لتمثيل الدالة التربيعية

مثال 6 محور التماثل ومقطع المحور y ورأس القطع المكافئ

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x - 3$، فأجب عما يأتي:

a) أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل والإحداثي x لرأس القطع المكافئ.

الدالة على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ لذا نحدد قيم a, b, c.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = 1x^2 + 4x - 3$ ← $a = 1, b = 4, c = -3$

مقطع المحور y يساوي -3، ولإيجاد معادلة محور التماثل نستعمل a, b.

معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$

$a = 1, b = 4$ $= -\frac{4}{2(1)}$

بالتبسيط $= -2$

معادلة محور التماثل هي $x = -2$؛ لذا الإحداثي x لرأس القطع هو -2

محور التماثل ومقطع المحور y ورأس القطع المكافئ

مثال 6 يبيِّن كيفية إيجاد محور التماثل ومقطع المحور y ورأس القطع المكافئ، ثم استعمال جدول قيمٍ لتمثيل الدالة التربيعية بيانيًّا.

مثال إضافي

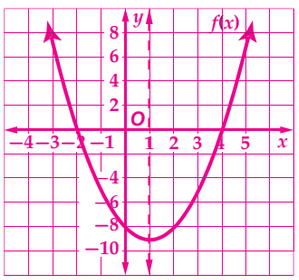
6 إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x - 8$ فأجب عما يأتي

A) أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل والاحداثي x لرأس القطع المكافئ. مقطع المحور y يساوي -8 ، معادلة محور التماثل هي $x = 1$ ، الأحداثي x لرأس القطع هو 1.

B) كون جدولًا لبعض قيم x ، على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع لهذه القيم.

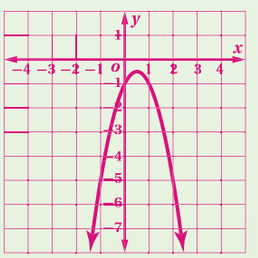
x	$x^2 - 2x - 8$	$f(x)$	$(x, f(x))$
-2	$(-2)^2 - 2(-2) - 8$	0	$(-2, 0)$
1	$(1)^2 - 2(1) - 8$	-9	$(1, -9)$
3	$(3)^2 - 2(3) - 8$	-5	$(3, -5)$
4	$(4)^2 - 2(4) - 8$	0	$(4, 0)$

C) استعمل المعلومات التي حصلت عليها؛ لتمثيل الدالة التربيعية.

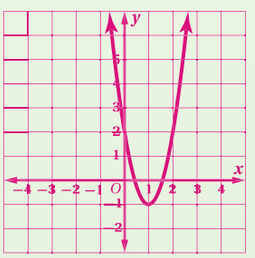


إجابات:

(5a)



(5b)



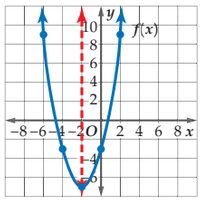
b) كوّن جدولًا لبعض قيم x ، على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع المكافئ هذه القيم.

اختر بعض القيم لِـ x بحيث يكون بعضها أقل من -2 والبعض الآخر أكبر من -2؛ لتتأكد أن النقاط التي تقع على جانبي محور التماثل قد تم تمثيلها.

x	$x^2 + 4x - 3$	$f(x)$	$(x, f(x))$
-6	$(-6)^2 + 4(-6) - 3$	9	$(-6, 9)$
-4	$(-4)^2 + 4(-4) - 3$	-3	$(-4, -3)$
-2	$(-2)^2 + 4(-2) - 3$	-7	$(-2, -7)$
0	$(0)^2 + 4(0) - 3$	-3	$(0, -3)$
2	$(2)^2 + 4(2) - 3$	9	$(2, 9)$

رأس القطع

c) استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة التربيعية.



عيّن رأس القطع ومقطع المحور y، والنقاط الموجودة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى ممهد مناسب.

وللتحقق ارسم محور التماثل $x = -2$ كمستقيم متقطع، وتأكد أن تمثيل القطع المكافئ متماثل حوله .

تأكد

6) إذا كانت $f(x) = -5x^2 - 10x + 6$، فأجب عما يأتي: انظر الهامش

A) أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ.

B) كوّن جدولًا لبعض قيم x، على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع المكافئ لهذه القيم.

C) استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة التربيعية.

عندما تستعمل الدوال التربيعية لنمذجة مواقف من واقع الحياة، فإن قيمها العظمى أو الصغرى يكون لها معنى حقيقي مرتبط بالحياة الواقعية.

مثال 7 من واقع الحياة

استعمال التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

فيزياء: حضر طلاب مدرسة فيلمًا وثائقيًّا لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد (x) ثانية بالدالة $g(x) = -13x^2 + 130x + 312$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

معادلة محور التماثل $\quad x = -\frac{b}{2a}$

$a = -13, b = 130 \quad x = -\frac{130}{2(-13)} = 5$

بما أن معادلة محور التماثل $x = 5$؛ لذا فالإحداثي x للرأس هو 5

المعادلة الأصلية $\quad y = -13x^2 + 130x + 312$

$x = 5 \quad = -13\ (5)^2 + 130\ (5) + 312$

بالتبسيط $\quad = -325 + 650 + 312 = 637$

استعمال التمثيل البياني للدالة التربيعية

مثال 7 يُبيّن كيفية استعمال التمثيل البياني للدالة التربيعية؛ لحل مسائل من واقع الحياة.

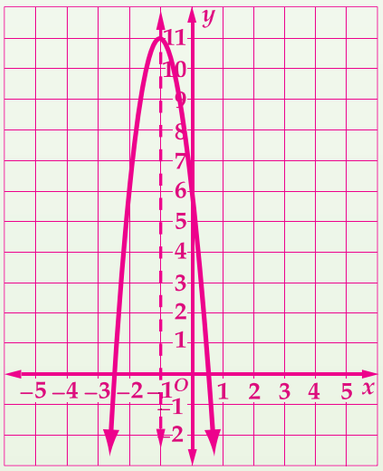
إجابات:

6A) مقطع المحور y يساوي 6، معادلة محور التماثل هي $x = -1$ ، الإحداثي x لرأس القطع المكافئ هو -1 .

6B)

x	$-5x^2 - 10x + 6$	$f(x)$	$(x, f(x))$
-2	$-5(-2)^2 - 10(-2) + 6$	6	$(-2, 6)$
-1	$-5(-1)^2 - 10(-1) + 6$	11	$(-1, 11)$
1	$-5(1)^2 - 10\ (1) + 6$	-9	$(1, -9)$

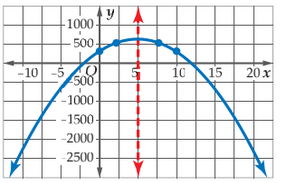
6C)



الرأس هو (5, 637).

ولتجد نقطة أخرى، اختر $x = 0$ وعوّض ذلك في الدالة الأصلية، فتكون النقطة الجديدة هي (0, 312)، وتكون النقطة المقابلة لها على الطرف الآخر لمحور التماثل هي (10, 312).

كرّر هذه العملية واختر $x = 2$ لتحصل على النقطة (2, 520)، وتكون النقطة المقابلة لها (8, 520)، ثم صل بين هذه النقاط بمنحنى ممهد.



b) **ما الارتفاع الّذي أُطلق منه الصاروخ؟**

أُطلق الصاروخ عندما كان الزمن صفرًا، أو عند مقطع المحور y للدالة، أيْ من على ارتفاع 312 ft عن الأرض.

c) **ما أقصى ارتفاع يصله الصاروخ؟**

القيمة العظمى للارتفاع تقع عند الرأس. لذا، يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له 637 ft بعد خمس ثوانٍ من بدء الانطلاق.

تأكد

7) **رمي الرمح:** يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (y) بالأقدام بعد (x) ثانية، بالمعادلة $y = -16x^2 + 64x + 6$.

A) مثّل مسار هذا الرمح بيانيًّا. انظر الهامش

B) ما الارتفاع الّذي أُطلق منه الرمح؟ 6 ft

C) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟ 70 ft

تأكد من فهمك

مثال 1
صفحة 144

استعمل جدول القيم؛ لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها: للتمارين 4–1 انظر ملحق الإجابات

1) $y = 2x^2 + 4x - 6$

2) $y = x^2 + 2x - 1$

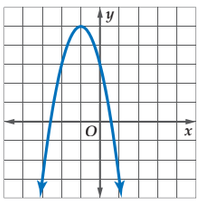
3) $y = x^2 - 6x - 3$

4) $y = 3x^2 - 6x - 5$

مثال 2
صفحة 145

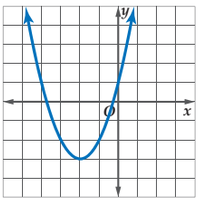
أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي:

5)



الرأس هو (5، 1−)
معادلة محور التماثل هي $x = -1$
مقطع المحور y هو 3

6)

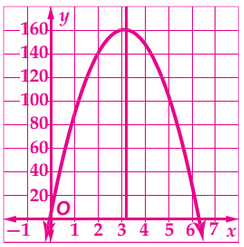


الرأس هو (3−، 2−)،
معادلة محور التماثل هي $x = -2$
مقطع المحور y هو 1

مثال إضافي

7 رماية: يقذف سمير سهمًا، يمكن تمثيل ارتفاعه بالمعادلة: $y = -16x^2 + 100x + 4$، حيث (y) ارتفاع السهم بالأقدام بعد (x) ثانية من قذفه في الهواء.

a) مثّل ارتفاع السهم بيانيًّا.



b) ما الارتفاع الذي قُذف منه السهم؟ 4 ft

c) ما القيمة العظمى لارتفاع السهم؟ $160\frac{1}{4}$ ft

إجابة:

7A)

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أخبر الطلبة أن الألعاب النارية مصمّمة لتنفجر عند أعلى نقطة، وتُمثّل المعادلة الآتية ارتفاع الصاروخ (z) بالأمتار بعد (n) ثانية $z = -4.9n^2 + 34.2n + 1.6$، على أي ارتفاع ينفجر الصاروخ؟ وبعد كَمْ ثانية؟ على ارتفاع يساوي 61 m تقريبًا، ينفجر الصاروخ بعد 3.5 sec

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 27 - 1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

13a عظمى

13b 1

13c المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \le 3\}$

14a) عظمى

14b) 3

14c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \le 3\}$

15a) عظمى

15b) 6

15c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \le 6\}$

16a) عظمى

16b) 2

16c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \le 2\}$

17a) صغرى

17b) $-14\frac{1}{4}$

17c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \ge -14\frac{1}{4}\}$

18a) صغرى

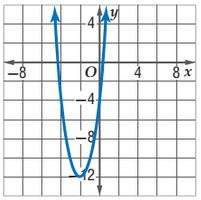
18b) $-5\frac{2}{3}$

18c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

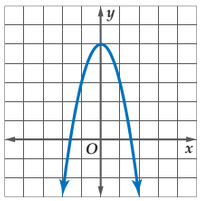
المدى = $\{y \mid y \ge -5\frac{2}{3}\}$

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي.

مثال 3 صفحة 146

7) 

7) الرأس هو $(-12, -2)$
معادلة محور التماثل هي $x = -2$
مقطع المحور y هو -4

8) 

الرأس هو $(0, 5)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 0$ ،
مقطع المحور y هو 5

9) الرأس هو $(1, 2)$
معادلة محور التماثل هو $x = 1$
مقطع المحور y هو -1

10) الرأس هو $(1, 2)$
معادلة محور التماثل هي $x = 1$
مقطع المحور y هو 1

11) الرأس هو $(2, 1)$
معادلة محور التماثل هي $x = 2$
مقطع المحور y هو 5

12) الرأس هو $(1, 5)$
معادلة محور التماثل هي $x = 1$
مقطع المحور y هو 9

9) $y = -3x^2 + 6x - 1$

10) $y = -x^2 + 2x + 1$

11) $y = x^2 - 4x + 5$

12) $y = 4x^2 - 8x + 9$

مثال 4 صفحة 147

في الأسئلة 18–13 أجب عما يأتي: انظر الهامش

a) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

b) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

c) حدِّد مجال الدالة ومداها.

13) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

14) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

15) $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$

16) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

17) $f(x) = x^2 + 3x - 12$

18) $f(x) = 3x^2 + 8x + 5$

المثالان 6, 5 الصفحتان 149 , 148

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا للتمارين 26–19: انظر ملحق الإجابات

19) $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$

20) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

21) $f(x) = 2x^2 - 8x - 4$

22) $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

23) $f(x) = 3x^2$

24) $f(x) = -6x^2$

25) $f(x) = x^2 - 4x$

26) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

مثال 7 صفحة 150

27) **كرة:** يقذف ياسر كرة في الهواء، وفق المعادلة $y = -16x^2 + 16x + 5$، حيث تمثّل y ارتفاع الكرة بالأقدام بعد x ثانية.

a) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

b) ما الارتفاع الّذي قُذفت منه الكرة؟ 5 ft

c) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة؟ 9 ft

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 144

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها للتمارين 33–28: انظر ملحق الإجابات للتمارين 33–28

28) $y = x^2 + 4x + 6$

29) $y = 2x^2 + 4x + 7$

30) $y = 2x^2 - 8x - 5$

31) $y = 3x^2 + 12x + 5$

32) $y = 3x^2 - 6x - 2$

33) $y = x^2 - 2x - 1$

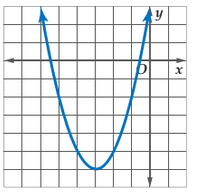
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	70 - 28، 84 ،83، 99 - 80
ضمن ضمن المتوسط	75 - 29 فردي ، 99 - 85
فوق فوق المتوسط	96 - 71 ، (اختياري: 99-97)

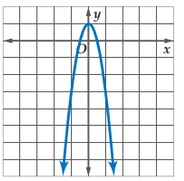
مثال 2
صفحة 145

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، ومقطع المحور y لكل تمثيل بياني مما يأتي: انظر الهامش

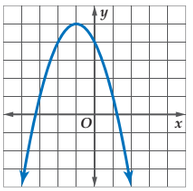
(34)



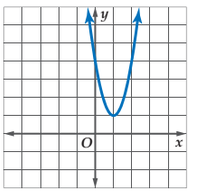
(35)



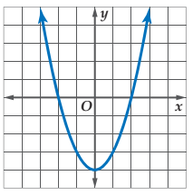
(36)



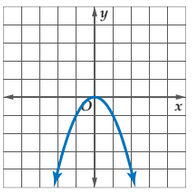
(37)



(38)



(39)



مثال 3
صفحة 146

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y لكل دالة مما يأتي: انظر الهامش

(40) $y = x^2 + 8x + 10$

41 $y = 2x^2 + 12x + 10$

(42) $y = -3x^2 - 6x + 7$

(43) $y = -x^2 - 6x - 5$

(44) $y = 5x^2 + 20x + 10$

(45) $y = 7x^2 - 28x + 14$

(46) $y = 2x^2 - 12x + 6$

(47) $y = -3x^2 + 6x - 18$

(48) $y = -x^2 + 10x - 13$

مثال 4
صفحة 147

في الأسئلة 49–59 أجب عما يأتي للتمارين 49–59: انظر ملحق الإجابات للتمارين 49–59

a) حدّد ما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

b) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

c) حدِّد مجال الدالة ومداها؟

(49) $y = -2x^2 - 8x + 1$

(50) $y = x^2 + 4x - 5$

51 $y = 3x^2 + 18x - 21$

(52) $y = -2x^2 - 16x + 18$

(53) $y = -x^2 - 14x - 16$

(54) $y = 4x^2 + 40x + 44$

(55) $y = -x^2 - 6x - 5$

(56) $y = 2x^2 + 4x + 6$

(57) $y = -3x^2 - 12x - 9$

(58) $f(x) = 5x^2$

(59) $f(x) = 15 - 5x^2$

المثالان 5, 6
الصفحتان 149 , 148

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا للتمارين 60–69: انظر ملحق الإجابات للتمارين 60–69

(60) $y = -3x^2 + 6x - 4$

(61) $y = -2x^2 - 4x - 3$

(62) $y = -2x^2 - 8x + 2$

(63) $y = x^2 + 6x - 6$

(64) $y = x^2 - 2x + 2$

(65) $y = 3x^2 - 12x + 5$

(66) $f(x) = 4x^2$

(67) $f(x) = x^2 - 5$

(68) $f(x) = x^2 + 3$

(69) $f(x) = -3x^2 + 5$

إجابات:

34) الرأس هو $(-3, -6)$،
معادلة محور التماثل هي $x = -3$،
مقطع المحور y هو 3

35) الرأس هو $(0, 1)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 0$،
مقطع المحور y هو 1

36) الرأس هو $(-1, 5)$،
معادلة محور التماثل هي $x = -1$،
مقطع المحور y هو 4

37) الرأس هو $(1, 1)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 1$،
مقطع المحور y هو 4

38) الرأس هو $(-4, 0)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 0$،
مقطع المحور y هو -4

39) الرأس هو $(0, 0)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 0$،
مقطع المحور y هو 0

40) الرأس هو $(-6, -4)$،
معادلة محور التماثل هي $x = -4$،
مقطع المحور y هو 10

41) الرأس هو $(-3, -8)$،
معادلة محور التماثل هي $x = -3$،
مقطع المحور y هو 10

42) الرأس هو $(-1, 10)$،
معادلة محور التماثل هي $x = -1$،
مقطع المحور y هو 7

43) الرأس هو $(-3, 4)$،
معادلة محور التماثل هي $x = -3$،
مقطع المحور y هو -5

44) الرأس هو $(-2, -10)$،
معادلة محور التماثل هي $x = -2$،
مقطع المحور y هو 10

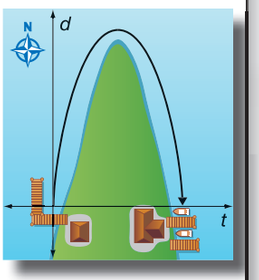
45) الرأس هو $(2, -14)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 2$،
مقطع المحور y هو 14

46) الرأس هو $(3, -12)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 3$،
مقطع المحور y هو 6

47) الرأس هو $(1, -15)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 1$،
مقطع المحور y هو -18

48) الرأس هو $(5, 12)$،
معادلة محور التماثل هي $x = 5$،
مقطع المحور y هو -13

مثال 7
صفحة 150



70) فيزياء: استعمل المعلومات الآتية للإجابة عن الفروع a , b, c:

أطلق جسم إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه 200 ft بسرعة مقدارها 80 ft/sec. فإذا كان ارتفاع الجسم $h(t)$ بعد زمن مقداره t ثانية من إطلاقه يُعطى بالعلاقة $h(t) = -16t^2 + 80t + 200$.

a) فما مجال $h(t)$ ؟ وما مداها؟ وما القيم المعقولة لكل منهما في هذه المسألة؟ انظر الهامش

b) أوجد أقصى ارتفاع يمكن أن يصل إليه الجسم، والزمن اللازم لذلك. 300 ft ، 2.5 sec

c) فسّر ماذا يعني مقطع المحور y في سياق هذه المسألة. انظر الهامش

الآلة الحاسبة البيانية: استعمل الآلة الحاسبة البيانية، لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لكل من الدوال الآتية إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

71) $y = 4x^2 + 10x + 6$ (−1.25, −0.25)

72) $y = 8x^2 - 8x + 8$ (−3.1, −2.55)

73) $y = -5x^2 - 3x - 8$ (−0.3, −7.55)

74) $y = -7x^2 + 12x - 10$ (−4.857, 0.857)

75) جمع التبرعات: استعمل المعلومات الآتية للإجابة عن الفرعين a , b :

حضر 300 شخص لإحدى دور الأيتام لمشاهدة عرض مسرحي خيري في السنة الماضية. وكان سعر تذكرة الدخول 8 BD. وقد قدّر المشرف أن عدد الحضور سيقل نحو 20 شخصًا لكل زيادة مقدارها 1 BD في سعر التذكرة.

a) ماسعر التذكرة إذا أردنا الحصول على أكبر دخل ممكن؟ BD 11.5

b) إذا زادت دار الأيتام سعر التذكرة إلى هذا السعر (أي السعر الذي أوجدته في الفرع a) ، فما مقدارالدخل المتوقع؟ BD 2645

الربط مع واقع الحياة

تدعم بعض المباني الحديثة بأقواس من الفولاذ الصلب من الداخل ومن الخارج مما يزيد من ثباتها .

76) عمارة: استعمل المعلومات الآتية للإجابة عن الفرعين a , b :

يمكن نمذجة كل قوس من الأقواس الداعمة لبعض المباني الحديثة بالدالة الآتية:
$h(x) = -0.025x^2 + 2x$ ، حيث $h(x)$ هو ارتفاع القوس بالأمتار.

a) اكتب معادلة محور التماثل، وأوجد إحداثيي رأس القطع للدالة h . $x = 40$ ، (40, 40)

b) ما أقصى ارتفاع للقوس بحسب هذا النموذج؟ 40m

77) كرة قدم: قذف حارس المرمى الكرة من مستوى سطح الأرض إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 90 ft/sec، والدالة $h(n) = -16n^2 + 90n$ تمثّل ارتفاع الكرة بعد n ثانية.

a) ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟ 74 ft

b) متى تكون الكرة على ارتفاع 126 ft؟ 2.63 sec تقريبًا، 3 sec

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ 126.6 ft تقريبًا

78) الاستدلال: إذا كانت $f(x) = x^2 - 9$ فأجب عما يأتي:

a) ما مجال $f(x)$ ؟ مجموعة الأعداد الحقيقية

b) ما مدى $f(x)$ ؟ $\{y \mid y \geq -9\}$

c) ما قيم x التي تجعل $f(x)$ سالبة؟ $\{x \mid -3 < x < 3\}$

d) ما مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ عندما يكون x عددًا حقيقيًّا؟ المجال = $\{x \mid x \leq -3$ أو $x \geq 3\}$
المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

إجابات:

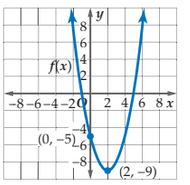
70a) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية أكبر من أو تساوي 0 ، المدى = $\{y \mid y \leq 300\}$، قيم المجال المعقولة هي من 0 إلى 6.83 تقريبًا، وهو الزمن من لحظة إطلاق الجسم حتى سقوطه.
قيم المدى المعقولة هي من 0 إلى 300 ، وهما أدنى وأقصى ارتفاع وصل إليه الجسم.

70c) الارتفاع الابتدائي للجسم عن سطح الأرض.

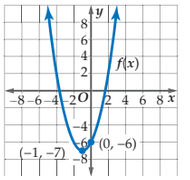
154 الفصل 3 الدوال التربيعية

أوجد معادلة الدالة الممثلة بيانيًّا في كل شكل أدناه، ثم أوجد معادلة محور التماثل، ومقطع المحور y

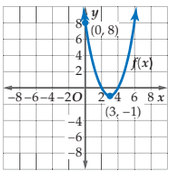
79) $f(x) = x^2 - 4x - 5$
$-5 ، x = 2$



80) $f(x) = x^2 + 2x - 6$
$-6 ، x = -1$



81) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
$8 ، x = 3$



82) **تمثيلات متعددة:** لتكن $f(x) = x^2 - 4x + 8$, $g(x) = 4x^2 - 4x + 8$.

a) جدولة: كوّن جدولًا للقيم لكل من $f(x)$, $g(x)$ إذا كانت $-4 \le x \le 4$. للفروع a–d انظر الهامش

b) تمثيل بياني: مثّل كلًّا من $f(x), g(x)$ بيانيًّا.

c) تعبير لفظي: وضّح الفرق بين التمثيلين البيانيين لِـ $f(x), g(x)$. وما القيمة التي تغيرت وأحدثت هذا الفرق؟

d) تحليل: توقّع التمثيل البياني لِـ $h(x) = 0.25x^2 - 4x + 8$، بتمثيل الدوال الثلاث إذا كانت $-10 \le x \le 10$.

مسائل مهارات التفكير العليا

انظر الهامش

83) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تربيعية، معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي $x = -\frac{3}{8}$، ملخصًا خطوات حلك.

84) **اكتشف الخطأ:** تحاول عبير ومنى إيجاد معادلة محور التماثل لقطع مكافئ، أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك. عبير؛ نسيت منى إشارة السالب مع (−4).

منى

$y = x^2 - 4x + 6$

$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{4}{2(1)}$

$x = 2$

عبير

$y = x^2 - 4x + 6$

$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{-4}{2(1)}$

$x = -2$

85) **تحدٍّ:** يُبيّن الجدول المجاور مجموعة نقاط على منحنى دالة تربيعية.

x	y
-20	-377
c	-13
-5	-2
-1	22
$d-1$	a
5	$a-24$
7	$-b$
15	-202
$14-c$	-377

a) أوجد قيم كل من a, b, c, d. $a = 22, b = 26, c = -6, d = 2$

b) ما الإحداثي x لرأس القطع المكافئ؟ 0

c) هل للدالة قيمة عظمى أم صغرى؟ عظمى

86) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا لدالة تربيعية لكل ما يأتي:

a) قيمتها العظمى 8.

b) قيمتها الصغرى -4.

c) نقطة رأس القطع $(-2, 6)$.

86a) إجابة ممكنة: $f(x) = -x^2 + 8$

86b) إجابة ممكنة: $f(x) = x^2 - 4$

86c) إجابة ممكنة: صغرى، $f(x) = x^2 + 4x + 10$

تنبيه!

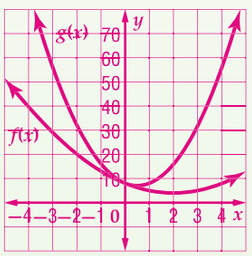
اكتشف الخطأ في التمرين 84 اقترح على الطلبة تحديد قيم a, b, c ، والحرص على تضمين الإشارات في هذه القيم، واطلب إليهم تعويضها في $x = -\frac{2b}{a}$ مستعملًا الأقواس عند الضرورة.

إجابات:

82a)

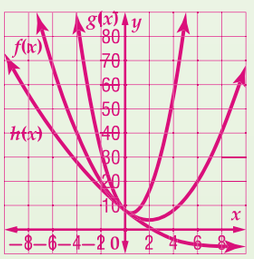
x	$f(x)$	$g(x)$
-4	40	88
-3	29	56
-2	20	32
-1	13	16
0	8	8
1	5	8
2	4	16
3	5	32
4	8	56

82b)



82c) إجابة ممكنة: التمثيل البياني لِـ $g(x)$ أضيق من التمثيل البياني لِـ $f(x)$ تغيرت قيمة a من 1 الى 4

82d) إجابة ممكنة: التمثيل البياني لِـ $h(x)$ سيكون أكثر اتساعًا من التمثيل البياني لِـ $f(x)$



83) إجابة ممكنة: $y = 4x^2 + 3x + 5$
بما أن معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-b}{2a}$ ،
فإن $b = 3, a = 4$.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يفسروا كيف يمكنهم أن يحددوا إن كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى، واطلب إليهم أن يعطوا أمثلة لمثل هذه القيم في المسائل الحياتية.

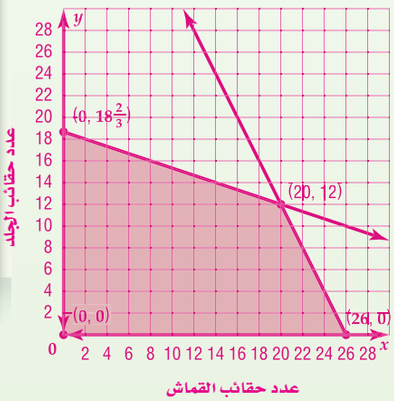
إجابات:

87) $y = -x^2$

88) إجابة ممكنة: يكون أعلى أس للمتغير 2 ، إذا كانت المعادلة على الصورة:
$y = ax^2 + bx + c$
وكان معامل x^2 موجب، فللدالة قيمة صغرى، وإذا كان معامل x^2 سالب، فللدالة قيمة عظمى.

91)
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

96b)



87-88) انظر الهامش

87) التبرير اكتب مثالًا مضادًّا تبين فيه خطأ الجملة الآتية: "رأس القطع المكافئ هو دائمًا القيمة الصغرى للتمثيل البياني".

88) اكتب: صف كيف تُميّز ما إذا كانت الدالة تربيعية، وكيف تحدد إن كان لها قيمة عظمى أم صغرى؟

تدريب على اختبار معياري

89) أيّ المعادلات الآتية يكون تمثيلها البياني متماثلًا حول المحور y؟ **C**

A $y = x^2 + 3x - 1$
B $y = -x^2 + x$
C $y = 6x^2 + 9$
D $y = 3x^2 - 3x + 1$

90) إذا كانت $f(x) = 3x^2 - 9 + 6x$، فأي من العبارات الآتية صحيحة: **D**

A للدالة قيمة عظمى تساوي 12
B للدالة قيمة عظمى تساوي -12
C للدالة قيمة صغرى تساوي 12
D للدالة قيمة صغرى تساوي -12

مراجعة تراكمية

أوجد النظير الضربي لكل من المصفوفتين الآتيتين إن أمكن: (الدرس 2-5)

91) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **انظر الهامش**

92) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-4)

93) $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$ **45**

94) $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}$ **22**

95) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **0**

96) صناعة: تقوم جمعية بصنع حقائب جلدية وحقائب من القماش وتسويقها لصالح ذوي الاحتياجات الخاصة، فإذا كانت مقابض الحقائب جميعها من الجلد، وتحتاج حقيبة القماش إلى 4 m من القماش و1 m من الجلد، بينما تحتاج حقيبة الجلد إلى 3 m من الجلد و 2 m من القماش، وكان لدى الجمعية 56 m من الجلد، 104 m من القماش، فأجب عمَّا يأتي: (الدرس 1-8)

a) إذا مثلت c عدد حقائب القماش، و l عدد الحقائب الجلدية. فاكتب نظام متباينات لعدد الحقائب التي يمكن صنعها.
$c \geq 0, l \geq 0, c + 3l \leq 56, 4c + 2l \leq 104$

b) مثّل النظام بيانيًّا موضحًا منطقة الحل. **انظر الهامش**

c) حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. $(0, 0), (26, 0), (20, 12), \left(0, 18\frac{2}{3}\right)$

d) إذا قررت الجمعية أن تبيع حقيبة القماش بمبلغ 2 BD، والحقيبة الجلدية بمبلغ 3.5 BD، فاكتب دالة تمثل مجموع عائدات الجمعية من الحقائب. $f(c, l) = 2c + 3.5l$

e) ما العدد الّذي يجب صنعه من كل نوع للحصول على أكبر عائد؟ **20 حقيبة من القماش، 12 من الجلد**

f) ما أكبر عائد يمكن أن تحققه الجمعية؟ **82 BD**

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة كل من الدوال الآتية لقيم x المعطاة:

97) $f(x) = 3x^2 - 4x + 6, x = -2$ **26**

98) $f(x) = -2x^2 + 6x - 5, x = 4$ **-13**

99) $f(x) = 6x^2 + 18, x = -5$ **168**

تمثيل البيانات الواقعية
Modeling Real-World Data

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل نقاط البيانات، حيث يكون منحنى الدالة التربيعية أفضل تمثيل لها .

الماء: ملئت زجاجة بالماء. وسمح للماء أن يتسرب من فتحة صغيرة قريبًا من أسفلها، ويُبيّن الجدول أدناه ارتفاع مستوى سطح الماء y مقاسًا بالسنتمتر بعد x ثانية .

الزمن (sec)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
ارتفاع سطح الماء (cm)	42.6	40.7	38.9	37.2	35.8	34.3	33.3	32.3	31.5	30.8	30.4	30.1

أوجد معادلة التنبؤ الخطية ومثّلها بيانيًا، وكذلك أوجد معادلة التنبؤ التربيعية ومثّلها بيانيًا، وحدد أيًا منهما تمثل البيانات بشكل أفضل.

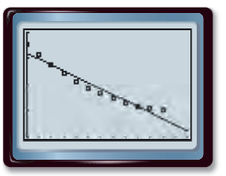
خطوة 1 إيجاد معادلة التنبؤ الخطية وتمثيلها بيانيًا

- أدخل الزمن في L1 ومستوى الماء في L2 ، ثم أوجد معادلة التنبؤ الخطية.

اضغط المفاتيح: (ارجع إلى الدرس 3-1).

- استعمل STAT PLOT لتمثيل شكل الانتشار بيانيًا، وانسخ المعادلة في Y= list ومثّلها بيانيًا.

اضغط المفاتيح (راجع تمثيل الرسم الإحصائي... الدرس 3-1).



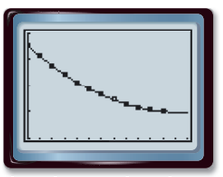
[0, 260] scl: 20 by [25, 45] scl: 5

خطوة 2 إيجاد معادلة التنبؤ التربيعية وتمثيلها بيانيًا

- أوجد معادلة التنبؤ التربيعية، ثم انسخ المعادلة إلى Y= list ومثّلها بيانيًا.

اضغط المفاتيح:

STAT ▶ 5 ENTER Y= VARS 5 ▶ ▶ ENTER Graph



[0, 260] scl: 20 by [25, 45] scl: 5

لاحظ أن منحنى المعادلة الخطية يمر بنقطتين فقط. ويبدو أن منحنى المعادلة التربيعية هو الأنسب لهذه البيانات.

تمارين:

باستعمال الجدول المجاور:

ارتفاع اللاعب بالأقدام فوق سطح الأرض

الزمن (sec)	الارتفاع (ft)
0.1	3.04
0.2	5.76
0.3	8.16
0.4	10.24
0.5	12.24
0.6	13.44
0.7	14.56

1) أوجد معادلة التنبؤ الخطية ومعادلة التنبؤ التربيعية، ومثّل كلًّا منهما بيانيًا. وحدد أيهما تناسب البيانات بشكل أفضل. انظر ملحق الإجابات

2) استعمل قائمة CALC مع كل منهما؛ لتقدير الارتفاعات بعد 1 sec ، 1.5 sec .

3) قارن بين التقديرين اللذين وجدتهما في التمرين 2. انظر ملحق الإجابات

4) كيف تؤثر المعادلة التي لا تناسب البيانات في التقدير؟ تعطي إجابة مضللة

3 التقويم

تقويم تكويني

استعمل تمرين 4 ؛ لتقويم مدى فهم الطلبة لتأثير اختيار معادلة التي لاتناسب البيانات.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة توضيح أهمية تمثيل شكل الانتشار؛ لمعرفة العلاقة بين المتغيرين. إذا أوضح شكل الانتشار أن النقاط تقع على استقامة واحدة، فستكون المعادلة الخطية هي التمثيل الأنسب. وإذا لم تكن كذلك، فإن العلاقة ليست خطية.

1 التركيز

الهدف

استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل نقاط البيانات عندما تكون المعادلة التربيعية هي الأنسب.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية

إرشادات التدريس

عُرضت قيمة a في الخطوة 2 على النحو 2.1035215E-4 . وضح للطلبة أن كتابة هذا العدد بالصورة العلمية هي 2.1035215×10^{-4} .

في الخطوة 2 عند نسخ المعادلة من الخطوة 1 إلى Y = list، سيكون للمعاملات أرقام عشرية أخرى غير تلك التي ظهرت على الآلة، حيث أنها تظهر بعد التقريب في Y = list.

2 التدريب

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية أو ثلاثية ذوي قدرات متفاوتة، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط.

- تأكد من أن الطلبة قد أفرغوا محتويات القائمتين L_1 ، L_2 قبل إدخال البيانات الجديدة. واطلب إليهم إدخال أبعاد النافذة الموضحة.
- وضّح للطلبة أنه يمكن استعمال المفاتيح نفسها التي استعملوها في الخطوة 2 وبتعويض 4 مكان 5 لاختيار LinReg.
- إذا ظهرت عبارة خطأ في الخطوة 2 اطلب إلى الطلبة مسح قائمة Y = list قبل البدء بالمحاولة مرة أخرى.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 1-4 .

3-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2

حل أنظمة معادلات بيانيًا.

الدرس 3-2

حل معادلات تربيعية بيانيًا.

تقدير الحلول للمعادلات التربيعية بيانيًا.

ما بعد الدرس 3-2

حل المعادلات التربيعية بالتحليل.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- كيف يمكن معرفة أن اتجاه فتحة القطع إلى أسفل بالنظر إلى معادلة $h(t)$ ؟
  معامل t^2 سالب.
- كم المسافة التي يقطعها جسم يسقط سقوطًا حرًّا بعد 1 sec من سقوطه؟ وبعد 2 sec ؟ وبعد 3 sec ؟
  144 ft ، 64 ft ، 16 ft.

3-2

حل المعادلات التربيعية بيانيًّا
Solving Quadratic Equations by Graphing

فيما سبق
درستُ حل أنظمة معادلات بيانيًا.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أحل المعادلات التربيعية بيانيًا.
- أقدّر الحلول للمعادلات التربيعية بيانيًا.

