ريض ٢٥٣ - ريض ٢٦١

قررت وزارة التربية والتعليم بمملكة البحرين اعتماد هذا الكتاب لتدريس منهج الرياضيات ٣ للمرحلة الثانوية

الرياضيات ٣

للمرحلة الثانوية

دليل المعلم

الطبعة الأولى
١٤٣٣ هـ - ٢٠١٢م

العبيكان Obeikan

Mc Graw Hill Education

Original Title:

Algebra 2 & Geometry ©2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M.Casey

Contributing Authors
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum

Gifted and talented
Shelbik.cole

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency
Robert m . capraro

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah cassett lent
Lynn T. Havens

الرياضيات ٣
للمرحلة الثانوية

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عمر محمد أبوغليون
أحمد مصطفى سمارة
خلود عبد الحفيظ لوباني
حسان عبد الله الحوراني
أحمد محمود أبوصهيون

التعريب
د. عبدالله الهباهبة
د. معاذ الشياب
د. جعفر العمري
سعد الجبور
أمين المستريحي
فراس العمري

التحرير اللغوي
عمر الصاوي
محمد الكشك
أحمد عليَّان

المواءمة والمراجعة لنسخة مملكة البحرين
هند إبراهيم الجودر
نسيمة محمد غلوم
بهرام حسين حاجي
نور محمد حسان
إيمان ناصر المسيفر

إعداد الصور
د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

www.glencoe.com
www.obeikaneducation.com

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2010.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠١٠م/ ١٤٣١هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

حضرة صاحب الجلالة الملك حمد بن عيسى آل خليفة

ملك مملكة البحرين المفدى

المقـدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلبة، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلبة.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. ثم يقدم دعمًا للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس

يقدّم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلبة، وبأساليب متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس، كما يقدّم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة حسب مستويات الطلبة تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات.

كما يقدّم الدليل في كل درس إجابات الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلبة (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلبة.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الفصل 1 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

مخطط الفصل 1 ..... 8A
التقويم والمعالجة 8C
تنويع التعليم 8D
التركيز في المحتوى الرياضي 8E
التهيئة للفصل الأول 9
1-1 العمليات على الدوال 10
1-2 العلاقات والدوال العكسية 17
توسع 1-2 معمل الآلة الحاسبة البيانية: الدالة العكسية 22
1-3 دوال الجذر التربيعي 23
1-4 الجذر النوني 29
توسع 1-4 معمل الآلة الحاسبة البيانية: تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًا 34
اختبار منتصف الفصل 35
1-5 العمليات على التعابير الجذرية 36
1-6 الأسس النسبية 42
1-7 حل المعادلات الجذرية 48
توسع 1-7 معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل المعادلات الجذرية 53
دليل الدراسة والمراجعة 54
اختبار الفصل الأول 59
التهيئة للاختبارات المعيارية 60
اختبار معياري 62
ملحق إجابات الفصل الأول 63A

الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

مخطط الفصل 2 ..... 64A
التقويم والمعالجة 64C
تنويع التعليم 64D
التركيز في المحتوى الرياضي 64E
التهيئة للفصل الثاني 65
2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانيًا 66
استكشاف 2-2 معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل المعادلات الأسية 73
2-2 حل المعادلات الأسية 74
2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية 80
اختبار منتصف الفصل 87
2-4 حل المعادلات اللوغاريتمية 88
2-5 خصائص اللوغاريتمات 92
2-6 اللوغاريتمات الاعتيادية 98
توسع 2-6 معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل معادلات لوغاريتمية 103
دليل الدراسة والمراجعة 104
اختبار الفصل الثاني 107
التهيئة للاختبارات المعيارية 108
اختبار معياري تراكمي 110
ملحق إجابات الفصل الثاني 111A

الفهرس

الفصل 3 الاحتمال والقياس

مخطط الفصل 3 ..... 112A
التقويم والمعالجة 112C
تنويع التعليم 112D
التركيز في المحتوى الرياضي 112E
التهيئة للفصل الثالث 113
3-1 تمثيل فضاء العيِّنة 114
3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق 120
3-3 الاحتمال الهندسي 127
اختبار منتصف الفصل 133
3-4 محاكاة مواقف واقعية 134
3-5 احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة 141
3-6 احتمالات الأحداث المتنافية 147
دليل الدراسة والمراجعة 154
اختبار الفصل الثالث 157
التهيئة للاختبارات المعيارية 158
اختبار معياري 160
ملحق إجابات الفصل الثالث 161A

الفصل 4 العلاقات والدوال النسبية

مخطط الفصل 4 ..... 162A
التقويم والمعالجة 162C
تنويع التعليم 162D
التركيز في المحتوى الرياضي 162E
التهيئة للفصل الرابع 163
4-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها 164
4-2 جمع التعابير النسبية وطرحها 173
4-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا 179
اختبار منتصف الفصل 185
4-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا 186
توسع 4-4 معمل الآلة الحاسبة البيانية: تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا 192
4-5 التغيُّر 193
4-6 حل المعادلات النسبية 200
توسع 4-6 معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل المعادلات النسبية 207
دليل الدراسة والمراجعة 208
اختبار الفصل الرابع 212
التهيئة للاختبارات المعيارية 213
اختبار معياري تراكمي 215
ملحق إجابات الفصل الرابع 216A

إجابات كتاب التمارين 217

أهلاً بك في عالم الرياضيات

دليل المعلم

منهج الرياضيات المترابط رأسيًّا
ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي

تقدم لك هذه السلسلة ثلاثة أبعاد للترابط الرأسي:

1 تصميم المحتوى

يعد الترابط الرأسي للمحتوى عملية مهمة تساعد طلبتك على التحقق من التسلسل الدقيق للمحتوى وتتابعه من مستوى إلى مستوى آخر. وهذا يمنحك الثقة بأن المحتوى يتم تقديمه وتعزيزه وتقويمه في الأوقات المناسبة، كما يساعد على سد الثغرات وتجنب التكرار غير المبرر، مما يمكنك من توجيه تدريسك وتكييفه؛ ليتلاءم مع حاجات الطلبة.

2 تصميم التدريس

إن الترابط الرأسي القوي بين الأساليب التدريسية بدءًا من الصف الأول الابتدائي يسهل على الطلبة الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى الإعدادية، فالثانوية. إذ تعمل المفردات، والتقنيات والوسائل الحسية وخطة الدرس والمعالجة على التقليل من عوامل الصعوبة والتشويش التي يواجهها بعض الطلبة عندما ينتقلون عبر الصفوف المختلفة.

3 التصميم البصري

تشتمل صفحات السلسلة على تصاميم بصرية متسقة من صف إلى آخر، تساعد الطلبة على الانتقال بسلاسة من مرحلة إلى أخرى، كما تزداد دافعيتهم للتعلم والنجاح عندما تكون طريقة التعامل مع هذه الصفحات مألوفة لديهم.

الحلقة الأولى من المرحلة الابتدائية

الحلقة الثانية من المرحلة الابتدائية

المفاتيح الخمسة للنجاح

1 الخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة

تراعي السلسلة الخرائط المفاهيمية وتطورها اعتمادًا على نتائج الطلبة في رياضيات المرحلة الثانوية.

2 المحتوى العميق المتوازن

تم تطوير السلسلة بحيث تركز على المهارات والموضوعات التي يواجه الطلبة صعوبات فيها، مثل حل المسألة في كل مستوى صفي.

الصفان 1, 2	الصفوف 3-5
1) حل المسألة	1) حل المسألة
2) النقود	2) الكسور الاعتيادية
3) الزمن	3) القياس
4) القياس	4) الكسور العشرية
5) الكسور الاعتيادية	5) الزمن
6) الحساب	6) الجبر
الصفوف 6-8	**الصفوف 9-12**
1) الكسور الاعتيادية	1) حل المسألة
2) حل المسألة	2) الكسور الاعتيادية
3) القياس	3) الجبر
4) الجبر	4) الهندسة
5) الحساب	5) الحساب
	6) الاحتمالات

3 التقويم المستمر

تتضمن هذه السلسلة تقويمات تشخيصية وتكوينية وختامية، وخططًا علاجية، وإثرائية.

4 الخطط العلاجية وتنويع التدريس

توفر السلسلة خطة علاجية ذات ثلاثة مستويات:

المعالجة 1 **المعالجة اليومية** تحدد بدائل متنوعة في دليل المعلم لتدريس المفاهيم وفق أنماط التعلم المختلفة.

المعالجة 2 **المعالجة الاستراتيجية** يستعمل المعلمون إرشادات علاجية ومواد مساندة.

المعالجة 3 **المعالجة المكثفة** توفر إرشادات للتدريس، ومفردات داعمة، وخططًا علاجية؛ لمساعدة الطلبة على النجاح.

5 التطوير المهني

توفر السلسلة فرصًا عديدة للمعلم ليطوّر أداءه مهنيًّا، بطرق تعليم إضافية، مثل: الفيديو، والرياضيات المحوسبة، والمواقع الإلكترونية المترابطة ترابطًا رأسيًّا متكاملًا من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي.

المرحلة الإعدادية

المرحلة الثانوية

قاعدة البحوث لبرامج الرياضيات

تساعد البحوث المستمرة مع الطلبة والمعلمين والأكاديميين والخبراء على بناء جميع برامج الرياضيات من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي على أسس قوية متينة.

1 بحوث تطوير البرامج

- تقويم المعايير الوطنية
- بحوث نوعية لحاجات سوق العمل
- بحوث خاصة بالمحتوى العلمي

2 البحوث التكوينية

- قاعدة البحوث الخاصة بطرائق التدريس
- اختبارات صفية تجريبية
- لجان المعلمين الاستشارية
- مراجعون ومستشارون أكاديميون

3 البحوث الختامية

- مؤشرات على تحسّن درجات الاختبارات
- بحوث شبه تجريبية لفاعلية البرامج
- دراسات طولية
- تقويمات نوعية للبرامج

www.obeikaneducation.com

إعداد الطلبة للدراسة الجامعية ولسوق العمل

دليل المعلم

تعمل هذه السلسلة على الربط بين ما يتعلمه الطلبة في المدرسة الثانوية وما يتوقع منهم أن يعرفوه عند بدء دراستهم الجامعية.

كيف يمكن إعداد الطلبة بصورة أفضل للدراسة الجامعية؟

إن المنهج القوي للمدارس الثانوية مؤشر جيد على الاستعداد للدراسة الجامعية (Adelman 2006). فالطلبة الذين يدرسون كتب الرياضيات المعدة للمرحلة الثانوية من هذه السلسلة يكونون أكثر استعدادًا للدراسة الجامعية من الذين لم يدرسوها (Abraham & Crrech 2002).

وفيما يأتي بعض مناحي الاستعداد للدراسة الجامعية التي طورها: David Conley at the University of Oregon

- **مهارات عقلية** وهي مهارات ضرورية لتعلم المحتوى على المستوى الجامعي، وتشمل: التفكير الناقد، وحل المسألة، والتبرير، وتتاح في كل يوم للطلبة الذين يدرسون هذه السلسلة فرص لتنمية مهارات التفكير العليا من خلال المسائل الخاصة بذلك.
- **المحتوى العلمي** إن كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة متسقة مع معايير عالمية دقيقة تشمل معايير NCTM للرياضيات المدرسية، وغيرها.
- **مهارات عامة** تشمل مهارات مثل: الاستيعاب القرائي، وإدارة الوقت، وتسجيل الملاحظات، ... إلخ. وتوفر هذه السلسلة فرصًا لتنمية هذه المهارات من خلال إرشادات قراءة الرياضيات وروابط المفردات، ودليل التوقع وغيرها.

ماذا عن الطلبة الذين لا يخططون للالتحاق بالجامعات؟

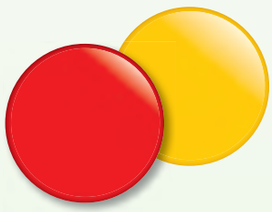
لم تعد الرياضيات في عالم التقنية المعاصر مقتصرة على الطلبة الذين يلتحقون بالجامعات. فقد أظهرت إحدى الدراسات أن البرامج التدريبية التي يخضع لها شخص يريد الحصول على عمل تتطلب أن يكون هذا الشخص على مستوى معين من التعليم في الجبر والهندسة وتحليل البيانات والإحصاء يماثل مستوى الطالب الذي يلتحق بالسنة الأولى في الجامعة حتى ينجح في عمله.

فلسفة السلسلة

تعليم متوازن، ترابط رأسي بين الصفوف من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي

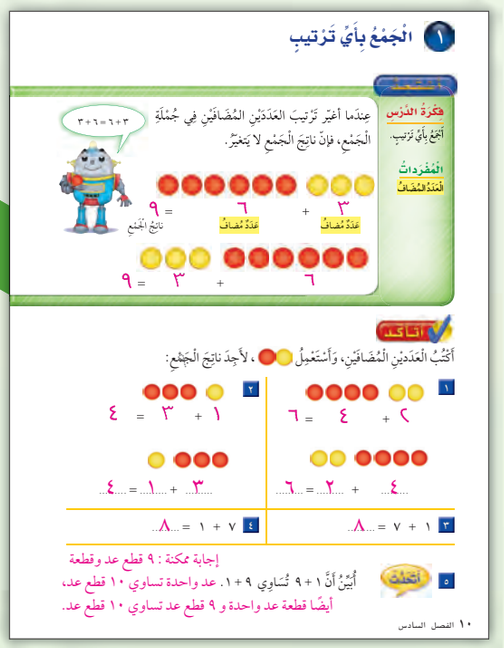
يظهر الترابط الرأسي لهذه السلسلة من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي دمجًا متوازنًا للتعليم.
وتوفر هذه السلسلة للطلبة منحى متوازنًا للرياضيات من خلال:

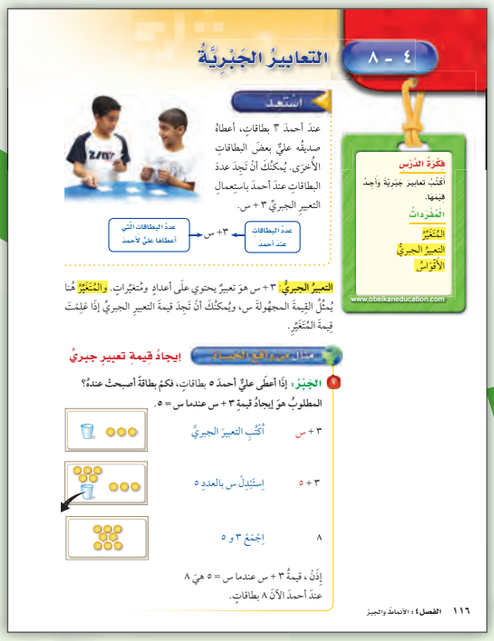
- استقصاء المفاهيم وبناء فهم إدراكي.
- تطوير مهارات إجرائية وحسابية وتعزيزها وإتقانها.
- تطبيق الرياضيات في حل مسائل من واقع الحياة.



ويوضح تسلسل صفحات كتاب الطالب، تطور الترابط الرأسي للفهم الإدراكي والمهارات الإجرائية والحسابية لموضوع مهم في الجبر.

يستعمل طلبة الحلقة الأولى من **المرحلة الابتدائية** قطع عد بلونين مختلفين لتمثيل جمل الجمع. ويُعدُّ هذا النشاط أساسًا للفهم والنجاح في حل معادلات جبرية.





أما طلبة الحلقة الثانية من **المرحلة الابتدائية** فإنهم يستفيدون من خبراتهم في التعامل مع الأكواب وقطع العد؛ لاستعمالها في تمثيل معادلات الجمع والطرح، وحلها.

ينتقل طلبة **المرحلة الإعدادية** خلال التعامل مع الجبر، من استعمال الأكواب وقطع العد إلى استعمال نماذج جبرية أكثر تجريدًا. ويحلّ الطلبة في الدروس اللاحقة، معادلات بسيطة تحتوي على رموز جبرية.