المفردات الأساسية
المعادلة التربيعية
quadratic equation
الصيغة القياسية
standard form
الجذر
root
الصفر
zero

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
عند تسارع صعودك في "برج السقوط الحُرّ" (اسم لعبة في مدينة الألعاب). فإنك تثبت بشدّة إلى مقعدك، بحيث تشعر بأنك تُدفع نحو الأسفل، لكن عندما يبدأ السقوط الحر فإنك ستسقط بنفس سرعة سقوط المقعد دون أن تشعر بأي قوة تضغط عليك من المقعد، أي أنك ستشعر بأنك فقدت وزنك. ويُعطى الارتفاع عن سطح الأرض (بالأقدام) لجسم يسقط سقوطًا حرًّا بالدالة الآتية:

$$h(t) = -16t^2 + h_0$$

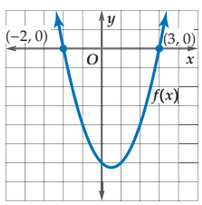
حيث t هو الزمن بالثواني، و h_0 الارتفاع عند نقطة البدء (بالأقدام).

حل المعادلات التربيعية عندما تساوي دالة تربيعية قيمة معينة، فإن الناتج يصبح معادلة تربيعية. ويمكن كتابة **المعادلة التربيعية** على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$. وعندما تكتب المعادلة بهذه الطريقة وتكون a, b, c أعدادًا حقيقية، تكون المعادلة **بالصيغة القياسية**.

تُسمّى حلول المعادلة التربيعية **جذور المعادلة**، وإحدى طرائق إيجاد جذور المعادلة هي إيجاد **أصفار الدالة** المرافقة لهذه المعادلة.

صفر أو صفرا الدالة التربيعية هما المقطعان من المحور x لمنحنى الدالة، أيْ الإحداثيان x لنقطتي التقاء المنحنى مع المحور x في التمثيل البياني لها.

منحنى دالة تربيعية



المقطعان من المحور x هما 3 ,2−

دالة تربيعية

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

$$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$
$$f(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$$

صفرا الدالة التربيعية 3 ,2−

معادلة تربيعية

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$
$$3^2 - 3 - 6 = 0$$

جذرا المعادلة التربيعية 3 ,2−

مصادر الدرس 3-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (161)	• تنويع التعليم، ص (164)	• تنويع التعليم، ص (164)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

حل المعادلات التربيعية

مثال 1 يُبيّن كيفية حل معادلة تربيعية لها حلان حقيقيان بيانيًّا.

مثال 2 يُبيّن كيفية حل معادلة تربيعية لها حل حقيقي واحد بيانيًّا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

إرشادات للدراسة

تمثيل بياني

أحيانًا تحتاج إلى أكثر من 5 نقاط قبل تحديد صفر الدالة.

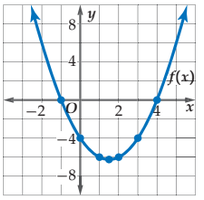
مثال 1 حلان حقيقيان

حُلّ المعادلة $x^2 - 3x - 4 = 0$ بيانيًّا.

مثّل بيانيًّا الدالة التربيعية المرافقة $f(x) = x^2 - 3x - 4$، معادلة محور التماثل هي $x = -\frac{-3}{2(1)} = 1.5$.

كوّن جدولًا باستعمال قيم للمتغير x حول القيمة 1.5 ، ثمّ عيّن كل نقطة في المستوى الإحداثي، وصل بينها بمنحنى ممهد.

x	−1	0	1	1.5	2	3	4
$f(x)$	0	−4	−6	−6.25	−6	−4	0



لاحظ أن صفري الدالة هما 4 ,1−؛ لذا فإن حلّي المعادلة هما 4 ,1− .

تأكد

1) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا: للتدريبين **1A, 1B** انظر الهامش

A) $x^2 + 2x - 15 = 0$

B) $x^2 - 8x = -12$

بما أن عدد أصفار الدالة التربيعية في مثال 1 يساوي 2، فإن للمعادلة التربيعية حلين حقيقيين، وهذه حالة من ثلاث حالات ممكنة عند حل المعادلة التربيعية.

إرشادات للدراسة

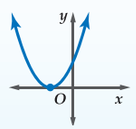
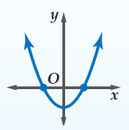
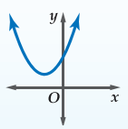
حل حقيقي واحد عندما يكون للمعادلة التربيعية حل حقيقي واحد، فهي في الحقيقة لها حلان حقيقيان لكنهما متساويان.

مفهوم أساسي حلول المعادلة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي المعادلة التربيعية يمكن أن يكون لها حل حقيقي واحد، أو حلّان حقيقيان أو ليس لها حلول حقيقية.

النموذج

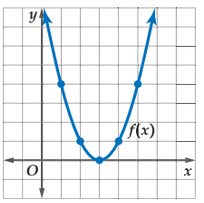
حل حقيقي واحد	حلّان حقيقيان	ليس لها حلول حقيقية
		

مثال 2 حل حقيقي واحد

حُلّ المعادلة $14 - x^2 = -6x + 23$ بيانيًّا.

المعادلة الأصلية	$14 - x^2 = -6x + 23$
بإضافة x^2 للطرفين	$14 = x^2 - 6x + 23$
بطرح 14 من الطرفين	$0 = x^2 - 6x + 9$

مثّل بيانيًّا الدالة المرافقة $f(x) = x^2 - 6x + 9$.



x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	0	1	4

لاحظ أن للدالة صفرًا واحدًا فقط؛ لذا فللمعادلة جذر حقيقي واحد هو 3 .

تأكد

2) حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا: للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات

A) $x^2 + 5 = -8x - 11$ -4

B) $12 - x^2 = 48 - 12x$ 6

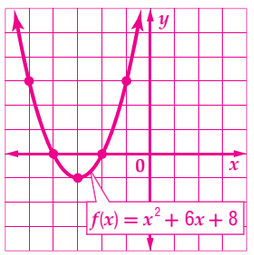
إرشادات للدراسة

تمثيل اختياري

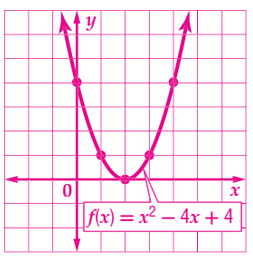
لو مثلت الدالة $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ بيانيًّا سيظهر تمثيلها البياني مختلفًا عن التمثيل البياني للدالة في مثال 2، لكن لهما الأصفار نفسها.

مثالان إضافيان

1 حُلّ المعادلة $x^2 + 6x + 8 = 0$ بيانيًّا. -4 ، -2

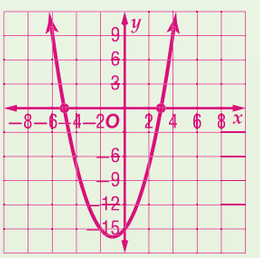


2 حُلّ المعادلة $x^2 - 4x = -4$ بيانيًّا. 2



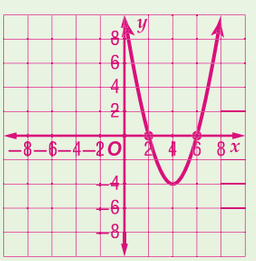
إجابات (تأكد):

(1A)



-5 , 3

(1B)



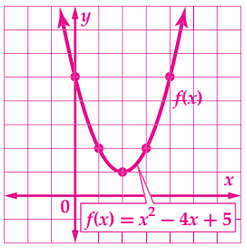
6 , 2

حل المعادلات التربيعية

مثال 3 يُوضّح كيفية حل معادلة تربيعية ليس لها حل حقيقي بيانيًّا.

مثال إضافي

3 **نظرية الإعداد:** أوجد عددين حقيقيين مجموعهما 4 ، وحاصل ضربهما 5 ، أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين.



الدالة المرافقة لا تقطع المحور x.
لذا، لا يوجد مثل هذين العددين.

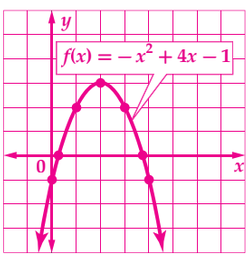
تقدير الحلول

مثال 4 يُبيّن كيفية تقدير جذور المعادلات التربيعية عندما لا يمكن ايجادها بدقة.

مثال إضافي

4 حُلّ المعادلة $-x^2+4x-1=0$ بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور، فحدّد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر.

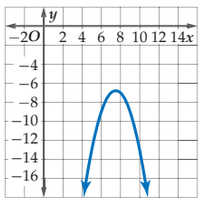
بين 0, 1 ، وبين 3, 4.



مثال 3 عدم وجود حلول حقيقية

نظرية الأعداد: أوجد عددين حقيقيين مجموعهما 15 ، وحاصل ضربهما 63 ، أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين.

افهم افترض (العدد الأول) $= x$ ، فيكون (العدد الثاني) $= 15 - x$



خطط

$x(15 - x) = 63$	حاصل الضرب يساوي 63
$15x - x^2 = 63$	خاصية التوزيع
$-x^2 + 15x - 63 = 0$	بطرح 63 من الطرفين

حل مثّل الدالة المرافقة بيانيًّا.
لاحظ من التمثيل البياني أنه لا يوجد نقطة تقاطع بين منحنى الدالة والمحور x ، مما يعني أن المعادلة الأصلية ليس لها جذور حقيقية؛ لذا لا يمكن أن يوجد عددان حقيقيان مجموعهما 15 وحاصل ضربهما 63.

تحقق حاول إيجاد حاصل ضرب عدة أزواج من الأعداد مجموع كل منها 15، هل حاصل ضرب كلٍّ منها أقل من 63 كما يبدو من خلال التمثيل البياني؟

تأكد 11, −5

3) أوجد عددين حقيقيين مجموعهما 6 وحاصل ضربهما 55−، أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين.

تقدير الحلول غالبًا ما يكون إيجاد القيم الفعلية للجذور عن طريق التمثيل البياني غير دقيق تمامًا؛ لذا نقوم بتقدير قيمة الجذر عن طريق حصره بين العددين الصحيحين اللذين يقع بينهما.

فعندما تكون قيمة الدالة موجبة لإحدى قيم n وسالبة لقيمة أخرى، فإن هنالك صفرًا حقيقيًّا واحدًا على الأقل بين هاتين القيمتين.

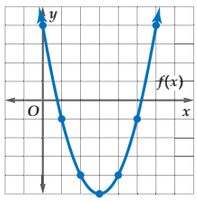
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	12	3	−6	−2	4	8	14

صفر صفر

تنبيه!
الأصفار ستجد لاحقًا أنه يمكن أن يكون للدالة عدة أصفار في فترة صغيرة.

مثال 4 تقدير الجذور

حُلّ المعادلة $x^2 - 6x + 4 = 0$ بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور، فحدّد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر.



x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	−1	−4	−5	−4	−1	4

يُبيّن الشكل المجاور والجدول أعلاه، أن المقطعين من المحور x للمنحنى يحددان أن الحل الأول يقع بين 0, 1 ، وأن الحل الثاني يقع بين 5, 6.

تأكد بين 3, 4 ، بين 2− , 3−

4) حُلّ المعادلة $x^2 - x - 10 = 0$ بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور، فحدّد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر.

التركيز في المحتوى الرياضي

حلول المعادلة التربيعية في نظام الأعداد المركبة يكون للمعادلة التربيعية التي معاملاتها أعداد حقيقية. حل حقيقي واحد وذلك عندما يقطع التمثيل البياني للمعادلة المحور x في نقطة واحدة فقط. أو حلّان حقيقيان مختلفان وذلك عندما يقطع التمثيل البياني المحور x في نقطتين مختلفتين أو حلّان مركبان وفي هذه الحالة لايقطع التمثيل البياني المحور x في أي نقطة.

يمكنك استعمال الجداول في الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات تربيعية. بعد إدخال المعادلات في الآلة الحاسبة تنقل بين قيم الجدول لتحدد الحل.

مثال 5 الحل باستعمال الجداول

حُلّ المعادلة $x^2 - 6x + 2 = 0$.

أدخل $y_1 = x^2 - 6x + 2$ في الآلة الحاسبة البيانية. استعمل نافذة جدول؛ لتحدد أين تتغير إشارة y_1 ، غيِّر ΔTbl إلى 0.1 ، وابحث ثانية عن موقع تغيير الإشارة. كرر العملية مع 0.01 ، 0.001 لتجد قيمًا أكثر دقة.

أحد الحلول 0.354 تقريبًا.

تأكد

5) حدد موقع الصفر الآخر للدالة أعلاه إلى أقرب جزء من ألف. **5.646**

يمكن حل المعادلات التربيعية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، وذلك باستعمال عملية Zero من قائمة CALC بعد إدخال المعادلة إلى الآلة.

مثال 6 من واقع الحياة الحل باستعمال الآلة الحاسبة البيانية

رياضة خطرة: قام أحد هواة الألعاب الخطرة بتحطيم الرقم القياسي لأطول فترة لطيران السقوط الحر من الطائرة. فقد طار مسافة **10 mi** من نقطة السقوط، واستغرق زمن هبوط مقداره **4 min** و **55 sec** باستعمال المظلّة. استعن بالمعطيات في الشكل المجاور وقدِّر الزمن الذي سيستغرقه اللاعب حتى يقوم بفتح المظلة (أهمل مقاومة الهواء). استعمل الدالة الآتية $h(t) = -16t^2 + h_0$ ، حيث الزمن (t) بالثواني، والارتفاع الابتدائي (h_0) بالأقدام.

نحتاج لإيجاد t عندما $h_0 = 35000$ ، و $h(t) = 500$

حُلّ $500 = -16t^2 + 35000$

مثّل الدالة المرافقة $y = -16t^2 + 34500$ باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

استعمل الخاصية **Zero**. من قائمة **CALC** لإيجاد الأصفار الموجبة للدّالة بما أن الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا ؛ لذا استعمل مفتاح الأسهم لتحديد الحد الأيسر، ثم اضغط ENTER، ثم حدّد الحد الأيمن واضغط ENTER مرتين. فيكون الصفر الموجب للدالة 46.4 تقريبًا. وهكذا سيسقط اللاعب سقوطًا حرًّا مدة 46 sec تقريبًا.

[−60, 60] scl: 5 by
[−40000, 40000] scl: 5000

تأكد

6) إذا قفز اللاعب في التمرين السابق من ارتفاع 40000 ft، فما الزمن الذي سيستغرقه حتى يفتح المظلة في أثناء السقوط الحر؟ **50 sec**

الربط مع واقع الحياة

رياضة السقوط الحر التي يمارسها كثير من الأفراد حول العالم، تعني قيام فرد أو مجموعة من الأفراد بالقفز من الطائرة، وذلك بشكل جريء للغاية، وتحتاج قدرات خاصة من إرادة وجرأة وقوة شخصية كبيرة.

تقدير الحلول

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال الجداول لتقريب حلول المعادلات التربيعية.

مثال 6 يُبيّن كيفية استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتقريب حلول المعادلة التربيعية في مسائل من واقع الحياة.

مثالان إضافيان

5 حُلّ المعادلة $x^2 + 5x - 7 = 0$.
الحلول إلى أقرب جزء من ألف.
-6.140 , 1.140

6 **جسور:** يبلغ ارتفاع جسر 1053 ft ، إذا أسقط جسم من ارتفاع 3 ft فوق الجسر، فكم من الوقت يستغرق الجسم حتى يصل سطح الماء، على فرض عدم وجود مقاومة للهواء استعمل الدالة $h(t) = -16t^2 + h_0$ ، حيث t تمثل الزمن بالثواني h_0 الارتفاع الابتدائي للجسم بالأقدام.
8 sec تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

جهاز العرض حمل صورًا لتمثيلات البيانية لدوال تربيعية على جهاز عرض، واطلب إلى الطلبة تحديد الأصفار لكل منها بعد عرضها عليهم.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون البصريون زود الطلبة بعدة تمثيلات بيانية لقطوع مكافئة، واطلب إليهم تصنيفها 3 فئات حسب عدد الحلول، وهي حل حقيقي واحد، حلان حقيقيان مختلفان، وتلك التي ليس لها حل حقيقي، ثم أسألهم أن يذكروا الحلول الحقيقية لكلٍّ منها.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 13 - 1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير قد يلاحظ بعض الطلبة في التمرين 3 أن $-x^2 - 8x - 16 = 0$ تكافئ $x^2 + 8x + 16 = 0$. فمع أن للمعادلتين الحل نفسه وهو -4 إلاّ أن الدوال الموافقة لهما، $f(x) = -x^2 - 8x - 16$، $f(x) = x^2 + 8x + 16$ مختلفة. ويمكن ملاحظة ذلك من التمثيل البياني لكلٍّ منهما، حيث يختلف اتجاه فتحة القطع.

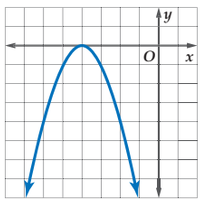
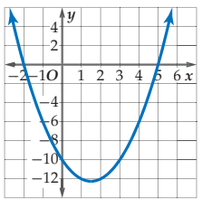
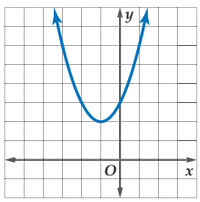
تأكد من فهمك

مثال 1
صفحة 159

استعمل التمثيل البياني المرافق لكل معادلة مما يأتي لتحديد حلولها الحقيقية (إن وجدت):

1) $x^2 + 2x + 3 = 0$ **2)** $x^2 - 3x - 10 = 0$ **3)** $-x^2 - 8x - 16 = 0$

1) لا يوجد حل حقيقي

مثال 2–5
الصفحات 161 –159

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور فحدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر. للتمارين 11 – 4 انظر ملحق الإجابات

4) $x^2 + 8x = 0$
5) $x^2 - 3x - 18 = 0$
6) $4x - x^2 + 8 = 0$
7) $-12 - 5x + 3x^2 = 0$
8) $x^2 - 6x + 4 = -8$
9) $9 - x^2 = 12$
10) $5x^2 + 10x - 4 = -6$
11) $x^2 - 20 = 2 + x$

12) نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية؛ لإيجاد عددين حقيقيين مجموعهما 2 وحاصل ضربهما 24–. 6 ، 4–

مثال 6
صفحة 161

13) فيزياء: كم يستغرق من الوقت سقوط جسم من بناية ترتفع 400 ft فوق سطح الأرض؟ استعمل الصيغة $h(x) = -16t^2 + h_0$، حيث t تمثل الزمن بالثواني، h_0 الارتفاع الابتدائي بالأقدام. 5 sec

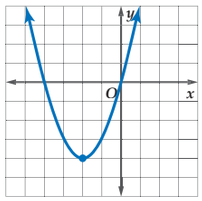
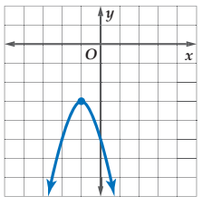
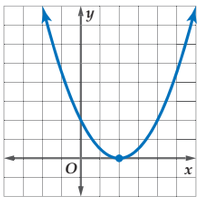
تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 159

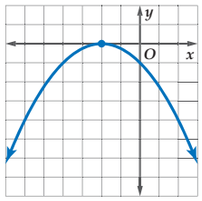
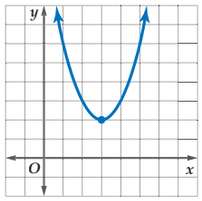
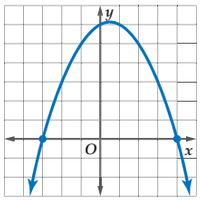
استعمل التمثيل البياني المرافق لكل معادلة مما يأتي لتحديد حلولها الحقيقية (إن وجدت):

14) $x^2 + 4x = 0$ 4–, 0 **15)** $-2x^2 - 4x - 5 = 0$ **16)** $0.5x^2 - 2x + 2 = 0$ 2

15) لا يوجد حل حقيقي
18) لا يوجد حل حقيقي
19) 3–, 4

17) $-0.25x^2 - x - 1 = 0$ 2– **18)** $x^2 - 6x + 11 = 0$ **19)** $-0.5x^2 + 0.5x + 6 = 0$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	36-14، 47، 49-61
ضمن ضمن المتوسط	35 - 15 فردي ، 43 - 37 فردي ، 47 - 45 ، 61 - 49
فوق فوق المتوسط	58-37 ، (اختياري: 61-59)

الأمثلة 2–4
الصفحتان 160 –159

26) بين 2– ,3– ، وبين 3, 4
27) بين 0 ,1– ، وبين 1, 2
28) بين 0 ,2– ، وبين 10, 11

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور فحدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر. للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات

(20) $x^2 = 5x$ — 0, 5
(21) $-2x^2 - 4x = 0$ — 2–, 0
(22) $x^2 - 5x - 14 = 0$ — 2–, 7
(23) $-x^2 + 2x + 24 = 0$ — 4–, 6
(24) $x^2 - 18x = -81$ — 9
(25) $2x^2 - 8x = -32$ — لا يوجد حل حقيقي
(26) $2x^2 - 3x - 15 = 4$
(27) $-3x^2 - 7 + 2x = -11$
(28) $-0.5x^2 + 3 = -5x - 2$
(29) $-2x + 12 = x^2 + 16$ — لا يوجد حل حقيقي

مثال 5
صفحة 161

استعمل الجداول؛ لتحديد موقع الأصفار للدوال التربيعية فيما يأتي:

(30) بين 5– ,6– ، بين 3– ,4–

x	7–	6–	5–	4–	3–	2–	1–	0
$f(x)$	8–	1–	4	4	1–	8–	22–	48–

(31) بين 0, 1 ، بين 2, 3

x	2–	1–	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	32	14	2	3–	3–	2	14	32

مثال 6
صفحة 161

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية؛ لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كل عبارة مما يأتي. أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين.

39) بين 2– ,3– ، وبين 1, 2
41) بين 0 ,1– ، وبين 4, 5
42) بين 1– ,2– ، وبين 2, 3
43) بين 3, 4 ، وبين 8, 9

(32) مجموع العددين 15– وحاصل ضربهما 54. انظر الهامش
(33) مجموع العددين 4 وحاصل ضربهما 117–. 9–, 13
(34) مجموع العددين 12 وحاصل ضربهما 84–. 5–, 17 تقريبًا
(35) مجموع العددين 13– وحاصل ضربهما 42. 7–, 6–
(36) مجموع العددين 8– وحاصل ضربهما 209–. 19–, 11

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور فحدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر. للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات

(37) $2x^2 + x = 15$ — 3–، بين 2, 3
(38) $-5x - 12 = -2x^2$ — $-\frac{3}{2}$, 4
(39) $4x^2 - 15 = -4x$
(40) $-35 = -3x - 2x^2$ — 5–، بين 3, 4
(41) $-3x^2 + 11x + 9 = 1$
(42) $13 - 4x^2 = -3x$
(43) $-0.5x^2 + 18 = -6x + 33$
(44) $0.5x^2 + 0.75 = 0.25x$ — لا يوجد حل حقيقي

(45) فيزياء: إذا تم إسقاط جسيم من مبنى عالٍ ارتفاعه 320 m، فكم سيستغرق الجسيم حتى يصل إلى سطح الأرض؟ استعمل الصيغة $h(t) = -5t^2 + h_0$، حيث t الزمن بالثواني، و h_0 الارتفاع الابتدائي بالأمتار.

(46) خراطيم المياه: ينطلق الماء من خرطوم إلى أعلى بسرعة ابتدائية 40 ft/sec استعمل الصيغة $h(t) = v_0 t - 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني، $h(t)$ الارتفاع بعد t ثانية بالأقدام، v_0 السرعة الابتدائية للإجابة عن كل مما يأتي:

a) بعد كم ثانية يعود الماء إلى مستوى فتحة الخرطوم؟ 2.5 sec
b) على فرض أن فتحة الخرطوم فوق مستوى سطح الأرض بـ 5 ft، ما أقصى ارتفاع يصل إليه الماء؟ 30 ft

الربط مع واقع الحياة
من ارتفاع 86 طابقًا (أيْ نحو 320 m) يمكن أن ترى منظرًا شاملًا رائعًا للمنطقة المحيطة بالبرج.

إجابات:

32 أفرض أن أحد العددين هو x؛
لذلك، فإن العدد الآخر هو $-15 - x$

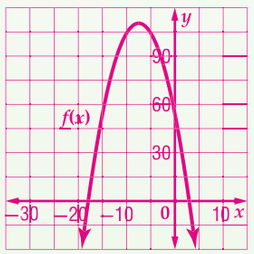
$$x(-15 - x) = -54$$
$$-15x - x = -54$$
$$-x^2 - 15x + 54 = 0$$

الدالة المرافقة هي:
$$f(x) = -x^2 - 15x + 54$$

معادلة محور التماثل هي:
$$x = -\frac{-15}{2(-1)} = -\frac{15}{2} = -7.5$$

كوّن جدول باستعمال قيم تقع حول 7.5–

x	20–	15–	10–	7.5–	5–	0	5
$f(x)$	46–	54	104	110.25	104	54	46–



إذن جذور الدالة هي 3، 18 –
إذن العددين هما 3, 18–

45
$$h_0 = 320$$
$$h(t) = -5t^2 + 320$$
$$-5t^2 + 320 = 0$$
$$t^2 = 64$$
$$t = 8 \text{ sec}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

47) اكتشف الخطأ: حاول كل من غانم وسليم أن يحدد موقع جذور المعادلة التربيعية الممثلة بالجدول أدناه. هل يُعدُّ حل أيٍّ منهما صحيحًا ؟ برّر إجابتك.

x	−4	−2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	52	26	8	−2	−4	2	16	38

غانم

الجذور بين 4, 6 لأن $f(x)$ توقفت عن التناقص وبدأت في التزايد

سليم

الجذران بين 2-, 0 لأن إشارة x تغيرت بين هاتين القيمتين

48) تحدٍّ: أوجد قيمة العدد الصحيح الموجب k بحيث يكون للمعادلة $f(x) = x^2 - 2kx + 55$ جذور عند $k-3$، $k+3$. $k = 8$

49) مسألة مفتوحة: اكتب دالة تربيعية بحيث يكون أصفارها 2− ، 8 ، ولها قيمة عظمى عند (3,125).

50) اكتب: كيف تستعمل التمثيل البياني المرافق للمعادلة التربيعية لحلها؟

تدريب على اختبار

51) مراجعة ما قيمة / قيم x التي تجعل $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{vmatrix} = 0$ ؟ **C**

A -6

B 6

C $-6, 6$

D 36

52) إذا كان العدد 4 هو أحد جذور المعادلة $x^2 + kx - 12 = 0$ ، فما قيمة k؟ **A**

A -1

B 0

C 1

D 3

مراجعة تراكمية

للتمارين 55–53 انظر الهامش

حدد ما إذا كان لكل دالة من الدوال التربيعية الآتية قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجد هذه القيمة، ثم حدد المجال والمدى لكل دالة. (درس 1-3)

53) $f(x) = -4x^2 + 8x - 16$ **54)** $f(x) = 3x^2 + 12x - 18$ **55)** $f(x) = 4x + 13 - 2x^2$

حدد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أو لا. (درس 2-5)

56) $\begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{26} & -\frac{2}{13} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ لا

57) $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ لا

58) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ نعم

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) لكل مجموعة من الأعداد الآتية:

59) 16, 48, 128 **60)** 1, 15, 21, 49 **61)** 4, 12, 28, 36

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أخبر الطلبة أنه بوسعهم حل معادلات القيمة المطلقة بالتمثيل البياني تمامًا كما فعلوا في المعادلات التربيعية. اكتب المعادلتين الآتيتين على السبورة:

$|x + 1| = 0$ $|x - 4| - 1 = 0$

واطلب إلى الطلبة استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل دوال القيمة المطلقة المناظرة لكل معادلة، ثم اطلب إليهم استعمال خاصية **الصفر** من قائمة CALCULATE؛ لتجد الحلول الحقيقية إذا كان ذلك ممكنًا، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة. 3, 4 ، 1−

تنبيه !

اكتشف الخطأ في تمرين 47 اطلب إلى الطلبة التفكير في التمثيل البياني للدالة التربيعية من حيث مقارنة سلوك التمثيل البياني قريبًا من نقطة التقاطع مع المحور y بسلوكه قريبًا من النقطة العظمى أو الصغرى.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف يفيدهم ما تعلموه اليوم عن حل المعادلات التربيعية بيانيًّا بما سيتعلمونه لاحقًا عن حل المعادلات التربيعية بالتحليل.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 3-2 , 3-1 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

53) عظمى، 12− ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \le -12\}$

54) صغرى 30− ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى = $\{y \mid y \ge -30\}$

55) عظمى، 15 ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \le 15\}$

تذكر أن التمثيل البياني للمتباينة الخطية يتكون من الحد الفاصل والمنطقة المظللة،وتقع مجموعة حل المتباينة في المنطقة المظللة من التمثيل، ويشبه تمثيل البيانات التربيعية تمثيل البيانات الخطية.

نشاط 1 التظليل داخل القطع المكافئ

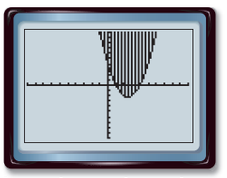
مثّل المتباينة $y \geq x^2 - 5x + 4$ في واجهة العرض القياسية.

امسح أولًا جميع الدوال من Y= list.

لتمثيل المتباينة $y \geq x^2 - 5x + 4$، أدخل المعادلة Y= list.
ثم استعمل السهم الأيسر لاختيار = ، ثم اضغط ENTER حتى يتم اختيار التظليل فوق الخط.

المفاتيح: GRAPH 4 + X,T,θ,n x^2 − 5 X,T,θ,n x^2 ENTER ENTER ▶ ▶ ◀ ◀

تقع جميع الأزواج المرتبة التي تكون قيمة y فيها أكبر أو تساوي $x^2 - 5x + 4$ ،
والتي تمثّل حل المتباينة للمنطقة التي تقع أعلى المستقيم أو عليه.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

سوف يُستعمل إجراء مشابه لتمثيل المتباينة التي يكون فيها التظليل خارج القطع المكافئ.

نشاط 2 التظليل خارج القطع المكافئ

مثّل المتباينة $y - 4 \leq x^2 - 5x$ في واجهة العرض القياسية.

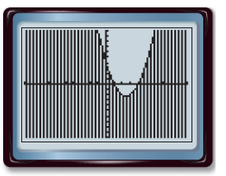
امسح أولًا جميع التمثيلات المعروضة.

المفاتيح: Y= CLEAR

ثم أعد كتابة $y - 4 \leq x^2 - 5x$ على الصورة $y \leq x^2 - 5x + 4$ ، ومثّلها بيانيًا.

المفاتيح: GRAPH 4 + X,T,θ,n x^2 − 5 X,T,θ,n x^2 ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ ◀ ◀

تقع جميع الأزواج المرتبة التي تكون قيمة y فيها أصغر من أو تساوي $x^2 - 5x + 4$ والتي تمثل حل المتباينة تحت الخط أو عليه.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تمارين:

1) قارن بين التمثيلين المبينين أعلاه.

2) مثّل المتباينة $y - 2x + 6 \geq 5x^2$ في واجهة العرض القياسية، ثم سمّ ثلاثة حلول للمتباينة. $(0, -6), (1, 1), (2, 18)$

3) مثّل المتباينة $y - 6x \leq -x^2 - 3$ في واجهة العرض القياسية، ثم سمّ ثلاثة حلول للمتباينة. $(0, -3), (1, 2), (2, 5)$

1) تمثيل المتباينة $y \geq x^2 - 5x + 4$ هو قطع مكافئ بتظليل داخلي. وتمثيل $y \leq x^2 - 5x + 4$ هو قطع مكافئ بتظليل خارجي.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة فحص التمثيل البياني للمتباينة الأولى في النشاط، ثم اطلب إليهم توضيح كيف تتشابة مجموعة حل المتباينة أو تختلف عن مجموعة حل المتباينة $y > x^2 - 5x + 4$ المرتبطة بالدالة.

حل المتباينة $y > x^2 - 5x + 4$ لا تحتوي على القيم المرتبطة بالدالة، بينما مجموعة حل المتباينة $y \geq x^2 - 5x + 4$ تحتوي عليها.

1 التركيز

الهدف

استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل المتباينات التربيعية.

المواد اللازمة

- آلة حاسبة بيانية

إرشادات تدريس

ذكّر الطلبة بأن مفتاح x^2 يؤدي إلى تربيع الكمية ولكنه لا يمكن الضغط على مفتاح x^2 مباشرة. ولإدخال x^2 5، اضغط 5 X,T,θ,n x^2

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلبة في مجموعات ثنائية أو ثلاثية ذوي قدرات متفاوتة، واطلب إليهم تنفيذ الأنشطة وحل التمرين 1 .

واسأل:

- أين تقع حلول المتتاليات؟ الأزواج المرتبة جميعها في المنطقة المظللة من التمثيل البياني، بما فيها التمثيل الخاص بالدالة المرافقة.
- ما عدد حلول كل متتالية؟ عدد لا نهائي
- هل توجد حلول للمتباينة الأولى تساوي حلول المتباينة الثانية؟ نعم، الحلول التي تمثل الدالة نفسها

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمرينين 2, 3.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 3؛ لتقويم مدى فهم الطلبة لطريقة استعمال آله الحاسبة البيانية في حل المتباينة

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3

إيجاد العامل المشترك الأكبر لمجموعة أعداد.

الدرس 3-3

كتابة معادلات تربيعية بالصورة التحليلية.

حل معادلات تربيعية بالتحليل.

ما بعد الدرس 3-3

حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- هل $f(x) = x^2 - 8x + 12$ لها قيمة عظمى أو صغرى؟ صغرى
- حُلّ المعادلة $x^2 - 8x + 12 = 0$ بيانيًّا. 2, 6
- قارن الحل لكل من
  $x^2 - 8x + 12 = 0$ ،
  $(x - 6)(x - 2) = 0$
  الحل نفسه؛ لأن المعادلتين متكافئتين.

الصورة التحليلية

مثال 1 يُبيّن كيفية كتابة معادلة تربيعية إذا علم جذراها .

3-3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل
Solving Quadratic Equations by Factoring

فيما سبق

درستُ إيجاد العامل المشترك الأكبر لمجموعة أعداد.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أكتب المعادلة التربيعية بالصورة التحليلية.
- حل معادلات تربيعية بالتحليل.

المفردات الأساسية

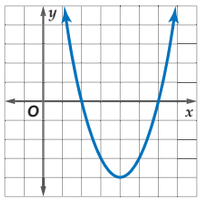
الصورة التحليلية
factored form

طريقة التوزيع بالترتيب
FOIL method

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

الصورة التحليلية للمعادلة التربيعية هي: $(x - p)(x - q) = 0$، حيث p, q مقطعا التمثيل البياني من المحور x ، ففي الشكل المجاور مقطعا المحور x هما 2 ، 6.



مقطعا المحور x هما 2 , 6

ستتعلم في هذا الدرس كيفية تحويل المعادلة التربيعية من الصورة التحليلية إلى الصورة القياسية والعكس .

الصورة القياسية	الصورة التحليلية
$x^2 - 8x + 12 = 0$	$(x - 6)(x - 2) = 0$
	العوامل

الصورة التحليلية يمكنك استعمال **طريقة التوزيع بالترتيب**؛ لإعادة كتابة معادلة تربيعية على الصورة التحليلية إلى الصورة القياسية. وتعتمد هذه الطريقة على خاصية التوزيع للضرب.

مفهوم أساسي طريقة التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيتي حد

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي حاصل ضرب مقدارين جبريين من الدرجة الأولى هو مجموع حواصل ضرب (الحدين الأولين، والحدين الطرفيين، والحدين الأوسطين، والحدين الأخيرين)

مثال

حاصل ضرب الحدين الأخيرين	حاصل ضرب الحدين الأوسطين	حاصل ضرب الطرفين	حاصل ضرب الحدين الأولين
↓	↓	↓	↓

$$(x - 6)(x - 2) = (x)(x) + (x)(-2) + (-6)(x) + (-6)(-2)$$
$$= x^2 - 2x - 6x + 12 = x^2 - 8x + 12$$

مثال 1 كتابة معادلة إذا عُلم جذراها

اكتب معادلة تربيعية جذراها 6 ، $-\frac{1}{3}$ على الصورة القياسية.

الصورة التحليلية للمعادلة التربيعية	$(x - p)(x - q) = 0$
بالتعويض عن p بـ $-\frac{1}{3}$ ، q بـ 6	$[x - (-\frac{1}{3})](x - 6) = 0$
بالتبسيط	$(x + \frac{1}{3})(x - 6) = 0$
باستعمال خاصية التوزيع	$x^2 - \frac{17}{3}x - 2 = 0$
بضرب كل طرف في 3؛ لجعل b عددًا صحيحًا	$3x^2 - 17x - 6 = 0$

تأكد

1) أوجد معادلة تربيعية جذراها $\frac{3}{4}, -5$ ، واكتبها على الصورة القياسية . $4x^2 + 17x - 15 = 0$

مصادر الدرس 3-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (167)	• تنويع التعليم، ص (167, 172)	• تنويع التعليم، ص (167, 172)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

حل المعادلات بالتحليل تساعدك طرائق التحليل الآتية في تحليل كثيرات الحدود.

ملخص مفاهيم طرائق التحليل

أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
إخراج العامل المشترك الأكبر	$a^3b^2 - nab^2 = ab^2(a^2 - n)$
الشكل العام لثلاثي الحدود	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
المربع الكامل	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

مثال 2 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر، وتجميع الحدود

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

a $16x^2 + 8x$

بتحليل كل حد: $16x^2 + 8x = 8x(2x) + 8x(1)$

بإخراج العامل المشترك الأكبر: $= 8x(2x + 1)$

b $7x^2 + 6xy^2 + 14xy + 12y^3$

التعبير الأصلي: $7x^2 + 6xy^2 + 14xy + 12y^3$

بتجميع الحدود التي لها عامل مشترك: $= (7x^2 + 14xy) + (6xy^2 + 12y^3)$

بإخراج العامل المشترك الأكبر من كل تجميع: $= 7x(x + 2y) + 6y^2(x + 2y)$

خاصية التوزيع: $= (7x + 6y^2)(x + 2y)$

تأكد

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

2A $20x^2y - 15xy^2$ — $5xy(4x - 3y)$

2B $4x^2y - 16xy - y^2$ — $y(4x^2 - 16x - y)$

2C $ab + 3cd + 4a^2b + 12acd$ — $(ab + 3cd)(1 + 4a)$

لكل ثلاثية حد تمثل مربعًا كاملًا قواعد خاصة لتحليلها، ولكي تستعمل هذه القواعد فإنه يجب أن يكون كل من الحد الأول والأخير مربعًا كاملًا، وأن يكون الحد الأوسط مساويًا لمثلي (ضعف) حاصل ضرب جذر الحد الأول في جذر الحد الأخير.

مثال 3 المربع الكامل والفرق بين مربعين

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

a $x^2 + 16x + 64$

الحد الأول مربع كامل والحد الأخير كذلك: $x^2 = (x)^2 \, , \, 64 = (8)^2$

الحد الأوسط يساوي $2ab$: $16x = 2(x)(8)$

$x^2 + 16x + 64$ ثلاثية الحد تمثل مربعًا كاملًا.

التحليل باستعمال المربع الكامل: $x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$

إرشادات للدراسة

كتابة المعادلات

الصورة التحليلية للمعادلة التربيعية $(x - p)(x - q) = 0$ تنتج معادلة واحدة لها الجذران p, q. في الحقيقة هنالك عدد غير منتهي من المعادلات التي لها الجذران نفسهما.

إرشادات للدراسة

ابدأ بإخراج العامل المشترك الأكبر (إن وجد) عند تحليل كثيرة الحدود؛ لأنه يجعل التحليل أسهل.

مراجعة المفردات

مربع كامل هو عدد له جذر تربيعي موجب كلي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب معادلة تربيعية جذراها $-5, \frac{1}{2}$ على الصورة القياسية.

إجابة ممكنة

$2x^2 + 9x - 5 = 0$

حل المعادلات بالتحليل

الأمثلة 2-4 تُبيّن كيفية تحليل كثيرات الحدود.

مثالان إضافيان

2 حلل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

a $9y^3 - 6y^2 + 3y$

$3y(3y^2 - 2y + 1)$

b $8a^2 + 10ab^2 + 4ab + 5b^3$

$(4a + 5b^2)(2a + b)$

3 حلل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

a $x^2 + 10x + 25$

$(x + 5)^2$

b $12b^8 - 27c^2$

$3(2b^4 + 3c)(2b^4 - 3c)$

تنويع التعليم دون ضمن فوق

إذا فكر الطلبة أن الخطوات في المثال 1 تعطي المعادلة الوحيدة الممكنة للجذور المعطاة،

فقم بتزويد كلًّا منهم بورقة مربعات، واطلب إليهم أن يرسموا مستوى إحداثي مع تعيين نقطتين على المحور x تمثل جذري المعادلة التربيعية، ثم اطلب إليهم أن يرسموا عدة قطوع مكافئة يمكن أن تمثل معادلات تربيعية مختلفة، وتمر بتمثيلاتها البيانية جميعها بالنقطتين المعنيتين على المحور x، وبيّن للطلبة أن هذا العرض يؤكد أن الخطوات التي أتبعت في مثال 1، تعطي واحدة من هذه المعادلات فقط التي لها هذين الجذرين.

(b $36a^2 - 64y^4$

إخراج العامل المشترك الأكبر $36a^2 - 64y^4 = 4\,(9a^2 - 16y^4)$

إعادة كتابتها على الصورة $a^2 - b^2$ $= 4[(3a)^2 - (4y^2)^2]$

تحليل الفرق بين مربعين $= 4(3a + 4y^2)(3a - 4y^2)$

تأكد

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

(3A $4x^2 - 12x + 9$ $(2x - 3)^2$ **(3B** $81x^2 - y^6$ $(9x + y^3)(9x - y^3)$

(3C $75x^2y - 27y$ $3y(5x + 3)(5x - 3)$

إرشادات للدراسة

ثلاثيات الحدود إذا أمكن إيجاد قيمة p, m فإنه يمكن تحليل ثلاثية الحدود.

يستعمل نمط خاص عند تحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $ax^2 + bx + c$. اضرب أولًا قيم a, c ثم عليك أن تجد قيمتين p, m، بحيث يكون حاصل ضربهما مساويًا ac، ومجموعهما يساوي b ففي التعبير $6x^2 + 13x - 5$ تلاحظ أن $ac = 6(-5) = -30$.

المجموع	عوامل 30−	المجموع	عوامل 30−
−29	1, −30	29	−1, 30
−13	2, −15	13	**−2, 15**
−7	3, −10	7	−3, 10
−1	5, −6	1	−5, 6

يمكن كتابة الحد الأوسط $13x$ على الصورة $-2x + 15x$ ويمكن تحليلها من خلال التجميع على النحو الآتي:

بكتابة النمط $6x^2 + 13x - 5 = 6x^2 + mx + px - 5$

$m = -2, p = 15$ $= 6x^2 - 2x + 15x - 5$

بتجميع الحدود التي لها عامل مشترك $= (6x^2 - 2x) + (15x - 5)$

بإخراج العامل المشترك الأكبر $= 2x(3x - 1) + 5(3x - 1)$

خاصية التوزيع $= (2x + 5)(3x - 1)$

إرشادات للدراسة

ثلاثيات الحدود لا يؤثر على تحليل التعبير إذا بدل موقعا p, m عند التجميع.

مثال 4 تحليل ثلاثي الحدود

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

(a $x^2 + 9x + 20$

المجموع	عوامل 20	المجموع	عوامل 20
−21	−1, −20	21	1, 20
−12	−2, −10	12	2, 10
−9	−4, −5	**9**	**4, 5**

$a = 1, c = 20$ $ac = 20$

التعبير الأصلي $x^2 + 9x + 20$

بكتابة النمط $= x^2 + mx + px + 20$

$m = 4, p = 5$ $= x^2 + 4x + 5x + 20$

بتجميع الحدود التي لها عامل مشترك $= (x^2 + 4x) + (5x + 20)$

بإخراج العامل المشترك الأكبر $= x(x + 4) + 5(x + 4)$

خاصية التوزيع $= (x + 5)(x + 4)$

تأكد

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

(4A $x^2 - 11x + 30$ $(x - 5)(x - 6)$ **(4B** $x^2 - 4x - 21$ $(x - 7)(x + 3)$

(4C $15x^2 - 8x + 1$ $(5x - 1)(3x - 1)$ **(4D** $-12x^2 + 8x + 15$ $-1(2x - 3)(6x + 5)$

مثال إضافي

4 حلل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(a $x^2 + 2x - 24$

$(x + 6)(x - 4)$

(b $2m^2 - 9m - 18$

$(2m + 3)(m - 6)$

التركيز في المحتوى الرياضي

حل المعادلات التربيعية بالتحليل يمكن حل المعادلات التربيعية بعدة طرق مختلفة، ويعتبر التحليل للعوامل طريقة سريعة، إذ بعد عملية التحليل تستعمل خاصية الضرب الصفري؛ لإيجاد الجذور المعادلة. وفي حالة صعوبة أو عدم إمكانية تحليل ثلاثي الحدود تستعمل طرق بديلة أخرى لحل المعادلة.

يُعدُّ حل المعادلة التربيعية باستعمال التحليل تطبيقًا لخاصية حاصل الضرب الصفري.

مفهوم أساسي — خاصية حاصل الضرب الصفري

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين a، b، إذا كان $ab = 0$، فإما أن تكون $b=0$ أو $a=0$ أو كلاهما يساوي صفرًا.

مثال إذا كان $(x + 3)(x - 5) = 0$، فإن $x + 3 = 0$ أو $x - 5 = 0$.

مثال 5 من واقع الحياة — حل المعادلات بالتحليل

رياضة: يعطى ارتفاع الرمح عند رميه وفق $h(t) = -16t^2 + 79t + 5$، حيث t تمثل الزمن بالثواني. كم من الوقت يستغرق حتى يعود إلى سطح الأرض؟

لنجد كم يمضي الرمح في الهواء، علينا أن نحسب t عندما يكون الارتفاع صفرًا، أي حل المعادلة $-16t^2 + 79t + 5 = 0$.

المعادلة الأصلية	$-16t^2 + 79t + 5 = 0$
$79 = (-1) + 80$, $-16(5) = -80, 80(-1) = -80$	$m = 80, p = -1$
بكتابة النمط	$-16t^2 + 80t - t + 5 = 0$
بتجميع الحدود التي لها عامل مشترك	$(-16t^2 + 80t) + (-t + 5) = 0$
بإخراج العامل المشترك الأكبر	$16t(-t + 5) + 1(-t + 5) = 0$
خاصية التوزيع	$(16t + 1)(-t + 5) = 0$
خاصية حاصل الضرب الصفري	$16t + 1 = 0$ أو $-t + 5 = 0$
بحل كل معادلة	$16t = -1$ أو $-t = -5$
	$t = -\frac{1}{16}$ أو $t = 5$

تحقق لدينا حلان:

- الحل الأول سالب، وحيث إن الزمن لن يكون سالبًا نحذف هذه الإجابة.
- الحل الثاني 5 sec، وهو معقول لبقاء الرمح في الهواء.
- ويمكن التأكد بتعويض القيمة 5 في المعادلة الأصلية.

$$-16t^2 + 79t + 5 = 0$$
$$-16(5)^2 + 79(5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-400 + 395 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

يبقى الرمح في الهواء 5 sec.

تأكد

5) تتم عملية إنزال بعض المعونات من طائرة على ارتفاع 1100 ft لتستقر على تلة ترتفع 76 ft عن الموقع المستهدف. إذا كان ارتفاع الطرد النازل بعد t من الثواني يعطى بالعلاقة $f(t) = -16t^2 + c$، حيث c ارتفاع الطائرة، فكم من الوقت يمضي حتى يلامس الطرد التلة من لحظة سقوطه؟ 8 sec

الربط مع واقع الحياة

حطمت اللاعبة الكوبية أوزليدس مينيديز (Osleidys Menedez) الرقم القياسي العالمي لرمي الرمح عام 2002 م، حيث وصلت مسافة الرمح 234 ft و 8 in.

المصدر: New York Times

حل المعادلات بالتحليل

مثال 5 يُبيّن كيفية حل مسائل حياتية باستعمال التحليل إلى العوامل لحل معادلة تربيعية .

مثال إضافي

5 **هندسة معمارية:** صُمّم مدخل إحدى البنايات على شكل قطع مكافئ معادلته $h = 9 - x^2$، حيث h تمثل الارتفاع عن سطح الأرض بالأقدام، x المسافة الأفقية عن محور التماثل لأي نقطة على القطع، أوجد المسافة الأفقية بين حافتي القوس على مستوى سطح الأرض؟ 6 ft

تنبيه!

أخطاء شائعة قد يقترح بعض الطلبة حل المعادلة في مثال 5 من خلال قسمة طرفي المعادلة على t ذكرهم بأن هذا غير صحيح لأن قيمة t ربما تساوي صفرًا، والقسمة على الصفر غير معرفة.

169 الدرس 3-3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 16 - 1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر عدة طلبة لمناقشة أعمالهم في الصف، وتوضيح إجاباتهم، واطلب إليهم التحقق من إجاباتهم بتعويضها في المعادلات الأصلية.

إجابة:

25 $48cg + 36cf - 4dg - 3df$

$=(48cg+36cf)+(-4dg-3df)$

$=12c(4g+3f)+(-d)(4g+3f)$

$=(12c-d)(4g+3f)$

تأكد من فهمك

مثال 1
صفحة 166

اكتب معادلة تربيعية بالصورة القياسية لكل زوج من الجذور الآتية:

1) $-8, 5$ $x^2+3x-40=0$
2) $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$ $8x^2-14x+3=0$
3) $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ $6x^2-11x-10=0$

الأمثلة 2, 3, 4
الصفحتان 167, 168

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

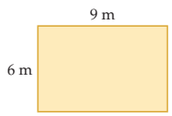
4) $35x^2-15x$ $5x(7x-3)$
5) $18x^2-3x+24x-4$ $(6x-1)(3x+4)$
6) $x^2-12x+32$ $(x-8)(x-4)$
7) $x^2-4x-21$ $(x-7)(x+3)$
8) $2x^2+7x-30$ $(2x-5)(x+6)$
9) $16x^2-16x+3$ $(4x-3)(4x-1)$
10) x^2-36 $(x+6)(x-6)$
11) $12x^2y-18xy$ $6xy(2x-3)$
12) $12x^2-2x-2$ $2(2x-1)(3x+1)$

مثال 5
صفحة 169

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

13) $x^2-9x=0$ $9, 0$
14) $x^2-3x-28=0$ $-4, 7$
15) $2x^2-24x=-72$ 6

16) **بستنة:** تريد عائشة أن تجعل مساحة سطح حديقتها مثليْ ما هي عليها الآن من خلال زيادة طولها وعرضها بالمقدار نفسه. ما الأبعاد الجديدة للحديقة؟ $12m$ ، $9m$



تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 166

اكتب معادلة تربيعية بالصورة القياسية لكل زوج من الجذور الآتية:

17) 7 $x^2-14x+49=0$
18) $-5, \frac{1}{2}$ $2x^2+9x-5=0$
19) $\frac{1}{5}, 6$ $5x^2-31x+6=0$

الأمثلة 2, 3, 4
الصفحتان 167, 168

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

20) $40a^2-32a$ $8a(5a-4)$
21) $51c^3-34c$ $17c(3c2-2)$
22) $32xy+40bx-12ay-15ab$ $(8x-3a)(4y+5b)$
23) $3x^2-12$ $3(x+2)(x-2)$
24) $15y^2-240$ $15(y+4)(y-4)$
25) $48cg+36cf-4dg-3df$ انظر الهامش
26) $x^2+13x+40$ $(x+8)(x+5)$
27) $x^2-9x-22$ $(x-11)(x+2)$
28) $3x^2+12x-36$ $3(x+6)(x-2)$
29) $15x^2+7x-2$ $(5x-1)(3x+2)$
30) $4x^2+29x+30$ $(4x+5)(x+6)$
31) $18x^2+15x-12$ $3(2x-1)(3x+4)$
32) $8x^2z^2-4xz^2-12z^2$ $4z^2(2x-3)(x+1)$
33) $9x^2-25$ $(3x+5)(3x-5)$
34) $18x^2y^2-24xy^2+36y^2$ $6y^2(3x^2-4x+6)$
35) $15x^2-84x-36$ $3(5x+2)(x-6)$
36) $12x^2+13x-14$ $(4x+7)(3x-2)$
37) $12xy^2-108x$ $12x(y+3)(y-3)$

مثال 5
صفحة 169

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

38) $x^2+4x-45=0$ $5, -9$
39) $x^2-5x-24=0$ $8, -3$
40) $x^2=121$ $11, -11$
41) $x^2+13=17$ $-2, 2$
42) $-3x^2-10x+8=0$
43) $-8x^2+46x-30=0$ $\frac{3}{4}, 5$

44) **نظرية الأعداد:** أوجد عددين صحيحين زوجيين متتاليين حاصل ضربهما 624. 24 و 26 أو -24 و -26

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

45) $5x^2=15x$ $0, 3$
46) $16x^2+36=-48x$ $-\frac{3}{2}$
47) $4x^2-144=0$ $6, -6$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	44 - 17 ، 66 ، 67 ، 68 - 79
ضمن ضمن المتوسط	43 - 17 ، 53 - 45 فردي ، 57 - 55 ، 63 - 59 فردي ، 79 - 68
فوق فوق المتوسط	76 - 57 ، (اختياري: 79 - 77)

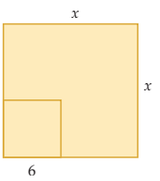
56d) إجابة ممكنة :لهما الجذور نفسها p, q وبالتالي التمثيلات البيانية يتغير شكلها تبعا لقيم a .

56e)عندما يكون للمعادلات التربيعية العوامل نفسها يكون لهم الحل نفسه مهما كانت قيمة a والتي تؤثر في شكل التمثيل البياني.

(48) $10x^2 + 25x = 15$ $-3, \frac{1}{2}$ **(49)** $27x^2 + 5 = 48x$ $\frac{5}{3}, \frac{1}{9}$ **(50)** $x^2 + 0.25x = 1.25$ $1, -\frac{5}{4}$

(51) $48x^2 - 15 = -22x$ **(52)** $3x^2 + 2x = 3.75$ $-\frac{3}{2}, \frac{5}{6}$ **(53)** $-32x^2 + 56x = 12$ $\frac{1}{4}, \frac{3}{2}$

(54) **تصميم:** قطع مربع من الشكل الموضّح المجاور، اكتب تعبيرًا لمساحة سطح الشكل المتبقي، ثم حلله. $x^2 - 6^2, (x + 6)(x - 6)$



(55) **ثقافة مالية:** بعد دراسة السوق، قرر صاحب مصنع اعتماد دالة الربح $P(x) = -16x^2 + 368x - 2035$، حيث تمثل x سعر المنتج، $p(x)$ ربح المصنع. حدد مجال سعر المنتج كي لا يتعرض المصنع للخسارة.
بين BD 9.25 و BD 13.75

(56) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين اعتمد المعادلة $a(x - p)(x - q) = 0$.

a) تمثيل بياني: مثِّل الدالة المرافقة إذا كان $a=1, p=2, q=-3$. انظر الهامش

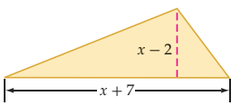
b) تحليل: ما حل المعادلة؟ 2 ، -3

c) تمثيل بياني: مثِّل الدوال المرافقة إذا كان $a = 4, -3, \frac{1}{2}$ على التمثيل البياني نفسه. انظر الهامش

d) تعبير لفظي: ما أوجه الشبه والاختلاف بين التمثيلات البيانية في الفرع c .

e) تعبير لفظي: ما النتيجة التي يمكن أن تتوصل إليها حول العلاقة بين الصورة التحليلية للمعادلة التربيعية وحلها؟

(57) **هندسة:** أوجد قاعدة المثلث في الشكل المجاور، إذا كانت مساحة سطحه $26\,cm^2$. 13 cm



(58) **كرة قدم:** عند ركل الكرة في الهواء يمكن أن يمثل ارتفاعها بالأمتار عن سطح الأرض بِـ $h(t) = -4.9t^2 + 14.7t$، والمسافة الأفقية التي تقطعها بِـ $d(t) = 16t$ ، حيث t تمثل الزمن بالثواني. أجب عما يأتي:

a) ما الزمن الذي تمضيه الكرة في الهواء من لحظة ركلها؟ 3 sec

b) ما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بسطح الأرض؟ (إرشاد: أهمل مقاومة الهواء). 48 m

c) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة؟ 11.025 m

الربط مع واقع الحياة

إن أفضل توقيت لركل الكرة عندما تكون سرعتها 80% من السرعة القصوى. حيث يمكن للمحترف أن يركلها بسرعة تتراوح بين 32m/s و 35m/s.

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

(59) $18a - 24ay + 48b - 64by$ **(60)** $3x^2 + 2xy + 10y + 15x$

61 $6a^2b^2 - 12ab^2 - 18b^3$ انظر الهامش **(62)** $12a^2 - 18ab + 30ab^3$

(63) $5ax^2 - 2by^2 - 5ay^2 + 2bx^2$ **(64)** $12c^2x + 4d^2y - 3d^2x - 16c^2y$

مسائل مهارات التفكير العليا

(65) **تحد:** حُلّ المعادلة $3x^6 - 39x^4 + 108x^2 = 0$ باستعمال التحليل. $0, 3, -3, 2, -2$

(66) **مسألة مفتوحة:** اختر عددين صحيحين، ثم اكتب معادلة بالصورة القياسية يكون جذراها العددين الذين تم اختيارهما، ما التغير الذي يحدث على المعادلة إذا غيرت إشارة جذريها؟

66) إجابة ممكنة: 6 ، 3 ، $0 = 18 + 9x - x^2$.
-3 ، -6، $0 = 18 + 9x + x^2$ ، تتغير إشارة معامل x

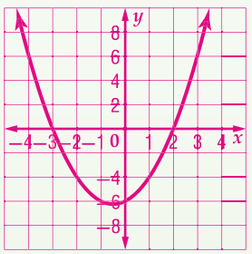
تنبيه!

أكتشف الخطأ في التمرين 67 ذكّر الطلبة أنه عند طرح كثيرة حدود من أخرى يُطرح كل حد فيها من الحد المناظر له.

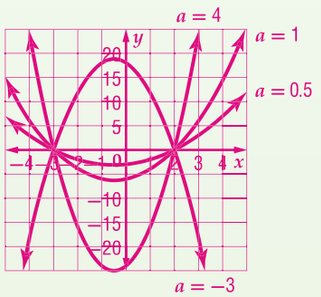
تمثيلات متعددة في التمرين 56 يستعمل الطلبة الجبر والتمثيل البياني؛ لربط عوامل المعادلة التربيعية بحلها.

إجابات:

(56a



(56c



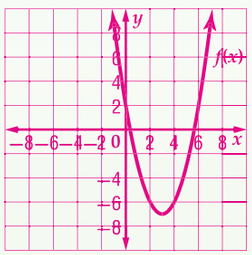
61 $6a^2b^2 - 12ab^2 - 18b^3$
$= 6b^2(a^2 - 2a - 3b)$

4 التقويم

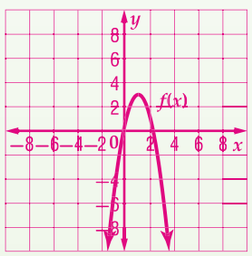
التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة توضيح خاصية حاصل الضرب الصفري، واطلب إليهم مناقشة صحتها وكيفية استعمالها في إيجاد جذور المعادلة التربيعية.

إجابات:

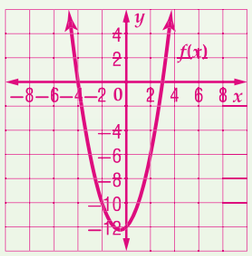
74)



75)



76)



67) اكتشف الخطأ: يحل كلٌّ من منير، وعبد اللطيف المعادلة $-12x^2 + 5x + 2 = 0$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

منير	عبد اللطيف
$-12x^2 + 5x + 2 = 0$	$-12x^2 + 5x + 2 = 0$
$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$	$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$
$4x(-3x + 2) + (-3x + 2) = 0$	$4x(-3x + 2) - (3x + 2) = 0$
$(4x + 1)(-3x + 2) = 0$	$(4x - 1)(3x + 2) = 0$
$x = -\frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{3}$	$x = \frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{3}$

67) منير؛ إجابة ممكنة: عبداللطيف لم يحصل على كثيرات حدود متساوية داخل الأقواس؛ لتكون عاملًا مشتركًا.

68) صحيحة دائمًا، إجابة ممكنة: إذا شكّل ثلاثي الحدود مربعًا كاملًا، فإن معامل x يجب أن يكون من مضاعفات العدد 2، أي عددًا زوجيًا.

68) تبرير: حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا.

"إذا كان b عددًا فرديًا في المعادلة التربيعية المكتوبة بالصورة القياسية، والتي فيها a, b, c أعداد صحيحة، فلن تمثل هذه المعادلة مربعًا كاملًا".

تدريب على اختبار معياري

69) أي المعادلات التربيعية الآتية لها الجذران $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$؟ **D**

A $5x^2 - 5x - 2 = 0$

B $5x^2 - 5x + 1 = 0$

C $6x^2 + 5x - 1 = 0$

D $6x^2 - 5x + 1 = 0$

70) ما جذرا المعادلة $12x^2 - 4x = 5$؟ **B**

A $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}$

B $-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$

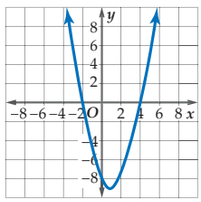
C $\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}$

D $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$

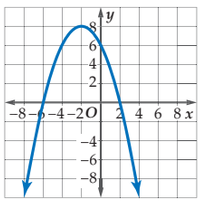
مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني المرافق لكل معادلة مما يأتي لإيجاد حلولها. (الدرس 2-3)

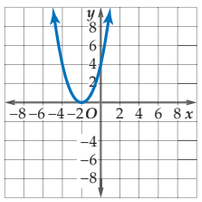
71) $x^2 - 2x - 8 = 0$ $-2, 4$



72) $x^2 + 4x = 12$ $-6, 2$



73) $x^2 + 4x + 4 = 0$ -2



مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًا: (الدرس 3-1) للتمارين 76–74 انظر الهامش

74) $f(x) = x^2 - 6x + 2$

75) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

76) $f(x) = (x - 3)(x + 4)$

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كلًّا مما يأتي:

77) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{15}$ $5\sqrt{3}$

78) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}$ 16

79) $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ 18

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اعرض على الطلبة التمرين الآتي:

إذا كان $-3, 6$ جذري المعادلة التربيعية، فما معادلة محور التماثل؟

$x = \frac{3}{2}$

172 الفصل 3 الدوال التربيعية

اختبار منتصف الفصل

1) أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ لـ $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$، ثمّ مثّلها بيانيًّا. (الدرس 3-1) انظر الهامش

2) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية تكون معادلة محور التماثل لها $x = 5$ ؟ (الدرس 3-1) B

A $f(x) = x^2 - 5x + 3$ **C** $f(x) = x^2 + 10x - 3$

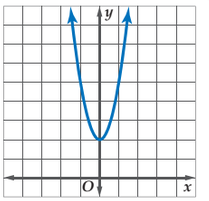
B $f(x) = x^2 - 10x + 7$ **D** $f(x) = x^2 + 5x + 2$

3) حدّد ما إذا كان لـ $f(x) = 5 - x^2 + 2x$ قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجدها، ثم حدّد مجال الدالة ومداها. (الدرس 3-1)
عظمى، 6 ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية المدى = $\{y \mid y \le 6\}$

4) **كرة طائرة:** رمى لاعب كرة من ارتفاع 4ft إلى أعلى بسرعة مقدارها 18ft/sec. إذا كان الارتفاع $h(t)$ للكرة بعد زمن t ثانية من رميها معطى بـ $h(t) = -16t^2 + 18t + 4$. فأوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة، وزمن بلوغها هذا الارتفاع. (الدرس 3-1)
0.5625 sec ، 9.0625 ft

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y للتمثيل البياني الآتي: (الدرس 3-1)

5)



(0, 2), $x = 0$

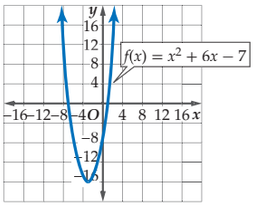
6) حُلّ المعادلة $3x^2 - 17x + 5 = 0$ بيانيًّا، وإذا لم تتمكن من إيجاد القيمة الفعلية للجذور، فحدد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل جذر. (الدرس 3-2) بين 0, 1 ، وَبين 5, 6

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية؛ لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا من الموقفين الآتيين، أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين. (الدرس 3-2)

7) مجموع العددين 15، وحاصل ضربهما 36 3 , 12

8) مجموع العددين 7، وحاصل ضربهما 15 انظر الهامش

9) **اختيار من متعدد:** بالاعتماد على التمثيل البياني أدناه لـ $f(x) = x^2 + 6x - 7$، أي مما يأتي حل للمعادلة $x^2 + 6x - 7 = 0$ ؟ (الدرس 3-2) J



F $-1, 6$ **G** $1, -6$

H $-1, 7$ **J** $1, -7$

10) **كرة قدم:** إذا ضرب اللاعب كرة القدم إلى أعلى بسرعة مقدارها 10m/sec، فما الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصطدم بسطح الأرض (أهمل ارتفاع قدم اللاعب عن أرض الملعب)؟
إرشاد: استعمل الدالة الآتية: $h(t) = v_0 t - 5t^2$، حيث $h(t)$ هي ارتفاع الكرة بالأمتار، و v_0 هي السرعة الابتدائية بالمتر لكل ثانية، و t هو الزمن بالثواني. (الدرس 3-2) 4 sec

حُلّ كل معادلة من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

11) $x^2 - x - 12 = 0$ $-3, 4$

12) $3x^2 + 7x + 2 = 0$ $-2, -\frac{1}{3}$

13) $x^2 - 2x - 15 = 0$ $-3, 5$

14) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ $-3, \frac{1}{2}$

15) اكتب معادلة تربيعية بالصورة القياسية يكون جذراها $-6, \frac{1}{4}$. (الدرس 3-3) $0 = 4x^2 + 23x - 6$

إعادة التصميم: استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين 16, 17: (الدرس 3-3) انظر الهامش

طلب سامي أخذ صورة له قياسها 10dc×12dc. ولكن المصور وجد صعوبة في تنفيذ هذا، فقرّر إنقاص كل من بُعدي الصورة بمقدار x ، فأصبحت مساحة سطح الصورة الجديدة 63dc^2.

16) اكتب معادلة تربيعية تمثل مساحة سطح الصورة الجديدة.

17) أوجد بُعدي الصورة الجديدة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 3-1, 3-2, 3-3	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص(142)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، واطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

المعالجة

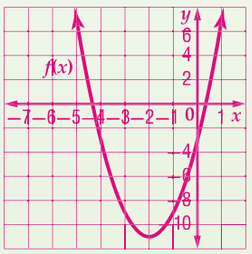
بناء على نتائج اختبار منتصف الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلبة.

مطوياتك متابعة المطويات

شجّع الطلبة قبل حلّ أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 3-1 إلى 3-3 .

إجابات:

1) مقطع المحور y يساوي -3 ، معادلة محور التماثل $x = -2$ ، الإحداثي x للرأس -2 .



8) ليكن x العدد الأول، فيكون $7 - x$ العدد الثاني. لذا،
$x(7-x) = 15, -x^2+7x-15=0$
ولأن التمثيل البياني للدالة المرافقة لا يقطع المحور x فليس للمعادلة جذور حقيقية. أي لا يوجد مثل هذين العددين.

16) $(10 - x)(12 - x) = 63$

17) $7\text{dc} \times 9\text{dc}$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

تبسيط الجذور التربيعية .

الدرس 3-4

إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.

إجراء العمليات على الأعداد المركبة .

ما بعد الدرس 3-4

حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- عند أي نقاط من التمثيل البياني على المستوى الإحداثي تكون $y = 0$؟
عند نقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور x.
- كيف ترتبط الدالة $y = x^2 + 2x + 4$ بالمعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$ ؟
حلا المعادلة هما قيمتا x التي تجعل الدالة تساوي صفرًا .
- الجملة "حافظت الدالة على إشارتها" تعني عدم وجود حل للمعادلة، فسر ذلك. إجابة ممكنة: إذا قطع التمثيل البياني للدالة المحور x ، فإن قيمة الدالة تتغير من الموجب إلى السالب أو العكس.

الأعداد التخيلية البحتة

مثال 1 يُبيّن كيفية تبسيط تعابير تتضمن جذورًا تربيعية لأعداد سالبة.

الأعداد المركبة
Complex Numbers

فيما سبق

درستُ تبسيط الجذور التربيعية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجري العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات الأساسية

الوحدة التخيلية imaginary unit

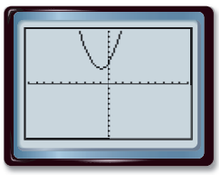
العدد التخيلي البحت pure imaginary number

العدد المركب complex number

عددان مركبان مترافقان complex conjugates

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



بدراسة الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لا يقطع المحور x ؛ لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية. هل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟

للتأكد من ذلك، استعمل أداة Solver في الآلة الحاسبة البيانية من قائمة Math ، أدخل المعادلة واختر $x = 2$ تخمينًا للحل.

اضغط ENTER ALPHA فيظهر على الشاشة كلمة Error ، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيلية.

الأعداد التخيلية البحتة قادت المعادلات منها المعادلة السابقة الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، وتعرف **الوحدة التخيلية** i على أنها الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن $i^2 = -1$ ، أو $i = \sqrt{-1}$

وتسمى الأعداد على الصورة $6i, -2i, i\sqrt{3}$ **أعدادًا تخيلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن $bi = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط كلًّا مما يأتي :

a) $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} \\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \\ &= 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2 \cdot 6} \\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} \\ &= 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي :

1A) $\sqrt{-18}$ $3i\sqrt{2}$

1B) $\sqrt{-125}$ $5i\sqrt{5}$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلًّا من الخاصيتين التجميعية والإبدالية لعملية الضرب، ويُبيّن الجدول أدناه بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (175)	• تنويع التعليم، ص (175)	• تنويع التعليم، ص (175)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

مثال 2 ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

a $-5i \cdot 3i$

	$-5i \cdot 3i = -15i^2$
بالضرب	
$i^2 = -1$	$= -15(-1)$
بالتبسيط.	$= 15$

b $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

$i = \sqrt{-1}$	$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$
بالضرب	$= i^2\sqrt{90}$
بالتبسيط	$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$
بالضرب	$= -3\sqrt{10}$

تأكد

أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

2A $3i \cdot 4i$ -12 **2B** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ $-4\sqrt{15}$ **2C** i^{31} $-i$

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر التربيعي راجع خصائص الجذر التربيعي التي درستها سابقًا .

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حُلّ المعادلة $4x^2 + 256 = 0$.

المعادلة الأصلية	$4x^2 + 256 = 0$
بطرح 256 من الطرفين	$4x^2 = -256$
بقسمة كلا الطرفين على 4	$x^2 = -64$
خاصية الجذر التربيعي	$x = \pm\sqrt{-64}$
$\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$	$x = \pm 8i$

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي :

3A $4x^2 + 100 = 0$ $\pm 5i$ **3B** $x^2 + 4 = 0$ $\pm 2i$

العمليات على الأعداد المركبة يتكون التعبير $3i + 2$، حيث 2 عدد حقيقي، $3i$ عدد تخيلي بحت، من حدين غير متشابهين، ولا يمكن جمعهما. ويسمى هذا النوع من التعابير **بالعدد المركب**.

مفهوم أساسي الأعداد المركبة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$، حيث a ، b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، وb الجزء التخيلي.

أمثلة $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

الأعداد التخيلية البحتة

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد ناتج ضرب أعداد تخيلية بحتة.

مثال 3 يُبيّن كيفية حل معادلة تربيعية حلولها أعداد تخيلية بحتة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 بسط كلًّا مما يأتي :

a $\sqrt{-28}$ $2i\sqrt{7}$

b $\sqrt{-32}$ $4i\sqrt{2}$

2 أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

a $-3i \cdot 2i$ 6

b $\sqrt{-12} \cdot \sqrt{-2}$ $-2\sqrt{6}$

3 حُلّ المعادلة:

$5y^2 + 20 = 0$ $y = \pm 2i$

تنبيه !

تجنب الأخطاء تأكد من استيعاب الطلبة لضرورة وضع الرمز $\pm$ أمام رمز الجذر عند أخذ الجذر التربيعي لطرفي معادلة .

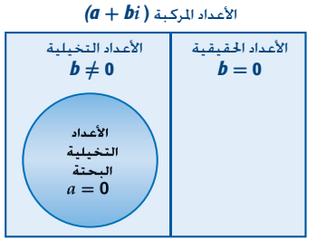
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا احتاج بعض الطلبة إلى مساعدة في تذكر الخصائص الرياضية للوحدة التخيلية i ،

فقم بتوجيههم لكتابة أنشودة عن الوحدة التخيلية i ، والقيم المتكررة لقواها. وقد يقوم الطلبة بتضمين الأنشودة بالمفردتين حقيقي، تخيلي؛ بهدف المساعدة على تذكر الخصائص الرياضية للوحدة التخيلية i.

يوضح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ ، فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا.
- إذا كانت $b \neq 0$ ، فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا.
- إذا كانت $a = 0$ ، فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان، والجزآن التخيليان ، أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c$ ، $b = d$.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتي x , y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

ساوِ الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر، وكذلك الجزأين التخيليين.

	الجزآن الحقيقيان		الجزآن التخيليان
	$3x - 5 = 7$		$y - 3 = 6$
بإضافة 5 لكلا الطرفين	$3x = 12$	بإضافة 3 لكلا الطرفين	$y = 9$
بقسمة كلا الطرفين على 3	$x = 4$		

تأكد

4) أوجد قيمتي x ، y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

$x = -1 , y = -9$

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

على الرغم من أن الأعداد الحقيقية هي أيضًا أعداد مركبة، إلا أن التعبير "عدد مركب" يشير عادة إلى الأعداد غير الحقيقية فقط.