استمرارية التعليم

يوضّح التسلسل التعليمي الذي تم وصفه قوّة المقابلة بين النتيجة المرغوب فيها والنجاح في الجبر. وتعمل هذه العملية التطويرية على تجنب وجود فجوات أو تداخلات بين مستويات الصفوف، وتؤكّد على أنّ مفاهيم كل صف ومهاراته مبنية على أساس قوي تم تطويره في صفوف سابقة. ويستعمل المنحى نفسه عبر المسارات جميعها، ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي.

فلسفة البرنامج

توازن عملية التدريس

- مفاهيم
- مهارات
- حل مسائل

حل المسألة ذات العلاقة

تزوّد السلسلة الطلبة بخطط ملائمة لحل المسألة، ومهارات وتطبيقات عليها خلال الصفوف؛ إذ يتوافر للطلبة فرص مستمرة لتطبيق مهارات الرياضيات، وحل المسائل باستعمال التفكير البصري، والاستدلال المنطقي، والحس العددي، والجبر.

١ - ٩ خطة حلّ المسألة

فكرة الدرس: أحل المسائل باستعمال خطة "ابحث عن نمط"

البحث عن نمط

أحمد: أشارك في مسابقة التحدي للياقة البدنية. وهدفي الوصول إلى أكثر من ٥٦ مرة في الدقيقة من تمرين البطن. وقد حققت في الأسابيع: الأول، والثاني، والثالث، والرابع ٨، ١٢، ١٨، ٢٦ مرة في الدقيقة على الترتيب.

مهمتك: البحث عن نمط لإيجاد رقم الأسبوع الذي يصل فيه أحمد إلى هدفه.

افهم: تعرف عدد مرات تمارين البطن لأحمد في أول ٤ أسابيع، وتريد أن تعرف عدد الأسابيع التي يحتاج إليها للوصول إلى هدفه.

خطط: ابحث عن نمط في الأسابيع التي تدرب فيها، ثم أكمل النمط على أساس أنه سيكمل أكثر من ٥٦ مرة من تمرين البطن.

حل: ينهي أحمد أكثر من ٥٦ مرة من تمرين البطن خلال الأسبوع السابع.

الأسبوع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
عدد مرات تمرين البطن	٨	١٢	١٨	٢٦	٣٦	٤٨	٦٢

+٤ +٦ +٨ +١٠ +١٢ +١٤

×١.٥ ×١.٥ ×١.٥ ×١.٥ ×١.٥ ×١.٥

تحقق: تحقق من النمط للتأكد من الإجابة الصحيحة.

حلل الخطة

١ صف النمط في السطر الثاني، ثم أوجد عدد المرات التي يمكن لأحمد أداؤها بعد الأسبوع الثامن. انظر الهامش

٢ اكتب مسألة يمكن حلها عن طريق البحث عن نمط، وصف ذلك النمط. انظر الهامش

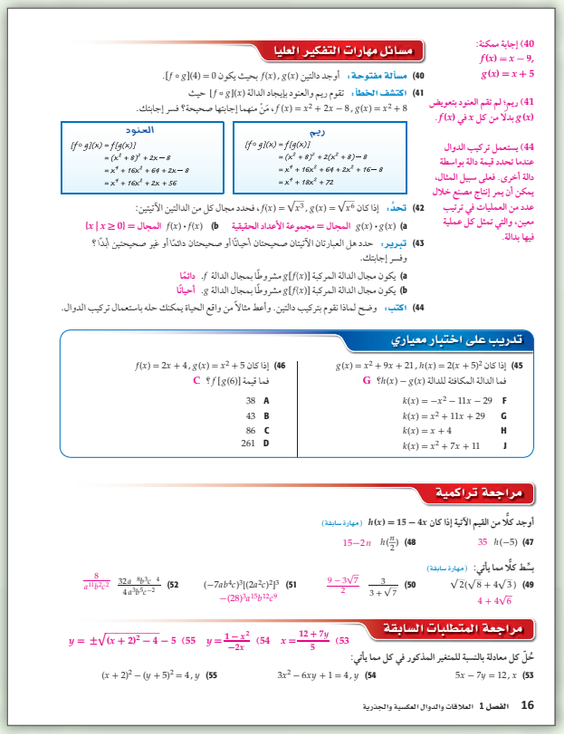
٤٦ الفصل ١ الجبر: الأعداد النسبية

استراتيجيات حل المسألة

تساعد استراتيجيات حل المسألة الطلبة على تعلم طرائق مختلفة لمواجهة المسائل اللفظية.

مسائل مهارات التفكير العليا

تتطلب هذه المسائل استعمال مهارات التفكير العليا (التحليل، والتركيب، ... ، إلخ).



مسائل مهارات التفكير العليا

40) إجابة ممكنة: $f(x) = x - 9$, $g(x) = x + 5$

40) مسألة مفتوحة: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $(f \circ g)(4) = 0$.

41) اكتشف الخطأ: تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $(f \circ g)(x)$ حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$. مَنْ منهما إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

ريم: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$
$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$
$= x^4 + 18x^2 + 72$

العنود: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$
$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$
$= x^4 + 16x^2 + 2x + 56$

44) يستعمل تركيب الدوال عندما تحدد قيمة دالة بواسطة دالة أخرى. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يمر إنتاج مصنع خلال عدد من العمليات في ترتيب معين، والتي تمثل كل عملية فيها بدالة.

42) تحدّ: إذا كان $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = \sqrt{x^6}$، فحدد مجال كل من الدالتين الآتيتين:
a) $g(x) \cdot g(x)$ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية b) $f(x) \cdot f(x)$ المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$

43) تبرير: حدد هل العبارتان الآتيتان صحيحتان أحيانًا أو صحيحتان دائمًا أو غير صحيحتين أبدًا؟ وفسر إجابتك.
a) يكون مجال الدالة المركبة $g[f(x)]$ مشروطًا بمجال الدالة f. دائمًا
b) يكون مجال الدالة المركبة $g[f(x)]$ مشروطًا بمجال الدالة g. أحيانًا

44) اكتب: وضح لماذا تقوم بتركيب دالتين. وأعط مثالاً من واقع الحياة يمكنك حله باستعمال تركيب الدوال.

تدريب على اختبار معياري

45) إذا كان $g(x) = x^2 + 9x + 21, h(x) = 2(x + 5)^2$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟ G
F $k(x) = -x^2 - 11x - 29$
G $k(x) = x^2 + 11x + 29$
H $k(x) = x + 4$
J $k(x) = x^2 + 7x + 11$

46) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فما قيمة $f[g(6)]$؟ C
A 38
B 43
C 86
D 261

مراجعة تراكمية

أوجد كلًّا من القيم الآتية إذا كان $h(x) = 15 - 4x$ (مهارة سابقة)

47) $h(-5)$ 35 48) $h(\frac{n}{2})$ $15 - 2n$

يسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

49) $\sqrt{2}(\sqrt{8} + 4\sqrt{3})$ $4 + 4\sqrt{6}$ 50) $\frac{3}{3 + \sqrt{7}}$ $\frac{9 - 3\sqrt{7}}{2}$ 51) $(-7ab^4c^3)^2(2a^2c)^3$ $-(28)^2a^{15}b^{12}c^9$ 52) $\frac{32a^{-6}b^3c^{-4}}{4a^{-2}b^5c^{-2}}$ $\frac{8}{a^{11}b^2c^{-2}}$

مراجعة المتطلبات السابقة

53) $x = \frac{12 + 7y}{5}$ 54) $y = \frac{1 - x^2}{-2x}$ 55) $y = \pm\sqrt{(x + 2)^2 - 4} - 5$

حلّ كل معادلة بالنسبة للمتغير المذكور في كل مما يأتي:

53) $5x - 7y = 12, x$ 54) $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ 55) $(x + 2)^2 - (y + 5)^2 = 4, y$

16 الفصل 1 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تمثيلات متعددة

تساعد مسائل التمثيلات المتعددة الطلبة على تصور المفاهيم وتعميق الفهم، وتتضمن العبارات اللفظية والعددية والجبرية والتمثيل البياني والجداول ... إلخ.

21) تسوق، يرغب شخص في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. إذا كان سعره الأصلي 2299$، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان.

a) فاكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان فقط $t(x)$. $p(x) = 0.65x,\ t(x) = 1.0625x$

b) أيّ الدالتين الآتيتين يمثل سعر التلفاز: $[t \circ p](x)$ أم $[p \circ t](x)$؟ فسر إجابتك.

c) كم سيدفع هذا الشخص ثمنًا للتلفاز؟ 1587.75$

21b) بما أن $[t \circ p](x) = [p \circ t](x)$، فكلا الدالتين تمثل سعر التلفاز

إذا كان $g(x) = x - 3,\ f(x) = x^2 + x - 12$، فأوجد كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها: للتمارين 22–24 انظر الهامش

22) $(f - g)(x)$ 23) $2(g \cdot f)(x)$ 24) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $f(x) = 5x,\ g(x) = -2x + 1,\ h(x) = x^2 + 6x + 8$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

25) $g[h(3)]$ -69 26) $h[f(-5)]$ 483 27) $h[f(9)]$ 2303

28) $f[g(3a)]$ $-30a + 5$ 29) $f[h(a + 4)]$ $5a^2 + 70a + 240$ 30) $g[f(a^2 - a)]$ $-10a^2 + 10a + 1$

31) **تمثيلات متعددة،** لتكن: $f(x) = x^2, g(x) = x$. انظر ملحق الإجابات

a) **جدولًا،** أنشئ جدولًا يبين بعض قيم الدوال: $(f - g)(x), (f + g)(x), g(x), f(x)$.

b) **تمثيل بياني،** مثّل بيانيًّا الدوال $(f + g)(x), g(x), f(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

c) **تمثيل بياني،** مثّل بيانيًّا الدوال $(f - g)(x), g(x), f(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) **تعبير لفظي،** صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $(f - g)(x), (f + g)(x), g(x), f(x)$.

32) **توظيف،** يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1993م – 1414 هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين: للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

رجال: $y = 7x + 6$

نساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1993م – 1414 هـ، وy تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم.

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟

إذا كان $f(x) = x + 2,\ g(x) = -4x + 3,\ h(x) = x^2 - 2x + 1$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

33) $(f \cdot g \cdot h)(3)$ -180 34) $[(f + g) \cdot h](1)$ 0 35) $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(-6)$ $-\frac{49}{108}$

36) $[f \circ (g \circ h)](2)$ 1 37) $[g \circ (h \circ f)](-4)$ -33 38) $[h \circ (f \circ g)](5)$ 256

39) **تمثيلات متعددة،** ستكتشف في هذا التمرين العلاقة بين الدالتين $(f \cdot g),\ \left(\frac{f}{g}\right)$ عندما تكون $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x - 3$.

x	$(f \cdot g)(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
1	-4	-1
2	-5	-5
3	0	الدالة غير معرفة
4	17	17
5	52	13

a) **جدولة،** انسخ الجدول الآتي وأكمله.

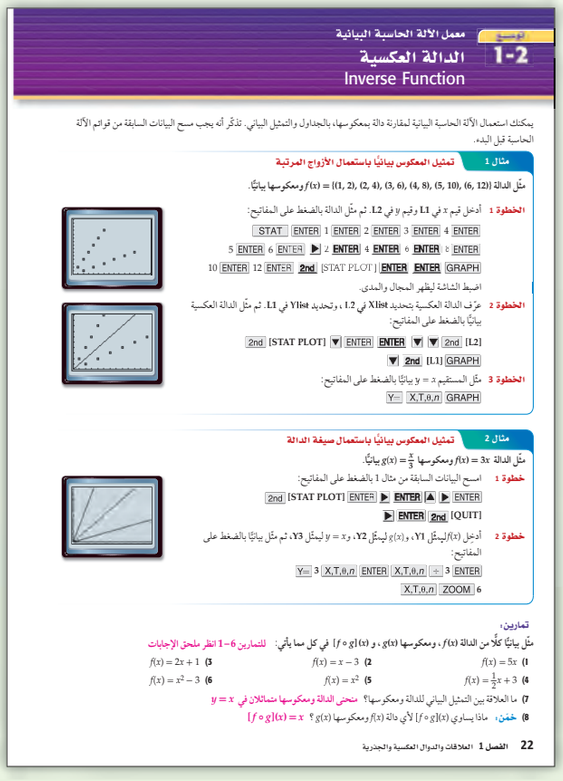
b) **تمثيل بياني،** استعمل الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل الدالتين $\left(\frac{f}{g}\right),\ (f \cdot g)$ بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد. انظر الهامش

c) **تعبير لفظي،** بيّن العلاقة بين الدالتين $(f \cdot g)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)$.

إجابة ممكنة: إذا كانت x تساوي 2 أو 4، فإن الدالتين متساويتان.

معامل الآلة الحاسبة البيانية

توفر هذه المعامل للطلبة فرصة لفهم الرياضيات من خلال التمثيلات البيانية.



توسع 1-2

معمل الآلة الحاسبة البيانية

الدالة العكسية
Inverse Function

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية لمقارنة دالة بمعكوسها، بالجداول والتمثيل البياني. تذكّر أنه يجب مسح البيانات السابقة من قوائم الآلة الحاسبة قبل البدء.

مثال 1 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال الأزواج المرتبة

مثّل الدالة $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$ ومعكوسها بيانيًّا.

الخطوة 1 أدخل قيم x في L1 وقيم y في L2. ثم مثّل الدالة بالضغط على المفاتيح:

STAT ENTER 1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER 4 ENTER ε ENTER 6 ENTER ▶ ENTER 7 ENTER 8 ENTER 9 ENTER 10 ENTER 11 ENTER 12 [STAT PLOT] 2nd ENTER ENTER GRAPH

اضبط الشاشة ليظهر المجال والمدى.

الخطوة 2 عرّف الدالة العكسية بتحديد XlIst في L2، وتحديد YlIst في L1. ثم مثّل الدالة العكسية بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

2nd [STAT PLOT] ▼ ENTER ENTER ▼ ▼ 2nd [L2] 2nd [L1] GRAPH ▼

الخطوة 3 مثّل المستقيم $y = x$ بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

GRAPH Y= X,T,θ,n

مثال 2 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال صيغة الدالة

مثّل الدالة $f(x) = 3x$ ومعكوسها $g(x) = \frac{1}{3}x$ بيانيًّا.

خطوة 1 اصبح البيانات السابقة من مثال 1 بالضغط على المفاتيح:

2nd [STAT PLOT] ENTER ▶ ENTER ▲ ▶ ENTER 2nd [QUIT]

خطوة 2 أدخل $f(x)$ ليمثل Y1، و$g(x)$ ليمثل Y2، و$y = x$ ليمثل Y3، ثم مثّل بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

Y= 3 X,T,θ,n ENTER X,T,θ,n ÷ 3 ENTER ZOOM 6 X,T,θ,n

تمارين،

مثّل بيانيًّا كلًّا من الدالة $f(x)$، ومعكوسها $g(x)$، و $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي: للتمارين 6–1 انظر ملحق الإجابات

1) $f(x) = 5x$ 2) $f(x) = x - 3$ 3) $f(x) = 2x + 1$

4) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ 5) $f(x) = x^2$ 6) $f(x) = x^2 - 3$

7) ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة ومعكوسها؟ منحنى الدالة ومعكوسها متماثلان في $y = x$

8) **خمّن،** ماذا يساوي $[f \circ g](x)$ لأي دالة $f(x)$ ومعكوسها $g(x)$؟ $[f \circ g](x) = x$

نظام التقويم الشامل

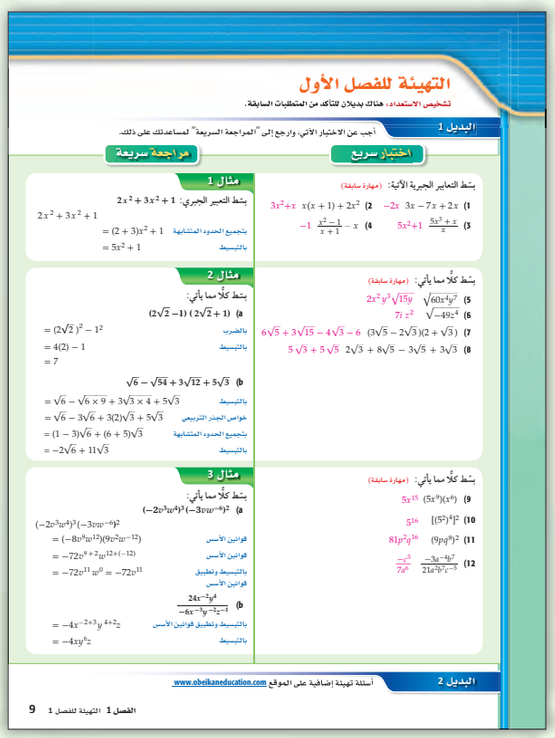
معالجة الأخطاء

توفر السلسلة تقويمًا مستمرًا ذا معنى لمدى تقدم الطلبة في بنية المنهج وفي المواد المساندة التي يستعين بها المعلم.