ويمكن استعمال كل من الخاصية الإبدالية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمّع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

خاصيتي الإبدال و التجميع: $(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$

بالتبسيط: $= 7 - 3i$

b) $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

خاصيتي الإبدال والتجميع: $(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$

بالتبسيط: $= 1 - 2i$

تأكد

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

5A) $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ $-1 - 2i$

5B) $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$ $5 + 4i$

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد يمكن تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمقاومة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

العمليات على الأعداد المركبة

مثال 4 يُبيّن كيفية استعمال تساوي عددين مركبين في إيجاد قيم مجهولة.

مثال 5 يُبيّن كيفية جمع الأعداد المركبة وطرحها.

مثالان إضافيان

4 أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة :

$2x + yi = -14 - 3i$ صحيحة.

$x = -7, y = -3$

5 أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(3 + 5i) + (2 - 4i)$ $5 + i$

b) $(4 - 6i) - (3 - 7i)$ $1 + i$

تنبيه!

تجنب الأخطاء أكد للطلبة أنه يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى كل من الجزأين الحقيقيين، والتخيليين لهما.

مثال 6 من واقع الحياة — ضرب الأعداد المركبة

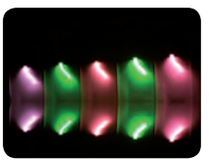
كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمقاومة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $(2 + 4i)$ Amp، ومقاومتها $(9 - 3i)\ \Omega$.

الصيغة الرياضية	$V = C \cdot I$
	$= (2 + 4i) \cdot (9 - 3i)$
باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب	$= 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i)$
بالضرب	$= 18 - 6i + 36i - 12i^2$
$i^2 = -1$	$= 18 + 30i - 12(-1)$
بالجمع	$= 30 + 30i$

فرق الجهد هو $(30 + 30i)$ V.

تأكد

6) أوجد فرق الجهد لتيار متردد شدته $(2 - 4i)$ Amp، ومقاومته $(3 - 2i)\ \Omega$. $(-2 - 16i)$V



الربط مع واقع الحياة

مصابيح الزينة هي من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

المصدر:
Popular Science

يسمّى العددان $a - bi$, $a + bi$ **عددين مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

مثال 7 — قسمة الأعداد المركبة

بسّط كلًّا مما يأتي :

a) $\frac{2i}{3 + 6i}$

$3 - 6i$، $3 + 6i$ عددان مركبان مترافقان	$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \cdot \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$
بالضرب	$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$
$i^2 = -1$	$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$
بالتبسيط	$= \frac{6i + 12}{45}$
بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$	$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$

b) $\frac{4 + i}{5i}$

بالضرب في $\frac{i}{i}$	$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$
بالضرب	$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$
$i^2 = -1$	$= \frac{4i - 1}{-5}$
بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$	$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي :

7A) $\frac{-2i}{3 + 5i}$ $-\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$

7B) $\frac{2 + i}{1 - i}$ $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

العمليات على الأعداد المركبة

المثالان 6 , 7 يبيّنان كيفية ضرب الأعداد المركبة، وقسمتها.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اكتب مثالًا على ضرب عددين مركبين على السبورة مستعملًا اللون الأحمر للجزء التخيلي واللون الأزرق للجزء الحقيقي في كلا العددين. وفي أثناء حلك للمثال، حافظ على استعمال اللونين؛ لتبين الجزء التخيلي والجزء الحقيقي للأعداد المركبة.

مثالان إضافيان

6 **كهرباء:** يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C ، والمقاومة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $(1 + 4i)$ Amp، ومقاومتها $(3 - 6i)\ \Omega$. $(27 + 6i)$V

7 بسّط كلًّا مما يأتي :

a) $\frac{5i}{3 + 2i}$ $\frac{10}{13} + \frac{15}{13}i$

b) $\frac{5 + i}{2i}$ $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

التركيز على المحتوى الرياضي

الأعداد المركبة العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$، حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية. اذا كانت $b = 0$، فإن العدد المركب عدد حقيقي، وإذا كانت $b \neq 0$، فإن العدد المركب يكون تخيليًا، وإذا كانت $a = 0$، فإن العدد المركب عدد تخيلي بحت. ومن هنا فإن مجموعتي الأعداد التخيلية البحتة والأعداد الحقيقية مجموعتين جزئيتين من مجموعة الأعداد المركبة، وبالتالي فإن كل عدد حقيقي هو عدد مركب، وكل عدد تخيلي بحت هو عدد مركب أيضًا.

3 تدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 17-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تأكد من فهمك

المثالان 1 , 2 الصفحتان 174, 175

بسّط كلًّا مما يأتي :

(1) $9i\sqrt{-81}$

(2) $4i\sqrt{2}\ \sqrt{-32}$

(3) $12\,(4i)(-3i)$

(4) $-72\sqrt{3}\ 3\sqrt{-24}\cdot 2\sqrt{-18}$

(5) $1\ i^{40}$

(6) $-i\ i^{63}$

مثال 3 صفحة 175

حُلّ كل معادلة مما يأتي :

(7) $4x^2+32=0$ $\pm 2i\sqrt{2}$

(8) $2x^2+24=0$ $\pm 2i\sqrt{3}$

مثال 4 صفحة 176

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي a , b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

(9) $3a+(4b+2)i=9-6i$ $3, -2$

(10) $4b-5+(-a-3)i=7-8i$ $5, 3$

الأمثلة 5 - 7 الصفحتان 176, 177

بسّط كلًّا مما يأتي :

(11) $(-1+5i)+(-2-3i)$ $-3+2i$

(12) $(7+4i)-(1+2i)$ $6+2i$

(13) $(6-8i)(9+2i)$ $70-60i$

(14) $(3+2i)(-2+4i)$ $-14+8i$

(15) $\dfrac{3-i}{4+2i}$ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

(16) $\dfrac{2+i}{5+6i}$ $\dfrac{16}{61}-\dfrac{7}{61}i$

مثال 5 صفحة 176

(17) **كهرباء:** تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي Amp $(5-3i)$، وفي الجزء الآخر من الدائرة Amp $(7+9i)$. اجمع هذين العددين المركبين؛ لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

Amp $(12+6i)$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 الصفحتان 174, 175

بسّط كلًّا مما يأتي :

(18) $11i\ \sqrt{-121}$

(19) $13i\ \sqrt{-169}$

(20) $10i\ \sqrt{-100}$

(21) $9i\ \sqrt{-81}$

(22) $(-3i)(-7i)(2i)$ $-42i$

(23) $4i(-6i)^2$ $-144i$

(24) $-i\ i^{11}$

(25) $i\ i^{25}$

(26) $(-3+i)+(-4-i)$ -7

(27) $(11-8i)-(2-8i)$ 9

(28) $(1+2i)(1-2i)$ 5

(29) $(3+5i)(5-3i)$ $30+16i$

(30) $(4-i)(6-6i)$ $18-30i$

(31) $\dfrac{2i}{1+i}$ $1+i$

(32) $\dfrac{5}{2+4i}$ $\dfrac{1}{2}-i$

(33) $\dfrac{5+i}{3i}$ $\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}i$

مثال 3 صفحة 175

حُلّ كل معادلة مما يأتي :

(34) $4x^2+4=0$ $\pm i$

(35) $3x^2+48=0$ $\pm 4i$

(36) $2x^2+10=0$ $\pm i\sqrt{5}$

(37) $6x^2+108=0$ $\pm 3i\sqrt{2}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	51-18 ، 57 ، 59-71
ضمن ضمن المتوسط	49-19 فردي ، 52-71
فوق فوق المتوسط	68-52 ، (اختياري: 69-71)

مثال 4
صفحة 176

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي x، y الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

(38) $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$ $2, -3$

(39) $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$ $-\frac{11}{2}, -3$

(40) $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$ $\frac{4}{3}, 4$

(41) $(2x - 4y)i + x + 5y = 15 + 58i$ $25, -2$

بسّط كلًّا مما يأتي :

الأمثلة 7 - 5
الصفحتان 176, 177

(42) $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$ $-4\sqrt{15}$

(43) $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$ $4i$

(44) i^{41} i

(45) $8(4 - 6i) + (4 + 6i)$

(46) $(8 - 5i) - (7 + i)$ $1 - 6i$

(47) $(-6 - i)(3 - 3i)$ $-21 + 15i$

(48) $(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i)$ $11 + 23i$

(49) $\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}}$ $\frac{7}{9} - \frac{4i\sqrt{2}}{9}$

(50) $\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$ $\frac{1}{7} - \frac{4\sqrt{3}}{7}i$

مثال 5
صفحة 176

(51) كهرباء: تبلغ المقاومة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $\Omega\ (7 + 8i)$، وفي الجزء الآخر منها $\Omega\ (13 + 4i)$. اجمع هذين العددين المركّبين ؛ لإيجاد المقاومة الكلية في الدائرة الكهربائية. $(20 + 4i)\Omega$

كهرباء: استعمل الصيغة $V = C \cdot I$، حيث V فرق الجهد، C شدة التيار، I المقاومة في حل التمرينين 53 , 52 :

(52) إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $\text{Amp}\ (3 - 6i)$، والمقاومة $\Omega\ (5 + i)$ ، فكم يكون فرق الجهد ؟ $(21 + 27i)\text{V}$

(53) إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $\text{V}\ (20 - 12i)$، والمقاومة $\Omega\ (6 - 4i)$ ، فكم تكون شدة التيار؟ $\left(\frac{42}{13} + \frac{2}{13}i\right)\ \text{Amp}$

الربط مع واقع الحياة

الكهرباء التي نستعملها هي أحد مصادر الطاقة التي يتم توليدها أيضًا من الوقود والمفاعلات النووية ومصادر طبيعية أخرى.

المصدر:
Energy Information Administration

(54) أوجد ناتج جمع $ix^2 - (4 + 5i)x + 7$ مع $3x^2 + (2 + 6i)x - 8i$. $(3 + i)x^2 + (-2 + i)x - 8i + 7$

(55) بسّط التعبير $[(2 + i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6]$ $(5 - 3i)x^2 + (-5 + 4i)x + i + 11$

(56) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا التمرين جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حد بعيد المستوى الحقيقي، وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور x والأعداد التخيلية البحتة على المحور y. للفروع a–c انظر الهامش

a) تمثيل بياني: مثّل العدد $3 + 4i$ بيانيًّا في المستوى المركب برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(3, 4)$، وسمِّ تلك النقطة A.

b) تمثيل بياني: مثّل العدد $-2 - 5i$ بيانيًّا في المستوى المركب برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-5, -2)$، وسمِّها B.

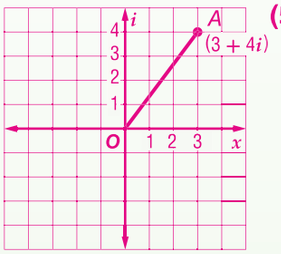
c) تمثيل بياني: إذا كانت النقطتان A, B ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C .

d) تحليل: ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A, B, C؟ $i - 1$، النقطة C تمثل ناتج جمع العددين المركبين الممثلين بالنقطتين A , B

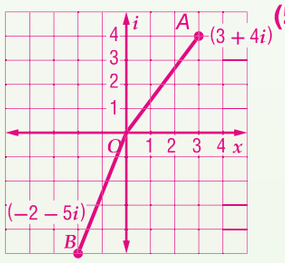
تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 56 التمثيل البياني في المستوى المركب، والتحليل المنطقي؛ لتمثيل الأعداد المركبة.

إجابات:

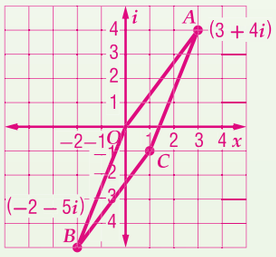
(56a)



(56b)



(56c)



الدرس 3-4 الأعداد المركبة 179

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة كتابة عددين مركبين ناتج ضربهما 10 على ورقة، وتسليمك إياها قبل مغادرتك غرفة الصف.

إجابة ممكنة: $1+3i,\ 1-3i$

تنبيه!

اكتشف الخطأ بما أن i^2 تساوي دائمًا -1، فأعد كتابة i^3 في التمرين 57 على الصورة $i(i^2)$.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-4 , 3-3 بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 3.

مسائل مهارات التفكير العليا

57) اكتشف الخطأ: قامت كل من صفاء ومنال بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$، أيهما كانت إجابتها صحيحة؟

برِّر إجابتك: صفاء؛ لأن $i^3 = -i$ ، وليس -1

صفاء	منال
$24i^3 = -24i$	$24i^3 = -24$

58) تحدٍّ: بسّط العدد المركب $(1+2i)^3$. $-11-2i$

59) تبرير: حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا . برِّر إجابتك.

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي".

60) مسألة مفتوحة: اكتب عددين مركّبين يكون حاصل ضربهما يساوي 20

إجابة ممكنة: $(4+2i)(4-2i)$

61) اكتب: وضح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية، وكيف تحدد ما إذا كان للمعادلة التربيعية حلول مركبة فقط أو لا ؟

59) إجابة ممكنة: صحيحة دائمًا، فالعدد الحقيقي x يمكن أن يمثل بالعدد المركب $x+0i$، والعدد التخيلي البحت yi يمكن أن يمثل بالعدد المركب $0+yi$.

61) لبعض المعادلات التربيعية حلول مركبة ولا يمكن حلها بالأعداد الحقيقية فقط. وذلك إذا لم يقطع التمثيل البياني للدالة المرافقة للمعادلة المحور x ، فإن للمعادلة التربيعية حلولًا مركبة فقط .

تدريب على اختبار معياري

62) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5+4i)-(x+yi)=(-1-3i)$ صحيحية؟ **A**

A $x=6, y=7$ **B** $x=4, y=i$ **C** $x=4, y=i$ **D** $x=4, y=7$

63) ما قيمة $(3+6i)^2$ ؟ **A**

A $-27+36i$ **B** $9+36$ **C** $9-36$ **D** $36-27i$

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي مستعملًا التحليل: (الدرس 3-3)

64) $2x^2+7x=15$ $-5, \frac{3}{2}$ **65)** $4x^2-12=22x$ $-\frac{1}{2}, 6$ **66)** $6x^2=5x+4$ $-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية؛ لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا مما يأتي. أو بيّن أنه لا يوجد مثل هذين العددين : (الدرس 3-2)

67) مجموعهما 3−، وحاصل ضربهما 40 − . $-8, 5$ **68)** مجموعهما 21 −، وحاصل ضربهما 108 $-12, -9$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قيمة b^2-4ac في كلٍّ مما يأتي:

69) $a=5, b=6, c=2$ -4 **70)** $a=-2, b=-7, c=3$ 73 **71)** $a=-5, b=-8, c=-10$ -136

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-5

حل معادلات تربيعية بإكمال المربع .

الدرس 3-5

حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.

استعمال المميز؛ لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

ما بعد الدرس 3-5

حل متباينات تربيعية باستعمال كل من التمثيل البياني والطرق الجبرية .

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة" لماذا؟" .

اسأل:

- ما تأثير زيادة قيمة t في المعادلة على قيمة h ؟ تزداد ثم تعود لتتناقص
- ما شكل التمثيل البياني للمعادلة؟ قطع مكافئ
- ما اتجاه فتحة القطع المكافئ؟ إلى أسفل

القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميز
The Quadratic Formula and the Discriminant

فيما سبق

درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز؛ لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المفردات الأساسية

القانون العام
Quadratic Formula
المميز
discriminant

www.obeikaneducation.com

لماذا ؟

أُطلق سهم نحو هدف على سطح الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$h = -4.9t^2 + 117t + 42$

حيث h ارتفاع السهم بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$.

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام تمكنت سابقًا من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي، وهنالك قانون يمكن استعماله لحل أية معادلة تربيعية، ويمكن اشتقاق هذا القانون من خلال حل معادلة تربيعية على الصورة القياسية.

	الحالة العامة	مثال
معادلة تربيعية على الصورة القياسية	$ax^2 + bx + c = 0$	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
بقسمة كلا الطرفين على a	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
بطرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
بإكمال المربع	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
بتحليل الطرف الأيسر	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	$(x+2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
بتبسيط الطرف الأيمن	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	$(x+2)^2 = \frac{7}{2}$
خاصية الجذر التربيعي	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$
بطرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
بالتبسيط	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

تعرف المعادلة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

مصادر الدرس 3-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (182)	• تنويع التعليم، ص (182, 185)	• تنويع التعليم، ص (185)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين، ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

مثال 1 يُبيّن كيفية حل معادلة تربيعية باستعمال القانون العام.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات" تأكد "بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حُلّ المعادلة $x^2 - 8x = 33$ باستعمال القانون العام. $11 , -3$

التركيز في المحتوى الرياضي

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

يمكن حل أي معادلة تربيعية مكتوبة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$، بتعويض القيم a, b, c في القانون العام، وذلك لإيجاد قيمتي x. والقانون العام هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} , a \neq 0$$

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

قانون القانون العام لحل المعادلة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

مثال 1 جذران حقيقيان (نسبيان)

حُلّ المعادلة $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

أولًا: اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدّد قيم كل من a, b, c .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^2 - 10x = 11 \quad \rightarrow \quad 1x^2 - 10x - 11 = 0$$

ثم عوّض هذه القيم في القانون العام.

القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن a بالعدد 1، b بالعدد -10، c بالعدد -11: $= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$

بالضرب: $= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$

بالتبسيط: $= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$

$\sqrt{144} = 12$: $= \frac{10 \pm 12}{2}$

بكتابتها معادلتين: $x = \frac{10 + 12}{2}$ أو $x = \frac{10 - 12}{2}$

بالتبسيط: $= 11$ أو $= -1$

وعليه يكون الحلان هما 11، -1.

تحقق عوّض كلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 10x = 11$	$x^2 - 10x = 11$
$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$	$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$
$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$	$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$
$11 = 11$ ✓	$11 = 11$ ✓

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(1A) $x^2 + 6x = 16$ $2 , -8$

(1B) $2x^2 + 25x + 33 = 0$ $-11 , -\frac{3}{2}$

عندما تساوي قيمة ما تحت الجذر 0 في القانون العام، يكون للمعادلة التربيعية جذر حقيقي (نسبي) واحد .

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا عوض بعض الطلبة القيم في القانون العام بشكل غير صحيح،

فاطلب إليهم كتابة قيم a, b, c على هامش الورقة بعد كتابة المعادلة التربيعية على الصورة القياسية قبل التعويض في القانون العام.

تاريخ الرياضيات

براهام جوبتا
(598-668 م) عالم رياضي هندي، وهو أول من أوجد حلًا عامًا للمعادلة التربيعية التي على الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمى الآن بالقانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال 2 جذر حقيقي (نسبي) واحد

حُلّ المعادلة $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدّد قيم كل من a, b, c، ثم عوّض هذه القيم في القانون العام .

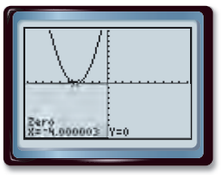
القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن a بالعدد 1 ، b بالعدد 8 ، c بالعدد 16 $= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$

بالتبسيط $= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$

$\sqrt{0} = 0$ $= \frac{-8}{2} = -4$

الحل هو -4 .



تحقق يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة وجود حل واحد عند $x = -4$.

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(2A) $x^2 - 16x + 64 = 0$ 8 **(2B)** $x^2 + 34x + 289 = 0$ -17

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها على الصورة الجذرية .

مثال 3 جذران حقيقيان (غير نسبيين)

حُلّ المعادلة $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

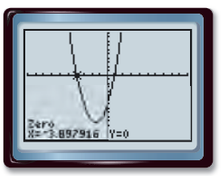
القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن a بالعدد 2 ، b بالعدد 6 ، c بالعدد -7 $= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$

بالتبسيط $= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$

$\sqrt{92} = \sqrt{4\,(23)} = 2\sqrt{23}$ $= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$

الحلان التقريبيان هما 0.9 ، -3.9



تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = 2x^2 + 6x - 7$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية Zero في الآلة الحاسبة البيانية للحصول على القيمتين التقريبيتين لصفري الدالة المرتبطة وهما: 0.9 ، -3.9

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(3A) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ **(3B)** $x^2 - 8x + 9 = 0$ $4 \pm \sqrt{7}$

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

مثال 2 يُبيّن كيفية حل معادلة تربيعية عندما تكون قيمة ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا.

مثال 3 يُبيّن كيفية التعبير عن الجذور غير النسبية للمعادلة التربيعية من خلال كتابتها على الصورة الجذرية.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة قد يلاحظ بعض الطلبة أنه يمكن حل المعادلتين في المثالين 2,3 بالتحليل إلى العوامل، فقبل أن تبدأ بمثال 3، أكد على أن العديد من المعادلات التربيعية لا يمكن حلها بسهولة باستعمال التحليل إلى العوامل، وأن المعادلة التربيعية في المثال 3 هي واحدة من هذه المعادلات. أكد كذلك أن القانون العام يوفر طريقة لإيجاد جذري أي معادلة تربيعية.

مثالان إضافيان

2 حُلّ المعادلة $x^2 - 34x + 289 = 0$ باستعمال القانون العام. 17

3 حُلّ المعادلة $x^2 - 6x + 2 = 0$ باستعمال القانون العام. $3 \pm \sqrt{7}$ أو 0.4 , 5.6 تقريبًا

الجذور المركبة

مثال 4 يُبيّن طريقة حل معادلة تربيعية عندما يكون ناتج ما تحت الجذر في القانون العام سالبًا.

مثال إضافي

4 حُلّ المعادلة $x^2 + 13 = 6x$ باستعمال القانون العام. $3 \pm 2i$

تنبيه!

تجنب الأخطاء ذكّر الطلبة بأن المترافقين المركبين هما عددان مركبان على الصورة $a + bi$, $a - bi$.

التركيز في المحتوى الرياضي

الجذور يمكن استعمال قيمة المميز؛ لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية ونوعها. إذا كان لديك معادلة تربيعية معاملات حددوها أعدادًا نسبية، وكان المميز مربعًا كاملاً غير الصفر، فإن للمعادلة جذرين حقيقين نسبيين مختلفين، وإذا كان المميز صفرًا، فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًّا نسبيًا واحدًا. وإذا كان المميز موجبًا، وليس مربعًا كاملاً، فإن جذري المعادلة حقيقيان غير نسبيين، وإذا كان سالبًا، فإن للمعادلة جذرين مركبين.

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة تذكّر أن تكتب حلك على الصورة $a + bi$ ، وتسمى هذه الصورة الصورة القياسية للعدد المركب.

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

مثال 4 الجذور المركبة

حُلّ المعادلة $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

القانون العام
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

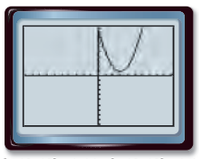
بالتعويض عن a بالعدد 1 ، b بالعدد -6 ، c بالعدد 10
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

بالتبسيط
$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,\sqrt{(-1)} = 2i$
$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$

بالتبسيط
$$= 3 \pm i$$

الحلان هما $3 - i$ ، $3 + i$ عددان مركبان مترافقان.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تحقق يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة أن الحلّين هما عددان مركبان، ولكن لا يساعدك التمثيل البياني على إيجادهما . وللتحقق من صحة الحلين المركبين، عوّض بهما في المعادلة الأصلية.

المعادلة الأصلية
$$x^2 - 6x = -10$$

$x = 3 + i$
$$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$$

بإيجاد مفكوك $(3 + i)^2$ ، وخاصية التوزيع
$$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$$

بالتبسيط
$$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$$

$i^2 = -1$
$$-9 - 1 = -10 \quad \checkmark$$

المعادلة الأصلية
$$x^2 - 6x = -10$$

$x = 3 - i$
$$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$$

بإيجاد مفكوك $(3 - i)^2$ ، وخاصية التوزيع
$$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$$

بالتبسيط
$$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$$

$i^2 = -1$
$$-9 - 1 = -10 \quad \checkmark$$

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(4A) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ $\frac{-5 \pm i\sqrt{23}}{6}$

(4B) $x^2 - 4x = -13$ $2 \pm 3i$

إرشادات للدراسة

الجذور تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا، وهي قيم x التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور x.

الجذور والمميز في المعادلة التربيعية لاحظ العلاقة بين قيمة التعبير تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. يسمى التعبير $b^2 - 4ac$ **بالمميّز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{المميّز}$$

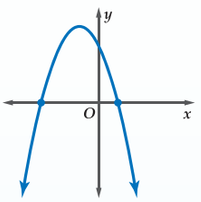
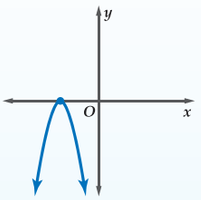
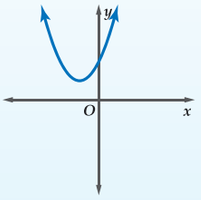
يمكن استعمال قيمة المميّز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية، ونوعها، ويلخص الجدول في الصفحة الآتية الأنواع الممكنة للجذور . ويمكن أن يستعمل المميّز للتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية.

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

المميز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a,b,c أعداد حقيقية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي (نسبي) واحد	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 5 وصف الجذور

أوجد قيمة المميّز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، ثم حدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

a) $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7, b = -11, c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب؛ لذا يوجد جذران مركبان.

b) $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1, b = 22, c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي صفرًا؛ لذا يوجد جذر حقيقي واحد.

تأكد

أوجد قيمة المميّز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، ثم حدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

5A) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$ **5B)** $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

5A) 44 ، جذران حقيقيان غير نسبيين

5B) 289 ، جذران حقيقيان نسبيان

الجذور والمميّز

مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد قيمة المميّز لمعادلة تربيعية، واستعماله؛ لتحديد عدد جذور المعادلة وأنواعها.

مثال إضافي

5 أوجد قيمة المميّز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين، ثم حدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

a) $x^2 + 3x + 5 = 0$

11-، جذران مركبان

b) $x^2 - 11x + 10 = 0$

81، جذران نسبيان

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة قدم للطلبة معادلة تربيعية، واطلب إليهم أن يستعملوا المميز؛ لتحديد عدد جذورها وأنواعها.وزودهم بنظام تقني له ثلاثة خيارات:

A للمعادلة جذران مركبان

B للمعادلة جذر حقيقي واحد

C للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

ثم اطلب إليهم اختيار أحدها.

تنويع التعليم

توسّع اكتب المعادلة $x^3 - 8 = 0$ على السبورة، ووضح للطلبة أن هذه معادلة تكعيبية، واطلب إليهم استعمال ما تعلموه في هذا الدرس لحل هذه المعادلة.

وذكّرهم بأن المعادلة التربيعية (من الدرجة الثانية) لها حلان على الأكثر، بينما يكون للمعادلة التكعيبية (من الدرجة الثالثة) ثلاثة حلول على الأكثر.

فوق ضمن

$x^3 - 8 = 0$

$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$x - 2 = 0$ أو $(x^2 + 2x + 4) = 0$

$x = 2$ أو $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$x = -1 \pm i\sqrt{3}$

حلول المعادلة هي $-1 - i\sqrt{3}$, $-1 + i\sqrt{3}$,2.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي إن الجدول في صفحة 166 من كتاب الطالب يقدّم إمكانية استعمال كل طريقة عند حل المعادلات التربيعية، فقد لا يتمكن بعض الطلبة من تحليل كل معادلة وتحديد الطريقة الأنسب لحلها وتوفير الوقت.

إرشادات للدراسة

دراسة الملاحظات
قد ترغب في تدوين جدول الطرائق المجاور في دفتر ملاحظاتك أو في مطويتك لتكون مرجعًا لك عند الدراسة.

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، ويلخص الجدول أدناه تلك الطرائق.

ملخص المفهوم حل المعادلات التربيعية

أضف إلى مطويتك

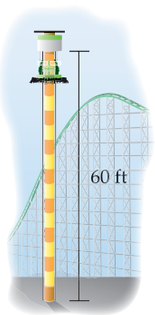
الطريقة	إمكانية استعمالها	متى تستعمل
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الفعلي، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا، أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 7x = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة في صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
القانون العام	دائمًا	عندما لايمكن استعمال بقية الطرائق السابقة أو عندما يكون من الصعب استعمالها. مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تأكد من فهمك

الأمثلة 1-4
الصفحات 184 -182

حُلّ كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $x^2 + 12x - 9 = 0$ انظر الهامش
2) $x^2 + 8x + 5 = 0$ $-4 \pm \sqrt{11}$
3) $4x^2 - 5x - 2 = 0$
4) $9x^2 + 6x - 4 = 0$
5) $10x^2 - 3 = 13x$ $1.5, -0.2$
6) $22x = 12x^2 + 6$ $1.5, \frac{1}{3}$
7) $-3x^2 + 4x = -8$ $\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{3}$
8) $x^2 + 3 = -6x + 8$ $-3 \pm \sqrt{14}$
9) **ترفيه:** تمثل حركة لعبة ترفيهية بالدالة $h = -16t^2 - 64t + 60$، حيث h الارتفاع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. إذا علمت أنها ترتفع إلى قمة البرج، ثم تهوي بسرعة تصل إلى 80 ft\sec، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع 60 ft إلى 0 ft؟ 0.78 sec تقريبًا



أجب عن الفرعين a، b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميّز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

10) $3x^2 + 8x + 2 = 0$
11) $2x^2 - 6x + 9 = 0$
12) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$
13) $5x^2 + 2x + 4 = 0$

إجابة:

1) القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 1, b = 12, c = -9$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$

بالضرب

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 36}}{2}$$

بالتبسيط

$$= \frac{12 \pm \sqrt{180}}{2}$$

$\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

$$= \frac{-12 \pm 6\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-12 - 6\sqrt{5}}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-12 + 6\sqrt{5}}{2}$$

بالتبسيط

$$x = -6 - 3\sqrt{5} \quad \text{أو} \quad x = -6 + 3\sqrt{5}$$

10a) 40
10b) جذران غير نسبيين
11a) −36
11b) جذران مركبان
12a) 0 مثال 5 صفحة 185
12b) جذر واحد نسبي
13a) −76
13b) جذران مركبان

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4
الصفحات 184 - 182

حُلّ كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

14) $x^2 + 45x = -200$ — $-5, -40$

15) $4x^2 - 6 = -12x$ — $\frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$

16) $5x^2 - 9 = 11x$ — $\frac{11 \pm \sqrt{301}}{10}$

17) $12x^2 + 9x - 2 = -17$ — $\frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$

18) سباحة: يقفز متسابق فوق منصة ارتفاعها 10 m عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عن المنصة، ويمكن تقدير ارتفاع المتسابق عن سطح الماء h بالأمتار بعد t ثانية بالمعادلة $h = -4.9t^2 + 3t + 10$.

a) حدد كلًّا من المجال والمدى المقبولين لهذه الدالة .

18a) المجال $= \{t \mid 0 \le t \le 2\}$،
المدى $= \{h \mid 0 \le h \le 10\}$

b) متى يصل المتسابق إلى سطح الماء؟ **1.77 sec تقريبًا**

مثال 5
صفحة 185

أجب عن الفروع a–c لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميّز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) حُلّ المعادلة باستعمال القانون العام. **للتمارين 30-20 انظر ملحق الإجابات**

19) $2x^2 + 3x - 3 = 0$

20) $3x^2 - 3x + 8 = 0$

21) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

22) $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

23) $x^2 - 6x = -9$

24) $x^2 + 2x - 4 = -9$

25) $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

26) $5x^2 + 8x = 0$

27) $8x^2 = -2x + 1$

28) $4x - 3 = -12x^2$

29) $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

30) $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

الربط مع واقع الحياة

في إطار الجهود العالمية لمكافحة التدخين، تقوم وزارة الصحة بالمملكة بحملات توعوية لمكافحة التدخين؛ لما له من أضرار جسيمة على الفرد والمجتمع، حيث أكدت بعض الإحصائيات أن عدد المتوفين من جراء آفة التدخين يقدَّر بخمسة ملايين شخص سنويًا.

31) التدخين: تبذل دول العالم جهودًا مكثَّفة للتوعية بأخطار التدخين، أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أُجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام، كانت نتائجها التقريبية كما في الجدول المجاور. ويمكن تمثيل العدد التقريبي للمصابين بالمعادلة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000.

العام	عدد الإصابات لكل 100000
2000	92
2002	90
2004	85
2010	?
2015	?

a) احسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامي 2010, 2015 . **60.31, 25.06**

b) استعمل القانون العام؛ لإيجاد قيمة x عندما $y = 50$. **11.7 تقريبًا**

c) اعتمادًا على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

32) نظرية الأعداد: يُعطى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية $1, 2, 3, \ldots, n$ بالقانون $S = \frac{1}{2} n(n+1)$. كم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا بالعدد 1 مجموعها يساوي 666؟ **36**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 13-1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

19a) $b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(-3)$
$a = 2, b = 3, c = -3$
$= 9 + 24 = 33$ بالتبسيط

19b) بما أن المميّز موجب، فإنه يوجد جذران حقيقيان مختلفان

19c) القانون العام
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$
$= \frac{-3 \pm \sqrt{32 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$
$a = 2, b = 3, c = -3$
بالضرب
$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24}}{4}$
بالتبسيط
$= \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$

31c) 2017، إجابة ممكنة: لا؛ لأن معدل الإصابة بسرطان الرئة لن يصبح صفرًا إلا إذا وجد علاج ناجع لهذا المرض، وهذا لا يمكن التنبؤ به.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	30-14 ، 33 ، 46-35
ضمن ضمن المتوسط	31-15 فردي ، 33-32 ، 46-35
فوق فوق المتوسط	44-31 ، (اختياري: 45, 46)

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلبة في التمرين 33 ، أن المعادلة التربيعية يجب أن تكتب على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ قبل إيجاد المميز.

4 التقويم

بطاقة خروج اعمل نسخًا عدة لخمس معادلات تربيعية مختلفة، وأعط معادلة لكل طالب واطلب إليه حلها باستعمال القانون العام وتسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم ، الواردة في الدرس 3 – 5 بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 3 .

إجابات:

35) إجابة ممكنة: أحيانًا، يكون للمعادلة جذرين غير نسبيين عندما لا يكون مميزها مربعًا كاملًا.

36) إجابة ممكنة:

- التحليل إلى عوامل:

$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$

$x - 5 = 0 \longrightarrow x = 5$

$x + 3 = 0 \longrightarrow x = -3$

- إكمال المربع:

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x^2 - 2x = 15$

$x^2 - 2x + 1 = 15 + 1$

$(x-1)^2 = 16$

$x - 1 = \pm 4$ $\quad x = 5$ أو $x = -3$

- القانون العام:

$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$

$= \frac{2 \pm 8}{2} \longrightarrow x = 5$ أو $x = -3$

واستمع إلى آراء الطلبة حول الطريقة التي يفضلونها

إرشادات للدراسة

الثوابت الثوابت a, b, c يمكن أن تكون أعدادًا صحيحة، أو غير نسبية، أو مركبة.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **اكتشف الخطأ:** حددت كل من هدى ولولوة عدد حلول المعادلة $3x^2 - 5x = 7$. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟

هدى

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

وبما أن المميّز موجب، فللمعادلة حلان حقيقيان.

لولوة

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

وبما أن المميّز سالب، فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

34) **تحدّ:** حُلّ المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستعمال القانون العام. $\frac{1 \pm 2i}{2}$

35) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك: " إذا كان مميّز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين".

36) **اكتب:** صِف ثلاث طرائق مختلفة لحل المعادلة $x^2 - 2x - 15 = 0$. وأيها تفضل؟ ولماذا؟ انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

37) قدرت شركة ربحها الشهري P بـ: $P = -8x^2 + 165x - 100$ ، حيث x سعر بيع القطعة الواحدة من المنتج. أي مما يأتي يُعد تقديرًا لأعلى سعر للقطعة الواحدة من المنتج بحيث لا تتعرض الشركة للخسارة؟ **B**

A BD 10 **B** BD 20 **C** BD 30 **D** BD 40

38) أي القيم الآتية ستكون مساوية تقريبًا لإحدى قيمتي x في المعادلة $2x^2 - 5x - 9 = 0$ ؟ **D**

A −1.12 **B** 1.54 **C** 2.63 **D** 3.71

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل: (الدرس 3-3)

39) $4x^2 + 8x = 0$ **0 , −2**

40) $x^2 - 5x = 14$ **−2 , 7**

41) $3x^2 + 10 = 17x$ $\frac{2}{3}$ **, 5**

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 4-3)

42) i^{26} **−1**

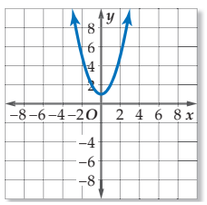
43) $\sqrt{-16}$ **4i**

44) $(4\sqrt{-9}) \cdot (2\sqrt{-25})$ **−120**

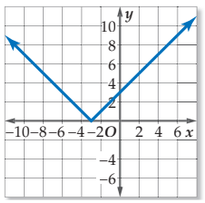
مراجعة المتطلبات السابقة

اكتب معادلة الدالة الممثلة بيانيًّا أدناه في كلٍّ مما يأتي:

45) $y = x^2 + 1$



46) $y = |x + 3|$



مجموع الجذرين وحاصل ضربهما
Sums and Products of Roots

الهدف
كتابة المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

إذا علمت جذري معادلة تربيعية فإنه يمكنك كتابتها باستعمال مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

للمعادلة التربيعية $x^2 + 5x - 24 = 0$ جذران هما 3 , -8
ومجموعهما -5 ، وحاصل ضربهما -24.