1 التقويم التشخيصي

تقويم أوّلي قوِّم معرفة طلبتك في بداية العام الدراسي باستعمال اختبارات تشخيصية، واختبارات تحديد المستوى. وسوف يساعدك هذا على تحديد مدى حاجة طلبتك لمواد ومصادر تعلم إضافية ليكونوا قادرين على المواءمة مع معايير مستوى الصف.

تقويم مستوى المدخلات الدراسية قوِّم المعارف السابقة لطلبتك في بداية الفصل أو الدرس، من خلال المصادرالموجودة في كتاب الطالب، أو دليل المعلم، أو أي مصادر أخرى تراها مناسبة.



التهيئة للفصل الأول

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان لتتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط التعابير الجبرية الآتية: (مهارة سابقة)

1) $-2x$ $3x-7x+2x$

2) $3x^2+x$ $x(x+1)+2x^2$

3) $5x^2+1$ $\frac{5x^3+x}{x}$

4) -1 $\frac{x^2-1}{x+1}-x$

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

5) $2x^2y^3\sqrt{15y}$ $\sqrt{60x^4y^7}$

6) $7i\div 2$ $\sqrt{-49z^2}$

7) $6\sqrt{5}+3\sqrt{15}-4\sqrt{3}-6$ $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

8) $5\sqrt{3}+5\sqrt{5}$ $2\sqrt{3}+8\sqrt{5}-3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

9) $5x^{15}$ $(5x^9)(x^6)$

10) 5^{16} $[(5^2)^4]^2$

11) $81y^2q^{16}$ $(9yq^8)^2$

12) $\frac{-c^5}{7a^6}$ $\frac{-3a^{-4}b^2}{21a^2b^2c^{-5}}$

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط التعبير الجبري: $2x^2+3x^2+1$

$2x^2+3x^2+1$

$=(2+3)x^2+1$ بتجميع الحدود المتشابهة

$=5x^2+1$ بالتبسيط

مثال 2

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$

$=(2\sqrt{2})^2-1^2$ بالضرب

$=4(2)-1$ بالتبسيط

$=7$

b) $\sqrt{6}-\sqrt{54}+3\sqrt{12}+5\sqrt{3}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{6\times 9}+3\sqrt{3\times 4}+5\sqrt{3}$ بالتبسيط

$=\sqrt{6}-3\sqrt{6}+3(2)\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ خواص الجذر التربيعي

$=(1-3)\sqrt{6}+(6+5)\sqrt{3}$ بتجميع الحدود المتشابهة

$=-2\sqrt{6}+11\sqrt{3}$ بالتبسيط

مثال 3

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(-2w^3w^4)^3(-3vw^{-6})^2$

$(-2v^3w^4)^3(-3vw^{-6})^2$

$=(-8v^9w^{12})(9v^2w^{-12})$ قوانين الأسس

$=-72v^{9+2}w^{12+(-12)}$ قوانين الأسس

$=-72v^{11}w^0=-72v^{11}$ بالتبسيط وتطبيق قوانين الأسس

b) $\frac{24x^{-5}y^4}{-6x^{-2}y^{-2}z^{-1}}$

$=-4x^{-2+3}y^{4+2}z$ بالتبسيط وتطبيق قوانين الأسس

$=-4xy^6z$ بالتبسيط

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

الفصل 1 التهيئة للفصل 1 9

2 التقويم التكويني

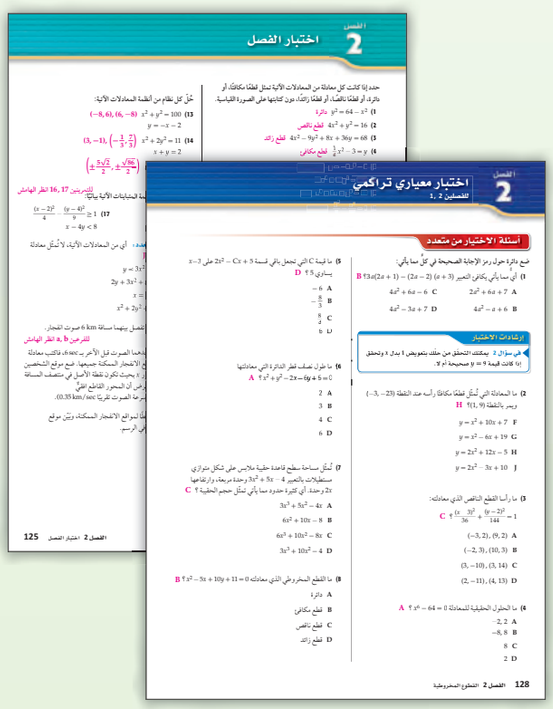
مراقبة التقدم حدِّد إذا كان طلبتك يحرزون تقدمًا مناسبًا في أثناء تعلمهم في كل درس أم لا، باستعمال أنواع التقويم الآتية لتنويع التدريس والتدريبات:

كتاب الطالب

- تأكد
- تأكد من فهمك
- اختبار منتصف الفصل
- دليل الدراسة والمراجعة
- المطويات

دليل المعلم

- بدائل تنويع التعليم
- الخطوة الرابعة (التقويم) في خطة التدريس
- معالجة الأخطاء



3 التقويم الختامي

التقويم الختامي قوِّم مدى نجاح طلبتك في تعلم مفاهيم كل فصل باستعمال ما يأتي:

كتاب الطالب

- اختبار الفصل
- الاختبار المعياري التراكمي
- المطويات

دليل المعلم

- معالجة الأخطاء

تلبية حاجات الطلبة

توفر السلسلة دعمًا واسعًا يراعي الفروق الفردية بين الطلبة.

حيث يحتوي كل فصل وكل درس على اقتراحات؛ لتحديد احتياجات طلبتك وتلبيتها.

كما أن تنويع التعليم يلبي حاجات الفئتين الآتيتين :

دون الطلبة دون المتوسط

فوق الطلبة فوق المتوسط

الطلبة من المستوى المتقدم

التسريع والإثراء: يمكن استعمال المصادر والواجبات المنزلية ، التي تم تصنيفها للطلبة فوق المتوسط، مع الطلبة ذوي المستوى التعليمي المتقدم.

الفصل 2 تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون بما أن الطلبة يدرسون العديد من الخصائص لأول مرة في هذا الفصل. لذا، اقترح عليهم عمل ملصقات لها، على أن تكون مختصرة قدر الإمكان، مع استعمال الألوان؛ لتسهيل فهم الخاصية بمجرد النظر إليها.

خصائص اللوغاريتمات

$\log_b(M \times N) = \log_b M + \log_b N$

$\log_b(M/N) = \log_b M - \log_b N$

$\log_b(M^p) = p \log_b M$

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى طالبين أن يفترضا بدء استثمار بمبلغ 10000 BD، واختر مُعدّل ربح يتم إضافته إلى رأس المال باستمرار، واطلب إليهما حساب المبلغ الكلي بعد 5، 10، 15، 20 سنة، وتمثيله في كل مرة باستعمال الأعمدة البيانية.

البديل 2 دون المتوسط دون

راجع الطلبة في مفهوم العدد الحقيقي، والنسبي، والصحيح، والكلي، والطبيعي. ثم اطلب إلى كل منهم رسم مخطط فن لمجموعات الأعداد المذكورة، ووضع مثال لكل مجموعة أعداد على الشكل .

الأعداد الحقيقية

الأعداد غير النسبية: $\sqrt{2}$، π

الأعداد النسبية: الأعداد الصحيحة السالبة، الأعداد الكلية، الأعداد الطبيعية

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلبة إعداد بحث باستعمال شبكة الإنترنت حول جداول اللوغاريتمات الاعتيادية للأعداد، ثم اطلب إليهم أن يستعملوا الجداول؛ لإيجاد قيم لوغاريتمات اعتيادية مثل $\log_{10} 125$، و بقدرتها بين النتيجة التي توصلوا إليها والنتيجة باستعمال الآلة الحاسبة للوغاريتم نفسه.

الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية 64D

مجموعات أسئلة متعددة المستويات

تم تنويع الواجبات المنزلية لكل درس حسب مستويات الطلبة:

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-7 ؛ لمّا كنت من مدى فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $(f+g)(x) = 4x+1$، $(f-g)(x) = -2x+3$، $(f \cdot g)(x) = 3x^2+5x-2$، $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+2}{3x-1}$، $x \neq \frac{1}{3}$

2) $(f+g)(x) = x^2-x+3$، $(f-g)(x) = x^2+x-13$، $(f \cdot g)(x) = -x^3+8x^2-5x-40$، $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-5}{-x+8}$، $x \neq 8$

3) $(g \circ f)(12) = 11$ ؛ $(f \circ g)(5)$ غير معرّفة.

4) $(g \circ f)(12)$ غير معرّفة ؛ $(f \circ g)(5)$ غير معرّفة.

5) $(f \circ g)(x) = -15x+18$، $(g \circ f)(x) = -15x-6$

6) $(f \circ g)(x) = x^2+3x-6$، $(g \circ f)(x) = x^2+11x+18$

7) قيمة الاحتفاظ قبل تسديد القسط هي BD76 ، قيمة الاحتفاظ بعد تسديد القسط هي BD62.7 ، قيمة الاحتفاظ قبل تسديد القسط أكبر بـ BD13.3 من قيمته بعد تسديد القسط.

تأكد من فهمك

المثالان 1، 2 الصفحتان 13-12

أوجد $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$، $(f \cdot g)(x)$، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$، $g(x)$ في كل مما يأتي: للتمرينين 1، 2 انظر الهامش

1) $f(x) = x+2$، $g(x) = 3x-1$

2) $f(x) = x^2-5$، $g(x) = -x+8$

مثال 3 الصفحة 13

أوجد $(f \circ g)(5)$، $(g \circ f)(12)$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا. للتمرينين 3، 4 انظر الهامش

3) $f = \{(2,5),(6,10),(12,9),(7,6)\}$، $g = \{(9,11),(6,15),(10,13),(5,8)\}$

4) $f = \{(-5,4),(14,8),(12,11),(0,-3)\}$، $g = \{(-2,-4),(-3,2),(-1,4),(5,-6)\}$

أوجد $(f \circ g)(x)$، $(g \circ f)(x)$، إذا كان ذلك ممكنًا. للتمرينين 5، 6 انظر الهامش

5) $f(x) = -3x$، $g(x) = 5x-6$

6) $f(x) = x+4$، $g(x) = x^2+3x-10$

مثال 4 الصفحة 14

7) **ثقافة مالية:** يُخصم 8% من راتب موظف للاحتياط. وسيتقاعد أن يختار أن يكون الاقتطاع قبل تسديد قسط أخير قيمته 7.5% من الراتب، أو بعده. إذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط BD1950، فأوجد قيمة الاحتياط قبل تسديد القسط وبعد تسديده، ثم قارن بين القيمتين. انظر الهامش

تدرب وحل المسائل

المثالان 1، 2 الصفحتان 13-12

أوجد $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$، $(f \cdot g)(x)$، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$، $g(x)$ في كل مما يأتي: للتمرينين 8-11 انظر ملحق الإجابات

8) $f(x) = -x-1$، $g(x) = 5x-2$

9) $f(x) = x^2$، $g(x) = -x+1$

10) $f(x) = 3x$، $g(x) = -2x+6$

11) $f(x) = -3x^2+4$، $g(x) = x^2-8x+4$

12) **مشي:** يمشي راشد على ممر متحرك. إذا كانت سرعته بمتر بالثانية $s(t) = 4t+7$، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد سرعته الكلية إذا كان يمشي في اتجاه سير الممر المتحرك؟ $(W+J)(x) = 7x+3$

13) كم تصبح سرعته الكلية إذا سار في عكس اتجاه سير الممر المتحرك؟ $(W-J)(x) = x+11$

مثال 3 الصفحة 14

أوجد $(f \circ g)(-8)$، $(g \circ f)(-4)$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا. للتمرينين 13-16 انظر ملحق الإجابات

13) $f = \{(-8,-4),(0,4),(2,6),(-6,-2)\}$، $g = \{(4,-6),(-2,-1),(-4,0),(6,-5)\}$

14) $f = \{(-8,33),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$، $g = \{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

أوجد $(f \circ g)(12)$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

15) $f = \{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-6)\}$، $g = \{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$

16) $f = \{(-4,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$، $g = \{(-6,1),(-4,-3),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

أوجد $(g \circ f)(x)$، $(f \circ g)(x)$، إذا كان ذلك ممكنًا:

17) $f(x) = 2x^2-x+1$، $g(x) = 4x+3$ $(g \circ f)(x) = 8x^2-4x+7$، $(f \circ g)(x) = 32x^2+44x+16$

18) $f(x) = 4x-1$، $g(x) = x^2+2$ $(g \circ f)(x) = 8x^2-4x+7$، $(f \circ g)(x) = 4x^2+7$

19) $f(x) = 2x^2$، $g(x) = 8x^2+3x$ $(g \circ f)(x) = 8x^4-48x^3+12x+1$، $(f \circ g)(x) = 128x^4+96x^3+18x^2$

20) **صناعة:** يُنتج مصنع نوعًا من الفاصوليا. إذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبّر عنه بالدالة $p(x) = -0.75x+1850$، إذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبّر عنه بالدالة $c(x) = 0.75x+1850$، فأوجد $(p \circ c)(x)$ (تلميح: $P(x) = r(x) - c(x)$، حيث $P(x)$ هو الربح).

21) اكتب دالة ربح المصنع من بيع الفاصوليا. $P(x) = 5.75x-1850$

22) أوجد الربح الناتج من بيع 500، 1000، 5000 فنجان. $P(500) = 1025$ ؛ $P(1000) = 3900$، $P(5000) = 26900$

14 الفصل 1 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	8-21 ، 40 ، 41-55
ضمن ضمن المتوسط	9-29 فردي ، 30-32 ، 34 ، 36 ، 38-41 ، 43-55
فوق فوق المتوسط	22-52 (اختياري: 53-55)

المعالجة

معالجة متعددة المستويات

يُقدّم في كل فصل من فصول كتاب المعلم لمختلف الصفوف مدخلًا شاملًا للمعالجة.

التقويم والمعالجة

يتضمن كل فصل اقتراحات للتشخيص ومستويات المعالجة.

المعالجة 1 استعمال مجموعات أسئلة.

المعالجة 2 استعمال دليل الدراسة والمراجعة، وبدائل تنويع التعليم.

في بداية كل فصل

يقدم مخطط المعالجة اقتراحات لطرائق التعامل مع الطلبة بناءً على نتائج اختبار "التهيئة" في بداية كل فصل. وتساعدك العبارات الشرطية التي يتضمنها المخطط على تحديد مستوى المعالجة الذي تستعمله.

خلال كل درس

توفر السلسلة فرصًا متعددة للتقويم التكويني في كل فصل ليحدد المعلم إذا كانت هناك ضرورة للمعالجة بناءً على نتائج الطلبة.