-5 هو النظير الجمعي لمعامل x

$x^2 + 5x - 24 = 0$

-24 هو الحد الثابت

مجموع الجذرين: $3 + (-8) = -5$

حاصل ضرب الجذرين: $3(-8) = -24$

ويمكن تعميم ذلك لأي معادلة تربيعية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية. إذا كان جذرا المعادلة التربيعية r_1 , r_2 فإن:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مجموع الجذرين

مجموع الجذرين: $r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتبسيط: $= \frac{-2b + 0}{2a} = -\frac{b}{a}$

مجموع الجذرين يساوي $-\frac{b}{a}$

حاصل ضرب الجذرين

بضرب الجذرين: $r_1 \cdot r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالضرب: $= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$

الخاصية التوزيعية: $= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$

بالتبسيط: $= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{c}{a}$

مما سبق يمكن التوصل للقانون الآتي الذي يستعمل لكتابة أي معادلة تربيعية علم جذراها.

قانون — **مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما**

إذا كان r_1 , r_2 هما جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ، فإن

$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$, $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$.

أضف إلى مطويتك

1 التركيز

الهدف كتابة المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

إرشادات التدريس

يجب أن يتقن الطلبة تحليل ثلاثي الحدود قبل بدء هذا المعمل.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية من ذوي قدرات متفاوتة؛ لتنفيذ النشاطين.

واسأل:

- عند جمع جذري معادلة تربيعية، ماذا يحصل للجذرين التربيعيين الموجودين في كلٍ منهما؟
  يمكن جمع أو طرح الجذرين المتشابهين، ويكون ناتج جمعهما صفرًا.
- ماذا يحصل للجذرين التربيعيين عند ضرب جذري المعادلة؟ عند ضرب تعبيرين مترافقين، فإن حاصل ضربهما يكون الفرق بين مربعين، وبالتالي يكون الناتج بلا جذور.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 1–10

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 4 ؛ لتقويم مدى قدرة الطلبة على تكوين معادلة تربيعية علم جذراها.

من المحسوس إلى المجرد

يتطلب التمرينان 9, 10 أن يفهم الطلبة كيفية تحديد قيم a, b, c من مجموع الجذرين وحاصل ضربهما.

اسأل:

- إذا علمت مجموع الجذرين، فماذا تستنتج؟ استنتج القيمة $(-\frac{b}{a})$ والتي تمثل سالب ناتج قسمة معامل الحد من الدرجة الأولى على معامل الحد من الدرجة الثانية في المعادلة التربيعية.
- إذا علمت حاصل ضرب الجذرين، فماذا تستنتج؟ استنتج القيمة $\frac{c}{a}$ والتي تمثل ناتج قسمة الحد الثابت على معامل الحد من الدرجة الثانية في المعادلة التربيعية.

النشاط 1 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها -7 , 2.

الخطوة 1 أوجد مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = 2 + (-7)$$
$$= -5$$

الخطوة أوجد حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = 2(-7)$$
$$= -14$$

الخطوة 3 اكتب المعادلة

بما أن $-14 = \frac{c}{a}$, $-5 = -\frac{b}{a}$ ، وإذا كانت $a = 1$، فإن $b = -5$, $c = -14$.

لذا فالمعادلة $x^2 + 5x - 14 = 0$ تحقق المطلوب.

النشاط 2 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{12}{5}$, $\frac{3}{4}$.

الخطوة 1 أوجد مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= \frac{15}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{33}{20}$$

الخطوة 2 أوجد حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= -\frac{36}{20}$$

الخطوة 3 اكتب المعادلة.

بما أن $-\frac{36}{20} = \frac{c}{a}$, $-\frac{33}{20} = -\frac{b}{a}$ ، وإذا كانت $a = 20$، فإن $b = 33$, $c = -36$.

لذا فالمعادلة $20x^2 + 33x - 36 = 0$ تحقق المطلوب.

تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العددان المعطيان في كل مما يأتي:

1) $-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ 2) $-7, \frac{2}{3}$ 3) $\pm\frac{2}{5}$ 4) $4 \pm \sqrt{3}$

5) $1 \pm \sqrt{6}$ 6) $\frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7}$ 7) $7 \pm 3i$ 8) $\sqrt{5} \pm 8i$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلًّا مما يأتي:

9) مجموع جذريها 4 ، وحاصل ضربهما $\frac{13}{12}$.

10) مجموع جذريها $\frac{1}{6}$، وحاصل ضربهما $\frac{5}{21}$.

1) $32x^2 + 4x - 15 = 0$

2) $3x^2 + 19x - 14 = 0$

3) $25x^2 - 4 = 0$

4) $x^2 - 8x + 13 = 0$

5) $x^2 - 2x - 5 = 0$

6) $49x^2 + 28x - 41 = 0$

7) $x^2 - 14x + 58 = 0$

8) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 69 = 0$

9) $12x^2 - 48x + 13 = 0$

10) $42x^2 - 7x + 10 = 0$

190 الفصل 3 الدوال التربيعية

صيغة الرأس للدّالة التربيعية هي $y = a(x - h)^2 + k$، وتغيير قيم a, h, k ينتج عنه قطوع مكافئة مختلفة في عائلة الدّوال التربيعية، والدّالة الأم لعائلة القطوع المكافئة هي $y = x^2$.

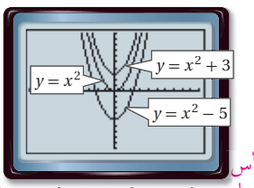
يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية TI–83/84 لتحليل الأثر الناتج من تغيير كل قيمة من a, h, k.

النشاط 1

مثّل مجموعة المعادلات الآتية على الشاشة نفسها بالحجم القياسي للعرض.

$y = x^2, y = x^2 + 3, y = x^2 - 5$

ثم صف أوجه التشابه والاختلاف بين تمثيلاتها البيانية.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

للتمثيلات البيانية الثلاثة الشكل نفسه، وجميعها مفتوحة إلى أعلى، ورأس كل تمثيل بياني منها يقع على المحور y، لكنها تختلف رأسيًا في مواقعها.

يُبيّن النشاط 1 كيف أن تغيير قيمة k في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$ يحرّك أو يزيح المنحنى رأسيًّا على طول المحور y. فإذا كانت $k > 0$، فإن المنحنى يتحرك $|k|$ وحدة إلى أعلى، وإذا كانت $k < 0$، فإن المنحنى يتحرك $|k|$ وحدة إلى أسفل.

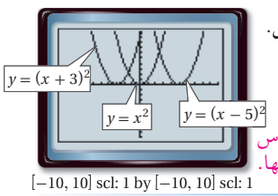
بيّن كيف يؤثر تغيير قيمة h في منحنى $y = (x - h)^2$ مقارنة بمنحنى $y = x^2$.

النشاط 2

مثّل مجموعة المعادلات الآتية على الشاشة نفسها بالحجم القياسي للعرض.

$y = x^2, y = (x + 3)^2, y = (x - 5)^2$

ثم صف أوجه التشابه والاختلاف بين تمثيلاتها البيانية.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

للتمثيلات البيانية الثلاثة الشكل نفسه، وجميعها مفتوحة إلى أعلى، ورأس كل تمثيل بياني منها يقع على المحور x، لكنها تختلف أفقيًّا في مواقعها.

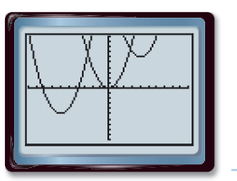
يُبيّن النشاط 2 أن تغيير قيمة h في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$ يحرك المنحنى أفقيًّا على طول المحور x. فإذا كانت $h > 0$، فإن المنحنى يتحرك إلى اليمين $|k|$وحدة، وإذا كانت $h < 0$، فإن المنحنى يتحرك إلى اليسار $|k|$ وحدة.

النشاط 3

مثّل مجموعة المعادلات الآتية على الشاشة نفسها بالحجم القياسي للعرض.

$y = x^2, y = (x + 6)^2 - 5, y = (x - 4)^2 + 6$

ثم صف أوجه التشابه والاختلاف بين المنحنيات.



1 التركيز

الهدف

استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتقصي شكل القطع المكافئ .

المواد اللازمة

- آلة حاسبة بيانية.

إرشادات التدريس

يمكن استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ للتأكيد على أن رأس المقطع المكافئ يقع على محور التماثل، والطريقة الأفضل لذلك تكون بالتحكم بالنافذة لجعل المحور x في الفترة $[-9.4, 9.4]$، وذلك باستعمال خاصية TRACE.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة، ثم اطلب إليهم تنفيذ الأنشطة 1–4 وحل التمارين 1–15.

- اطلب إلى الطلبة وصف الثوابت الثلاثة (a, h, k) في المعادلة المكتوبة بصيغة الرأس $y = a(x - h)^2 + k$.

  إجابة ممكنة:

  a معامل الحد التربيعي $(x)^2$

  h الإحداثي x لرأس القطع

  k الإحداثي y لرأس القطع

- قبل مناقشة الأمثلة اطلب إلى الطلبة عمل تخمينات حول تأثيرات قيم كل من الثوابت a, h, k على التمثيل البياني للقطع المكافئ.

- بعد مناقشة نشاط 4 اطلب إلى الطلبة مقارنة تخميناتهم في البداية بالنتائج التي توصلوا إليها .

3 التقويم

التقويم التكويني

أستعمل تمرين 15 ؛ لتقويم مدى فهم الطلبة لأثر تغيير قيم الثوابت a, h, k على التمثيل البياني لـ $y = a(x - h)^2 + k$.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل:

- ما الثابت الذي يتغير في المعادلة المكتوبة بصيغة الرأس ليؤدي إلى إزاحة إلى اليمين أو إلى اليسار؟ h
- ما الثابت الذي يتغير في المعادلة المكتوبة بصيغة الرأس ليؤدي إلى إزاحة إلى أعلى أو أسفل؟ k
- ما الثابت الذي يؤثر على توسع أو تضييق التمثيل البياني؟ a

إجابات:

1) تغيير قيمة h تعني إزاحة إلى اليمين أو إلى اليسار للتمثيل البياني. إذا كانت $h > 0$، فإن الإزاحة إلى اليمين، وإذا كانت $h < 0$ ، فإن الإزاحة إلى اليسار؛ فمثلًا في المعادلة $y = (x - 2)^2$ تتم إزاحة رأس القطع الذي معادلته $y = x^2$ ، والرأس $(0, 0)$ وحدتين إلى اليمين ليكون الرأس $(0, 2)$.

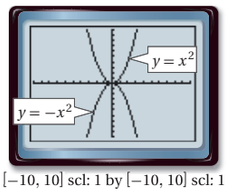
2) تغيير قيمة k تعني إزاحة إلى أعلى أو إلى أسفل للتمثيل البياني. إذا كانت $k > 0$ ، فإن الإزاحة تكون إلى أعلى، وإذا كانت $k < 0$ ، فإن الإزاحة تكون إلى أسفل؛ فمثلًا في المعادلة $y = x^2 - 3$ تتم إزاحة رأس القطع الذي معادلته $y = x^2$ ، ورأسه $(0, 0)$ ثلاث وحدات إلى أسفل ليكون الرأس $(0, -3)$

النشاط 4

مَثّل كل مجموعة من المعادلات على الشاشة نفسها، وبيّن أوجه التشابه والاختلاف بين تمثيلاتها البيانية.

a) $y = x^2, y = -x^2$

التمثيلات البيانية لها الرأس والشكل نفسيهما، ولكن التمثيل البياني $y = x^2$ مفتوح إلى أعلى، والتمثيل البياني $y = -x^2$ مفتوح إلى أسفل.

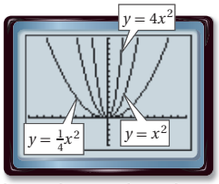


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

b) $y = x^2, y = 4x^2, y = \frac{1}{4}x^2$

التمثيلات البيانية لها الرأس نفسه $(0, 0)$، لكن كل واحد منها له شكل مختلف. فالتمثيل البياني $y = 4x^2$ أوسع رأسيًّا من التمثيل البياني $y = x^2$.

أمّا التمثيل البياني $y = \frac{1}{4}x^2$ فأضيق رأسيًّا من التمثيل البياني $y = x^2$



[−10, 10] scl: 1 by [−5, 15] scl: 1

يمكن أن يؤثر تغير قيم a في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$ في اتجاه فتحة القطع وشكله. فإذا كانت $a > 0$ ، يكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أعلى. وإذا كانت $a < 0$ يكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أسفل أو منعكسًا حول المحور x. وإذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني $y = x^2$. وإذا كانت $|a| < 1$، فإن التمثيل البياني أوسع من التمثيل البياني $y = x^2$. وهكذا، ينتج عن التغيّر في القيمة المطلقة لـ a توسيع أو تضييق للتمثيل البياني $y = x^2$.

حلل النتائج

للتمارين 3-1 انظر الهامش

ليكن $y = a(x - h)^2 + k$ حيث $a \neq 0$.

1) كيف يؤثر التغير في قيمة h على المنحنى؟ أعط مثالًا على ذلك.

2) كيف يؤثر التغير في قيمة k على المنحنى؟ أعط مثالًا على ذلك.

3) كيف يؤثر استعمال $-a$ بدلًا من a على المنحنى؟ أعط مثالًا على ذلك.

افحص كل زوج من المعادلات الآتية وتنبأ بالتشابه والاختلاف بين تمثيلاتها البيانية. (استعمل الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من إجابتك)، واكتب جملة أو اثنتين تقارن فيهما بين التمثيلات البيانية: للتمارين 15-4 انظر ملحق الإجابات

4) $y = x^2, y = x^2 + 2.5$

5) $y = -x^2, y = x^2 - 9$

6) $y = x^2, y = 3x^2$

7) $y = x^2, y = -6x^2$

8) $y = x^2, y = (x + 3)^2$

9) $y = -\frac{1}{3}x^2, y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

10) $y = x^2, y = (x - 7)^2$

11) $y = x^2, y = 3(x + 4)^2 - 7$

12) $y = x^2, y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

13) $y = (x + 3)^2 - 2, y = (x + 3)^2 + 5$

14) $y = 3(x + 2)^2 - 1$
$y = 6(x + 2)^2 - 1$

15) $y = 4(x - 2)^2 - 3$
$y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 1$

3) استعمال $-a$ بدلًا من a يعكس التمثيل البياني حول المحور x. فمثلًا التمثيل البياني الذي معادلته $y = x^2$ تكون فتحته إلى أعلى، بينما التمثيل البياني $y = -x^2$ تكون فتحته إلى أسفل .

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-6

التحويلات الهندسية لبعض الدوال الأم.

الدرس 3-6

كتابة دالة تربيعية بالصيغة: $y = a(x - h)^2 + k$.

استعمال التحويلات في تمثيل الدوال التربيعية المكتوبة بالصيغة: $y = a(x - h)^2 + k$.

ما بعد الدرس 3-6

حل متباينات تربيعية بيانيًا وجبريًا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما قيمة x التي تجعل قيمة y تساوي صفر في الدالة $f(x) = x^2$؟ $x = 0$
- ما قيمة x التي تجعل قيمة y تساوي صفر في الدالة $h(x) = (x - 2)^2$؟ $x = 2$
- قارن التمثيل البياني للدالة $h(x) = (x - 2)^2$، مع التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$، ما التغير الذي أحدثه طرح العدد 2 داخل الأقواس؟ التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ يزاح وحدتين إلى اليمين.

كتابة الدوال التربيعية بصيغة الرأس

مثال 1 يُبيّن كيفية كتابة الدوال التربيعية بصيغة الرأس.

التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية
Transformations with Quadratic Functions

فيما سبق

درست التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية لبعض الدوال الأم.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أكتب معادلة دالة تربيعية بالصيغة: $y = a(x - h)^2 + k$
- أستعمل التحويلات الهندسية في تمثيل الدوال التربيعية المكتوبة بالصيغة: $y = a(x - h)^2 + k$

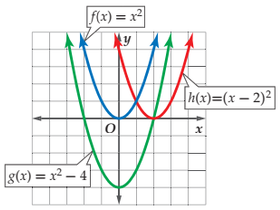
المفردات الأساسية

صيغة الرأس

vertex form

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



تذكر أن عائلة التمثيلات البيانية عبارة عن مجموعة من التمثيلات البيانية التي تعرض واحدة أو أكثر من الخصائص المتشابهة وتوضحها. التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ يسمّى التمثيل الأم لعائلة الدّوال التربيعية، ويمكن إيجاد تمثيلات بيانية للدّوال التربيعية الأخرى مثل $g(x) = x^2 - 4$، $h(x) = (x - 2)^2$، عن طريق استعمال أحد التحويلات الهندسية وذلك بإزاحة (انسحاب) التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = x^2$.

كتابة معادلات الدوال التربيعية بصيغة الرأس يمكن كتابة معادلة كل دالة مما سبق ذكره في فقرة "لماذا؟" على الصورة $y = a(x - h)^2 + k$، حيث (h, k) هو رأس القطع المكافئ. و $x = h$ هو محور التماثل، و a تحدد شكل القطع المكافئ واتجاه فتحه وتسمى هذه الصيغة **صيغة الرأس** للدّالة التربيعية.

إذا أُعطيت معادلة دالة تربيعية بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$ فإنك تستطيع أن تستعمل طريقة إكمال المربع لتكتبها بصيغة الرأس. إذا كان معامل x^2 لا يساوي 1، فأول خطوة ينبغي عملها هي تحليل معامل x^2 ومعامل x قبل إكمال المربع.

مثال 1 كتابة معادلات الدوال التربيعية بصيغة الرأس

اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

a $y = x^2 + 6x - 5$

$5 - x^2 + 6x$ ليس مربعًا كاملًا	$y = x^2 + 6x - 5$
بإضافة $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ لإكمال المربع، وبطرح 9 لتوازن المعادلة	$y = (x^2 + 6x + 9) - 5 - 9$
بكتابة $x^2 + 6x + 9$ على صورة مربع كامل	$y = (x + 3)^2 - 14$

b $y = -2x^2 + 8x - 3$

المعادلة الأصلية	$y = -2x^2 + 8x - 3$
بتجميع $ax^2 + bx$ والتحليل بإخراج a عامل مشترك	$y = -2(x^2 - 4x) - 3$
بإضافة 4 داخل الأقواس لإكمال المربع، وهذا يكافئ إضافة $-2(4)$ ، وبطرح $-2(4)$ لتوازن المعادلة	$y = -2(x^2 - 4x + 4) - 3 - (-2)(4)$
بكتابة $x^2 - 4x + 4$ على صورة مربع كامل	$y = -2(x - 2)^2 + 5$

تأكد

اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

1A $y = x^2 + 4x + 6$ $y = (x + 2)^2 + 2$ **1B** $y = 2x^2 - 12x + 17$ $y = 2(x - 3)^2 - 1$

إرشادات للدراسة

الدالة المرتبطة بالمعادلة

$f(x)$ تعني قيمة الدالة f عند x، وبما أن $f(x)$ تمثل قيمة y التي ترتبط بقيمة x، فإننا نكتب $y = f(x)$، لذا فالدالة المرتبطة بالمعادلة $y = -2x$ هي $f(x) = -2x$.

مصادر الدرس 3-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (195)	• تنويع التعليم، ص (195)	• تنويع التعليم، ص (195, 197)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

193 الدرس 3-6 التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

كتابة الدوال التربيعية بصيغة الرأس

مثال 2 يُبيّن كيف يؤثر معامل الحد التربيعي للدالة في اتساع فتحة المنحنى.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

(a $y = x^2 - 2x + 4$

$y = (x - 1)^2 + 3$

(b $y = -3x^2 - 18x + 10$

$y = -3(x + 3)^2 + 37$

تنبيه!

تجنب الاخطاء مع زيادة $|a|$ يزداد تضيق التمثيل البياني؛ لأن مضاعفة الكمية $(x - h)^2$ تجعل قيمة y المناظرة لها أكبر، وينتج عن ذالك زيادة في حدة التمثيل البياني أي يصبح أضيق.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض مستوى إحداثي على السبورة. وارسم التمثيل البياني لدالة تربيعية، وأعط الطلبة معادلة القطع، ووضح لهم كيفية كتابة المعادلة التربيعية بصيغة الرأس.

اسحب التمثيل البياني لتحريك الرأس لموقع آخر على السبورة، واطلب إليهم كتابة المعادلة التربيعية الجديد. وناقش أوجه الشبه والاختلاف بين المنحنيين.

إرشادات للاختبار

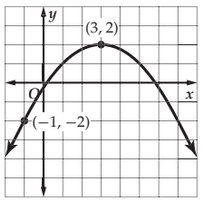
معنى a

إشارة a في صيغة الرأس لاتحدد مقدار اتساع القطع، ولكنها تحدد إذا كانت فتحة القطع إلى أعلى أو إلى أسفل، ويحدد اتساع المنحنى بالقيمة المطلقة لـ a.

إذا عُلم إحداثيا رأس القطع المكافئ ونقطة أخرى على منحناه، فيمكن كتابة معادلته بصيغة رأس القطع.

مثال 2 على اختبار معياري

أي مما يأتي معادلة للدالة الممثلة بيانيًّا؟



A $y = -4(x - 3)^2 + 2$

B $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$

C $y = \frac{1}{4}(x + 3)^2 - 2$

D $y = 4(x + 3)^2 - 2$

اقرأ فقرة الاختبار

أعطي التمثيل البياني للقطع المكافئ بمعلومية رأسه ونقطة عليه، والمطلوب إيجاد معادلة القطع المكافئ.

حُلّ فقرة الاختبار

إحداثيا الرأس $(3, 2)$؛ لذا $h = 3$ ، $k = 2$، وبما أن النقطة $(-1, -2)$ تقع عليه، عوض عن x بـ -1 و y بـ -2 في المعادلة المكتوبة بصيغة الرأس وحلها؛ لإيجاد a .

صيغة الرأس $y = a(x - h)^2 + k$

$y = -2, x = -1, h = 3, k = 2$ $-2 = a(-1 - 3)^2 + 2$

بالتبسيط $-2 = a(16) + 2$

بطرح 2 من كلا الطرفين $-4 = 16a$

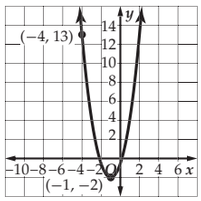
بالقسمة على 16 $-\frac{1}{4} = a$

إذن معادلة القطع المكافئ بصيغة الرأس هي $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$.

فالجواب B.

تأكد

2) أي مما يأتي معادلة للدالة الممثلة بيانيًّا؟ **H**



F $y = \frac{9}{25}(x - 1)^2 + 2$

G $y = \frac{3}{5}(x + 1)^2 - 2$

H $y = \frac{5}{3}(x + 1)^2 - 2$

J $y = \frac{25}{9}(x - 1)^2 + 2$

التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية في الدرس 6–1 درست كيف تؤثر التحويلات الهندسية المختلفة في التمثيلات البيانية للدوال الأم، وفيما يأتي تلخيص لتأثير هذه التحويلات.

التركيز في المحتوى الرياضي

الدالة التربيعية بصيغة الرأس تؤثر قيم a, h, k ، في صيغة الرأس للمعادلة التربيعية $y = a(x - h)^2 + k$ في التمثيل البياني للقطع المكافئ، فتمثل النقطة (h, k) رأس القطع، وتحدد قيمة a إتجاه فتحة القطع وشكله. وتحدد قيمة h اتجاه الإزاحة الأفقية للقطع، وكذلك تحدد قيمة k اتجاه الإزاحة الرأسية للقطع. لذا، يجب كتابة الدّالة التربيعية باستعمال صيغة الرأس قبل تحديد قيم a, h, k وتحليلها.

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

$0 < |a| < 1$ تعني أن a عدد نسبيّ بين 0 و 1 مثل $\frac{3}{4}$، أو عدد نسبيّ بين -1 و 0، مثل -0.3.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

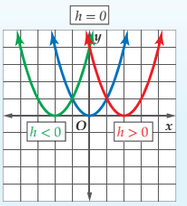
التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية بصيغة الرأس

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

h، إزاحة أفقية

$|h|$ وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة.

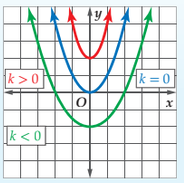
$|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة.



k، إزاحة رأسية

$|k|$ وحدة إلى الأعلى إذا كانت k موجبة.

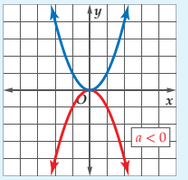
$|k|$ وحدة إلى الأسفل إذا كانت k سالبة.



a، انعكاس

إذا كانت $a > 0$، اتجاه فتحة القطع المكافئ تكون إلى أعلى.

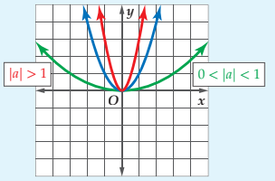
إذا كانت $a < 0$، اتجاه فتحة القطع المكافئ تكون إلى أسفل.



a، توسيع ، تضييق

إذا كانت $|a| > 1$، يتوسع القطع المكافئ رأسيًا.

إذا كانت $0 < |a| < 1$، يضيق القطع المكافئ رأسيًا.

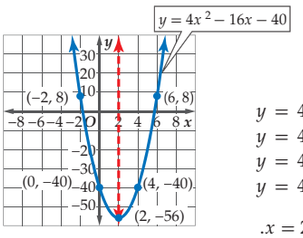


مثال 3

تمثيل دالة تربيعية مكتوبة بصيغة الرأس

مثّل الدالة $y = 4x^2 - 16x - 40$ بيانيًّا.

الخطوة 1 أعد كتابة الدالة بصيغة الرأس.



الدالة الأصلية	$y = 4x^2 - 16x - 40$
خاصية التوزيع	$y = 4(x^2 - 4x) - 40$
بإكمال المربع	$y = 4(x^2 - 4x + 4) - 40 - 4(4)$
بالتبسيط	$y = 4(x - 2)^2 - 56$

الخطوة 2 عيّن الرأس $(2, -56)$. ومثّل معادلة محور التماثل $x = 2$.

وبما أن $a = 4$، فإن التمثيل البياني يكون أوسع رأسيًّا من التمثيل البياني للدالة $y = x^2$.

الخطوة 3 استعمل نقاطًا إضافية لتساعدك على إكمال المنحنى .

يمكن استعمال الإزاحة لتمثيل الدالة بيانيًّا، وذلك بإزاحة التمثيل البياني لـ $y = x^2$ وحدتين إلى اليمين، و 56 وحدة إلى أسفل. وبما أن $a = 4$، فإن التمثيل البياني للدالة يكون أضيق رأسيًّا من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

للتدريبين 3A, 3B انظر ملحق الاجابات

تأكد

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا:

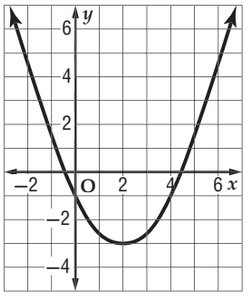
(3A) $y = (x - 3)^2 - 2$

(3B) $y = 0.25(x + 1)^2$

مثال إضافي

2 **تدريب على اختبار معياري:**

أي مما يأتي معادلة للدالة الممثلة بيانيًّا؟ B



A $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$

B $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$

C $y = -2(x - 2)^2 + 3$

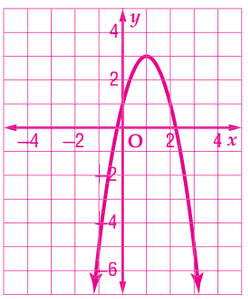
D $y = 2(x - 2)^2 - 3$

التحويلات الهندسية للتمثيلات البيانية للدوال التربيعية

مثال 3 يُبيّن كيفية تمثيل دالة بيانيًّا بعد كتابتها بصيغة الرأس.

مثال إضافي

3 مثّل الدالة $y = -2x^2 + 4x + 1$ بيانيًّا.



تنويع التعليم

دون ضمن فوق

التعلم في مجموعات متعاونة اطلب إلى الطلبة أن يلاحظوا ويبحثوا في بعض الأحداث الطبيعية التي يمكن تمثيلها بقطوع مكافئة، مثل تدفق نافورة المياه. يدون الطلبة ملاحظاتهم، ويعرضون النتائج التي وجدوها على الصف. وإذا كانوا قادرين على تحديد الدالة التربيعية التي تمثل الحدث ، فعليهم أن يعرضوا الدالة، ويفسروا كيف أن خصائص المعادلة يمكن أن تستعمل في تحليل التمثيل البياني للدالة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 7 - 1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

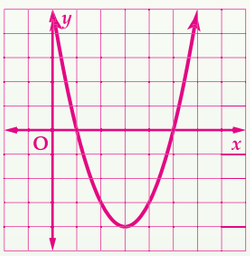
إجابات:

(1) $y = (x+3)^2 - 7$

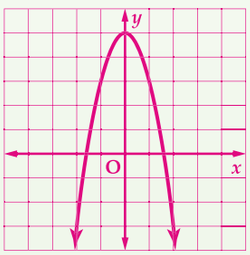
(2) $y = -2(x-2)^2 + 3$

(3) $y = 4(x+3)^2 - 12$

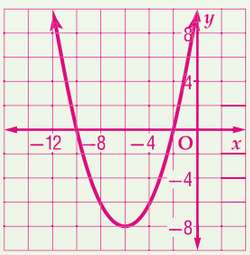
(5)



(6)



(7)



(10) $y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$

(12) $y = (x+4)^2$

(13) $y = 2(x-1)^2 - 5$

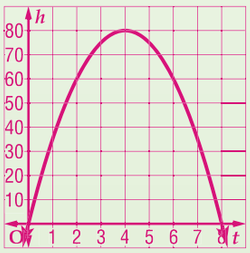
11 $y = -3x^2 + 12x - 10$

باخراج 3 عامل مشترك $= -3(x^2 - 4x) - 10$

بإكمال المربع $= -3(x^2 - 4x) - 10$

بالتبسيط $= -3(x-2)^2 + 2$

(14)



تأكد من فهمك

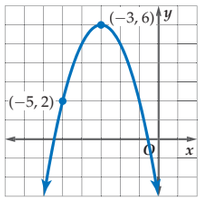
مثال 1 صفحة 193

اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

(1) $y = x^2 + 6x + 2$ (2) $y = -2x^2 + 8x - 5$ (3) $y = 4x^2 + 24x + 24$

مثال 2 صفحة 194

(4) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي معادلة للدالة الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور؟ **A**



A $y = -(x+3)^2 + 6$

B $y = -(x-3)^2 - 6$

C $y = -2(x+3)^2 + 6$

D $y = -2(x-3)^2 - 6$

مثال 3 صفحة 195

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: **للتمارين 7–5 انظر الهامش**

(5) $y = (x-3)^2 - 4$ (6) $y = -2x^2 + 5$ (7) $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 - 8$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 193

اكتب معادلة الدالة التربيعية في كل مما يأتي بصيغة الرأس:

(8) $y = x^2 + 9x + 8$ (9) $y = x^2 - 6x + 3$ (10) $y = -2x^2 + 5x$

11 $y = -3x^2 + 12x - 10$ (12) $y = x^2 + 8x + 16$ (13) $y = 2x^2 - 4x - 3$

انظر الهامش

مثال 2 صفحة 194

(14) **ألعاب نارية:** تطلق الألعاب النارية في أثناء الاحتفالات، ويُعطى ارتفاع القذيفة h بالأمتار بالدالة $h = -4.9(t-4)^2 + 80$. حيث تمثل t الزمن بالثواني. مثّل سير القذيفة بيانيًّا. **انظر الهامش**

مثال 3 صفحة 195

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: **للتمارين 23–15 انظر ملحق الإجابات**

(15) $y = (x-5)^2 + 3$ (16) $y = 9x^2 - 8$ (17) $y = -2(x-5)^2$

(18) $y = \frac{1}{10}(x+6)^2 + 6$ (19) $y = -3(x-5)^2 - 2$ (20) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$

(21) $y = -(x+3)^2$ (22) $y = (x-9)^2 - 7$ (23) $y = -\frac{5}{8}x^2 - 8$

(24) **قوارب شراعية:** يستعمل صانع قوارب شراعية برامج خاصة لصناعة سارية القارب. إذا كانت الدالة المبرمجة على الحاسوب لصناعة السارية معرفة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{250}x^2 + \frac{3}{5}x$، فأجب عن كل مما يأتي:

a اكتب الدالة بصيغة الرأس ومثّلها بيانيًّا. **انظر ملحق الإجابات**

b صف كيف يمكن لصناعة القوارب ضبط الدالة ليكون للسارية شكل منحنى ذي توسع أو تضييق أكبر.

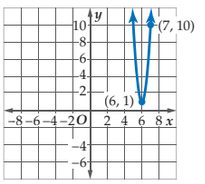
بِضبْط معامل x^2

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	24-8 ، 38 ، 53-41
ضمن المتوسط	23-9 فردي ، 24 ، 37-25 فردي ، 38 ، 53-41
فوق المتوسط	53-25

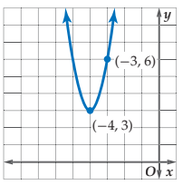
اكتب معادلة بصيغة الرأس لكل من القطوع المكافئة الممثلة أدناه:

(25)



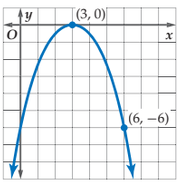
$y = 9(x-6)^2 + 1$

(26)



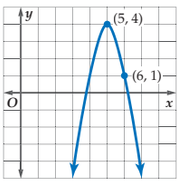
$y = 3(x+4)^2 + 3$

(27)



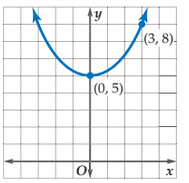
$y = -\frac{2}{3}(x-3)^2$

(28)



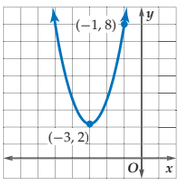
$y = -3(x-5)^2 + 4$

(29)



$y = \frac{1}{3}x^2 + 5$

(30)



$y = \frac{3}{2}(x+3)^2 + 2$

للتمارين 36–31 انظر ملحق الإجابات

الربط مع واقع الحياة

تجاوز السرعات المقررة أو السير بسرعات غير آمنة يشكل أغلب الأخطاء المرورية.

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة الرأس، ثم حدد رأس القطع المكافئ، ومعادلة محور التماثل واتجاه فتحة المنحنى:

(31) $3x^2 - 4x = 2 + y$

(32) $-2x^2 + 7x = y - 12$

(33) $-x^2 - 4.7x = y - 2.8$

(34) $x^2 + 1.4x - 1.2 = y$

(35) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{9} = y$

(36) $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = y$

37 سيارات: يمكن استعمال المعادلة $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ لتحديد الموقع $S(t)$ لجسيم متحرك بعد t ثانية، بمعدل تسارع a، وسرعة ابتدائية v_0، ويمكن لسيارة خالد أن تتسارع بمعدل 0.002mil/sec^2. انظر الهامش

a) عبِّر عن $S(t)$ بصيغة الرأس عندما تتسارع ابتداءً من سرعة 35 mil/h لدخول الخط السريع.

b) كم من الوقت يستغرق خالد حتى تصل سرعة السيارة 68 mil/h؟
(إرشاد: استعمل التسارع . الزمن = السرعة)

مسائل مهارات التفكير العليا

38 مسألة مفتوحة: اكتب معادلة قطع مكافئ أُجري عليه التحويلات الآتية:
إزاحة، توسع، وانعكاس حول المحور x. إجابة ممكنة: $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2$

39 تحدَّ: بيّن كيف تجد معادلة قطع مكافئ عُلم إحداثيات ثلاث نقاط على منحناه. انظر ملحق الإجابات

40 تحدٍّ: اكتب المعادلة $y = ax^2 + bx + c$ بصيغة الرأس، وحدد إحداثيات الرأس ومعادلة محور التماثل. انظر ملحق الاجابات

41 تبرير: صف منحنى الدالة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ عندما $a = 0$. هل سيكون نفس منحنى الدالة $g(x) = ax^2 + bx + c$ عندما $a = 0$؟ وضح إجابتك. انظر ملحق الإجابات

42 اكتب: صف كيف يمكن استعمال منحنى الدالة $y = x^2$ لتمثيل أي دالة تربيعية بيانيًّا، وضمِّن إجابتك توضيح تأثير تغيير قيم a, h, k في المعادلة $y = a(x-h)^2 + k$. انظر ملحق الإجابات

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع تمّ في هذا الدرس تمثيل الدوال التربيعية التي تمثيلها البياني على صورة قطع مكافئ مفتوح إلى أعلى أو إلى أسفل. اسأل الطلبة أن يفسروا لماذا لم يتضمن هذا الدرس القطوع المكافئة المفتوحة إلى اليمين أو إلى اليسار. فمثلًا يمكنك تمثيل القطع المكافيء الذي رأسه $(-2, 0)$، ومعادلة محور التماثل $y = 0$، ويمر بالنقطة $(0, 2)$. إجابة ممكنة: هذا الدرس يناقش الدوال التربيعية. في حين القطوع المكافئة المفتوحة إلى اليمين أو اليسار لا تمثل دوالًا؛ لأن كل عنصر من عناصر المجال يرتبط بعنصرين من عناصر المدى، عدا نقطة الرأس.

إجابات:

37a

$S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$

(المعادلة الأصلية)

$S(t) = \frac{1}{2}(0.002)t^2 + 0.0097t$

$(a = 0.002, b = 0.0097\ \text{m/sec})$

$S(t) = 0.001t^2 + 0.0097t$

(بالتبسيط)

$S(t) = 0.001\,(t^2 + 9.7t)$

(باخراج عامل مشترك)

$S(t) = 0.001(t^2 + 9.7t + 4.86^2) - 0.024$

(بإكمال المربع)

$S(t) = 0.001(t + 4.86)^2 - 0.024$

37b

$a \cdot t = v$

(بالتعويض)

$0.002\ \text{mi/sec}^2 \cdot t = (68 - 35)\ \text{mi/h}$

(بالتبسيط)

$0.002\ \text{mi/sec}^2 \cdot t = 33\ \text{m/h}$

(بتحويل الزمن إلى دقائق)

$0.002\ \text{mi/sec}^2 \cdot t = \frac{33\ \text{mi}}{1\ \text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{sec}}$

(بالتبسيط)

$0.002\ \text{mi/sec}^2 \cdot t = 0.009\ \text{mi/sec}$

(بالقسمة على 0.002)

$t = \frac{0.009\ \text{mi}}{\text{sec}} \div \frac{0.002\ \text{mi}}{\text{sec}^2}$

(بالضرب)

$t = \frac{0.009\ \text{mi}}{\text{sec}} \cdot \frac{\text{sec}^2}{0.002\ \text{mi}}$

(بالتبسيط)

$t = 4.58\ \text{sec}$

إذن سيستغرق خالد 4.58 sec تقريبًا.

4 التقويم

تعلّم سابق اسأل الطلبة أن يكتبوا كيف ساعدهم درس القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميّز على فهم درس اليوم "تحويلات التمثيلات البيانية للدوال التربيعية".

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-6 ، بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 3.

تدريب على اختبار معياري

43) إذا كان $f(x) = x^2 - 5x$، و $f(n) = -4$، فأي القيم الآتية يمكن أن تكون n؟ **D**

A -5

B -4

C -1

D 1

44) مراجعة: أي مما يأتي تُعد أدق وصف لإزاحة المنحنى من $y = (x+5)^2 - 1$ إلى المنحنى $y = (x-1)^2 + 3$؟ **A**

A 4 وحدات إلى أعلى و 6 وحدات إلى اليمين.

B 4 وحدات إلى أعلى ووحدة واحدة إلى اليسار.

C وحدة إلى أسفل ووحدة واحدة إلى اليمين.

D وحدة واحدة إلى أسفل و 5 وحدات إلى اليسار.

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي باستعمال الطريقة المناسبة. وأوجد القيم الفعلية للمتغير x. (الدرس 3-5)

45) $4x^2 + 15x = 21$ $\frac{-15 \pm \sqrt{561}}{8}$

46) $-3x^2 + 19 = 5x$ $\frac{-5 \pm \sqrt{253}}{6}$

47) $6x - 5x^2 + 9 = 3$ $\frac{3 \pm \sqrt{39}}{5}$

أوجد قيمة المميّز لكل معادلة تربيعية مما يأتي، ثم بيِّن نوع الجذور وعددها: (الدرس 3-5)

48) $3x^2 - 6x + 2 = 0$ 12 ، جذران حقيقيان غير نسبيين

49) $4x^2 + 7x = 11$ 225 ، جذران حقيقيان نسبيان

50) $2x^2 - 5x + 6 = 0$ -23 ، جذران مركبان

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-2)

51) $4\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -21 \\ -14 & -16 \end{bmatrix}$

52) $-2\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -28 & 60 \\ 20 & -70 \end{bmatrix}$

53) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -21 & -22 \\ -14 & -16 & 20 \end{bmatrix}$

198 الفصل 3 الدوال التربيعية

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا (الدرس 1-3)

- التمثيل البياني للدالة $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$، هو قطع مكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى، وله قيمة صغرى عندما تكون $a>0$. ويكون مفتوحًا إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما تكون $a<0$.

حل المعادلات التربيعية (الدرسان 2-3 ، 3-3)

- الحلول أو الجذور للمعادلات التربيعية هي أصفار الدالة التربيعية المرافقة، وبإمكانك أن تجد أصفار الدالة التربيعية عن طريق إيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع المحور x مع منحنى الدالة.

الأعداد المركبة (الدرس 4-3)

- i هي الوحدة التخيلية حيث $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميّز (الدرس 5-3)

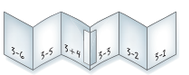
- القانون العام هو $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال التربيعية (الدرس 6-3)

- عند تغيير قيم h ، k، فإن منحنى الدالة $y = (x - h)^2 + k$ هو منحنى الدالة $y = x^2$ نفسه، ولكن تمّت إزاحته $|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة، أو $|h|$ وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة، و $|k|$ وحدة إلى أعلى إذا كانت k موجبة، و $|k|$ وحدة إلى أسفل إذا كانت k سالبة.
- في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$. إذا كان $a > 0$، يكون المنحنى مفتوحًا إلى أعلى، وإذا كان $a < 0$ يكون مفتوحًا إلى أسفل، وإذا كان $|a|>1$ يكون أضيق من المنحنى $y = x^2$. أما إذا كان $|a|<1$، فإن المنحنى يكون أوسع من منحنى $y = x^2$.

مطويتك منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

الدالة غير الخطية	ص 144	جذور المعادلة	ص 158
الدالة التربيعية	ص 144	أصفار الدالة	ص 158
الصورة القياسية	ص 144	الصورة التحليلية	ص 166
الحد التربيعي	ص 144	طريقة التوزيع بالترتيب	ص 166
القطع المكافئ	ص 144	الوحدة التخيلية	ص 174
محور التماثل	ص 144	العدد التخيلي البحت	ص 174
الرأس	ص 144	العدد المركب	ص 175
القيمة العظمى	ص 144	عددان مركبان مترافقان	ص 177
القيمة الصغرى	ص 144	القانون العام	ص 181
متماثل	ص 145	المميز	ص 184
المعادلة التربيعية	ص 158	صيغة الرأس	ص 193
الصيغة القياسية	ص 158		

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة.

1) الصيغة التحليلية لمعادلة الدرجة الثانية هي $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$، a, b, c أعداد صحيحة. خاطئة ، الصيغة القياسية

2) التمثيل البياني لأي دالة تربيعية قطع مكافئ. صحيحة

3) صيغة الرأس للمعادلة التربيعية هي $y = a(x-p)(x-q)$. خاطئة ، الصيغة التحليلية

4) محور تماثل القطع المكافئ يقطعه عند الرأس. صحيحة

5) تُسمى المعادلة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالمميز. خاطئة ، القانون العام

6) العدد $6i$ عدد تخيلي بحت. صحيحة

7) $2i + 3$ ، $2i - 3$ عددان مركبان مترافقان. صحيحة

8) العدد المركب يكتب بالصورة $a + bi$. صحيحة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبة في حَلّ الأسئلة 8-1، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات؛ لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل 3

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي الكلمات المتقاطعة ، والحروف المبعثرة ، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن الكلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت، أو على أوراق عمل مطبوعة.

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم أثناء حلّهم تمارين دليل الدراسة والمراجعة. وبيّن لهم أن مطوياتهم يمكن أن تكون أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

المعالجة إن كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها التمارين، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

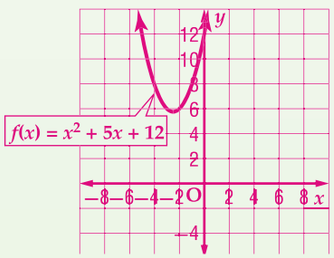
إجابات:

9a) مقطع المحور y يساوي 12، معادلة محور التماثل $x = \frac{-5}{2}$، الإحداثي x لرأس القطع $\frac{-5}{2}$.

9b)

x	$f(x)$
-3	6
$\frac{-5}{2}$	$\frac{23}{4}$
-2	6
-1	8
0	12

9c)

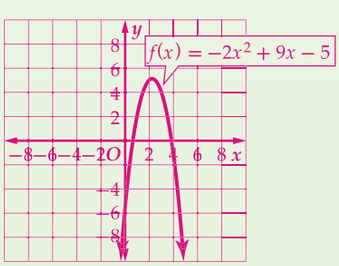


10a) مقطع المحور y يساوي -5، معادلة محور التماثل $x = \frac{9}{4}$، الإحداثي x لرأس القطع 4 .

10b)

x	$f(x)$
1	2
2	5
3	$\frac{41}{8}$
4	4
5	-1

10c)



11) عظمى 1.25 ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \le 1.25\}$

مراجعة الدروس

3-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا (الصفحات 144-156)

أجب عن الفروع من a, b, c لكل دالة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد كلًّا من مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ.

b) كوّن جدولًا لبعض قيم x ، $f(x)$، على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع هذه القيم.

c) استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة التربيعية.

9) $f(x) = x^2 + 5x + 12$ للتمارين 11–9 انظر الهامش

10) $f(x) = -2x^2 + 9x - 5$

11) حدّد ما إذا كان لـ $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجدها، ثم اذكر مجالها ومداها. انظر الهامش

12) إطار صورة: تصنع عبلة إطار صورة مستطيل الشكل، ولديها 72cm من الخشب لصنعه، ما أبعاد الإطار بحيث يحيط بأكبر مساحة ممكنة؟ 18cm×18cm

مثال 1

أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ الذي معادلته $f(x) = x^2 - 4x + 11$.

$a = 1, b = -4, c = 11$

إذن مقطع المحور y يساوي 11

استعمل a, b ؛ لإيجاد معادلة محور التماثل

معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$

$a = 1, b = -4$ $= -\frac{-4}{2(1)}$

بالتبسيط $= 2$

إذن معادلة محور التماثل $x = 2$

أي الإحداثي x لرأس القطع هو 2 .

3-2 حل المعادلات التربيعية بيانيًا (الصفحات 158-164)

حُلّ كل معادلة مما يأتي بيانيًّا، وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور، فحدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما هذا الجذر:

13) $x^2 - x - 20 = 0$ $-4, 5$

14) $2x^2 - x - 3 = 0$ $-1, \frac{3}{2}$

15) $4x^2 - 6x - 15 = 0$ بين -2 و -1 ، وبين 2 و 3

16) $\frac{1}{5}(x + 3)^2 - 5 = 0$ $-8, 2$

17) قذفت كرة إلى أعلى بسرعة 120ft/sec وكانت معادلة حركتها $h(t) = v_0 t - 16t^2$، حيث $h(t)$ هو ارتفاع الكرة بالأقدام، و t الزمن بالثواني، و v_0 سرعتها الابتدائية بالقدم لكل ثانية. كم من الزمن تستغرقه الكرة حتى ترتطم بالأرض (أهمل ارتفاع الكرة)؟ 7.5 sec

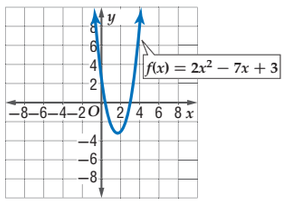
مثال 2

حُلّ المعادلة $2x^2 - 7x + 3 = 0$ بيانيًّا.

معادلة محور التماثل هي:

$x = -\frac{-7}{2(2)} = \frac{7}{4}$

x	0	1	$\frac{7}{4}$	2	3
$f(x)$	3	−2	$-2\frac{5}{8}$	−3	0



أصفار الدالة المرافقة هي $\frac{1}{2}$ ، 3 .

لذا فحلول المعادلة هي $\frac{1}{2}$ ، 3 .

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل (الصفحات 166-172)

اكتب معادلة تربيعية بالصورة القياسية مستعملًا الجذور المعطاة:

18) $-3, -7$ $x^2 + 10x + 21 = 0$

19) $-4, 2$ $x^2 + 2x - 8 = 0$

20) $\frac{1}{6}, 5$ $6x^2 - 31x + 5 = 0$

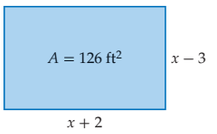
حُلّ كل معادلة مما يأتي بالتحليل:

21) $-3, 4$ $2x^2 - 2x - 24 = 0$

22) $-\frac{1}{2}, 3$ $2x^2 - 5x - 3 = 0$

23) $\frac{1}{3}, 5$ $3x^2 - 16x + 5 = 0$

24) أوجد قيمة x وبُعدي المستطيل الممثل أدناه. $x = 12, 9, 14$



مثال 3

اكتب معادلة تربيعية بالصورة القياسية مستعملًا الجذرين 3 ، 5−.

بكتابة النمط	$(x - p)(x - q) = 0$
$q = -5$ ، $p = 3$	$(x - 3)(x + 5) = 0$
بالضرب	$x^2 + 2x - 15 = 0$

مثال 4

حُلّ المعادلة $x^2 + 9x + 20 = 0$ باستعمال التحليل.

المعادلة الأصلية	$x^2 + 9x + 20 = 0$
بالتحليل إلى عوامل	$(x + 4)(x + 5) = 0$
خاصية حاصل الضرب الصفري	$x + 5 = 0$ أو $x + 4 = 0$
	$x = -5$ أو $x = -4$

مجموعة الحل هي $\{-5, -4\}$.

3-4 الأعداد المركبة (الصفحات 174-180)

بسّط كلًّا مما يأتي:

25) $2i\sqrt{2}$ $\sqrt{-8}$

26) $15 + 3i$ $(2 - i) + (13 + 4i)$

27) $2 + 5i$ $(6 + 2i) - (4 - 3i)$

28) $28 + 3i$ $(6 + 5i)(3 - 2i)$

29) **كهرباء:** إذا كانت المقاومة في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $\Omega\ (3 + 2i)$، وفي الجزء الآخر منها $\Omega\ (4 - 3i)$. اجمع هذين العددين ؛ لإيجاد المقاومة الكلية في الدائرة الكهربائية.

$(7 - i)\ \Omega$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

30) $\pm 5i$ $2x^2 + 50 = 0$

31) $\pm\frac{1}{2}i$ $4x^2 + 1 = 0$

32) $\pm i\sqrt{5}$ $3x^2 + 15 = 0$

33) $\pm i\sqrt{2}$ $8x^2 + 16 = 0$

مثال 5

بسّط $(12 + 3i) - (-5 + 2i)$.

$$(12 + 3i) - (-5 + 2i)$$

بتجميع الحدود الحقيقية معًا والحدود التخيلية معًا: $= [12 - (-5)] + (3 - 2)i$

بالتبسيط: $= 17 + i$

مثال 6

حُل المعادلة $3x^2 + 12 = 0$.

المعادلة الأصلية	$3x^2 + 12 = 0$
بطرح 12 من كلا الطرفين	$3x^2 = -12$
بقسمة كلا الطرفين على 3	$x^2 = -4$
خاصية الجذر التربيعي	$x = \pm\sqrt{-4}$
$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$	$x = \pm 2i$

201 الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حل المسألة فذكرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 3 ، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 3 .

إجابات:

34a) 0

34b) جذر حقيقي نسبي

34c) 5

35a) 144

35b) جذران حقيقيان نسبيان

35c) $-8, 4$

36a) 153

36b) جذران حقيقيان غير نسبيين

36c) $\frac{-3 \pm 3\sqrt{17}}{4}$

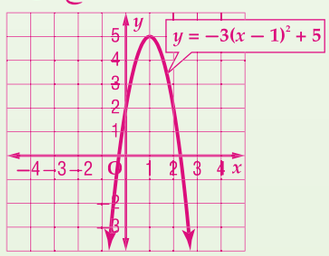
37a) 0

37b) جذر حقيقي نسبي

37c) $\frac{1}{2}$

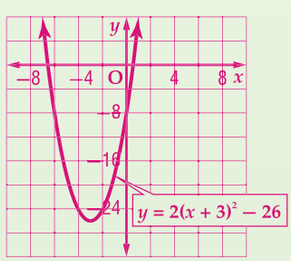
39) $y = -3(x-1)^2 + 5$

الرأس $(1, 5)$، معادلة محور التماثل $x = 1$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أسفل.



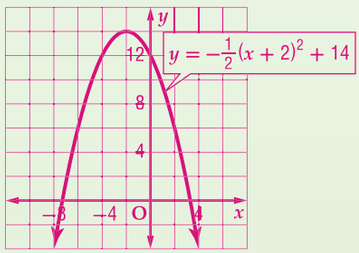
40) $y = 2(x+3)^2 - 26$

الرأس $(-3, -26)$ ، معادلة محور التماثل $x = -3$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أعلى.



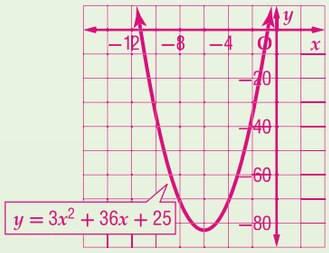
41) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 14$

الرأس $(-2, 14)$ ، معادلة محور التماثل $x = 2$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أسفل.



42) $y = 3(x+6)^2 - 83$

الرأس $(-83, -6)$ ، معادلة محور التماثل $x = -6$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أعلى.



3-5 القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميز (الصفحات 181-189)

أجب عن الفروع a–c لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميّز. للتمارين 37–34 انظر الهامش

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

c) حُلّ المعادلة باستعمال القانون العام.

34) $x^2 - 10x + 25 = 0$ **35)** $x^2 + 4x - 32 = 0$

36) $2x^2 + 3x - 18 = 0$ **37)** $4x^2 - 4x + 1 = 0$

38) فيزياء: قذف محمد كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft\s. إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض (h) بالأقدام يعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 40t + 5$ ، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الارتفاع الذي قذفت منه. 2.62 sec

مثال 7

حُلّ المعادلة $x^2 - 4x - 45 = 0$ باستعمال القانون العام.

$a = 1, b = -4, c = -45$

القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$

$= \frac{4 \pm 14}{2}$

بالكتابة على صورة معادلتين $x = \frac{4+14}{2}$ أو $x = \frac{4-14}{2}$

$= 9$ $= -5$

إذن مجموعة الحل $\{-5, 9\}$.

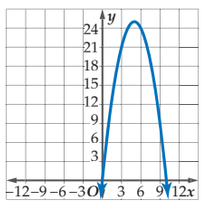
3-6 التحويلات الهندسية في التمثيلات البيانية للدوال التربيعية (الصفحات 193-198)

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة الرأس، (إن لم تكن مكتوبة كذلك)، ثم حدّد رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، واتجاه فتحة القطع، ومثل الدالة بيانيًّا: للتمارين 42–39 انظر الهامش

39) $y = -3(x-1)^2 + 5$ **40)** $y = 2x^2 + 12x - 8$

41) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 12$ **42)** $y = 3x^2 + 36x + 25$

43) نظرية الأعداد: يُبيّن التمثيل البياني أدناه حاصل ضرب عددين مجموعهما 10. أوجد المعادلة التي تمثل حاصل الضرب، واستعملها لمعرفة هذين العددين اللذين سيعطيان أكبر حاصل ضرب.



$f(x) = -x^2 + 10x$, 5, 5

مثال 8

اكتب المعادلة التربيعية $y = 3x^2 + 24x + 15$ بصيغة الرأس، ثم حدّد رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، واتجاه فتحة القطع.

المعادلة الأصلية $y = 3x^2 + 24x + 15$

الخاصية التجميعية، ثم التحليل $y = 3(x^2 + 8x) + 15$

بإكمال المربع $y = 3(x^2 + 8x + 16) + 15 - 3(16)$

بكتابة $x^2 + 8x + 16$ على صورة مربع كامل $y = 3(x+4)^2 - 33$

وهكذا فإن $a = 3, h = -4, k = -33$. ويكون رأس القطع $(-4, -33)$، ومعادلة محور التماثل $x = -4$، وبما أن a موجبة، فإن القطع مفتوح إلى أعلى.

أجب عن الفروع a, b, c في كل معادلة مما يأتي:

a أوجد مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع.

b كوّن جدولًا لبعض قيم x ، $f(x)$ على أن يتوسط فيه الإحداثي x لرأس القطع هذه القيم.

c استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة بيانيًّا.

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$ للأسئلة 3–1 انظر الهامش

2) $f(x) = -2x^2 + 5x$

3) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

حدد ما إذا كان لكل دالة مما يأتي قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجدها:

4) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ صغرى، 0

5) $f(x) = -x^2 + 6x$ عظمى، 9

حُلّ كل معادلة مما يأتي باستعمال أي طريقة تختارها، وأوجد الحلول الفعلية:

6) $x^2 - 8x - 9 = 0$ $-1, 9$

7) $-4.8x^2 + 1.6x + 24 = 0$ $\frac{1 \pm \sqrt{181}}{6}$

8) $12x^2 + 15x - 4 = 0$ $\frac{-15 \pm \sqrt{417}}{24}$

9) $x^2 - 7x - \frac{17}{4} = 0$ $\frac{7 \pm \sqrt{66}}{2}$

10) $4x^2 + x = 3$ $-1, \frac{3}{4}$

11) $-9x^2 + 40x + 84 = 0$ $-\frac{14}{9}, 6$

12) ألقى أحد الهواة جسمًا رأسيًّا إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها 30 ft\sec من منطاد يرتفع 350 ft عن سطح الأرض، كم يستغرق الجسم حتى يصل سطح الأرض (استعمل المعادلة $-16t^2 - 30t + 350 = 0$ لحساب الزمن اللازم)؟ 3.83 sec تقريبًا

13) **اختيار من متعدد:** أي المعادلات الآتية جذراها $\frac{1}{5}, -6$ ؟ C

a $0 = 5x^2 - 29x - 6$

b $0 = 5x^2 + 31x + 6$

c $0 = 5x^2 + 29x - 6$

d $0 = 5x^2 - 31x + 6$

بسط كلًّا مما يأتي:

14) $(3 - 4i) - (9 - 5i)$ $-6 + i$

15) $\frac{4i}{4 - i}$ $-\frac{4}{17} + \frac{16}{17}i$

أجب عن الفروع a, b, c في كل معادلة تربيعية مما يأتي:

a أوجد قيمة المميّز.

b أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c حُلّ المعادلة باستعمال القانون العام.

16) $6x^2 + 7x = 0$ للسؤالين 16, 17 انظر الهامش

17) $5x^2 = -6x + 1$

18) $2x^2 + 5x - 8 = -13$

18a) -15

18b) جذران مركبان

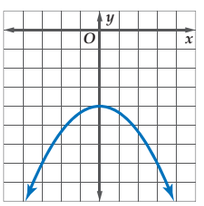
18c) $\frac{-5 \pm i\sqrt{15}}{4}$

اكتب كل معادلة مما يأتي باستعمال صيغة الرأس، ثم حدد رأس القطع ومعادلة محور التماثل واتجاه فتحة القطع:

19) $3x^2 + 6x = 2 + y$ المعادلة هي $y = 3(x + 1)^2 - 5$ ، الرأس $(-1, -5)$ ، معادلة محور التماثل هي $x = -1$ ، فتحة القطع إلى أعلى.

20) $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = y$

21) أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل ومقطع المحور y للتمثيل البياني المجاور.



الرأس $(4, 0)$ ، معادلة محور التماثل هي $x = 0$

20) المعادلة هي $y = (x + \frac{9}{2})^2$ ، الرأس $(\frac{-9}{2}, 0)$ ، معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-9}{2}$ ، فتحة القطع إلى أعلى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	اخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	اخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	احد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 3-6, 3-5, 3-4, 3-3, 3-2, 3-1	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص(142)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 3 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

المعالجة

بناء على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلبة.

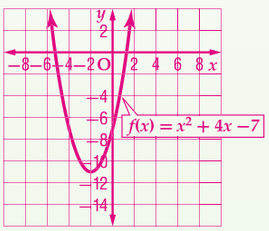
إجابات:

1a) مقطع المحور y يساوي -7 ، معادلة محور التماثل $x = -2$ ، الإحداثي x لرأس القطع -2

1b)

x	$f(x)$
-4	-7
-3	-10
-2	-11
-1	-10
0	-7

1c)

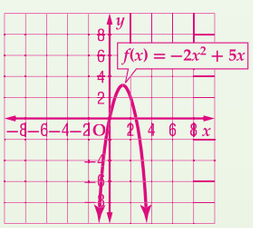


2a) مقطع المحور y يساوي 0 ، معادلة محور التماثل $x = \frac{5}{4}$ ، الإحداثي x لرأس القطع $\frac{5}{4}$

2b)

x	$f(x)$
0	0
1	3
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{8}$
2	2
3	-3

2c)

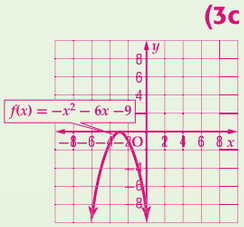


3a) مقطع المحور y يساوي -9 ، معادلة محور التماثل $x = -3$ ، الإحداثي x لرأس القطع -3

3b)

x	$f(x)$
-5	-4
-4	-1
-3	0
-2	-1
-1	-4

3c)



16a) 49 **16b)** جذران حقيقيان نسبيان **16c)** $-\frac{7}{6}, 0$

17a) 56 **17b)** جذران حقيقيان غير نسبيان **17c)** $\frac{-3 \pm \sqrt{14}}{5}$

1 التركيز

الهدف

- استعمال استراتيجية التمثيل البياني؛ لحل مسائل اختبار معياري .

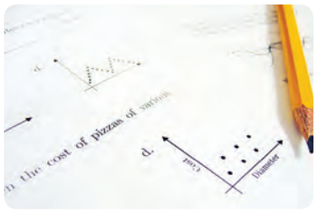
2 التدريس

أسئلة التعزيز

أسأل:

- اذكر العناصر الأساسية للتمثيل البياني. إجابة ممكنة: العنوان، المحاور الأفقية والرأسية، مقياس الرسم.
- أي أنواع المعادلات يمثلها القطع المكافئ؟ المعادلة التربيعية.
- كيف تتحقق من أن نقطة تقع على منحنى القطع المكافئ؟ إجابة ممكنة: كل نقطة على التمثيل البياني يجب أن تكون حلاً للمعادلة أو الدالة التي يمثلها المنحنى.

استعمال التمثيل البياني



استعمال الرسومات والمنحنيات يساعدك على حل أنواع مختلفة من المسائل في الاختيارات المعياري. فالرسم يساعدك على حل المعادلات، وتجد قيم الدوال، وتفسير حلول المسائل الحياتية.

استراتيجيات استعمال التمثيل البياني

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية، واسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما المعلومات المعطاة في المسألة؟
- كيف يمكن أن يساعد الرسم على حل المسألة؟

الخطوة 2

ارسم التمثيل البياني.

- مثل التمثيل البياني على ورقة مسودة مناسبة.
- يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية للتمثيل البياني.

الخطوة 3

حُلّ مسألة.

- استعمل تمثيلك البياني لحل المسألة.
- تحقق إن كان حلك منطقيًّا أو معقولًا.

مثال

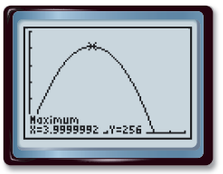
اقرأ المسألة، وحدد المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

صنع طلبة أحد الصفوف نموذج صاروخ، وأطلق في حقل واسع إلى أعلى بسرعة ابتدائية 128 ft/sec، وتمثل $h(t) = -16t^2 + 128t$ ارتفاع الصاروخ h بالأقدام بعد t ثانية. كم يحتاج من الوقت ليصل أقصى ارتفاع؟

A 4 sec **B** 5 sec **C** 6 sec **D** 8 sec

الفصل 3 التهيئة للاختبارات المعيارية

يسمح لك التمثيل البياني للدالة التربيعية أن تحدد قيمة ارتفاع الصاروخ عندما تحدث. وتساعدك الآلة الحاسبة البيانية في سرعة الحصول على الشكل وتحليله.



اضغط المفاتيح: Graph X,T,θ,n x^2 + 128 X,T,θ,n (−) 16 Y=

بعد تمثيل المعادلة استعمل Maximum قائمة CALC.

اضغط 4 [CALC] 2nd . ثم ◀ لوضع المؤشر على يسار النقطة العظمى،

ثم اضغط ENTER . استعمل الأسهم ▶ لوضع المؤشر على يمين النقطة العظمى،

ثم اضغط ENTER مرتين.

يوضّح التمثيل البياني لمسار الصاروخ أنه يحتاج إلى 4 sec للوصول إلى أقصى ارتفاع ويبلغ 256 ft ،

الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدّد المطلوب، ثم استعمل معطيات المسألة لحلها.

1) ما جذرا المعادلة $y = 2x^2 + 10x - 48$؟ **C**

A $-5, 4$ **C** $-8, 3$

B $-6, 1$ **D** $2, 3$

2) كم مرة يقطع التمثيل البياني لـ $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ المحور x؟ **A**

A 0 **C** 2

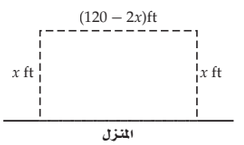
B 1 **D** 3

3) ما قيمة x التي تجعل قيمة $f(x) = x^2 + 5x + 6$ أقل ما يمكن؟ **H**

F -5 **H** $-\frac{5}{2}$

G -3 **J** -2

4) يستعمل محمد 120 ft من السياج؛ ليغلق 3 جهات من حديقته التي تشكل مستطيلًا، ويغلق منزله وهو الجهة الرابعة للحديقة.



وتمثل $f(x) = x(120 - 2x)$ مساحة سطح الحديقة. ما أكبر مساحة يمكن أن يسيجها محمد؟ **G**

F 1650 ft^2 **H** 1980 ft^2

G 1800 ft^2 **J** 2140 ft^2

5) لأي معادلة يكون الإحداثي x لرأس القطع يساوي 4؟ **A**

A $f(x) = x^2 - 8x + 15$ **C** $f(x) = x^2 + 6x + 8$

B $f(x) = -x^2 - 4x + 12$ **D** $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

ألقت عائشة كرة التنس إلى أعلى بسرعة 65 ft/sec من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، إذا كان ارتفاع الكرة عن سطح الأرض h بالأقدام بعد t ثانية معطى بالدالة: $h(t) = -16t^2 + 65t + 4$. أوجد الزمن إلى أقرب ثانية حتى تصل الكرة أقصى ارتفاع لها . A

A 2 sec

B 4 sec

C 70 sec

D 140 sec

3 التقويم

استعمل التمارين 5 – 1؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملًا لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

1) A لم يُميز تأثير ضرب الدالة في عدد من تأثير جمع أو طرح عدد للدالة.

B لم يُميز تأثير ضرب الدالة في عدد من تأثير جمع أو طرح عدد للدالة.

C الإجابة الصحيحة.

D لم يُميز جهة الإزاحة.

2) A خمّن الإجابة.

B الإجابة الصحيحة.

C أخطأ بالإشارات عند حل معادلتي الدرجة الأولى بعد القسمة والجذر التربيعي.

D اعتبر $2x + 1$ هي x .

3) A خمّن قاسم من قواسم العدد 48 .

B خمّن قاسم من قواسم العدد 48 .

C خمّن قاسم من قواسم العدد 48 .

D الإجابة الصحيحة.

4) A خمّن الإجابة.

B حَل المعادلة بشكل خاطئ.

C جَمع نواتج ضرب عناصر القطرين بدلًا من طرحهما.

D الإجابة الصحيحة.

5) A قارن معاملات x^2 وأخذ الأكبر للمعاملات وليس الأكبر للقيمة المطلقة.

B طبق المفهوم بشكل خاطئ.

C طبق المفهوم بشكل خاطئ.

D الإجابة الصحيحة.

6) A ضَرَب العددين المترافقين.

B عَكَس البسط والمقام في المقدار.

C الإجابة الصحيحة.

D أجرى عملية القسمة بطريقة خطأ، حيث قَسَم البسط على كل حد من حدود المقام.

7) A بدل مقطعا y , x .

B أخطأ في تحديد مقطعي y , x .

C أخطأ في تحديد منطقة الحل.

D الإجابة الصحيحة.

8) A أخطأ، فأوجد $B-2A$.

B أخطأ، فأوجد $A-B$.

C أخطأ، فأوجد $B-A$.

D الإجابة الصحيحة.

9) A خَلَط بين الدالة التربيعية ودالة القيمة المطلقة.

B خَلَط بين الدالة المحايدة ودالة القيمة المطلقة.

C الإجابة الصحيحة.

D خَلَط بين دالة أكبر عدد صحيح ودالة القيمة المطلقة.

10) A أخطأ في الإشارات عند حل معادلات الدرجة الأولى بعد التحليل.

B الإجابة الصحيحة.

C حلل المقدار $x^2 + x - 4$ بالشكل $(3x - 2)(x+2)$ (لم يراعِ الحد الأوسط بالتحليل).

D حلل المقدار $x^2 + x - 4$ بالشكل $(3x + 2)(x-2)$ (لم يراعِ الحد الأوسط بالتحليل).

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) ما التأثير الحادث للتمثيل البياني للدالة $y = x^2 + 4$ عندما تتغير إلى $y = x^2 - 3$؟ **C**

A يضيق القطع المكافئ.

B يتسع القطع المكافئ.

C يبقى القطع المكافئ نفسه، ويتحرك رأس القطع إلى الأسفل.

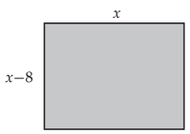
D يبقى القطع المكافئ نفسه، ويتحرك رأس القطع إلى اليسار.

2) ما مجموعة الحل للمعادلة $3(2x + 1)^2 = 27$ ؟ **B**

A $\{-5, 4\}$ **C** $\{2, -1\}$

B $\{-2, 1\}$ **D** $\{-3, 3\}$

3) ما قيمة x التي تجعل مساحة سطح المستطيل أدناه 48 وحدة مربعة؟ **D**



A 4 **C** 8

B 6 **D** 12

4) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي، فإن قيمة x تساوي: **D**

A $\frac{4}{3}$ **C** $-\frac{4}{3}$

B $\frac{4}{5}$ **D** $-\frac{4}{5}$

5) أي معادلات القطوع المكافئة الآتية يكون تمثيلها البياني أوسع رأسيًّا ؟ **D**

A $y = 3x^2$ **C** $y = \frac{3}{4}x^2$

B $y = -\frac{3}{4}x^2$ **D** $y = -6x^2$

6) ما أبسط صورة للمقدار $\frac{2}{1-5i}$ ؟ **C**

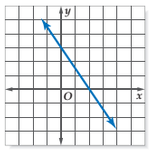
A $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$ **C** $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

B $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ **D** $2 - \frac{2}{5}i$

7) ما المتباينة التي تمثيلها البياني كما في الشكل أدناه؟ **D**

A $2x + 3y \geq 6$ **C** $3x + 2y \leq 6$

B $2x - 3y \geq 6$ **D** $3x + 2y \geq 6$

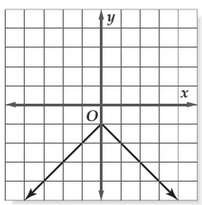


8) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، وكانت X مصفوفة رتبتها 2×2 ، بحيث $X = 2A - B$ ، فإن: **D**

A $X = 3\,B$ **C** $X = -2\,B$

B $X = 2\,A$ **D** $X = 3\,A$

9) ما المعادلة الأم للدالة الممثلة أدناه؟ **A**



A $y = x^2$ **C** $y = |x|$

B $y = x$ **D** $y = [[x]]$

10) ما جذرا المعادلة التربيعية $4 = 3x^2 + x$ ؟ **B**

A $-1, \frac{4}{3}$ **C** $-2, \frac{2}{3}$

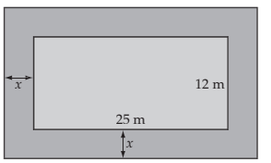
B $-\frac{4}{3}, 1$ **D** $-\frac{2}{3}, 2$

الفصل 3 اختبار معياري تراكمي
للفصول 3-1

أسئلة مقالية

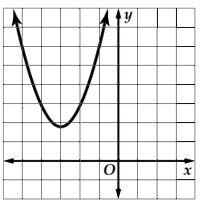
أسئلة ذات إجابات قصيرة

11) يُبيّن الشكل أدناه حديقة محاطة بممر عرضه x مترًا. إذا علمت أن مساحة سطح الحديقة مع الممر $558\ m^2$ ، فأوجد عرض الممر بالأمتار.



12) ما معادلة المستقيم المار بالنقطة (3, 2) وعمودي على المستقيم $4y + 2x = 4$ ؟ $y = 2x - 1$

13) استعمل الدالة التربيعية أدناه للإجابة عن الفروع الآتية:



a) كم جذرًا حقيقيًّا للدالة؟ 0

b) كم جذرًا تخيليًّا للدالة؟ 2

c) ماذا تعرف عن المميّز لهذه الدالة؟ فسّر إجابتك. إجابة ممكنة: المميّز سالب؛ لأن الجذور أعداد تخيلية.