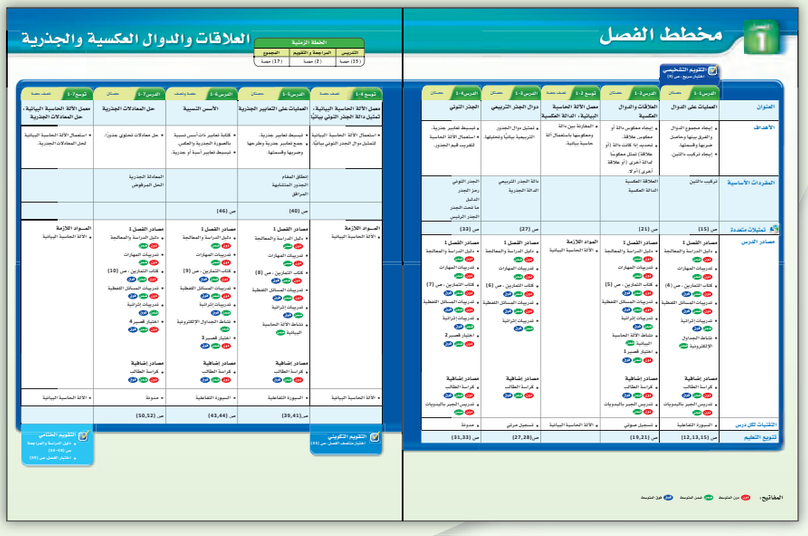
ما بعد الفصل

توفر السلسلة بدائل متعددة للطلبة الذين لا يزالون يعانون من صعوبات بعد إنهاء الفصل تساعدهم على تحسين مستوياتهم.

التخطيط للنجاح

سهولة الاستعمال

تتميّز السلسلة بأنها نموذج تعليم قوي يشتمل على بدائل تنويع التعليم، وإعادة التعليم والتعزيز، وبدائل للتوسع، وإرشادات للمعلم تساعده على تعرّف مستويات الطلبة، كما يشتمل على نشاطات قبلية متقدمة، وتقويم مصاحب للتعليم.



تخطيط ملائم للدرس في متناول اليد

يساعدك مخطط الفصل على التخطيط للتعليم من خلال توضيح الأهداف والخطة الزمنية المقترحة، والتغطية الشاملة للأفكار المحورية.

الترابط الرأسي (بين الفصول)

بُنيت المواضيع الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لمواضيع مستقبلية.

خطة التعليم ذات الخطوات الأربع

تنظم تعليمك، وتتضمن:

1 التركيز 3 التدريب

2 التدريس 4 التقويم

الترابط الرأسي (بين الدروس)

يوضح الترابط الرأسي في بداية كل درس الأهداف التي تؤدي إلى محتوى الدرس الحالي والأهداف التي تتبعه، والذي يأتي في إطار وثيقة المدى والتتابع من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي.

أسئلة التعزيز

يحتوي كل درس على أسئلة تعزيز لتستعملها في مساعدة الطلبة على استقصاء الأفكار الرئيسة للدرس وفهمها.

أمثلة إضافية

يعدُّ كل مثال إضافي انعكاسًا لمثال في كتاب الطالب.

بدائل تنويع الواجبات المنزلية

بما أن معظم الصفوف تشمل طلبة ذوي قدرات مختلفة، فإن بدائل تنويع الواجبات المنزلية يسمح لك بتعديل أسئلة الواجب المنزلي.

نشاطات تقويمية

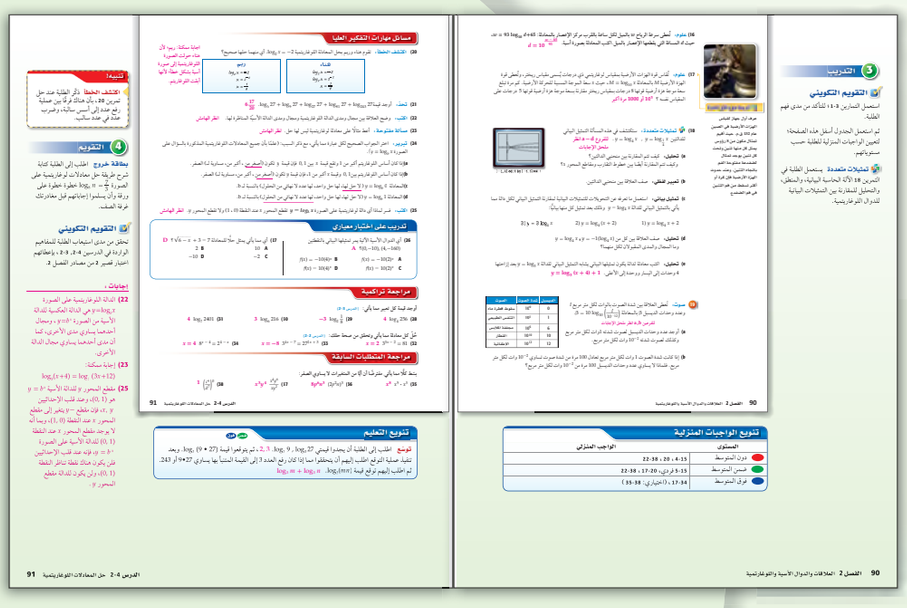
توفر نشاطات التقويم التكويني طرائق بديلة؛ لتحديد مدى استيعاب الطلبة في نهاية كل درس، مثل:

تعلم سابق يربط الطلبة ما تعلموه في الدرس الحالي بما تعلموه سابقًا.

تعلم لاحق يتوقع الطلبة كيفية ارتباط الدرس الحالي بالدرس التالي.

التسمية في الرياضيات يحدد الطلبة المعلومات الرياضية المستعملة في المسألة.

بطاقة خروج يكتب الطلبة جواب السؤال على ورقة خارجية يسلمونها قبل مغادرتك غرفة الصف.



الفصل 1

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (9)

	الدرس 1-1 حصتان	الدرس 2-1 حصتان	توسع 2-1 نصف حصة	الدرس 3-1 حصتان	الدرس 4-1 حصتان
العنوان	العمليات على الدوال	العلاقات والدوال العكسية	معمل الآلة الحاسبة البيانية: الدالة العكسية	دوال الجذر التربيعي	الجذر النوني
الأهداف	• إيجاد مجموع الدوال والفرق بينها وحاصل ضربها وقسمتها. • إيجاد تركيب دالتين.	• إيجاد معكوس دالة أو معكوس علاقة. • تحديد إذا كانت دالة (أو علاقة) تمثل معكوسًا لدالة أخرى (أو علاقة أخرى) أم لا.	• المقارنة بين دالة ومعكوسها باستعمال آلة حاسبة بيانية.	• تمثيل دوال الجذور التربيعية بيانيًّا وتحليلها.	• تبسيط تعابير جذرية. • استعمال الآلة الحاسبة لتقريب قيم الجذور.
المفردات الأساسية	تركيب دالتين	العلاقة العكسية الدالة العكسية		دالة الجذر التربيعي الدالة الجذرية	الجذر النوني رمز الجذر الدليل ما تحت الجذر الجذر الرئيس
تمثيلات متعددة	ص (15)	ص (21)		ص (27)	ص (33)
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (4) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الجداول الإلكترونية ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق • تدريس الجبر باليدويات دون ضمن	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (5) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق • تدريس الجبر باليدويات دون ضمن	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (6) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (7) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق • تدريس الجبر باليدويات دون ضمن
التقنيات لكل درس	• السبورة التفاعلية	• تسجيل صوتي	• الآلة الحاسبة البيانية	• تسجيل مرئي	• مدونة
تنويع التعليم	ص (12,13,15)	ص (19,21)		ص(27,28)	ص (31,33)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(15) حصة	(2) حصة	(17) حصة

توسع 4-1 نصف حصة	الدرس 5-1 حصتان	الدرس 6-1 حصة ونصف	الدرس 7-1 حصتان	توسع 7-1 نصف حصة
معمل الآلة الحاسبة البيانية: تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًا	**العمليات على التعابير الجذرية**	**الأسس النسبية**	**حل المعادلات الجذرية**	**معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل المعادلات الجذرية**
• استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًا.	• تبسيط تعابير جذرية. • جمع تعابير جذرية وطرحها وضربها وقسمتها.	• كتابة تعابير ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية والعكس. • تبسيط تعابير أسية أو جذرية.	• حل معادلات تحتوي جذورًا.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل المعادلات الجذرية.
	إنطاق المقام الجذور المتشابهة المرافق		المعادلة الجذرية الحل المرفوض	
	ص (40)	ص (46)		
المـــواد اللازمة • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (9) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الجداول الإلكترونية ضمن • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين، ص (10) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 4 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**المـــواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية
• الآلة الحاسبة البيانية	• السبورة التفاعلية	• السبورة التفاعلية	• مدونة	• الآلة الحاسبة البيانية
	ص(39,41)	ص (43,44)	ص (50,52)	

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (35)

التقويم الختامي
• دليل الدراسة والمراجعة ص (58-54)
• اختبار الفصل، ص (59)

الفصل 1 التقويم والمعالجة

التقويم	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 1	المرجع		المرجع
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الأول ، ص (9)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (9)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد، تأكد من فهمك	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	تنبيه!	دليل المعلم	دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل ، ص (35)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 1 ، ص (58-54)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (59)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري ، ص (63-62)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**			
	نماذج اختبارات ، الاختيارمن متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطوّلة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل		

الفصل 1

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون السمعيون قسم الطلبة إلى مجموعات من ثلاثة أو أربعة طلبة. واطلب إلى كل مجموعة تسمية نفسها بإحدى مفردات درس من دروس الفصل، مثل "مجموعة الدالة العكسية". واطلب إليهم أيضًا كتابة قصيدة شعرية حول أحد المفاهيم الأساسية في الفصل، وتبادل هذه القصائد فيما بينهم.

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة استعمال ورق مربعات؛ لرسم مستطيلات بأبعاد مختلفة، ثم قص هذه المستطيلات، واطلب إليهم استعمال القانون $d = \sqrt{\ell^2 + w^2}$؛ لإيجاد طول قطر كل مستطيل.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلبة قراءة تعابير ومعادلات رياضية، بلغة رياضية صحيحة. فعلى سبيل المثال، يجب أن يقرؤوا الأس، بطريقة تميزه عن المعامل أو العدد الذي يتم ضربه. واطلب إليهم التدرب على قراءة التعابير والمعادلات الرياضية بصوت مرتفع. فعلى سبيل المثال، يجب أن يقرؤوا x^3 بصوت مرتفع x تكعيب، أو x مرفوعة للقوة 3.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

بعد مناقشة كيفية تحديد إذا كانت $f(x) = 5x + 10$, $g(x) = \frac{1}{5}x - 2$ دالتين عكسيتين لبعضهما بعضًا، حفّز الطلبة لإيجاد دالتين f, g بحيث تكون $f[g(x)] \neq g[f(x)]$، وأحد تركيبيهما يساوي x. واسمح لهم بالعمل في مجموعات لعصف أذهانهم في أثناء إيجاد هاتين الدالتين.

نتائج البحوث...

وجد جتندرا (Jitendra) في عام (1999) أن كل درس يجب أن يُزوَّد بعدد كافٍ من التمارين التدريبية على المهارة الجديدة.

- بعد تقديم موضوع تركيب دالتين لأول مرة في الدرس 1-1، فإن الطلبة سيجدون عددًا كبيرًا من التمارين (المباشرة ، ومن واقع الحياة) تسمح لهم بالتدرب على هذا المفهوم الجديد.
- تم تقديم الكثير من التدريبات على خصائص الجذور والعمليات عليها من خلال الدروس من 1-4 إلى 1-7.

يستعمل قبل الدرس 1-5

" يفضل بعض الطلبة عند ضرب تعابير جذرية استعمال "طريقة الجدول". فعلى سبيل المثال، لضرب $(3\sqrt{3} - 2)$ $(2\sqrt{3} + 5)$ فإنهم ينشئون جدولاً من عمودين وصفين، ثم يضعون حدّي أحد التعبيرين في أعلى الجدول، وحدّي التعبير الآخر إلى يسار الجدول. ويبدؤون بضرب الحدود وتعبئة خانات الجدول وتبسيطها، ثم يجمعون الحدود المتشابهة في قطري الجدول؛ ليحصلوا على الإجابة.

	$2\sqrt{3}$	$+ 5$
$3\sqrt{3}$	$6\sqrt{9}$	$15\sqrt{3}$
-2	$-4\sqrt{3}$	-10

→

	$2\sqrt{3}$	$+ 5$
$3\sqrt{3}$	18	$15\sqrt{3}$
-2	$-4\sqrt{3}$	-10
	$+ 11\sqrt{3}$	8

ناتج الضرب هو $11\sqrt{3} + 8$. ويفضل الطلبة هذه الطريقة؛ لأنها منظمة. "

الفصل 1

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 1

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تبسيط تعابير كثيرات الحدود
- تحويل المعادلات وحلها
- تمثيل معادلات خطية بيانيًا
- استعمال خاصية التوزيع لتبسيط تعابير جبرية
- استعمال خصائص الأسس لتبسيط التعابير

الفصل 1

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تمثيلات دوال الجذور التربيعية ذات العلاقة
- ربط معكوس دوال الجذر التربيعي بالدوال التربيعية
- تحديد حلول معادلات الجذر التربيعي باستعمال التمثيل البياني، والجداول، والطرق الجبرية
- تحديد قيم المجال والمدى المقبولة لدوال الجذر التربيعي
- تحديد الحلول المقبولة لمعادلات الجذر التربيعي وتفسيرها
- استعمال الدالة الأم؛ لاستقصاء أثر التغيرات على هذه الدالة ووصفها وتوقع أثرها في التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي، ووصف القيود على المجال والمدى

ما بعد الفصل 1

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- تعريف دوال (بما فيها الدوال الأسية)، ووصف خواصها، والتنقل ما بين تمثيلها اللفظي والعددي والبياني، والرمزي.
- التوسع في تنفيذ عمليات تتضمن تركيب دالتين، وإيجاد المعكوس، ووصف هذه الإجراءات والنتائج لفظيًا، وعدديًا، ورمزيًا، وبيانيًا.

نظرة على الدروس

1-1 العمليات على الدوال

يمكن جمع أي $f(x)$, $g(x)$ وطرحهما وضربهما وقسمتهما.

القاعدة	مثال لتكن $f(x) = 2x, g(x) = -x + 5$
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

تُعد عملية تركيب دالتين طريقة أخرى لدمج الدوال. إذا كانت f , g دالتين، وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f، فإن الدالة المركبة $f \circ g$ يمكن إيجادها على النحو الآتي $[f \circ g](x) = f[g(x)]$

وفي معظم الحالات يكون $f \circ g \neq g \circ f$. لذا، فإن ترتيب الدوال عند تركيبها، مهم جدًّا. وكذلك فإن تعيين العلاقة بين مجال كل من الدالتين ومدى كل منهما والقيود عليهما، مهم أيضًا عند تركيب الدوال.

1-2 العلاقات والدوال العكسية

يمكن إيجاد معكوس العلاقة عن طريق تبديل إحداثيي كل زوج مرتب للعلاقة، أي تبديل مجالها ومداها.

يمكن إيجاد معكوس الدالة بتبديل مجال الدالة ومداها. ولإيجاد معكوس $f(x)$:

- أعد كتابة $f(x)$ كمعادلة باستعمال المتغيرين x , y.
- بدّل بين كل من المتغير x، والمتغير y في المعادلة.
- حُلّ المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y.

لتختبر ما إذا كانت كل من $g(x)$, $f(x)$ دالة عكسية للأخرى أو لا، تأكد أن قيمة كل من التركيبين $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ تساوي x. وعندما يكون معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون "دالة واحد لواحد".

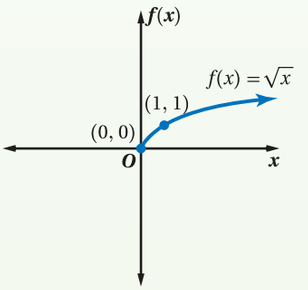
العلاقات والدوال العكسية والجذرية

1-3 دوال الجذر التربيعي

الدالة التي تحوي متغير تحت رمز الجذر التربيعي تسمى دالة الجذر التربيعي. ومجال دالة الجذر التربيعي ومداها محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة.

كما في باقي الدوال يمكن إجراء تحويلات التمثيلات البيانية على التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي.

الدالة الأم لدوال الجذر التربيعي هي $f(x)=\sqrt{x}$، ومجالها هو $\{x \mid x \geq 0\}$، ومداها هو $\{y \mid y \geq 0\}$.



1-4 الجذر النوني

التعريف الشائع للجذر التربيعي هو: يكون a جذرًا تربيعيًّا لـ b إذا كان $a^2 = b$، ويمكن استعمال ذلك لمساعدة الطلبة على فهم الجذر النوني، حيث يكون a جذرًا نونيًّا لـ b إذا كان $a^n = b$، ويشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني . في التعبير $\sqrt[n]{x}$ يسمى n الدليل، ويسمى x ما تحت الجذر، ويشير الرمز $\sqrt{\ }$ إلى رمز الجذر.

بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي، وفي هذه الحالة يكون n عددًا زوجيًّا، والجذر غير السالب للعدد يسمى الجذر الرئيس.
إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا، وأس ماتحت الجذر عددًا زوجيًّا، وكان أس الناتج عددًا فرديًّا، فيجب أن توضع القيمة المطلقة للناتج للتأكد أن الناتج ليس سالبًا.

1-5 العمليات على التعابير الجذرية

يمكن تبسيط التعابير الجذرية باستعمال خاصيتي ضرب الجذور وقسمتها، اللتين تم تعريفهما في هذا الدرس. وتستعمل هاتان الخاصيتان أيضًا عند ضرب تعابير جذرية أو قسمتها، وينبغي لجمع التعابير الجذرية أو طرحها أن تكون الجذور متشابهة؛ أي أن يكون للجذور الدليل وما تحت الجذر أنفسهما.

وتستعمل عملية إنطاق المقام للتخلص من الجذور في المقام أو الكسور من ما تحت الجذر. ولإنطاق المقام، اضرب كلًّا من البسط والمقام في مقدار بحيث يكون حاصل الضرب في المقام عددًا نسبيًّا، ويمكن أن يستعمل مرافق على الصورة $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$؛ لإنطاق المقام.

1-6 الأسس النسبية

يمكن أن تكون الأسس كسورًا . وتشتمل قواعد كتابة تعابير مكافئة لتعابير الأسس النسبية، على خصائص تصف كيفية التحويل بين الصورة الجذرية والصورة الأسية.

- لأي عدد حقيقي b ، وأي عدد صحيح موجب n ، فإن $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ عددًا حقيقيًّا إلا إذا كانت $b < 0$ ، n عددًا زوجيًّا، فإن الجذر النوني قد يكون مركبًا.
- لأي عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا ، ولأي عددين صحيحين m, n ، بحيث $n > 1$، يكون $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$ عددًا حقيقيًّا، إلا إذا كانت $b < 0$ ، n عددا زوجيًّا، فإن الجذر النوني قد يكون مركبًا.

يكون التعبير بأسّس نسبية في أبسط صورة، عندما تكون جميع الأسس موجبة، ولا يوجد في المقام أي أسس كسرية. ودليل الجذر أصغر ما يمكن ، وأي من البسط أو المقام أو كليهما ليس كسرًا.

1-7 حل المعادلات الجذرية

تسمى المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر معادلات جذرية. وعند حُلّ معادلة جذرية، قم بما يأتي:

- اجعل الجذور في طرف واحد من المعادلة.
- ارفع طرفي المعادلة لقوة تساوي دليل الجذر، وهذا يعني أنه للتخلص من رمز الجذر النوني عليك رفع طرفي المعادلة للقوة n.
- وأخيرًا ، حُلّ المعادلة الناتجة ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية قد لايحقق الحل المعادلة الأصلية، ويسمى مثل هذا الحل حلًّا مرفوضًا. فمثلًا عند حل المعادلة $\sqrt{x+1} = x-1$ ينتج حلان هما 3 , 0 ، ولكن عند التعويض في المعادلة الأصلية نجد أن الحل (0) لا يحققها. لذا، فهو حل مرفوض.

الفصل 1

ملاحظات

مشروع الفصل

إدارة الموارد المالية

يستعمل الطلبة ما تعلموه عن الدوال العكسية والجذور؛ لتحديد الزمن اللازم لتوفير مبلغ من المال.

- عند تركيب أرباح المبلغ المستثمر P ، فإن المبلغ الكلي A بعد n من مرات احتساب الربح في السنة يُعبّر عنه بالعلاقة $A = P(1 + i)^n$ ، حيث i مُعدّل الربح السنوي.
- اطلب إلى الطلبة، أن يفترضوا أنه تم استثمار مبلغ BD 10000 في مشروع مدة سنتين. إذا تم إضافة الأرباح سنويًّا، فاطلب إليهم إيجاد دالة تعطي معدل الربح السنوي i بدلالة A في نهاية السنتين. واطلب إليهم تمثيل هذه الدالة بيانيًّا. وتقدير مُعدّل الربح اللازم حتى يصبح المبلغ الكلي BD 12000. ثم اطلب إليهم إيجاد القيمة الفعلية لمُعدّل الربح.
- واطلب إليهم أيضًا إيجاد مُعدّل الربح اللازم إذا استثمر مبلغ BD 10000 في المشروع مدة خمس سنوات بدلاً من سنتين.
- وأخيرًا، اطلب إليهم تكرار التمرين السابق، لموقف يتم فيه إضافة الربح شهريًّا بدلًا من إضافته سنويًّا.

المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملاً الخطوات الآتية:

تعريف: المعادلة الجذرية هي معادلة تحوي متغيرًا تحت الجذر.

مثال: $\sqrt{2x + 5} - 4 = 3$

سؤال: هل المعادلة $\sqrt{9} = 7x - 11 - 4$ معادلة جذرية ؟ وضح إجابتك . لا؛ لأنه لا يوجد أي متغير تحت الجذر.

غرضها يُدّون الطلبة ملاحظاتهم أثناء دراستهم للعلاقات والدوال العكسية وَالجذرية في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل. لتدوين ملاحظاتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجع الطلبة أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

CRM **مسرد مفردات الطالب، ص (1)**

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضًا للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

الفصل 1

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

Inverses and Radical Functions and Relations

فيما سبق

تبسيط تعابير جبرية تحتوي على كثيرات الحدود.

والآن

الأفكار العامة

- أجد معكوس دالة، وتركيب دالتين.
- أمثّل بيانيًّا معادلات الجذر التربيعي وأحلّها.
- أبسّط معادلات تتضمن جذورًا وأسسًا نسبية وأحلّها.

لماذا؟

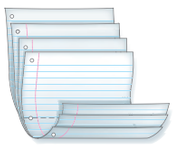
تمويل يعد ربط التمويل بالرياضيات مهارة، وإذا أتقنتها فإنك ستستفيد منها في مجالات حياتك المختلفة. إن تعلم إدارة مواردك المالية يساعدك على وضع ميزانية، والعيش ضمن حدودها. وستستكشف في هذا الفصل بعض المصطلحات المالية، ومنها: التوفير والتضخم وصرف العملة.

مطويتك منظم أفكار

العلاقات والدوال العكسية والجذرية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الأول حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

1. **ثبّت** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، بحيث تعلو كل ورقة الورقة التي أمامها بوصة واحدة.

2. **اطو** أسفل الورقات الأربع إلى أعلى، وحاذ الحواف بحيث تكون المسافات بين نهايات جميع الأوراق متساوية.



3. **عندما** تتأكد من تساوي المسافات بين الحواف، اثن الأوراق جيدًا. ثم ثبتها على طول خط الطي المتكوّن، واكتب عنوان الفصل وعناوين الدروس كما في الشكل.

التهيئة للفصل الأول

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط التعابير الجبرية الآتية: (مهارة سابقة)

1) $-2x$ $3x-7x+2x$
2) $3x^2+x$ $x(x+1)+2x^2$
3) $5x^2+1$ $\frac{5x^3+x}{x}$
4) -1 $\frac{x^2-1}{x+1}-x$

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

5) $2x^2y^3\sqrt{15y}$ $\sqrt{60x^4y^7}$
6) $7iz^2$ $\sqrt{-49z^4}$
7) $6\sqrt{5}+3\sqrt{15}-4\sqrt{3}-6$ $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$
8) $5\sqrt{3}+5\sqrt{5}$ $2\sqrt{3}+8\sqrt{5}-3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

9) $5x^{15}$ $(5x^9)(x^6)$
10) 5^{16} $[(5^2)^4]^2$
11) $81p^2q^{16}$ $(9pq^8)^2$
12) $\frac{-c^5}{7a^6}$ $\frac{-3a^{-4}b^7}{21a^2b^7c^{-5}}$

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط التعبير الجبري: $2x^2+3x^2+1$

$2x^2+3x^2+1$

$=(2+3)x^2+1$ بتجميع الحدود المتشابهة

$=5x^2+1$ بالتبسيط

مثال 2

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)$

$=(2\sqrt{2})^2-1^2$ بالضرب

$=4(2)-1$ بالتبسيط

$=7$

b) $\sqrt{6}-\sqrt{54}+3\sqrt{12}+5\sqrt{3}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{6\times 9}+3\sqrt{3\times 4}+5\sqrt{3}$ بالتبسيط

$=\sqrt{6}-3\sqrt{6}+3(2)\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ خواص الجذر التربيعي

$=(1-3)\sqrt{6}+(6+5)\sqrt{3}$ بتجميع الحدود المتشابهة

$=-2\sqrt{6}+11\sqrt{3}$ بالتبسيط

مثال 3

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(-2v^3w^4)^3(-3vw^{-6})^2$

$(-2v^3w^4)^3(-3vw^{-6})^2$

$=(-8v^9w^{12})(9v^2w^{-12})$ قوانين الأسس

$=-72v^{9+2}w^{12+(-12)}$ قوانين الأسس

$=-72v^{11}w^0=-72v^{11}$ بالتبسيط وتطبيق قوانين الأسس

b) $\frac{24x^{-2}y^4}{-6x^{-3}y^{-2}z^{-1}}$

$=-4x^{-2+3}y^{4+2}z$ بالتبسيط وتطبيق قوانين الأسس

$=-4xy^6z$ بالتبسيط

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.

كما تساعد العبارة "إذا... فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصادر الآتية:
مصادر الفصل	بنك المفاهيم والمهارات تدريبات المهارات
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من التمارين.
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الراسي

ما قبل الدرس 1-1

إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على كثيرات الحدود.

الدرس 1-1

إيجاد مجموع الدوال والفرق بينها، وحاصل ضربها، وقسمتها.

إيجاد تركيب دالتين.

ما بعد الدرس 1-1

وصف العلاقة بين الدالة ومعكوسها وتحليلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما السنوات الممثلة بالقيم $x = 0, x = 4, x = 10$؟
  2000, 2004, 2010
- ما القيم التقريبية لكل من $m(0), f(0)$، $f(0) + m(0)$؟
  $f(0) \approx 1500, m(0) \approx 1130,$
  $f(0) + m(0) \approx 2630$
- أي منحنيات $m(x)$، أو $f(x)$، أو $f(x) + m(x)$، له أكبر ميل؟ برر إجابتك. منحنى $f(x) + m(x)$؛ ميل المنحنيات الثلاثة موجب، وميل منحنى $f(x) + m(x)$ هو مجموع ميلي منحنيي $f(x), m(x)$.

1-1 العمليات على الدوال
Operations on Functions

فيما سبق
درست إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على كثيرات الحدود.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجد مجموع الدوال والفرق بينها وحاصل ضربها وقسمتها.
- أجد تركيب دالتين.

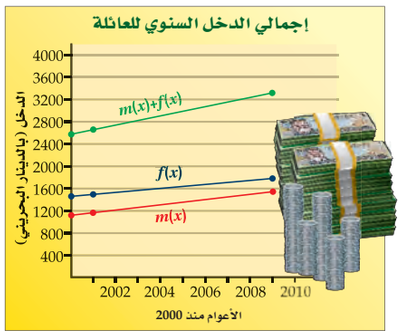
المفردات الأساسية
تركيب دالتين
composition of functions

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 2000م؛ حيث $f(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.



العمليات الحسابية على الدوال يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال.

مفهوم أساسي العمليات على الدوال

أضف إلى مطويتك

العملية	القاعدة	مثال لتكن $f(x) = 2x, g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

مثال 1 جمع الدوال وطرحها

إذا كان $f(x) = x^2 - 4, g(x) = 2x + 1$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

a $(f + g)(x)$

قاعدة جمع الدوال
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = 2x + 1$
$$= (x^2 - 4) + (2x + 1)$$
بالتبسيط
$$= x^2 + 2x - 3$$

b $(f - g)(x)$

قاعدة طرح الدوال
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = 2x + 1$
$$= (x^2 - 4) - (2x + 1)$$
بالتبسيط
$$= x^2 - 2x - 5$$

تأكد

إذا كان $f(x) = x^2 + 5x - 2, g(x) = 3x - 2$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

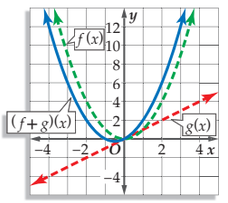
1A $(f + g)(x)$ $(f + g)(x) = x^2 + 8x - 4$ **1B** $(f - g)(x)$ $(f - g)(x) = x^2 + 2x$

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (13)	• تنويع التعليم، ص (12,13)	• تنويع التعليم، ص (12)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

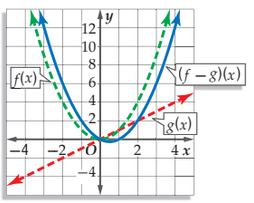
يمكن تمثيل جمع دالتين أو طرحهما بيانيًّا عن طريق تمثيل كل دالة وحدها بيانيًّا، ثم جمع القيم المتناظرة للدوال أو طرحها. لتكن $g(x) = x$, $f(x) = x^2$. ادرس التمثيل البياني لكل منهما وناتج جمعهما وطرحهما.

أوجد $(f + g)(x)$.



x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x$	$(f + g)(x) = x^2 + x$
-3	9	-3	$9 + (-3) = 6$
-2	4	-2	$4 + (-2) = 2$
-1	1	-1	$1 + (-1) = 0$
0	0	0	$0 + 0 = 0$
1	1	1	$1 + 1 = 2$
2	4	2	$4 + 2 = 6$
3	9	3	$9 + 3 = 12$

أوجد $(f - g)(x)$.



x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x$	$(f - g)(x) = x^2 - x$
-3	9	-3	$9 - (-3) = 12$
-2	4	-2	$4 - (-2) = 6$
-1	1	-1	$1 - (-1) = 2$
0	0	0	$0 - 0 = 0$
1	1	1	$1 - 1 = 0$
2	4	2	$4 - 2 = 2$
3	9	3	$9 - 3 = 6$

في مثال 1، الدالتان $f(x)$، $g(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f + g)(x)$ و $(f - g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $f(x)$، $g(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، ما عدا القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز لها بالرمز ∩.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $f(x) = x^2 + 7x + 12$, $g(x) = 3x - 4$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

قاعدة ضرب الدوال: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

بالتعويض: $= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$

خاصية التوزيع: $= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$

بالتبسيط: $= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

قاعدة قسمة الدوال: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

بالتعويض: $= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}, x \neq \frac{4}{3}$

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا، فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تأكد

إذا كان $f(x) = x^2 - 7x + 2$, $g(x) = x + 4$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

2A $(f \cdot g)(x)$ **2B** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$(f \cdot g)(x) = x^3 - 3x^2 - 26x + 8$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 7x + 2}{x + 4}, x \neq -4$

العمليات الحسابية على الدوال

مثال 1 يُبيّن كيفية جمع الدوال وطرحها.

مثال 2 يُبيّن كيفية ضرب الدوال وقسمتها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 إذا كان $f(x) = 3x^2 + 7x$، $g(x) = 2x^2 - x - 1$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

a $(f + g)(x)$

$(f + g)(x) = 5x^2 + 6x - 1$

b $(f - g)(x)$

$(f - g)(x) = x^2 + 8x + 1$

2 إذا كان $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$، $g(x) = x - 4$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

$(f \cdot g)(x) = 3x^3 - 14x^2 + 9x - 4$

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4}, x \neq 4$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة يمكن أن يقرأ بعض الطلبة $f \circ g$. على أنها الكلمة الإنجليزية fog. لذا، حدد الطلبة الذين يقعون في هذا الخطأ اللفظي. وأكد لهم أن اللفظ الصحيح يمكن أن يساعدهم على فهم المعنى. وأرشدهم لفهم التشابه في المعنى بين $f(x)$ (وتقرأ f الـ x) و $(f \circ g)[x]$ وتقرأ f بعد $g(x)$، وبين لهم أن $f \circ g$ يمكن كتابتها أيضًا على الصورة $f[g(x)]$. كما يمكن الربط بين حساب $f[g(x)]$. وحساب أي تعبير عددي يحتوي أقواسًا متداخلة كالتعبير $(((3 \cdot 5(4)) + 1)$ حيث يتم إيجاد قيم التعابير في الأقواس الداخلية ثم الخارجية.