14) ما قيمة a في المعادلة المصفوفية الآتية؟ 7.5

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

15) أوجد مقطع المحور y ، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع لِـ $f(x) = x^2 - 8x + 9$. انظر الهامش

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

16) أُطلِق صاروخ تجريبي من مستوى سطح الأرض. إذا عبرت المعادلة $h = -4.9t^2 + 56t$ عن ارتفاع الصاروخ بالأمتار، و t تمثل الزمن بالثواني بعد الإطلاق انظر الهامش

a) ما أقصى ارتفاع سيصل إليه الصاروخ؟ قرِّب إلى أقرب عُشْر، وبيِّن كل خطوة مفسِّرًا طريقتك في الحل.

b) كم يستغرق الصاروخ بعد إطلاقه ليصل إلى أقصى ارتفاع؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. 5.7 sec

17) اشترت هند 40 طابعة من نوعين مختلفين: حبر، وليزر بقيمة 11600 BD ، إذا كان سعر طابعة الحبر 200 BD وسعر طابعة الليزر 500 BD ، فأجب عن الفقرات الآتية: للفروع a — c انظر الهامش

a) اكتب نظام معادلات يصف الموقف، حيث x عدد طابعات الحبر، y عدد طابعات الليزر.

b) اكتب المعادلة المصفوفية التي يمكن استعمالها لحل النظام في الفرع a .

c) أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، واستعمله للحل لإيجاد عدد طابعات الحبر وعدد طابعات الليزر.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟																			
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
فاذهب للدرس ...	3-6	3-4	3-3	2-5	3-6	3-4	1-6	2-2	3-6	3-5	3-3	1-2	3-5	2-3	3-1	3-5	2-5

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

إجابات:

15) مقطع المحور y يساوي 9 ،
معادلة محور التماثل $x = 4$ ،
الإحداثي x لرأس القطع 4 .

16a) 160 m ، إجابة ممكنة صيغة الرأس هي:
$h = -4.9\left(t - \frac{40}{7}\right)^2 + 160$
نقطة رأس القطع $\left(\frac{40}{7}, 160\right)$.

17a)
$$x + y = 40$$
$$200x + 500y = 11600$$

17b)

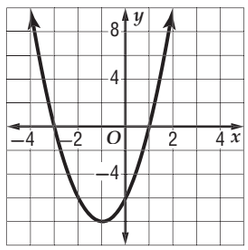
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 11600 \end{bmatrix}$$

17c) 28 طابعة حبر، وَ 12 طابعة ليزر.

الدرس 1-3، ص 153 - 151

(1

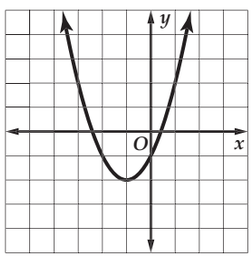
x	−3	−2	−1	0	1	2
y	0	−6	−8	−6	0	10



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq -8\}$

(2

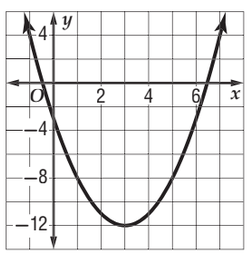
x	−3	−2	−1	0	1	2
y	2	−1	−2	−1	2	7



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq -2\}$

(3

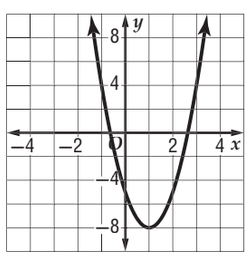
x	y
−1	4
0	−3
1	−8
2	−11
3	−12
4	−11
5	−8
6	−3
7	4



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq -12\}$

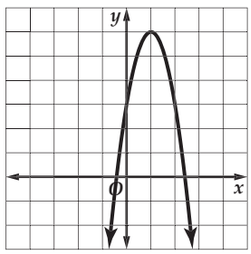
(4

x	−2	−1	0	1	2	3
y	19	4	−5	−8	−5	4

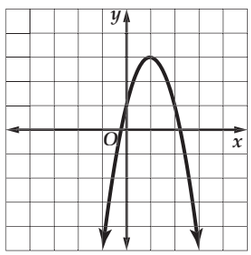


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq -8\}$

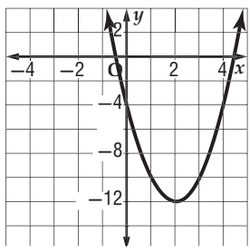
(19



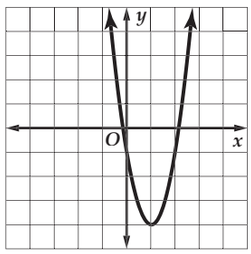
(20



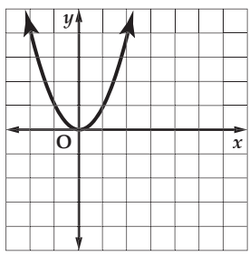
(21



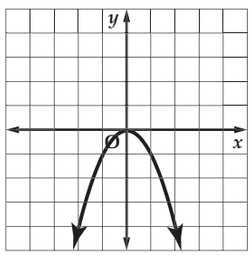
(22



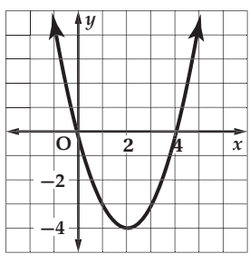
(23



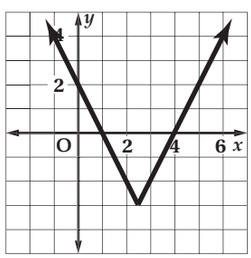
(24



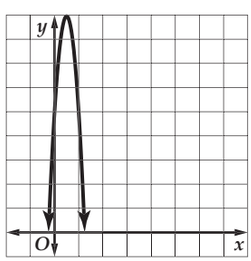
(25



(26

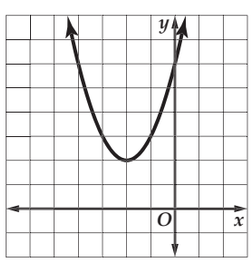


(27a



(28

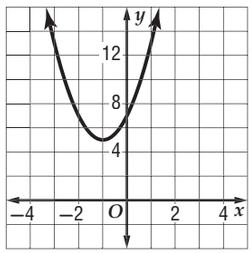
x	−4	−3	−2	−1	0
y	6	3	2	3	6



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq 2\}$

(29)

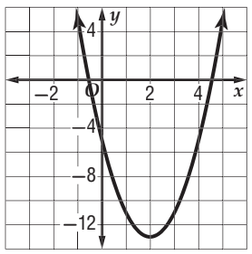
x	−3	−2	−1	0	1
y	13	7	5	7	13



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq 5\}$

(30)

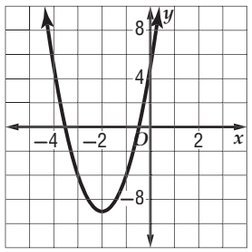
x	4	3	2	1	0
y	−5	−11	−13	−11	−5



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq -13\}$

(31)

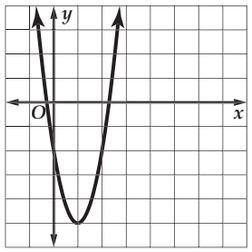
x	0	−1	−2	−3	−4
y	5	−4	−7	−4	5



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq -7\}$

(32)

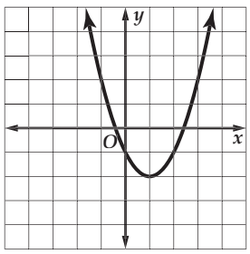
x	3	2	1	0	−1
y	7	−2	−5	−2	7



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq -5\}$

(33)

x	3	2	1	0	−1
y	2	−1	−2	−1	2



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq -2\}$

(49a) عظمى

(49b) 9

(49c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \leq 9\}$

(50a) عظمى

(50b) −9

(50c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \leq -9\}$

(51a) عظمى

(51b) −48

(51c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \geq -48\}$

(52a) عظمى

(52b) 50

(52c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \leq 50\}$

(53a) عظمى

(53b) 33

(53c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \leq 33\}$

(54a) عظمى

(54b) −56

(54c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \geq -56\}$

(55a) عظمى

(55b) 4

(55c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \leq 4\}$

(56a) عظمى

(56b) 4

(56c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y \geq 4\}$

(57a) عظمى

(57b) 3

57c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى $= \{y \mid y \le 3\}$

58a) صغرى

58b) 0

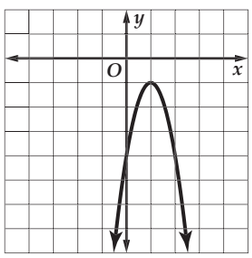
58c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى $= \{y \mid y \ge 0\}$

59a) عظمى

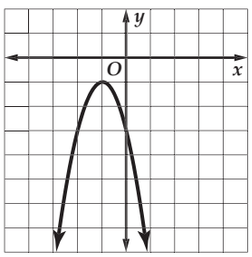
59b) 15

59c) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى $= \{y \mid y \le 15\}$

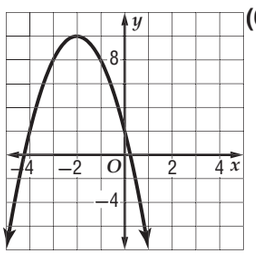
60)



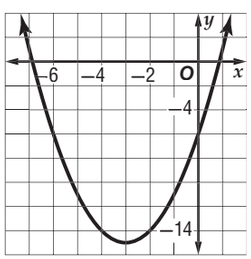
61)



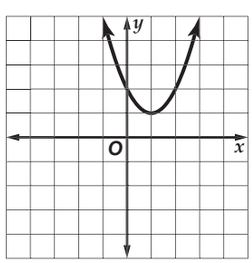
62)



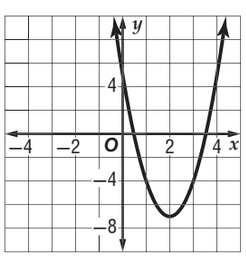
63)



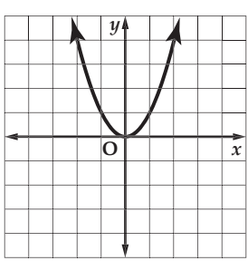
64)



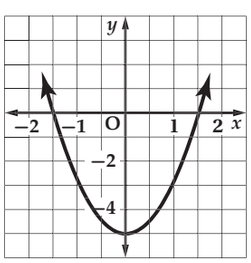
65)



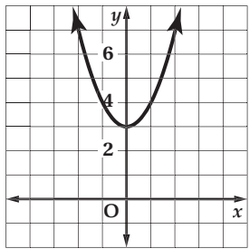
66)



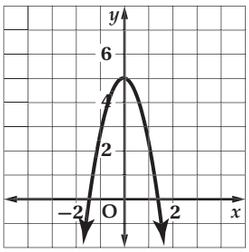
67)



68)

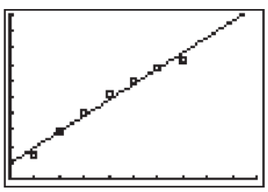


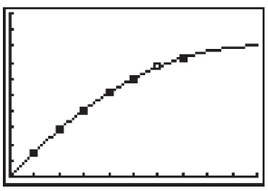
69)



الدرس 1-3 (توسع)، ص 157

1) معادلة التنبؤ الخطية — معادلة التنبؤ التربيعية





[0, 1] scl: 0.1 by [0, 20] scl: 2 — [0, 1] scl: 0.1 by [0, 20] scl: 2

معادلة خطية: $h(t) = 19.2t + 1.92$

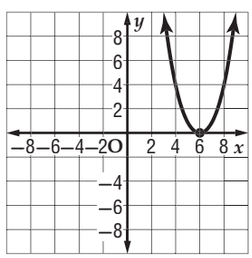
معادلة تربيعية : $h(t) = -16t^2 + 32t$

المعادلة التربيعية تناسب البيانات أفضل.

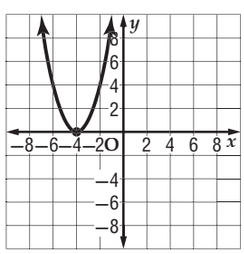
3) شكل المعادلة الخطية تعني أن يستمر لاعب كرة السلة بالارتفاع، بينما توضّح المعادلة التربيعية أن يصل إلى أعلى نقطة في فقرة، ثم يعود إلى سطح الأرض .

الدرس 2-3 (تأكد)، ص 159

2A)

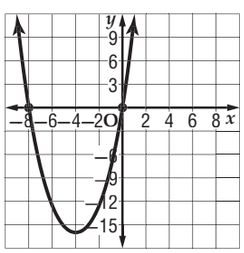


2B)



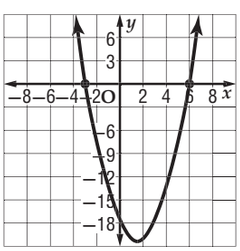
الدرس 2-3، ص 164 - 158

4)



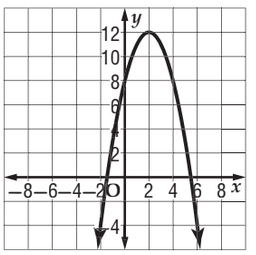
0, −8

5



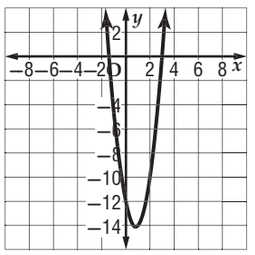
−3, −6

(6)



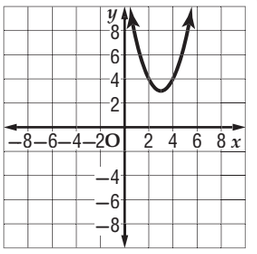
بين -2 ، -1
وبين 5 ، 6

(7)



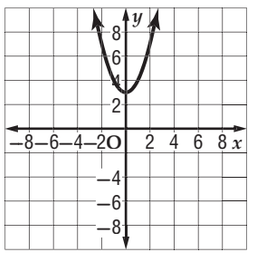
بين -2 ، -1
وبين 3 ، 4

(8)



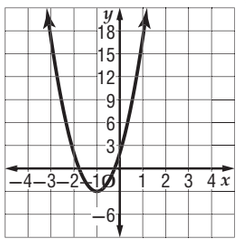
لا يوجد حلول حقيقية

(9)



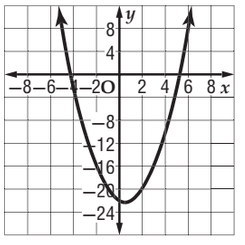
لا يوجد حلول حقيقية

(10)



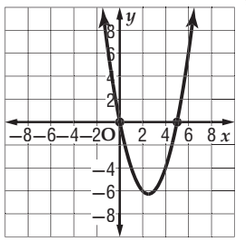
بين -2 ، -1
وبين 0 ، $1-$

(11)

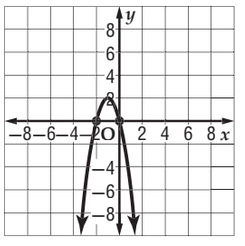


بين -4 ، -5
وبين 5 ، 6

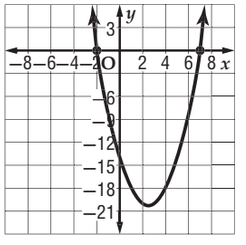
(20)



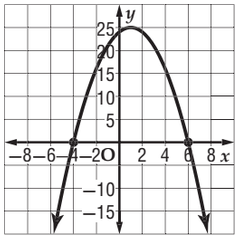
(21)



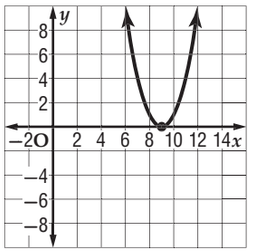
(22)



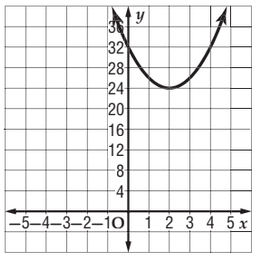
(23)



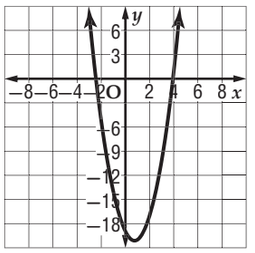
(24)



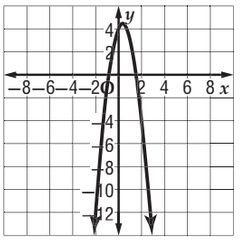
(25)



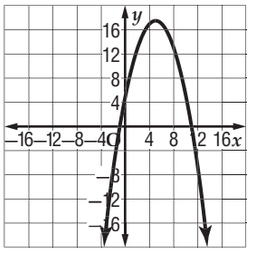
(26)



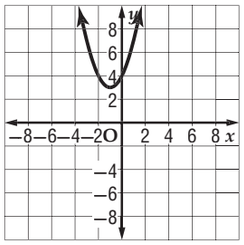
(27)



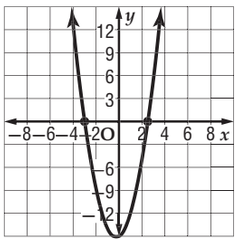
(28)



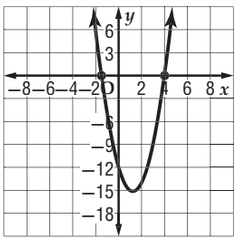
(29)



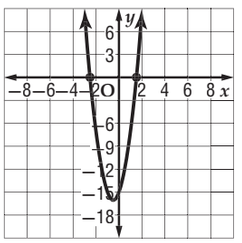
(37)



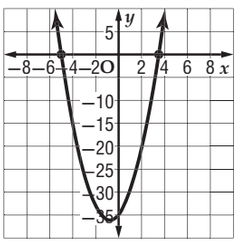
(38)



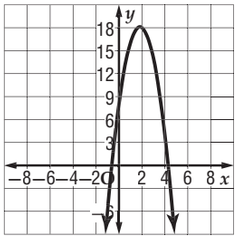
(39)



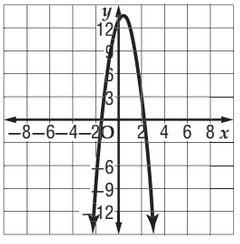
(40)



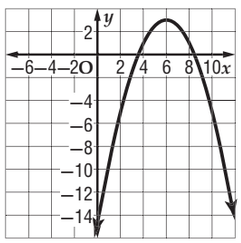
(41)



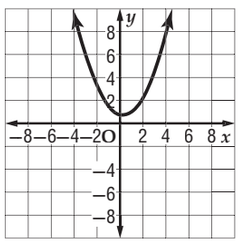
(42)



(43)



(44)



الدرس 5-3، ص 181-188

(20a) -87

(20b) جذران مركبان

(20c) $\frac{3 \pm i\sqrt{87}}{6}$

(21a) -40

(21b) جذران مركبان

(21c) $\frac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2}$

(22a) 36

(22b) جذران حقيقيان نسبيان

(22c) $1, -\frac{1}{5}$

(23a) 0

(23b) جذر حقيقي نسبي واحد

(23c) 3

(24a) -16

(24b) جذران مركبان

(24c) $-1 \pm 2i$

(25a) -56

(25b) جذران مركبان

(25c) $\frac{2 \pm i\sqrt{14}}{6}$

(26a) 64

(26b) جذران حقيقيان نسبيان

(26c) $0, -\frac{8}{5}$

(27a) 36

(27b) جذران حقيقيان نسبيان

(27c) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

(28a) 160

(28b) جذران حقيقيان غير نسبيين

(28c) $\frac{-1 \pm \sqrt{10}}{6}$

(29a) -3.48

(29b) جذران مركبان

(29c) $\frac{-1.3 \pm i\sqrt{0.87}}{0.8}$

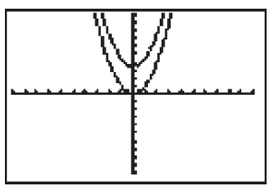
(30a) 13.48

(30b) جذران حقيقيان غير نسبيين

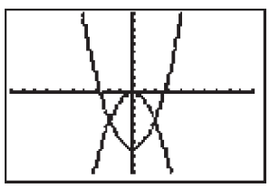
(30c) $\frac{-0.7 \pm \sqrt{3.37}}{0.6}$

استكشاف 6-3، ص 192

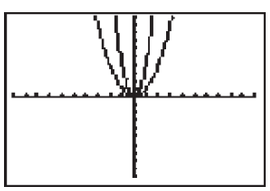
(4) كليهما لهما الشكل نفسه، لكن تمثيل $y = x^2 + 3.5$ فوق تمثيل $y = x^2$ بـ 3.5 وحدة.



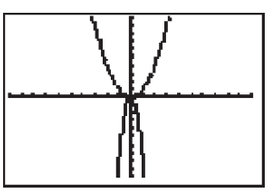
(5) كليهما لهما الشكل نفسه، لكن تمثيل $y = -x^2$ مفتوح إلى أسفل، بينما تمثيل $y = x^2 - 7$ مفتوح إلى أعلى وأقل من $y = x^2$ بـ 7 وحدات.



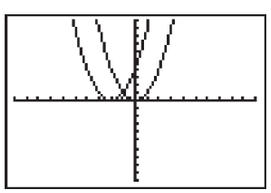
(6) تمثيل $y = 4x^2$ أوسع من تمثيل $y = x^2$.



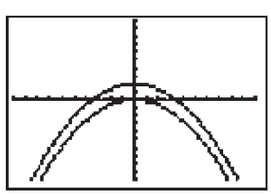
(7) تمثيل $y = -8x^2$ مفتوح إلى أسفل وأضيق من تمثيل $y = x^2$.



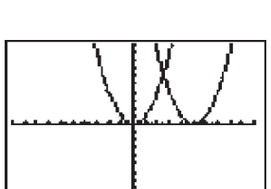
(8) كليهما لهما الشكل نفسه مفتوح إلى أعلى، لكن تمثيل $y = (x + 2)^2$ جرى له انسحاب وحدتين إلى اليسار عن تمثيل $y = x^2$.



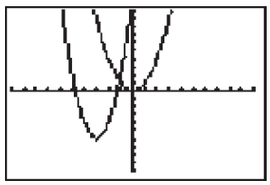
(9) كليهما لهما الشكل نفسه، ومفتوح إلى أسفل لكن تمثيل $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2$ جرى له انسحاب وحدتين إلى أعلى عن تمثيل $y = \frac{-1}{6}x^2$.



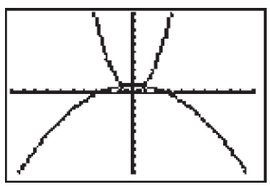
(10) كليهما لهما الشكل نفسه، لكن تمثيل $y = (x - 5)^2$ جرى له انسحاب 5 وحدات إلى اليمين عن تمثيل $y = x^2$.



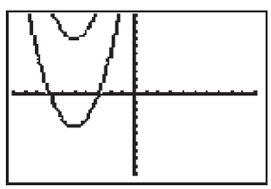
(11 تمثيل $y = 2(x + 3)^2 - 6$ جرى له انسحاب 3 وحدات إلى اليسار، 6 وحدات إلى أسفل عن تمثيل $y = x^2$.



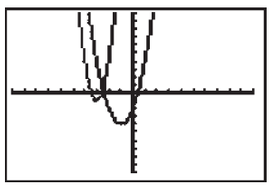
(12 تمثيل $y = -\frac{1}{8}x^2 + 1$ مفتوح إلى أسفل وجرى له انسحاب وحدة واحدة إلى أعلى عن $y = x^2$.



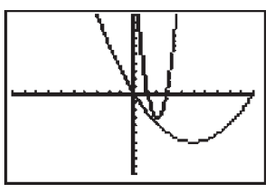
(13 كليهما لهما التمثيل نفسه، لكن تمثيل $y = (x + 5)^2 + 7$ جرى له انسحاب 11 وحدة إلى أعلى عن تمثيل $y = (x + 5)^2 - 4$.



(14 تمثيل $y = 5(x + 3)^2 - 1$ أضيق من تمثيل $y = 8(x + 1)^2 - 4$.

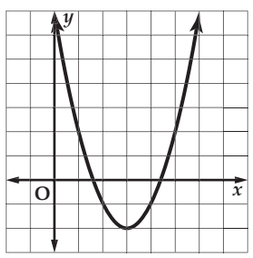


(15 تمثيل $y = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 6$ أوسع من تمثيل $y = 5(x + 2)^2 - 3$.

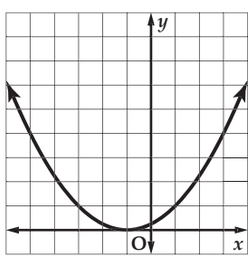


الدرس 6-3 (تأكد)، ص 195

(3A

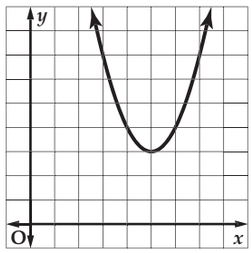


(3B

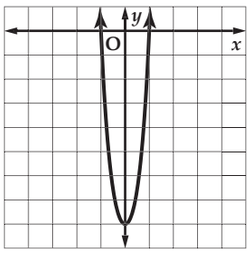


الدرس 6-3، ص 193-198

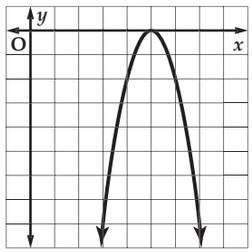
(15



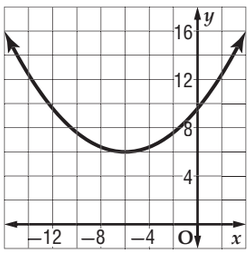
(16



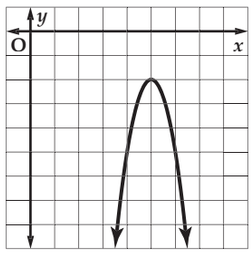
(17



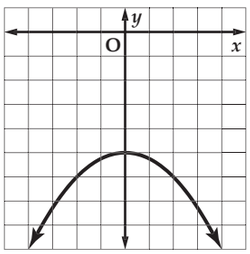
(18



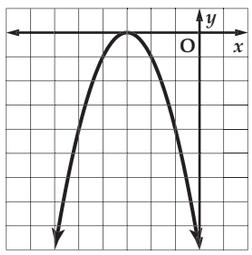
(19



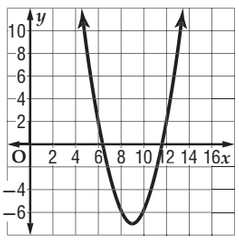
(20



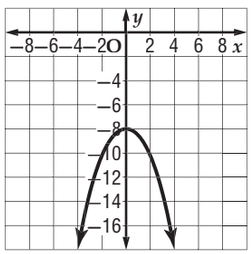
(21



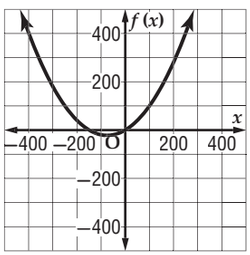
(22



(23



(24a $f(x) = \frac{1}{250}(x + 75)^2 - \frac{45}{2}$



(31 $y = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}$،

رأس القطع $(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$ ، معادلة محور التماثل $x = \frac{2}{3}$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أعلى.

32) $y = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{145}{8}$ ،

رأس القطع $(\frac{7}{4}, -\frac{145}{8})$، معادلة محور التماثل $x = \frac{7}{4}$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أسفل.

33) $y = -(x + 2.35)^2 + 8.3225$ ،

رأس القطع $(-2.35, 8.3225)$، معادلة محور التماثل $x = -2.35$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أسفل.

34) $y = (x + 0.7)^2 - 1.69$ ،

رأس القطع $(-0.7, -1.69)$، معادلة محور التماثل $x = -0.7$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أعلى.

35) $y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 3$ ،

رأس القطع $(\frac{1}{3}, -3)$ ، معادلة محور التماثل $x = \frac{1}{3}$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أعلى.

36) $y = (x + 3.5)^2$ ،

رأس القطع $(-3.5, 0)$، معادلة محور التماثل $x = -3.5$ ، اتجاه فتحة القطع إلى أعلى.

39) يمكن كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. عوّض الإحداثي x مكان x ، والإحداثي y مكان y في المعادلة للنقاط الثلاث. وسينتج ثلاث معادلات فيها ثلاثة متغيرات a, b, c . قم بحل نظام المعادلات؛ لإيجاد قيم a, b, c . وهي التي تحدد المعادلة التربيعية.

40) $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = 0$ ،

رأس القطع $\left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ ، معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{2a}$.

41) إجابة ممكنة: إذا كانت $a = 0$ في $f(x) = a(x-h)^2 + k$ تتحول الدالة إلى $f(x) = k$ ، وهي معادلة مستقيم أفقي، أما إذا ساوت a الصفر في $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، فإن الدالة تصبح $f(x) = bx + c$ وهي دالة خطية، وليس من الضروري أن يكون مستقيم أفقي.

42) جميع التمثيلات البيانية للدوال التربيعية هي تحويلات للدالة الأم $y = x^2$.
ومن خلال تحديد هذه التحويلات عند كتابة الدالة بصيغة الرأس يمكنك إعادة رسم التمثيل البياني $y = x^2$ بعد إزاحة رأسه إلى النقطة (h, k)، وتوسيعه أو تضييقه. وتحديد اتجاه فتحة القطع.

ملاحظات

ملحق إجابات كتاب التمارين

1-1 العلاقات والدوال

حدِّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن أيها دالة، وإذا كانت كذلك فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟

1) المجال = {2, 8} ، المدى = {21, 25, 30} ، ليست دالة

2) المجال = {5, 10, 15} ، المدى = {105, 110} ، دالة شاملة

3)

x	y
−3	0
−1	−1
0	0
2	−2
3	4

المجال = {−3, −1, 0, 2, 3} ، المدى = {−2, −1, 0, 4} ، دالة؛ ليست متباينة، شاملة

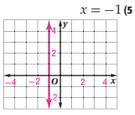
4)

x	y
−2	−1
−2	1
−1	0
1	0
2	1

المجال = {−2, −1, 1, 2} ، المدى = {−1, 0, 1} ، ليست دالة

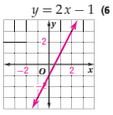
مثّل كل معادلة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها، وحدّد ما إذا كانت تُمثّل دالةً أو لا، وإذا كانت كذلك فهل هي واحد لواحد، أم شاملة، أم تقابل، أم غير ذلك؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلةً أو متصلةً.

5) $x = -1$



المجال = {−1} ، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية، ليست دالة، متصلة

6) $y = 2x - 1$



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية، دالة، تقابل، متصلة

إذا كانت: $g(x) = -2x + 3$ ، $f(x) = \frac{5}{x+2}$ ، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

7) $f(3)$ 1

8) $f(-4)$ $-\frac{5}{2}$

9) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ 2

10) $f(-2)$ غير معرّفة

11) $g(-6)$ 15

12) $f(m-2)$ $\frac{5}{m}$

13) **تخفيضات،** تُمثّل الأزواج المرتبة: (5, 60) , (4, 52) , (3, 42) , (2, 30) , (1, 16) أسعار بيع أعداد مختلفة من منتج في أحد المحال التجارية. حدِّد مجال هذه العلاقة ومداها، ثم حدِّد ما إذا كانت متصلة أو منفصلة؟ وهل تُمثّل دالة أم لا؟ المجال = {1, 2, 3, 4, 5} ، المدى = {16, 30, 42, 52, 60} ، منفصلة، دالة

14) **حاسوب،** يستطيع حاسوب تنفيذ عملية حسابية واحدة خلال 0.0000000015sec، ويعطى زمن تنفيذه لِـ n عملية حسابية بالصيغة $T(n) = 0.0000000015n$. ما الزمن الذي يتطلبه ذلك الحاسوب؛ لتنفيذ 5 بلايين عملية حسابية؟ 7.5 sec

1-2 كتابة المعادلات بصيغة ميل - مقطع

اكتب معادلة بصيغة ميل– مقطع لكل مستقيم ممثَّلٍ بيانيًّا أدناه:

1) $y = 3x - 1$

2) $y = -2x - 2$

3) $y = -x - 4$

اكتب معادلة بمقطع للمستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ ممَّا يأتي:

4) (−5, 4)، الميل −3 ، $y = -3x - 11$

5) (3, 4)، الميل $\frac{1}{2}$ ، $y = \frac{1}{2}x + 1$

6) (−5, 1)، الميل $-\frac{3}{2}$ ، $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

7) (7, 3)، الميل $\frac{2}{7}$ ، $y = \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}6$

8) (−2, $\frac{5}{2}$)، الميل $-\frac{1}{2}$ ، $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

9) (0, 5)، الميل 0 ، $y = 0$

اكتب معادلة بصيغة ميل– مقطع لكل مستقيم ممثَّلٍ بيانيًّا أدناه:

10) $y = x - 6$

11) $y = -x + 5$

12) $y = -2x - 5$

اكتب معادلة بصيغة ميل– مقطع للمستقيم المار بالنقطتين في كلٍّ مما يأتي:

13) (0, −4)، (5, −4) ، $y = -4$

14) (−4, −2)، (4, 0) ، $y = \frac{1}{4}x - 1$

15) (−2, −3)، (4, 5) ، $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

16) (0, 1)، (5, 3) ، $y = \frac{2}{5}x + 1$

17) (−3, 0)، (1, −6) ، $y = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

18) (1, 0)، (5, −1) ، $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

19) **لياقة بدنية،** تبلغ تكلفة (7) جلسات لياقة بدنية 82 BD، وتكلفة (11) جلسة 122 BD. اكتب معادلة خطية لإيجاد التكلفة الكلية (k) لـ x جلسة، ثم استعمل المعادلة لإيجاد تكلفة 4 جلسات. $k = 10x + 12$, 52 BD

1-3 كتابة المعادلات بصيغة نقطة - ميل

اكتب معادلة بصيغة نقطة– ميل للمستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

1) (2، 2)، $m = -3$ ، $y - 2 = -3(x - 2)$

2) (1، −6)، $m = -1$ ، $y + 6 = -(x - 1)$

3) (−3، −4)، $m = 0$ ، $y + 4 = 0$

4) (1، 3)، $m = -\frac{3}{4}$ ، $y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 1)$

5) (−8، 5)، $m = -\frac{2}{5}$ ، $y - 5 = -\frac{2}{5}(x + 8)$

6) (3، −3)، $m = \frac{1}{3}$ ، $y + 3 = \frac{1}{3}(x - 3)$

اكتب كل معادلة مما يأتي بالصورة القياسية:

7) $y - 11 = 3(x - 2)$ ، $3x - y = -5$

8) $y - 10 = -(x - 2)$ ، $x + y = 12$

9) $y + 7 = 2(x + 5)$ ، $2x - y = -3$

10) $y - 5 = \frac{3}{2}(x + 4)$ ، $3x - 2y = -22$

11) $y + 2 = -\frac{3}{4}(x + 1)$ ، $3x + 4y = -11$

12) $y - 6 = \frac{4}{3}(x - 3)$ ، $4x - 3y = -6$

13) $y + 4 = 1.5(x + 2)$ ، $3x - 2y = 2$

14) $y - 3 = -2.4(x - 5)$ ، $12x + 5y = 75$

15) $y - 4 = 2.5(x + 3)$ ، $5x - 2y = -23$

اكتب معادلة بصيغة ميل – مقطع للمستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

16) $y + 2 = 4(x + 2)$ ، $y = 4x + 6$

17) $y + 1 = -7(x + 1)$ ، $y = -7x - 8$

18) $y - 3 = -5(x + 12)$ ، $y = -5x - 57$

19) $y - 5 = \frac{3}{2}(x + 4)$ ، $y = \frac{3}{2}x + 11$

20) $y - \frac{1}{4} = -3(x + \frac{1}{4})$ ، $y = -3x - \frac{1}{2}$

21) $y - \frac{2}{3} = -2(x - \frac{1}{4})$ ، $y = -2x + \frac{7}{6}$

22) **إنشاءات،** تتقاضى شركة BD 8 عن كل ساعة عمل لإزالة الرّدم، مضافًا إليها رسوم تدفع مرةً واحدةً. إذا كان المبلغ الذي تقاضته الشركة مقابل 9 ساعات عمل هو 95 BD، فأجب عما يأتي:

a) اكتب معادلة بصيغة نقطة – ميل؛ لإيجاد المبلغ الكلي (y) الذي تتقاضاه الشركة لعدد (x) من الساعات. $y - 95 = 8(x - 9)$

b) اكتب المعادلة بصيغة ميل – مقطع. $y = 8x + 23$

c) ما قيمة الرسوم الإضافية؟ 23 BD

1-4 شكل الانتشار وخط الأعداد

للتمرينين 2, 1، أجب عن الفروع c – a:

a) ارسم شكل الانتشار، والخط المطابق، ثم صِفْ نوع الارتباط.

b) استعمل زوجين مرتَّبين من البيانات؛ لكتابة معادلة التنبؤ.

c) استعمل معادلة التنبؤ الخاصة بك للتنبؤ بالقيم المفقودة.

1) **أمان،** سُنّت قوانين صارمة في إحدى الدول العربية ضد مخالِفِي أنظمة المرور لتقليل عدد الحوادث المرورية، والجدول أدناه يمثل عدد الأرواح التي أنقذتها هذه القوانين في بعض السنوات:

السنة	1999	2000	2001	2002	2003	2015
عدد الأشخاص (بالآلاف)	19.1	20.0	21.0	21.9	22.8	?