التركيز في المحتوى الرياضي

دمج الدوال يمكن أن يستعمل عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة لدمج الدوال. وتركيب دالتين طريقة أخرى لدمج الدوال، ولكنها مختلفة بشكل أساسي عن العمليات الحسابية على الدوال. ففي الدالة المركبة $(g \circ f)$ تستعمل نواتج $f(x)$ كمدخلات للدالة g.

تركيب دالتين

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد تركيب دالتين.

مثال إضافي

3 أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكنًا.

(a

$f = \{(2, 6), (9, 4), (7, 7), (0, -1)\}$,
$g = \{(7, 0), (-1, 7), (4, 9), (8, 2)\}$

$[f \circ g](x) = \{(7, -1), (-1, 7), (4, 4), (8, 6)\}$

$[g \circ f](x) = \{(9, 9), (7, 0), (0, 7)\}$

(b $f(x) = 3x^2 - x + 4$

$g(x) = 2x - 1$

$[f \circ g](x) = 12x^2 - 14x + 8$

$[g \circ f](x) = 6x^2 - 2x + 7$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب $f(x)$, $g(x)$ على السبورة. حتى تبين للطلبة كيفية كتابة $f[g(x)]$ ، ضَع $g(x)$ بدلاً من كل x في $f(x)$، وكرر الأسلوب نفسه مع $g[f(x)]$.

تركيب دالتين هي طريقة أخرى تستعمل لدمج الدوال. وعند **تركيب دالتين** فإن نواتج دالة ما تستعمل لحساب نواتج دالة أخرى.

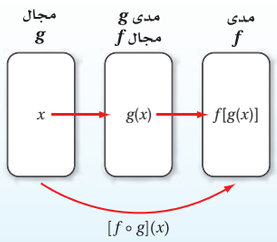
مفهوم أساسي تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كانت f ، g دالتين، وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإنه يمكن إيجاد الدالة المركبة $f \circ g$، وهي:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

النموذج



قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f ، g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط إذا كان مدى $g(x)$ مجموعة جزئية من مجال f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط إذا كان مدى $f(x)$ مجموعة جزئية من مجال g.

مثال 3 تركيب الدوال

a) أوجد $[g \circ f](0)$, $[f \circ g](5)$، إذا كان ذلك ممكنًا ، حيث:

$f = \{(1, 8), (0, 13), (15, 11), (14, 9)\}$, $g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

لإيجاد $[f \circ g](5)$، أوجد $g(5)$ أولًا، ثم ابحث عن قيمة $g(5)$ في مجال الدالة f لإيجاد $f[g(5)]$.

$g(5) = 1$ $\quad [f \circ g](5) = f[g(5)] = f(1) = 8$

لإيجاد $[g \circ f](0)$، أوجد $f(0)$ أولًا، ثم ابحث عن قيمة $f(0)$ في مجال الدالة g لإيجاد $g[f(0)]$.

$$[g \circ f](0) = g[f(0)] = g(13)$$

وبما أن $g(13)$ غير معرّفة، فإن $[g \circ f](0)$ غير معرّفة.

إرشادات للدراسة

التركيب كن حذرًا من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.

b) إذا كانت $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 4x$ ، فأوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$.

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب الدوال	$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= f(4x)$	بالتعويض	$= g(2x - 5)$
$= 2(4x) - 5$	بالتعويض	$= 4(2x - 5)$
$= 8x - 5$	بالتبسيط	$= 8x - 20$

تأكد

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

(3A) $f = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$, $g = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

(3B) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x - 6$

(3A)

$f \circ g = \{(4, -2), (2, -5), (9, 7), (3, 8)\}$

$g \circ f$ غير معرف.

(3B)

$[f \circ g](x) = x^2 - 12x + 38$

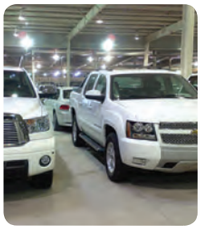
$[g \circ f](x) = x^2 - 4$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع تُمثل في بعض المراحل الدراسية $f(x)$ "بآلة" تتخذ قيم x مدخلات لها، وتنتجها على صورة مخرجات هي قيم $f(x)$؛ لذا، اطلب إلى الطلبة باستعمال هذا النموذج أن يشرحوا كيف أن تركيب دالتين يمكن تمثيله "بآلتين" مترابطتين معًا. واطلب إليهم أيضًا استعمال ذلك النموذج؛ لشرح كيف يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرف لبعض قيم المدخلات الابتدائية.

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$؛ لذا فإن ترتيب الدوال عند تركيبها مهم.



الربط مع واقع الحياة

منيت كبرى شركات صناعة السيارات بخسائر كبيرة في الأزمة المالية العالمية عام 2008 م - 1429 هـ، مما اضطرها إلى تخفيض أسعار مبيعاتها للسيطرة على ظاهرة التضخم. ويقصد بالتضخم في الاقتصاد ارتفاع أسعار البضائع والخدمات خلال فترة زمنية محددة.

مثال 4 من واقع الحياة — **استعمال تركيب دالتين**

سيارات: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافًا إليه خصم مقداره BD 150 يقدمه وكيل السيارة. إذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها BD 6450 ، فأوجد السعر النهائي لسيارة أحمد إذا طبق التخفيض: **a)** قبل الخصم **b)** بعد الخصم، ثم قارن بين السعرين.

افهم افترض أن x تمثل السعر الأصلي لسيارة أحمد، و$d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم.

خطّط اكتب معادلتين لدالتي التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخفض المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة، فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x$$

يخصم الوكيل BD 150 من سعر كل سيارة جديدة؛ لذا فإن دالة الخصم هي:

$$r(x) = x - 150$$

حُلّ **a)** إذا طُبّق التخفيض قبل الخصم فإن السعر النهائي لسيارة أحمد الجديدة يُمثّل بالدالة $[r \circ d](6450)$.

$$[r \circ d](x) = r[d(x)]$$

$$[r \circ d](6450) = r\,[6450 - 0.12(6450)]$$

$$= r(6450 - 774)$$

$$= r(5676)$$

$$= 5676 - 150 = 5526$$

b) أما إذا طُبّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي لسيارة أحمد يُمثّل بالدالة $[d \circ r](6450)$.

$$[d \circ r](x) = d[r(x)]$$

$$[d \circ r](6450) = d(6450 - 150)$$

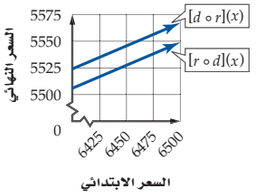
$$= d(6300)$$

$$= 6300 - 0.12(6300)$$

$$= 6300 - 756 = 5544$$

وبما أن $[d \circ r](6450) = 5544$, $[r \circ d](6450) = 5526$ فإن السعر النهائي لسيارة أحمد سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبته 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر؛ لذا ستكون قيمة التخفيض أعلى.



تأكد

4) تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم BD 3.5، وتخفيض نسبته 15% من السعر، إذا كان سعر الجهاز الأصلي BD 30 ، فأوجد السعر النهائي للجهاز إذا طبق التخفيض: **a)** قبل الخصم **b)** بعد الخصم. ثم قارن بين السعرين.

a) BD 22 a) BD 22.525

تطبيق التخفيض قبل الخصم يعطي سعرًا أقل بـ BD 0.525

تركيب دالتين

مثال 4 يُبيّن كيفية استعمال تركيب الدوال لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال إضافي

4 أقساط: يُقتطع BD 20 شهريًا من راتب سعيد للتأمين الصحي، بالإضافة إلى 8% من الراتب للادخار. إذا كان راتب سعيد BD 600 ، فأوجد ما يبقى من راتبه إذا طبق اقتطاع التأمين الصحي: **a)** قبل اقتطاع الادخار. **b)** بعد اقتطاع الادخار، ثم قارن بينهما.

a) BD 553.6

b) BD 532

ما يبقى من راتبه أكبر إذا اقتطع التأمين الصحي قبل اقتطاع الادخار.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلبة كتابة عبارات تحوي تركيب دوال، ثم كتابة ملاحظات عليها لمساعدتهم. مثلاً، تُقرأ $[f \circ g](x)$ على النحو الآتي "f بعد $g(x)$" ، ابدأ بإيجاد قيمة $g(x)$، ثم استعمل هذه القيمة كمدخلة للدالة f.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-7 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $(f+g)(x)=4x+1,$
$(f-g)(x)=-2x+3,$
$(f\cdot g)(x)=3x^2+5x-2,$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+2}{3x-1}, x\neq\frac{1}{3}$

2) $(f+g)(x)=x^2-x+3,$
$(f-g)(x)=x^2+x-13,$
$(f\cdot g)(x)=-x^3+8x^2+5x-40,$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-5}{-x+8}, x\neq 8$

3) $[g\circ f](12)=11$
$(5)[f\circ g]$ غير معرّفة.

4) $(12)[g\circ f]$ غير معرّفة
$(5)[f\circ g]$ غير معرّفة.

5) $[f\circ g](x)=-15x+18,$
$[g\circ f](x)=-15x-6$

6) $[f\circ g](x)=x^2+3x-6,$
$[g\circ f](x)=x^2+11x+18$

7) قيمة الادخار قبل تسديد القسط هي BD76 ، قيمة الادخار بعد تسديد القسط هي BD62.7 ، قيمة الادخار قبل تسديد القسط أكبر بـ BD13.3 من قيمته بعد تسديد القسط.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون	8–21 ، 40,41 ، 43–55
ضمن ضمن	9–29 فردي ، 30–32 ، 34 ، 36 ، 38–41 ، 43–55
فوق فوق	22–52 ، (اختياري: 53 –55)

تأكد من فهمك

المثالان 2 , 1 الصفحتان 11 - 10

أوجد $(x)\left(\frac{f}{g}\right), (f\cdot g)(x), (f-g)(x), (f+g)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي: للتمرينين 1,2 انظر الهامش

1) $f(x)=x+2$, $g(x)=3x-1$

2) $f(x)=x^2-5$, $g(x)=-x+8$

مثال 3 صفحة 12

أوجد $(12)[g\circ f], (5)[f\circ g]$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا: للتمرينين 3,4 انظر الهامش

3) $f=\{(2,5),(6,10),(12,9),(7,6)\}$
$g=\{(9,11),(6,15),(10,13),(5,8)\}$

4) $f=\{(-5,4),(14,8),(12,1),(0,-3)\}$
$g=\{(-2,-4),(-3,2),(-1,4),(5,-6)\}$

أوجد $(x)[g\circ f], (x)[f\circ g]$، إذا كان ذلك ممكنًا. للتمرينين 5,6 انظر الهامش

5) $f(x)=-3x$, $g(x)=5x-6$

6) $f(x)=x+4$, $g(x)=x^2+3x-10$

مثال 4 صفحة 13

7) ثقافة مالية: يُقتطع 8% من راتب موظف للادخار. ويستطيع أن يختار أن يكون الاقتطاع قبل تسديد قسط آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. إذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط BD950. فأوجد قيمة الادخار قبل تسديد القسط وبعد تسديده، ثم قارن بين القيمتين. فسر إجابتك. انظر الهامش

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 الصفحتان 11 - 10

أوجد $(x)\left(\frac{f}{g}\right), (f\cdot g)(x), (f-g)(x), (f+g)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي: للتمارين 8–11 انظر ملحق الإجابات

8) $f(x)=x-1$, $g(x)=5x-2$

9) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x+1$

10) $f(x)=3x$, $g(x)=-2x+6$

11) $f(x)=3x^2-4$, $g(x)=x^2-8x+4$

12) مشي: يمشي راشد على ممر متحرك. إذا كانت سرعته يُعبر عنها بالدالة $I(x)=3x-4$، وسرعة الممر المتحرك بالدالة $W(x)=4x+7$، حيث x الزمن بالثواني.

a) ما سرعته الكلية إذا كان يمشي في اتجاه سير الممر المتحرك؟ $(W+I)(x)=7x+3$

b) كم تصبح سرعته الكلية إذا سار في عكس اتجاه سير الممر المتحرك؟ $(W-I)(x)=x+11$

مثال 3 صفحة 12

أوجد $(-4)[g\circ f], (-8)[f\circ g]$ لكل زوج من الدوال الآتية ، إذا كان ذلك ممكنًا: للتمارين 13–16 انظر ملحق الإجابات

13) $f=\{(5,13),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$
$g=\{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

14) $f=\{(-8,-4),(0,4),(2,6),(-6,-2)\}$
$g=\{(4,-4),(-2,-1),(-4,0),(6,-5)\}$

أوجد $(2)[g\circ f]$ لكل زوج من الدوال الآتية ، إذا كان ذلك ممكنًا:

15) $f=\{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-4)\}$
$g=\{(5,-4),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

16) $f=\{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$
$g=\{(-6,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$

17) $[f\circ g](x)=32x^2+44x+16$
$[g\circ f](x)=8x^2-4x+7$

أوجد $(x)[g\circ f], (x)[f\circ g]$ فيما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

17) $f(x)=2x^2-x+1$, $g(x)=4x+3$

18) $f(x)=4x-1$, $g(x)=x^3+2$

19) $f(x)=2x^2$, $g(x)=8x^2+3x$

18) $[f\circ g](x)=4x^3+7$
$[g\circ f](x)=64x^3-48x^2+12x+1$

19) $[f\circ g](x)=128x^4+96x^3+18x^2$
$[g\circ f](x)=32x^4-6x^2$

مثال 4 صفحة 13

20) صناعة: ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. إذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة $r(x)=6.5x$، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة $c(x)=0.75x+1850$.
(إرشاد: $P(x)=r(x)-c(x)$، حيث $P(x)$ دالة الربح)

a) اكتب دالة ربح المصنع من بيع الفناجين. $P(x)=5.75x-1850$

b) أوجد الربح الناتج من بيع 5000 , 1000 , 500 فنجان. $P(500)=1025; P(1000)=3900,$
$P(5000)=26900$

14 الفصل 1 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

الربط مع واقع الحياة

الخاصية المميزة للشاشات المسطحة HDTV هي أن نسبة عرضها إلى ارتفاعها هي 16:9، مما يوفر للمشاهد رؤية واضحة؛ لأن هذه النسبة تمثل حقل الرؤية عند الإنسان.

21) تسوق: يرغب شخص في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. إذا كان سعره الأصلي 2299$، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان.

a) فاكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان فقط $t(x)$. $p(x) = 0.65x, t(x) = 1.0625x$

b) أيّ الدالتين الآتيتين يمثل سعر التلفاز: $(p \circ t)(x)$ أم $(t \circ p)(x)$؟ فسر إجابتك.

c) كم سيدفع هذا الشخص ثمنًا للتلفاز؟ 1587.75$

21b) بما أن $(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)$، فكلا الدالتين تمثل سعر التلفاز

للتمارين 22–24 انظر الهامش

إذا كان $f(x) = x^2 + x - 12, g(x) = x - 3$، فأوجد كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها:

22) $(f - g)(x)$ **23)** $2(g \cdot f)(x)$ **24)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $f(x) = 5x, g(x) = -2x + 1, h(x) = x^2 + 6x + 8$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

25) $g[h(3)] = -69$ **26)** $h[f(-5)] = 483$ **27)** $h[f(9)] = 2303$

28) $f[g(3a)] = -30a + 5$ **29)** $f[h(a + 4)] = 5a^2 + 70a + 240$ **30)** $g[f(a^2 - a)] = -10a^2 + 10a + 1$

31) تمثيلات متعددة: لتكن: $f(x) = x^2, g(x) = x$. انظر ملحق الإجابات

a) جدولة: أنشئ جدولًا يبين بعض قيم الدوال: $(f - g)(x), (f + g)(x), g(x), f(x)$.

b) تمثيل بياني: مثّل بيانيًّا الدوال $(f - g)(x), (f + g)(x), g(x), f(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

c) تمثيل بياني: مثّل بيانيًّا الدوال $(f - g)(x), g(x), f(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) تعبير لفظي: صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $(f - g)(x), (f + g)(x), g(x), f(x)$.

32) توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1993 م – 1414 هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين: للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

رجال: $y = 7x + 6$

نساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1993 م – 1414 هـ، و y تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم.

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟

إذا كان $f(x) = x + 2, g(x) = -4x + 3, h(x) = x^2 - 2x + 1$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

33) $(f \cdot g \cdot h)(3) = -180$ **34)** $[(f + g) \cdot h](1) = 0$ **35)** $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(-6) = -\frac{49}{108}$

36) $[f \circ (g \circ h)](2) = 1$ **37)** $[g \circ (h \circ f)](-4) = -33$ **38)** $[h \circ (f \circ g)](5) = 256$

39) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا التمرين العلاقة بين الدالتين $(f \cdot g), \left(\frac{f}{g}\right)$ عندما تكون $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x - 3$.

a) جدولة: انسخ الجدول الآتي وأكمله.

x	$(f \cdot g)(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
1	−4	−1
2	−5	−5
3	0	الدالة غير معرفة
4	17	17
5	52	13

b) تمثيل بياني: استعمل الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل الدالتين $\left(\frac{f}{g}\right), (f \cdot g)$ بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد. انظر الهامش

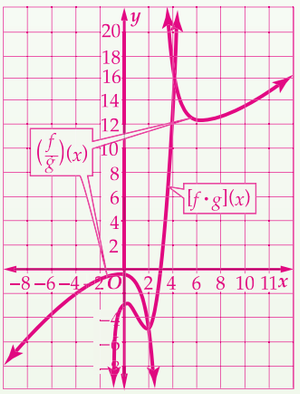
c) تعبير لفظي: بيّن العلاقة بين الدالتين $(f \cdot g)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)$.

إجابة ممكنة: إذا كانت x تساوي 2 أو 4، فإن الدالتين متساويتان.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة جدول القيم، والتمثيل البياني، للمقارنة بين $f(x)$، $g(x)$ وجمعهما وطرحهما في التمرين 31، وللمقارنة بين ضرب الدالتين وقسمتهما في التمرين 39.

إجابة:

39b)



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع يستعمل تركيب الدوال في العديد من دول العالم لحساب قيم مخالفات السرعة، وذلك عن طريق حساب عدد الأميال الزائدة على السرعة المحددة. وضرب ذلك العدد بمقدار محدد لكل ميل، ثم إضافة مقدار موحد. اطلب إلى الطلبة إيجاد تركيب ثلاث دوال مختلفة، بالاعتماد على قيم من افتراضهم للسرعة المحددة، والمقدار المحدد لكل ميل، والمقدار الموحد.

على أن يكون تركيب الدوال على الصورة $[f \circ g \circ h](x)$، حيث x تمثل سرعة السيارة بالأميال في الساعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

40) مسألة مفتوحة: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $(f \circ g)(4) = 0$.

41) اكتشف الخطأ: تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $(f \circ g)(x)$ حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$، مَنْ منهما إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

ريم

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= (x^2+8)^2 + 2(x^2+8) - 8 \\ &= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8 \\ &= x^4 + 18x^2 + 72\end{aligned}$$

العنود

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= (x^2+8)^2 + 2x - 8 \\ &= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8 \\ &= x^4 + 16x^2 + 2x + 56\end{aligned}$$

42) تحدٍّ: إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}, g(x) = \sqrt{x^6}$، فحدد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

a) $g(x) \cdot g(x)$ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية **b)** $f(x) \cdot f(x)$ المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$

43) تبرير: حدد هل العبارتان الآتيتان صحيحتان أحيانًا أو صحيحتان دائمًا أو غير صحيحتين أبدًا؟ وفسر إجابتك.

a) يكون مجال الدالة المركبة $g[f(x)]$ مشروطًا بمجال الدالة f. دائمًا

b) يكون مجال الدالة المركبة $g[f(x)]$ مشروطًا بمجال الدالة g. أحيانًا

44) اكتب: وضح لماذا نقوم بتركيب دالتين. وأعط مثالاً من واقع الحياة يمكنك حله باستعمال تركيب الدوال.

تدريب على اختبار معياري

45) إذا كان $g(x) = x^2 + 9x + 21, h(x) = 2(x+5)^2$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟ G

F $k(x) = -x^2 - 11x - 29$

G $k(x) = x^2 + 11x + 29$

H $k(x) = x + 4$

J $k(x) = x^2 + 7x + 11$

46) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فما قيمة $f[g(6)]$؟ C

A 38

B 43

C 86

D 261

مراجعة تراكمية

أوجد كلًّا من القيم الآتية إذا كان $h(x) = 15 - 4x$ (مهارة سابقة)

47) $h(-5)$ 35 **48)** $h(\frac{n}{2})$ $15-2n$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

49) $\sqrt{2}(\sqrt{8} + 4\sqrt{3})$ $4 + 4\sqrt{6}$ **50)** $\frac{3}{3+\sqrt{7}}$ $\frac{9-3\sqrt{7}}{2}$

51) $(-7ab^4c)^3[(2a^2c)^2]^3$ $-(28)^3a^{15}b^{12}c^9$ **52)** $\frac{32a^{-8}b^3c^{-4}}{4a^3b^5c^{-2}}$ $\frac{8}{a^{11}b^2c^2}$

مراجعة المتطلبات السابقة

53) $5x - 7y = 12, x$ $x = \frac{12+7y}{5}$ **54)** $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ $y = \frac{1-x^2}{-2x}$

55) $(x+2)^2 - (y+5)^2 = 4, y$ $y = \pm\sqrt{(x+2)^2 - 4} - 5$

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلبة في التمرين 41 بأن المطلوب إيجاد $f(x^2 + 8)$. لذا، يتم التعويض عن x في $(x^2 + 2x - 8)$ بالتعبير $(x^2 + 8)$.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى كل طالب إخبار زميله شفويًّا أو كتابيًّا بالعملية الرياضية التي يمكن أن يستعملها؛ لإيجاد ثمن سلعة عليها تخفيض بنسبة معينة وخصم إضافي بعد التخفيض. تركيب دالتين

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-2

حل معادلات بالنسبة لمتغير محدد.

الدرس 1-2

إيجاد معكوس دالة أو معكوس علاقة. تحديد إذا كانت دالة (أو علاقة) تمثل معكوسًا لدالة أخرى (أو علاقة أخرى) أم لا.

ما بعد الدرس 1-2

تطوير تعريف اللوغاريتم من خلال استكشاف العلاقة بين دوال أسية ومعكوساتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- اعتمادًا على الجدول، كم دولارًا أمريكيًّا يقابل كلًّا من BD 5 ، BD 10 ؟
  $26.5 , $13.23
- كم دينارًا بحرينيًّا يقابل كلًّا من $1، $5 ؟
  BD 1.89 , BD 0.378
- ما مقلوب 2.65 ؟ وهل يظهر مقلوب 2.65 في الجدول؟
  $\frac{1}{2.65} \approx 0.378$ ، 0.378 تظهر في الجدول.

إيجاد المعكوس

مثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد العلاقة العكسية لمجموعة من الأزواج المرتبة.

1-2 العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

فيما سبق

درست حلّ معادلات بالنسبة لمتغير محدد.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد معكوس دالة أو معكوس علاقة.
- أحدّد ما إذا كانت دالة (أو علاقة) تمثل معكوسًا لدالة أخرى (أو علاقة أخرى) أم لا.

المفردات الأساسية

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

البحرين	أمريكا
	2.65
0.378	

أمريكا	البحرين
2.65	
	0.378

يبين الجدول الآتي قيمة الدينار البحريني مقارنة بالدولار الأمريكي. والدالة $r = 2.65d$ تمثّل قيمة الدينار (r) مقارنة بالدولار (d). ولتحديد قيمة الدولار الواحد بالدينار البحريني، حُلَّ المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير d فتكون النتيجة، $d = 0.378r$ ، والتي تمثل معكوس الدالة السابقة.

إيجاد المعكوس تذكّر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. و**العلاقة العكسية** هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكن الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيي كل زوج مرتب للعلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى معكوسها، ومداها هو مجال معكوسها.

مفهوم أساسي العلاقة العكسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي تكون العلاقتان إحداهما معكوس للأخرى إذا وفقط إذا احتوت إحداهما على الزوج المرتب (a, b)، واحتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

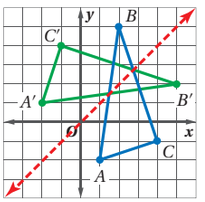
مثال كل من العلاقتين A, B معكوس للأخرى.

$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$ $\quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$

مثال 1 إيجاد العلاقة العكسية

هندسة: يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(-1, 4), (2, 5), (4, -2), (1, -2)\}$.

أوجد معكوس هذه العلاقة. وصف تمثيله البياني.



مثّل العلاقة بيانيًّا. ولإيجاد المعكوس قم بتبديل إحداثيات الأزواج المرتبة. فيكون معكوس العلاقة هو: $\{(4, -1), (5, 2), (-2, 1), (1, -2)\}$.

من تمثيل الأزواج المرتبة لمعكوس هذه العلاقة يتضح أنها تمثل رؤوس $\triangle A'B'C'$ بعد انعكاس رؤوس $\triangle ABC$ في المستقيم $y = x$.

تأكد

1) هندسة: إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-6, -3), (-6, -8), (-3, -8), (-8, -3)\}$ تمثّل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد معكوس هذه العلاقة، وصف تمثيله البياني.

$\{(-3, -6), (-8, -6), (-8, -3)\}$ ، انعكاس للمثلث في $y = x$

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة و**الدالة العكسية**. ويُرمز إلى معكوس $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

مصادر الدرس 1-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (19)	• تنويع التعليم ، ص (19,21)	• تنويع التعليم ، ص (21)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين ، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

إيجاد المعكوس

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد معكوس دالة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 **هندسة:** تمثل الأزواج المرتبة في العلاقة $\{(1, 3),(6, 3),(6, 0),(1,0)\}$ إحداثيات رؤوس مستطيل. أوجد معكوس هذه العلاقة، وصف تمثيله البياني.

معكوس العلاقة هو:

$\{(3, 1), (3, 6), (0, 6), (0, 1)\}$

وهذه الأزواج المرتبة تمثل رؤوس مستطيل، وهي عبارة عن إحداثيات الرؤوس الأصلية بعد انعكاسها في المستقيم $y = x$.

2 أوجد معكوس الدالة:

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

$f^{-1}(x) = -2x + 2$

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل صوتي اطلب إلى الطلبة أن يعدوا تسجيلًا صوتيًّا يوضحون فيه كيفية إيجاد معكوس دالة، واطلب إليهم أيضًا بيان كيفية التحقق مما إذا كانت دالتان تمثلان معكوسًا لبعضهما بعضًا أم لا.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خواص المعكوس

التعبير اللفظي إذا كان كل من f, f^{-1} معكوسًا للآخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال ليكن $f(x) = x - 4$ ومعكوسها هو $f^{-1}(x) = x + 4$.

احسب $f(6)$. احسب $f^{-1}(2)$.

$f(x) = x - 4$ $\quad$ $f^{-1}(x) = x + 4$

$f(6) = 6 - 4 = 2$ $\quad$ $f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

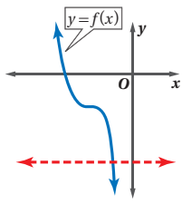
وبما أن كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ معكوس للآخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

قراءة الرياضيات

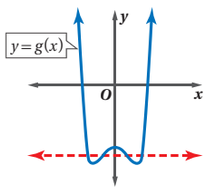
الدالة العكسية

f^{-1} يقرأ معكوس f أو معكوس الدالة f. تذكّر أن (-1) ليس أسًّا.

إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة واحد لواحد. تذكّر أنه يمكن استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكن استعمال اختبار الخط الأفقي للدالة لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



إذا كانت جميع الخطوط الأفقية التي يمكن رسمها لا تقطع منحنى الدالة $y = f(x)$ في أكثر من نقطة واحدة فقط. فإن معكوس الدالة يمثل دالة.



إذا قطعت بعض الخطوط الأفقية المنحنى $y = g(x)$ في نقطتين أو أكثر فإن معكوس الدالة لا يمثل دالة.

يمكنك إيجاد معكوس الدالة بتبديل مجال الدالة ومداها.

مثال 2 إيجاد المعكوس

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين:

a $f(x) = 2x - 5$

خطوة 1 أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y

$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$

خطوة 2 بدِّل بين كلٍّ من المتغير x والمتغير y في المعادلة

$x = 2y - 5$

خطوة 3 حل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

بإضافة 5 للطرفين $\quad x + 5 = 2y$

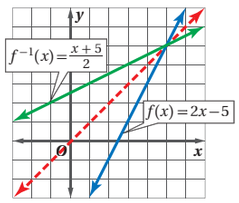
بقسمة الطرفين على 2 $\quad \frac{x+5}{2} = y$

خطوة 4 ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y.

$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

فيكون معكوس $f(x) = 2x - 5$ هو $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

لاحظ أن التمثيل البياني لِـ $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هو انعكاس للتمثيل البياني لِـ $f(x) = 2x - 5$ في المستقيم $y = x$.



إرشادات للدراسة

الدوال معكوس الدالة f في فرع b لا يمثل دالة؛ لأنه لا يحقق اختبار الخط الرأسي، أو لأن f لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

b $f(x) = x^2 + 1$

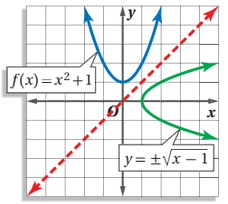
خطوة 1 $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 1$

خطوة 2 $x = y^2 + 1$

خطوة 3 $x - 1 = y^2$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\pm\sqrt{x-1} = y$

خطوة 4 $f^{-1}(x) = y = \pm\sqrt{x-1}$



لاحظ أن التمثيل البياني للمنحنى $y = \pm\sqrt{x-1}$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ في المستقيم $y = x$.

تأكد للتدريبين 2A, 2B انظر الهامش

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين:

2A $f(x) = \frac{x-3}{5}$

2B $f(x) = 3x^2$

مراجعة المفردات

الدالة المحايدة

تسمى الدالة $I(x) = x$ دالة محايدة.

التأكد من المعكوس يمكن تحديد ما إذا كانت دالتان تمثل كل منهما معكوسًا للأخرى، وذلك بإيجاد كل من تركيبيهما. إذا كان الناتج في كل منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = x$، فإن كلًّا من الدالتين تمثل معكوسًا للأخرى.

مفهوم أساسي الدوال العكسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي تكون كل من الدالتين f, g معكوسًا للأخرى إذا وفقط إذا كان كل من تركيبيهما يساوي الدالة المحايدة.

الرموز الدالتان $f(x), g(x)$ تمثل كل منهما معكوسًا للأخرى إذا وفقط إذا كان $[f \circ g](x) = x$ و $[g \circ f](x) = x$.

مثال 3 التأكد أن كل دالة تمثل معكوسًا للأخرى

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى أم لا. وفسر إجابتك.

a $f(x) = 3x + 9$ و $g(x) = \frac{1}{3}x - 3$

تأكد أن تركيب الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ يساوي الدالة المحايدة.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$$
$$= 3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) + 9$$
$$= x - 9 + 9 = x$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g(3x + 9)$$
$$= \frac{1}{3}(3x + 9) - 3$$
$$= x + 3 - 3 = x$$

إذن تمثل كل من الدالتين معكوسًا للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

b $f(x) = 4x^2$ و $g(x) = 2x$

$$[f \circ g](x) = f(2x)$$
$$= 4(2x)^2$$
$$= 4(4x^2) = 16x^2$$

بما أن $[f \circ g](x) \neq x$، فإن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ لا تمثل كل منهما معكوسًا للأخرى.