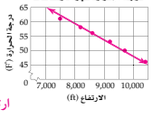
1b) باستعمال النقطتين (2000,20),(2001,21)، $y = x - 1980$

1c) إجابة ممكنة 35

ارتباط موجب قوي

2) **ارتفاعات،** يقود سعيد سيارته على طريق جبلي، وكانت درجة الحرارة تنخفض كلما صعد أكثر على الجبل. وسجّل عداد درجات الحرارة (F°) القراءات على ارتفاعات مختلفة كما في الجدول أدناه.

الارتفاع (ft)	7500	8200	8600	9200	9700	10400	12000
الحرارة (F)	61	58	56	53	50	46	?



2b) إجابة ممكنة: باستعمال النقطتين (7500, 61),(9700, 50)
$y = -0.005x + 98.5$

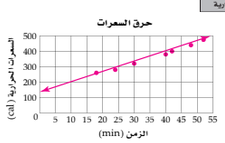
2c) إجابة ممكنة 38.5° F

ارتباط سالب قوي

3) **صحة،** يراقب أحمد السعرات الحرارية التي يفقدها عند القيام بالتمارين الرياضية. ويعطي الجدول أدناه زمن التمرين بالدقائق، وعدد السعرات الحرارية التي تم فقدها خلال عدة مرات من أداء التمارين. أوجد معادلة خط الانحدار، ومثّله بيانيًّا. ثم استعمل هذه المعادلة للتنبؤ بعدد السعرات الحرارية التي يفقدها في تمرينٍ رياضيٍّ زمنه 60 min .

الزمن (min)	18	24	30	40	42	48	52	60
السعرات الحرارية	260	280	320	380	400	440	475	?

إجابة ممكنة: معادلة خط الانحدار: $y = 6395x + 132.95$ عدد السعرات المفقودة: 517 cal تقريبًا



ملحق إجابات كتاب التمارين

1-5 دوال خاصة

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثمَّ حدِّد مجالها ومداها:

1) $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -2 \\ 3x, & x > -2 \end{cases}$

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية

2) $h(x) = \begin{cases} 4-x, & x > 0 \\ -2x-2, & x < 0 \end{cases}$

المجال = $\{x | x \neq 0\}$ ، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية

3) $f(x) = [\![x]\!] + \frac{1}{2}$

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

4) $f(x) = [\![x]\!] - 2$

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = مجموعة الأعداد الصحيحة

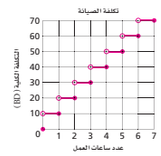
5) $g(x) = -2|x|$

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى = $\{y | y \le 0\}$

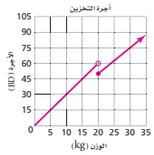
6) $f(x) = |x+1|$

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y | y \ge 0\}$

7) **أعمال،** تتقاضى مؤسسة متخصصة في صيانة المصاعد 10 BD عن كل ساعة عمل، أو أي جزء منه تتطلبه الصيانة. مثّل الدالة الدرجية التي تمثّل هذا الموقف بيانيًّا.



8) **أعمال،** أعلنت شركة شحنٍ أنها ستتقاضى 3 BD عن كل كيلو جرام في الطرود التي يقل وزنها عن 20 kg، و 2.5 BD عن كل كيلو في الطرود التي تزن 20 kg فأكثر. مثّل بيانيًّا الدالة التي تعبر عن هذا العرض.



1-6 الدوال الأم والتحويلات الهندسية

صِفِ الإزاحة في التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

1) $y = x + 3$ — إزاحة الدالة الأم 3 وحدات إلى أعلى

2) $y = x^2 - 3$ — إزاحة الدالة الأم 3 وحدات إلى أسفل

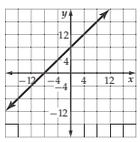
3) $y = |x| + 5$ — إزاحة إلى أعلى 5 وحدات

صِفِ التمدد في التمثيل البياني لكل دالة ممَّا يأتي:

4) $y = 2|x|$ — تضيق رأسي

5) $4y = x^2$ — توسع رأسي

6) **كيمياء،** قام كيميائي بفحص سرعة التفاعل الكيميائي عند درجات حرارة مختلفة، فكوَّن التَّمثيل البياني المجاور. ما نوع الدالة التي تربط بين الحرارة، وسرعة التفاعل الكيميائي؟



دالة خطية $y = x + 8$ ، وهي انسحاب للدالة الأم المحايدة.

1-7 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

مثّل كلَّ متباينةٍ ممَّا يأتي بيانيًّا:

1) $y \le -3$

2) $x > 2$

3) $x + y \le -4$

4) $y < -3x + 5$

5) $y < \frac{1}{2}x + 3$

6) $y - 1 \ge -x$

7) $x - 3y \le 6$

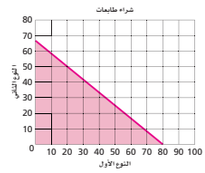
8) $y > |x| - 1$

9) $y > -3|x+1| - 2$

10) **طابعات،** أرادت مؤسسة شراء نوعين من الطابعات. إذا كان سعر الطابعة من النوع الأول 100 BD ، ومن النوع الثاني 120 BD ، وكان المبلغ المخصص لشراء تلك الطابعات لا يزيد على 8000 BD، فأجب عن الفروع a–c:

a) اكتب متباينةً تُمثّل ذلك الموقف. $100d + 120n \le 8000$

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.



c) إذا أرادت المؤسسة شراء 50 طابعةً من النوع الأول، و25 طابعةً من النوع الثاني، فهل يكفي المبلغ المخصص لشرائها؟ نعم

1-8 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا

حُلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا :

1) $y + 1 < -x$, $y \ge 1$

2) $x > -2$, $2y \ge 3x + 6$

3) $y \le 2x - 3$, $y \le -\frac{1}{2}x + 2$

4) $x + y > -2$, $3x - y \ge -2$

5) $|y| \le 1$, $y < x - 1$

6) $3y > 4x$, $2x - 3y > -6$

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل كل نظام متباينات ممَّا يأتي بيانيًّا :

7) $y \ge 1 - x$, $y \le x - 1$, $x \le 3$ — $(1, 0), (3, 2), (3, -2)$

8) $x - y \le 2$, $x + y \le 2$, $x \ge -2$ — $(-2, 4), (-2, -4), (2, 0)$

9) $y \ge 2x - 2$, $2x + 3y \ge 6$, $y < 4$ — $(-3, 4), \left(\frac{3}{2}, 1\right), (3, 4)$

10) **مهرجان ترفيهي،** نظّمت مدرسة مهرجانًا ترفيهيًّا خُصِّص ريعُهُ لدعم المحتاجين، وحدَّدت المدرسة أن سعر التذكرة للكبار ستكون بـ 1.5 BD، وللصغار بـ 1.1 BD. إذا كان المكان يسع 300 شخصٍ، وخطَّط المنظمون لجمع ما لا يقل عن 363 BD من بيع التذاكر، فأجب عن الفرعين a , b .

a) اكتب نظامًا من أربع متباينات يصِفُ عدد التذاكر الذي يجب بيعها من كل نوع؛ للحصول على المبلغ المطلوب، ثم مثّله بيانيًّا.

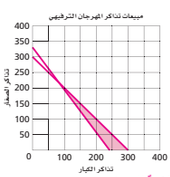
$x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 300, 1.5x + 1.1y \ge 363$

b) اكتب ثلاثة خيارات ممكنة لعدد التذاكر المبيعة التي تحقق نظام المتباينات.

إجابة ممكنة: 250 تذكرة للكبار، و50 تذكرةً للصغار.

200 تذكرة للكبار، و100 تذكرةً للصغار.

145 تذكرة للكبار، و148 تذكرةً للصغار .



ملحق إجابات كتاب التمارين

1-9 البرمجة الخطية

مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا، ثم عيّن إحداثيات رؤوس منطقة الحلّ، وأوجد القيمتين (العظمى والصغرى) للدالة المعطاة في منطقة الحلّ (إن وجدت):

1) $2x - 4 \le y$, $-2x - 4 \le y$, $y \le 2$; $f(x, y) = -2x + y$
عظمى 8، صغرى 4−

2) $3x - y \le 7$, $2x - y \ge 3$, $y \ge x - 3$; $f(x, y) = x - 4y$
عظمى 12، صغرى 16−

3) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $y \le 6$, $y \le -3x + 15$; $f(x, y) = 3x + y$
عظمى 15 ، صغرى 0

4) $x \le 0$, $y \le 0$, $4x + y \ge -7$; $f(x, y) = -x - 4y$
عظمى 28، صغرى 0

5) $y \le 3x + 6$, $4y + 3x \le 3$, $x \ge -2$; $f(x, y) = -x + 3y$
لا توجد قيمة عظمى، صغرى $\frac{34}{5}$

6) $2x + 3y \ge 6$, $2x - y \le 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $f(x, y) = x + 4y + 3$
لا توجد قيمة عظمى، صغرى $\frac{17}{2}$

7) **زخرفة،** تستطيع نجلاء زخرفة نوعين من الزهريات الخزفية، حيث يمكنها زخرفة 8 زهريات من النوع الأول، أو زهريتين من النوع الثاني في الساعة الواحدة. وقد طُلب إليها زخرفة 40 زهرية على الأقل في زمن لا يزيد على 8h.

a) إذا كانت s تُمثّل عدد ساعات زخرفة زهريات النوع الأول، و e تُمثّل عدد ساعات زخرفة زهريات النوع الثاني، فاكتب نظام متباينات يُمثّل الموقف، ويتضمن الزمن اللازم لزخرفة كل نوع من الزهريات.
$s \ge 0, e \ge 0, s + e \le 8, 8s + 2e \ge 40$

b) إذا كانت أجرة نجلاء 3 BD عن ساعة العمل في زخرفة النوع الأول، و 3.5 BD عن ساعة العمل في زخرفة النوع الثاني، فاكتب دالة تُبيّن الأجرة الكلية التي تحصل عليها إذا قامت بزخرفة الزهريات جميعها.
$f(s, e) = 3s + 3.5e$

c) أوجد عدد ساعات العمل في كل نوع؛ لتحصل نجلاء على أكبر أجر ممكن، ثم أوجد مقدار هذا الأجر.
4h لكل نوع، BD 26

2-1 مقدمة في المصفوفات

حدّد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ 1×3

2) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ 2×3

3) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 3×4

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 9 & 8 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ ، فحدّد قيمة كل عنصر مما يأتي :

4) b_{23} 7

5) a_{42} 2

6) b_{11} 2

7) a_{32} 0

8) b_{14} 0

9) a_{23} −4

10) **إحصاءات،** يُبيّن الجدول المجاور عدد الأسر في مدينتين A , B ، ومصدر الطاقة المستعمل في الطهو لدى كلٍّ منها. نظّم البيانات في مصفوفة من الرتبة 3 × 2.

مصدر الطاقة			
	غاز	كهرباء	أخرى
مدينة A	90966	5545	178
مدينة B	241909	3754	0

$\begin{bmatrix} 90966 & 5545 & 178 \\ 241909 & 3754 & 0 \end{bmatrix}$

11) **كرة قدم،** يُبيّن الجدول المجاور عدد مرات الفوز، والخسارة، والتعادل لفريق كرة قدم في 3 بطولات مختلفة.

	البطولة الأولى	البطولة الثانية	البطولة الثالثة
فوز	2	4	3
تعادل	3	1	0
خسارة	2	3	3

a) نظّم نتائج مباريات الفريق في مصفوفة.

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×3

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2-2 العمليات على المصفوفات

أوجد الناتج في كلٍّ ممّا يأتي إذا كان ذلك ممكنًا :

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 14 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 7 & -11 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 10 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 \\ -71 \\ 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -67 \\ 45 \\ -24 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 71 \\ -116 \\ 42 \end{bmatrix}$

3) $-3\begin{bmatrix} -3 & 16 \\ -21 & 12 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 17 & -11 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -9 & 64 \\ -135 & 81 \end{bmatrix}$

4) $7\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 7 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 16 & -15 & 62 \\ 14 & 45 & 75 \end{bmatrix}$

5) $-2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -12 \\ -2 \end{bmatrix}$

6) $\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -16 & 20 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 27 & -9 \\ 54 & -18 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 24 & 3 \end{bmatrix}$

استعمل المصفوفات: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 6 \\ -6 & -4 & 20 \end{bmatrix}$ ؛ لإيجاد ناتج كلٍّ ممّا يأتي :

7) $A - B$ $\begin{bmatrix} 6 & -5 & -5 \\ -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

8) $A - C$ $\begin{bmatrix} -6 & 7 & -6 \\ 3 & 10 & -18 \end{bmatrix}$

9) $-3B$ $\begin{bmatrix} 6 & -12 & -15 \\ -3 & 0 & -27 \end{bmatrix}$

10) $4B - A$ $\begin{bmatrix} -12 & 17 & 20 \\ 7 & -6 & 34 \end{bmatrix}$

11) $-2B - 3C$ $\begin{bmatrix} -26 & 16 & -28 \\ 16 & 12 & -78 \end{bmatrix}$

12) $A + 0.5C$ $\begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ -6 & 4 & 12 \end{bmatrix}$

اقتصاد، الجدول أدناه يبيّن القروض التي أعطتها مؤسسة للتنمية الاقتصادية لعدد من المستثمرين للبدء في مشروعات جديدة. استعمل الجدول لحل التمرينين 13, 14.

	المشروعات الكبرى		المشروعات الصغرى	
	العدد	قيمة القرض	العدد	قيمة القرض
2003	36	BD 864000	27	BD 56700
2004	32	BD 672000	41	BD 90200
2005	28	BD 562000	35	BD 77700

13) اكتب مصفوفتين تمثلان عدد المشروعات، وقيمة القروض الممنوحة، الأولى للمشروعات الصغرى، والأخرى للمشروعات الكبرى.
$\begin{bmatrix} 27 & 567000 \\ 41 & 902000 \\ 35 & 777000 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 36 & 864000 \\ 32 & 672000 \\ 28 & 502000 \end{bmatrix}$

14) أوجد مجموع المشروعات، ومجموع قيم القروض، لكلٍّ من المشروعات الكبرى والصغرى لكل سنة خلال السنوات الثلاث في صورة مصفوفة.
$\begin{bmatrix} 63 & 1431000 \\ 73 & 1574000 \\ 63 & 1339000 \end{bmatrix}$

15) **تغذية،** استعمل الجدول المجاور الذي يُبيّن نسب المواد الغذائية في نوعين من أعلاف الماشية؛ لإيجاد (A–B) ولتحديد نسب المواد الغذائية الثلاث في نوعَي الأعلاف، واكتبها في صورة مصفوفة. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

	% بروتين	% دهون	% ألياف
النوع A	22	12	5
النوع B	24	8	8

2-3 ضرب المصفوفات

حدِّد ما إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أو لا، وإذا كانت كذلك، فاكتب رتبة مصفوفة حاصل الضرب:

1) $A_{7 \times 4} \cdot B_{4 \times 3}$ 7×3

2) $M_{5 \times 8} \cdot A_{3 \times 5}$ 3×8

3) $A_{1 \times 6} \cdot M_{2 \times 1}$ 2×6

4) $A_{3 \times 2} \cdot M_{3 \times 2}$ غير معرَّفة

5) $Q_{9 \times 1} \cdot P_{1 \times 9}$ 1×1

6) $Q_{1 \times 9} \cdot P_{9 \times 1}$ 9×9

أوجد حاصل الضرب في كلٍّ ممّا يأتي إن أمكن:

7) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 30 & -4 & -6 \\ 3 & -6 & 26 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 20 \\ -23 & -5 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 39 & 3 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ غير معرَّف

11) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -30 & 10 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 23 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -15 & -9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -297 & -75 \end{bmatrix}$

استعمل المصفوفات: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، والعدد الثابت $k = 3$ ؛ لتحدِّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أو لا:

15) $AC = CA$ صحيحة

16) $A(B + C) = BA + CA$ ليست صحيحة

17) $(AB)k = k(AB)$ صحيحة

18) $(A + C)B = B(A + C)$ ليست صحيحة

19) **عقارات،** لدى مؤسسة 3 مجمّعات سكنية، والجدول المجاور يُبيّن عدد شقق تلك المجمّعات وفقًا لعدد الغرف فيها، وكانت الأجرة السنوية لشقق المجمعات الثلاثة على النحو الآتي :
شقة بغرفة نوم 1796 BD، شقة بغرفتَي نوم 2165 BD، شقة بثلاث غرف نوم 2538 BD.

	شقة بثلاث غرف نوم	شقة بغرفتين نوم	شقة بغرفة نوم
المجمع 1	22	24	36
المجمع 2	42	32	29
المجمع 3	18	22	18

$\begin{bmatrix} 36 & 24 & 22 \\ 29 & 32 & 42 \\ 18 & 22 & 18 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1796 \\ 2165 \\ 2538 \end{bmatrix}$

a) اكتب مصفوفةً تُبيّن عدد شقق كل نوع في كل مجمع، ومصفوفة أخرى تُبيّن الأجرة السنوية لكل نوع من الشقق.

b) إذا تم تأجير شقق المجمعات الثلاثة جميعها مدة سنة بحسب السعر أعلاه. فعبِّر عن دخل كل مجمع في صورة مصفوفة.
$\begin{bmatrix} 172452 \\ 227960 \\ 125642 \end{bmatrix}$

c) ما مجموع الدخل السنوي للمجمعات الثلاثة في تلك السنة؟ BD 526054

ملحق إجابات كتاب التمارين

2-4 المحدّدات وقاعدة كرامر

أوجد قيمة كل محدّد مما يأتي :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -5$
2) $\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$
3) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -18$
4) $\begin{vmatrix} -14 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 34$
5) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -12 & 4 \end{vmatrix} = -20$
6) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} = 3$
7) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3.75 & 5 \end{vmatrix} = 30$
8) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -9.5 \end{vmatrix} = -16$
9) $\begin{vmatrix} 0.5 & -0.7 \\ 0.4 & -0.3 \end{vmatrix} = 0.13$

أوجد قيمة كل محدّد مما يأتي:

10) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -48$
11) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 45$
12) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7$
13) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 28$
14) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -72$
15) $\begin{vmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 318$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات الآتية :

16) $4x - 2y = -6$, $3x + y = 18$ — $(3, 9)$
17) $5x + 4y = 10$, $-3x - 2y = -8$ — $(6, -5)$
18) $-2x - 3y = -14$, $4x - y = 0$ — $(1, 4)$
19) $6x + 6y = 9$, $4x - 4y = -42$ — $\left(-\frac{9}{2}, 6\right)$
20) $5x - 6 = 3y$, $5y = 54 + 3x$ — $(12, 18)$
21) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2$, $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -6$ — $(-8, 24)$

22) **هندسة:** أوجد مساحة سطح المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(3, 5)$، $(6, -5)$، $(-4, 10)$. **27.5 وحدةً مربعةً**

23) **بيئة:** يستعمل عالم أحياءٍ بحرية جهاز رصد وتحليل البيانات الجغرافية (GIS)؛ لتحديد المنطقة البحرية التي يعيش فيها نوع من الأسماك النادرة، فأظهرت بيانات الجهاز أن إحداثيات رؤوس تلك المنطقة في مستوى إحداثي تمثل وحدة الطول فيه كيلومترًا هي: $(-4, 2)$، $(6, 17)$، $(8, -10)$. فما مساحة تلك المنطقة؟ **133km²**

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

حدِّد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفةً ونظيرها الضربي أو لا:

1) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ — **لا**
2) $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ — **نعم**
3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ — **نعم**
4) $P = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ — **نعم**

5) حدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أو خاطئة :

a) كل مصفوفة مربعة لها نظير ضربي. **خاطئة**

b) لكل مجموعة مصفوفات مربعة من الرتبة نفسها، مصفوفة محايدة لعملية الضرب. **صحيحة**

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة مما يأتي، إن وجد :

6) $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ — $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$
7) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ — $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
8) $\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ — $-\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$
9) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ — $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
10) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ — $\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
11) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ — **ليس لها نظير ضربي**

استعمل معادلةً مصفوفيةً لحل كل نظام مما يأتي :

12) $p + 3q = 6$, $2p - 3q = -6$ — $(0, 2)$
13) $-x - 3y = 2$, $-4x - 5y = 1$ — $(1, -1)$
14) $2m + 2n = -8$, $6m + 4n = -18$ — $(-1, -3)$
15) $-3a + b = -9$, $5a - 2b = 14$ — $(4, 3)$

3-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

أجب عن الفروع a , b, c لكل دالة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد كلًّا من مقطع المحور y، ومعادلة محور التماثل، والإحداثي x لرأس القطع المكافئ.

b) كوّن جدولًا لبعض قيم x ، على أن يتوسط فيه الإحداثي x رأس القطع لهذه القيم.

c) استعمل المعلومات التي حصلت عليها لتمثيل الدالة التربيعية.

1) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ — **15, $x = 4, 4$**

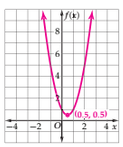
x	0	2	4	6	8
$f(x)$	15	3	−1	3	15

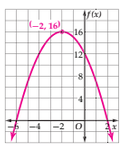
2) $f(x) = -x^2 - 4x + 12$ — **12, $x = -2, -2$**

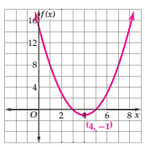
x	−6	−4	−2	0	2
$f(x)$	0	12	16	12	0

3) $f(x) = x^2 - 8x + 15$ — **1, $x = 0.5, 0.5$**

x	−1	0	0.5	1	2
$f(x)$	5	1	0.5	1	5







حدِّد ما إذا كان لكل دالة تربيعية ممَّا يأتي قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وأوجد تلك القيمة. ثم حدد المجال والمدى لكل دالة:

4) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ — صغرى، -9 ، مجموعة الأعداد الحقيقية — $\{y \mid y \geq -9\}$
5) $f(x) = x^2 - 6x + 14$ — صغرى، 5 ، مجموعة الأعداد الحقيقية — $\{y \mid y \geq 5\}$
6) $f(x) = -x^2 + 14x - 57$ — عظمى، -8 ، مجموعة الأعداد الحقيقية — $\{y \mid y \leq -8\}$
7) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ — صغرى، -8 ، مجموعة الأعداد الحقيقية — $\{y \mid y \geq -8\}$
8) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ — عظمى، 3 ، مجموعة الأعداد الحقيقية — $\{y \mid y \leq 3\}$
9) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 8x - 24$ — عظمى، 0 ، مجموعة الأعداد الحقيقية — $\{y \mid y \leq 0\}$

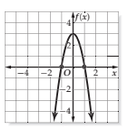
10) **جاذبية أرضية:** قذفت سعاد كرة إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض بسرعة مقدارها 32 ft/sec . إذا كان ارتفاع الكرة $h(t)$ بعد زمن مقداره t ثانية يُعطى بالعلاقة $h(t) = -16t^2 + 32t + 4$ ، حيث $t \geq 0$ ، فأوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة، والزمن اللازم لذلك. **20 ft , 1 sec**

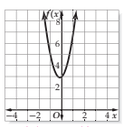
11) **نوادٍ صحية:** بلغ عدد المشتركين في نادٍ صحي الشهر الماضي 70 مشتركًا، حيث كان رسم الاشتراك BD20، وقد قدر المشرف على النادي أن عدد المشتركين سيقل شخصًا واحدًا لكل زيادة مقدارها BD1 في رسوم الاشتراك. ما رسم الاشتراك الذي يجب أن يحدِّده المشرف، إذا أردنا الحصول على أكبر دخلٍ ممكنٍ؟ وما مقدار الدخل المتوقّع من ذلك؟ **BD 2025 , BD 45**

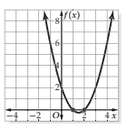
3-2 حل المعادلة التربيعية بيانيًّا

استعمل التمثيل البياني المرافق أدناه لكل معادلة مما يأتي ؛ لتحديد حلولها:

1) $-3x^2 + 3 = 0$ — **1,−1**
2) $3x^2 + x + 3 = 0$ — **لا يوجد حلول**
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ — **1, 2**

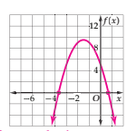


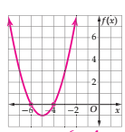


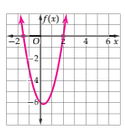


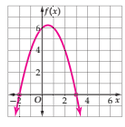
حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا. وإذا لم تتمكن من إيجاد القيم الفعلية للجذور فحدّد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقع بينهما كل جذر:

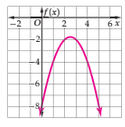
4) $-2x^2 - 6x + 5 = 0$ — **بين صفر، 1 ، وبين -3، -4**
5) $x^2 + 10x + 24 = 0$ — **-6، -4**
6) $2x^2 - x - 6 = 0$ — **بين -1 ، -2**
7) $-x^2 + x + 6 = 0$ — **-2، 3**
8) $-x^2 + 5x - 8 = 0$ — **لا يوجد حل حقيقي**











استعمل الصيغة $h(t) = v_0 t - 16t^2$، لحل التمرينين 9 , 10، حيث $h(t)$ هو ارتفاع جسمٍ ما بالأقدام، وَ v_0 هي السرعة الابتدائية للجسم بالقدم لكل ثانية، و t هو الزمن بالثواني.

9) ركل أحمد كرة القدم إلى أعلى بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 30 ft/sec . ما الزمن الذي استغرقته الكرة حتى تعود وتصطدم بسطح الأرض؟ **3.75 sec**

10) إذا ألقى بركان حممًا نارية بسرعة ابتدائية مقدارها 240 ft/sec إلى أعلى، فما الزمن الذي استغرقته الحمم حتى تعود إلى سطح الأرض؟ **15 sec**

ملحق إجابات كتاب التمارين

3-3 حل المعادلات التربيعية بالتحليل

اكتب معادلة تربيعية بالصورة القياسية لكل زوجٍ من الجذور الآتية:

1) $x^2 - 9x + 14 = 0$ 7, 2
2) $x^2 - 3x = 0$ 0, 3
3) $x^2 - 3x - 40 = 0$ −5, 8
4) $x^2 + 15x + 56 = 0$ −7, −8
5) $x^2 + 9x + 18 = 0$ −6, −3
6) $x^2 + x - 12 = 0$ 3, −4
7) $x^2 - 3x + 1 = 0$ $1, \frac{1}{2}$
8) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ $\frac{1}{3}, 2$
9) $2x^2 + 7x = 0$ $0, -\frac{7}{2}$

حلّل كلًّا من التعابير الآتية تحليلًا تامًّا:

10) $r^3 + 3r^2 - 54r$ $r(r + 9)(r - 6)$
11) $8a^2 + 2a - 6$ $2(4a - 3)(a + 1)$
12) $c^2 - 49$ $(c - 7)(c + 7)$
13) $2x^2 - 8$ $2(x - 2)(x + 2)$
14) $16r^2 - 169$ $(4r + 13)(4r - 13)$
15) $b^4 - 81$ $(b^2 + 9)(b + 3)(b - 3)$

حُلّ كل معادلة مما يأتي باستعمال التحليل:

16) $2x^2 - 4x - 12 = 0$ 6, −2
17) $x^2 - 16x + 64 = 0$ 8
18) $x^2 - 6x + 8 = 0$ 2, 4
19) $x^2 + 3x + 2 = 0$ −2, −1
20) $x^2 - 4x = 0$ 0, 4
21) $7x^2 = 4x$ $0, \frac{4}{7}$
22) $10x^2 = 9x$ $0, \frac{9}{10}$
23) $x^2 = 2x + 99$ −9, 11
24) $x^2 + 12x = -36$ −6
25) $5x^2 - 35x + 60 = 0$ 3, 4
26) $36x^2 = 25$ $\frac{5}{6}, \frac{-5}{6}$
27) $2x^2 - 8x - 90 = 0$ 9, −5

28) **نظرية الأعداد،** أوجد عددين صحيحين زوجيين موجبين متتاليين حاصل ضربهما 624. 26, 24

29) **نظرية الأعداد،** أوجد عددين صحيحين فرديين موجبين متتاليين حاصل ضربهما 323. 19, 17

30) **هندسة،** يزيد طول مستطيل 2 cm عن عرضه. أوجد أبعاد المستطيل، إذا كانت مساحة سطحه 63 cm^2. 7 ft , 9 ft

31) **تصوير،** أبعاد صورةٍ مستطيلة الشكل 6 cm × 18 cm. إذا أردنا تقليص البُعدين المقدار نفسه؛ لجعل مساحة سطح الصورة الجديدة تساوي نصف مساحة سطح الصورة الأصلية، فكم سنتمترًا يُقلّص كلُّ بُعد؟ 2 cm

3-4 الأعداد المركبة

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{-36}$ $6i$
2) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-32}$ -16
3) $\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-25}$ $-5\sqrt{15}$
4) $(-3i)(4i)(-5i)$ $-60i$
5) $(7i)^2(6i)$ $-294i$
6) $(5 - 2i) + (-13 - 8i)$ $-8 - 10i$
7) $(7 - 6i) + (9 + 11i)$ $16 + 5i$
8) $(-12 + 48i) + (15 + 21i)$ $3 + 69i$
9) $(10 + 15i) - (48 - 30i)$ $-38 + 45i$
10) $(28 - 4i) - (10 - 30i)$ $18 + 26i$
11) $(6 - 4i)(6 + 4i)$ 52
12) $(8 - 11i)(8 - 11i)$ $-57 - 176i$
13) $(4 + 3i)(2 - 5i)$ $23 - 14i$
14) $(9 - 6i)(7 + 2i)$ $75 - 24i$
15) $\frac{6 + 5i}{-2i}$ $-\frac{5}{2} + 3i$
16) $\frac{2}{7 - 8i}$ $\frac{14}{113} + \frac{16}{113}i$
17) $\frac{3 - i}{2 - i}$ $\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$
18) $\frac{2 - 4i}{1 + 3i}$ $-1 - i$

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

19) $5n^2 + 35 = 0$ $\pm i\sqrt{7}$
20) $2m^2 + 10 = 0$ $\pm i\sqrt{5}$
21) $4m^2 + 76 = 0$ $\pm i\sqrt{19}$
22) $-2m^2 - 6 = 0$ $\pm i\sqrt{3}$
23) $-5m^2 - 65 = 0$ $\pm i\sqrt{13}$
24) $\frac{3}{4}x^2 + 12 = 0$ $\pm 4i$

أوجد قيمتَي ℓ ، m الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

25) $15 - 28i = 3\ell + (4m)i$ 5 , −7
26) $(6 - \ell) + (3m)i = -12 + 27i$ 18 , 9
27) $(3\ell + 4) + (3 - m)i = 16 - 3i$ 4 , 6
28) $(7 + m) + (4\ell - 10)i = 3 - 6i$ −4 , 1

29) **كهرباء،** تبلغ المقاومة في أحد طرفَي دائرة كهربائية موصولة على التوالي $(3i + 1)\ \Omega$، وفي الطرف الآخر $(7 - 5i)\ \Omega$. اجمع هذين العددين المركبين؛ لإيجاد المقاومة الكلية في تلك الدائرة الكهربائية. $(8 - 2i)\Omega$

30) **كهرباء،** استعمل القانون $E = IZ$؛ لإيجاد فرق الجهد E في دائرة كهربائية فيها شدة التيار I تساوي $(3 - i)$ Amp، والمقاومة Z تساوي $(3 + 2i)\ \Omega$. $(11 + 3i)$V

3-5 القانون العام لحل المعادلة التربيعية والمميّز

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $7x^2 - 5x = 0$ $0, \frac{5}{7}$
2) $4x^2 - 9 = 0$ $\pm\frac{3}{2}$
3) $3x^2 + 8x = 3$ $\frac{1}{3}, -3$
4) $x^2 - 21 = 4x$ $-3, 7$
5) $3x^2 - 13x + 4 = 0$ $\frac{1}{3}, 4$
6) $15x^2 + 22x = -8$ $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}$
7) $x^2 - 6x + 3 = 0$ $3 \pm \sqrt{6}$
8) $x^2 - 14x + 53 = 0$ $7 \pm 2i$
9) $3x^2 = -54$ $\pm 3i\sqrt{2}$
10) $25x^2 - 20x - 6 = 0$ $\frac{2 \pm \sqrt{10}}{5}$
11) $4x^2 - 4x + 17 = 0$ $\frac{1 \pm 4i}{2}$
12) $8x - 1 = 4x^2$ $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$
13) $x^2 = 4x - 15$ $2 \pm i\sqrt{11}$
14) $4x^2 - 12x + 7 = 0$ $\frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$

أجب عن الفروع a-c لكل معادلة تربيعية في التمارين 29-15:

a) أوجد قيمة المميّز.

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدِّد أنواعها.

c) حُلّ المعادلة باستعمال القانون العام.

15) $x^2 - 16x + 64 = 0$ 0، جذر نسبي واحد، 8
16) $x^2 = 3x$ 9، جذران نسبيان، 0,3
17) $9x^2 - 24x + 16 = 0$ 0، جذر نسبي واحد، $\frac{4}{3}$
18) $x^2 - 3x = 40$ 169، جذران نسبيان، 8, −5
19) $3x^2 + 9x - 2 = 0$ 105 ، جذران غير نسبيين، $\frac{-9 \pm \sqrt{105}}{6}$
20) $2x^2 + 7x = 0$ 49، جذران نسبيان، $\frac{7}{2}$, 0
21) $5x^2 - 2x + 4 = 0$ −76، جذران مركبان، $\frac{1 \pm i\sqrt{19}}{5}$
22) $12x^2 - x - 6 = 0$ 289 ، جذران نسبيان، $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$
23) $7x^2 + 6x + 2 = 0$ −20، جذران مركبان، $\frac{-3 \pm i\sqrt{5}}{7}$
24) $12x^2 + 2x - 4 = 0$ 196، جذران نسبيان، $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$
25) $6x^2 - 2x - 1 = 0$ 28 ، جذران غير نسبيين، $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$
26) $x^2 + 3x + 6 = 0$ −15، جذران مركبان، $\frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$
27) $4x^2 - 3x - 6 = 0$ 105، جذران غير نسبيين، $\frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$
28) $16x^2 - 8x + 1 = 0$ 0، جذر نسبي واحد، $\frac{1}{4}$
29) $2x^2 - 5x - 6 = 0$ 73 ، جذران غير نسبيين، $\frac{5 \pm \sqrt{73}}{4}$

30) **فيزياء،** إذا كانت $h(t) = -16t^2 + 60t$ تعبّر عن الارتفاع $h(t)$ بالأقدام لجُسيم بعد t ثانية من قذفه رأسيًّا إلى أعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 60 m/s، فما قيمتا t اللتان يكون عندهما الجسيم على ارتفاع 56 m ؟ 1.75 sec, 2 sec

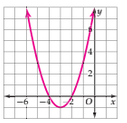
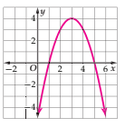
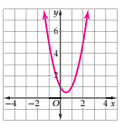
3-6 تحويلات التمثيلات البيانية للدوال التربيعية

اكتب كل معادلة مما يأتي بصيغة الرأس. ثم حدِّد رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، واتجاه فتحة القطع:

1) $y = -6x^2 - 24x - 25$ $y = -6(x + 2)^2 - 1$، إلى أسفل $x = -2$، $(-2, -1)$
2) $y = 2x^2 + 2$ $y = 2(x + 0)^2 + 2$، إلى أعلى $x = 0$، $(0, 2)$
3) $y = -4x^2 + 8x$ $y = -4(x - 1)^2 + 4$، إلى أسفل $x = 1$، $(1, 4)$
4) $y = x^2 + 10x + 20$ $y = (x + 5)^2 - 5$، إلى أعلى $x = -5$، $(-5, -5)$
5) $y = 2x^2 + 12x + 18$ $y = 2(x + 3)^2$ ، إلى أعلى $x = -3$، $(-3, 0)$
6) $y = 3x^2 - 6x + 5$ $y = 3(x - 1)^2 + 2$، إلى أعلى $x = 1$، $(1, 2)$

مثّل كل دالة ممّا يأتي بيانيًّا:

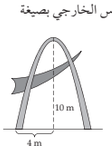
7) $y = (x + 3)^2 - 1$
8) $y = -x^2 + 6x - 5$
9) $y = 2x^2 - 2x + 1$

10) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(1, 3)$، ويمُرُّ بالنقطة $(-2, 15)$.
$y = -2(x - 1)^2 + 3$

11) **كرة قدم،** يُعطى ارتفاع كرة القدم h بعد t ثانيةً من ركلها بالعلاقة: $h(t) = -16t^2 + 80t + 3$، ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ ومتى تصل إلى هذا الارتفاع؟ 103 ft, 2.5 sec

12) **عمارة،** مدخل إحدى الجامعات على شكل قطع مكافئ ارتفاعه 10 m، وكلٌّ من طرفي القوس يبعُد 4 m عن محور التماثل كما في الشكل المجاور. اكتب الدالة التربيعية التي تصف شكل القوس الخارجي بصيغة الرأس، حيث y هو ارتفاع أي نقطة عن المدخل، وx مسقطها على سطح الأرض.



$y = -\frac{5}{8}(x - 4)^2 + 10$