تنبيه!

الدالة العكسية

تأكد أن التركيبين $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ يساوي كلّ منهما الدالة المحايدة؛ وذلك لتكون كل من الدالتين معكوسًا للأخرى.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي قد يخلط بعض الطلبة بين الرمزين f^{-1}، و $\frac{1}{f}$ للدالة f. لذا، بين لهم أن الرمز f^{-1} يعني معكوس الدالة f، على حين يعني الرمز $\frac{1}{f}$ مقلوب الدالة f.

التأكد من المعكوس

مثال 3 يُبيّن كيفية تحديد إذا كانت دالتان تمثل كل منهما معكوسًا للأخرى أم لا.

مثال إضافي

3 حدد إذا كانت كل من $f(x) = \frac{3}{4}x - 6, g(x) = \frac{4}{3}x + 8$ معكوسًا للأخرى أم لا. وفسر إجابتك. تمثل كل من الدالتين معكوسًا للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

إجابات:

2A $f^{-1}(x) = 5x + 3$

2B $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$

تنويع التعليم دون ضمن

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة تمثيل الدالة المحايدة $f(x) = x$ بيانيًّا على مستوى إحداثي كبير مستعملين قطعة سلك أو خيط أو أي شيء مشابه. ثم يضعون قطعة أخرى على المستوى الإحداثي نفسه؛ ليمثل بيانيًّا الدالة $f(x) = 2x - 5$ في المثال 2. واطلب إلى الطلبة تمثيل معكوس تلك الدالة بيانيًّا، والربط بين التمثيل البياني لهذه الدالة ومعكوسها والتمثيل البياني للدالة $f(x) = x$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-8؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

3) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x$

4) $g^{-1}(x) = \frac{x+6}{4}$

5) $y = \pm\sqrt{x+3}$

6) نعم؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

7) لا؛ لأن $[f \circ g](x) = x + \frac{1}{12}$

8) لا؛ لأن $[f \circ g](x) = \frac{2}{27}(\sqrt{x})^3$

11) $f^{-1}(x) = x - 2$

12) $g^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$

13) $y^{-1} = \frac{x-1}{-2}$

14) $h^{-1}(x) = 3x + 4$

15) $y^{-1} = -\frac{3}{5}(x+8)$

16) $h^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-4}$

17) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{5}x}$

18) $f^{-1} = \pm\sqrt{2x+2}$

19) $y^{-1} = \pm\sqrt{x-3} - 1$

21) نعم؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

22) نعم؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

24) نعم؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

3A) الدالتان $f(x)$, $g(x)$ لا تمثل كل منهما معكوسًا للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = x + 9$ و $[g \circ f](x) = x + 3$.

3B) الدالتان $f(x)$, $g(x)$ لا تمثل كل منهما معكوسًا للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = \frac{(x+1)^2}{2} - 1$, $[g \circ f](x) = x^2$

تأكد

حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى. وفسر إجابتك.

3A) $f(x) = 3x - 3$ و $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$ **3B)** $f(x) = 2x^2 - 1$ و $g(x) = \frac{x+1}{2}$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 17

أوجد معكوس كل علاقة مما يأتي:

1) $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$ **2)** $\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\}$

1) $\{(10, -9), (-3, 1), (-5, 8)\}$

2) $\{(9, -2), (-1, 4), (9, -7), (0, 7)\}$

مثال 2 الصفحتان 18 , 19

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية: للتمارين 5-3 انظر الهامش

3) $f(x) = -3x$ **4)** $g(x) = 4x - 6$ **5)** $h(x) = x^2 - 3$

مثال 3 الصفحتان 19 , 20

حدد إذا كانت كل من الدالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى، مجيبًا بِـ "نعم" أو "لا" مع توضيح السبب:

6) $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$ **7)** $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $g(x) = 2x - \frac{4}{3}$ **8)** $f(x) = 2x^3$, $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ للتمارين 8-6 انظر الهامش

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 17

أوجد معكوس العلاقات الآتية:

9) $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$

9) $\{(-5, 1), (6, 2), (-7, 3), (8, 4), (-9, 5)\}$

10) $\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\}$

10) $\{(0, 3), (4, 5), (-8, 7), (12, 9), (16, 11)\}$

مثال 2 الصفحتان 18 , 19

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي:

11) $f(x) = x + 2$ **12)** $g(x) = 5x$ **13)** $y = -2x + 1$

للتمارين 19-11 انظر الهامش

14) $h(x) = \frac{x-4}{3}$ **15)** $y = -\frac{5}{3}x - 8$ **16)** $h(x) = x^2 + 4$

17) $f(x) = 5x^2$ **18)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ **19)** $y = (x+1)^2 + 3$

مثال 3 الصفحتان 19 , 20

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى، مجيبًا بِـ "نعم" أو "لا" مع توضيح السبب:

20) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$ **21)** $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$, $g(x) = -3x + 9$ **22)** $f(x) = \frac{x+10}{8}$, $g(x) = 8x - 10$ انظر الهامش

23) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$ **24)** $f(x) = (x+6)^2$, $g(x) = \sqrt{x} - 6$ انظر الهامش **25)** $f(x) = 2\sqrt{x-5}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

26) وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل p لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(p) = 12p$.

a) أوجد الدالة $c(p)$ التي تمثل سعر p من لترات البنزين $c(p) = 0.100p$

b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلو متر الواحد، مستعملاً فكرة معكوس الدالة. $c(k) \approx 0.008k$

27) هندسة: يُعبر عن مساحة سطح الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$. للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

a) أوجد معكوس الدالة.

b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحة سطحها 36cm^2.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	26-9، 31، 32، 34-45
ضمن ضمن المتوسط	25-9 فردي، 26، 27، 28-32، 34-45
فوق فوق المتوسط	42-27، (اختياري: 43-45)

28) **تسوق:** اشترى خالد سلعة عن طريق الإنترنت، ودفع مبلغ BD250. إذا كانت تكلفة التسوق عبر الإنترنت 3.5% من السعر الأصلي، وأجرة الشحن BD22.3 ، فما السعر الأصلي للسلعة؟ BD 220

29) **درجات الحرارة:** تستعمل الصيغة $F(x)=\frac{9}{5}x+32$ للتحويل من درجة الحرارة بمقياس سيليزي إلى درجة الحرارة بمقياس فهرنهايت.

a) أوجد المعكوس $F^{-1}(x)$. ثم بيِّن أن $F(x)$ و $F^{-1}(x)$ تمثل كل منهما معكوسًا للأخرى. انظر ملحق الإجابات

b) فيمَ تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟ يمكن أن تستعمل للتحويل من درجة الحرارة بمقياس فهرنهايت إلى درجة الحرارة بمقياس سيليزي

30) **تمثيلات متعددة:** إذا كان $y=x^n$ حيث $n=0,1,2,\ldots$.

a) **تمثيل بياني:** استعمل الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $y=x^n$ بيانيًّا للقيم $n=0,1,2,3,4$. انظر ملحق الإجابات

b) **جدولة:** ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدالة دالة؟ سجل نتائجك في جدول. انظر ملحق الإجابات

c) **تحليل:** استنتج قاعدة لقيم n يكون عندها معكوس الدالة $f(x)=x^n$ دالة أيضًا، على فرض أن n عدد كلي. n عدد فردي

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تبرير:** ناقش إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وبرر إجابتك:
إذا كانت العلاقة لا تمثل دالة، فإن معكوسها لا يمثل دالة. انظر الهامش

32) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على دالة ومعكوسها . وتحقق أن كلًّا منهما معكوسًا للأخرى.

33) **تحدٍّ:** أعطِ مثالًا على دالة معكوسها الدالة نفسها.

32) إجابة ممكنة: $f(x)=2x, f^{-1}(x)=0.5x, f[f^{-1}(x)]=f^{-1}[f(x)]=x$
33) انظر الهامش

34) **اكتب:** إذا كان لديك تركيب لدالتين، كل منهما معكوس للأخرى، فلماذا تكون قيمة تركيب الدالتين عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا؟ انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

35) إذا كان $g(x)=-x+1, f(x)=x^2+3$، فأي مما يأتي يمثل $f[g(x)]$؟ **J**

F x^2-x+2 **H** $-x^3+x^2-3x+3$
G $-x^2-2$ **J** x^2-2x+4

36) أيّ الدوال الآتية هي الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{3x-5}{2}$؟ **A**

A $g(x)=\frac{2x+5}{3}$ **C** $g(x)=2x+5$
B $g(x)=\frac{3x+5}{2}$ **D** $g(x)=\frac{2x-5}{3}$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x)=x^2-1, g(x)=x-2, f(x)=3x+5$ فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

37) $g[f(3)]$ 12 **38)** $f[h(-2)]$ 14 **39)** $h[g(1)]$ 0

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي: (الدرس 1-1) للتمارين 42–40 انظر الهامش

40) $f(x)=x+5$, $g(x)=x-3$
41) $f(x)=3x-20$, $g(x)=x-2$
42) $f(x)=x^2-9$, $g(x)=2x+3$

مراجعة المتطلبات السابقة

بسِّط كلًّا مما يأتي: للتمارين 45–43 انظر الهامش

43) $\sqrt{x^4y^9}$ $x^2y^4\sqrt{y}$ **44)** $\sqrt{-32}$ $4i\sqrt{2}$ **45)** $(4i)(-3i)$ 12

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع يمكن أن تستعمل $f(x)=2.3x+61$؛ لتقريب طول شخص بالسنتمترات إذا عُلم طول عظم فخده. أوجد $f^{-1}(x)$، واشرح فيما تستعمل.

$f^{-1}(x)=\frac{x-61}{2.3}$ ، تستعمل؛ لإيجاد الطول التقريبي لعظم الفخذ لشخص طوله معلوم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 30 الآلة الحاسبة البيانية، وجدول القيم والتحليل لاستكشاف خصائص الدوال العكسية .

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدهم مفهوم تركيب دالتين الذي تعلموه سابقًا على التأكد من أن كلاً من هاتين الدالتين معكوس للأخرى.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 1-2 , 1-1 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 1.

إجابات :

31) إجابة ممكنة: صحيحة أحيانًا؛ $y=\pm\sqrt{x}$ مثال على علاقة لا تمثل دالة ومعكوسها يمثل دالة. معادلة الدائرة مثال على علاقة لاتمثل دالة ومعكوسها لا يمثل دالة.

33) إجابة ممكنة:
$f(x)=x, f^{-1}(x)=x$، أو
$f(x)=-x, f^{-1}(x)=-x$

34) لإيجاد قيمة إحدى الدالتين عند العدد 5 يتم تنفيذ عملية أو أكثر على هذا العدد، والدالة الأخرى التي هي معكوس الدالة الأولى تعكس هذه العمليات (تزيل أثرها على العدد 5)، وبالتالي فإن الناتج يساوي 5.

1 التركيز

الهدف المقارنة بين دالة ومعكوسها باستعمال آلة حاسبة بيانية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

تأكد بأن الطلبة يعرفون كيف يدخلون قوائم البيانات والتنقل بين القوائم في آلاتهم الحاسبة البيانية.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلبة في مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة. لتنفيذ النشاط 1 والنشاط 2. أطلب إليهم التحقق من أن شاشاتهم متطابقة في كل خطوة.

اسأل:

- ما الفرق بين النشاط 1، والنشاط 2؟
  يقارن النشاط 1 بين أزواج مرتبة منفصلة، على حين يقارن النشاط 2 بين دالتين خطيتين متصلتين.
- كيف يرتبط تمثيل الدالة البياني بتمثيل معكوسها البياني؟ يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا في $y = x$.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 1-8.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1, 2, 5؛ لتقويم مدى قدرة الطلبة على مقارنة الدالة، ومعكوسها باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلبة في كل تمرين ما إذا كان التمثيل البياني للدالة يمر بنقطة الأصل. ثم اطلب إليهم توقع ما إذا كان التمثيل البياني لمعكوس الدالة يمر بنقطة الأصل أم لا.
الدالة على الصورة $f(x) = ax^n$ يمر تمثيلها البياني بنقطة الأصل، إذا مر التمثيل البياني لدالة بنقطة الأصل، فإن التمثيل البياني لمعكوسها يمر بنقطة الأصل أيضًا.

التوسّع في المفهوم

اسأل:

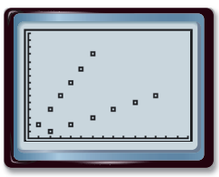
- إذا كان لديك مجموعة أزواج مرتبة تمثل دالة، فكيف يمكنك إيجاد معكوسها؟ تبديل قيم x مع قيم y في كل زوج مرتب.

الدالة العكسية
Inverse Function

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية لمقارنة دالة بمعكوسها، بالجداول والتمثيل البياني. تذكّر أنه يجب مسح البيانات السابقة من قوائم الآلة الحاسبة قبل البدء.

مثال 1 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال الأزواج المرتبة

مثّل الدالة $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$ ومعكوسها بيانيًا.



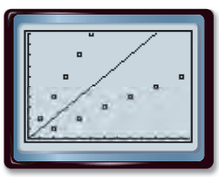
الخطوة 1 أدخل قيم x في **L1** وقيم y في **L2**. ثم مثّل الدالة بالضغط على المفاتيح:

STAT ENTER 1 ENTER 2 ENTER 3 ENTER 4 ENTER

5 ENTER 6 ENTER ▶ 2 ENTER 4 ENTER 6 ENTER 8 ENTER

10 ENTER 12 ENTER 2nd [STAT PLOT] ENTER ENTER GRAPH

اضبط الشاشة ليظهر المجال والمدى.



الخطوة 2 عرّف الدالة العكسية بتحديد **Xlist** في **L2**، وتحديد **Ylist** في **L1**. ثم مثّل الدالة العكسية بيانيًا بالضغط على المفاتيح:

2nd [L2] ▼ ▼ ENTER ENTER ▼ 2nd [STAT PLOT]

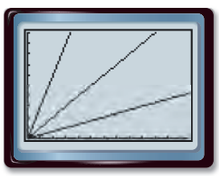
GRAPH 2nd [L1] ▼

الخطوة 3 مثّل المستقيم $y = x$ بيانيًا بالضغط على المفاتيح:

GRAPH X,T,θ,n Y=

مثال 2 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال صيغة الدالة

مثّل الدالة $f(x) = 3x$ ومعكوسها $g(x) = \frac{x}{3}$ بيانيًا.



خطوة 1 امسح البيانات السابقة من مثال 1 بالضغط على المفاتيح:

2nd [STAT PLOT] ENTER ▶ ENTER ▲ ▶ ENTER

2nd [QUIT] ENTER ▶

خطوة 2 أدخِل $f(x)$ ليمثّل **Y1**، و$g(x)$ ليمثّل **Y2**، و$x = y$ ليمثّل **Y3**، ثم مثّل بيانيًا بالضغط على المفاتيح:

ENTER 3 ÷ X,T,θ,n ENTER X,T,θ,n 3 Y=

6 ZOOM X,T,θ,n

تمارين:

مثّل بيانيًا كلًّا من الدالة $f(x)$، ومعكوسها $g(x)$، و $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي: للتمارين 6-1 انظر ملحق الإجابات

1) $f(x) = 5x$
2) $f(x) = x - 3$
3) $f(x) = 2x + 1$
4) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
5) $f(x) = x^2$
6) $f(x) = x^2 - 3$

7) ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة ومعكوسها؟ منحنى الدالة ومعكوسها متماثلان في $y = x$

8) **خمّن:** ماذا يساوي $[f \circ g](x)$ لأي دالة $f(x)$ ومعكوسها $g(x)$؟ $[f \circ g](x) = x$

دوال الجذر التربيعي
Square Root Functions

فيما سبق
درست تبسيط تعابير تحوي جذورًا تربيعية.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أمثل بيانيًا دوال الجذور التربيعية وأحلّلها.

المفردات الأساسية
دالة الجذر التربيعي square root function
الدالة الجذرية radical function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

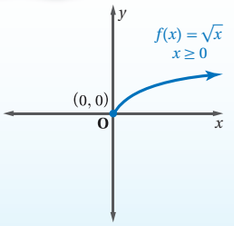
تصدر الأوتار المشدودة عند تحريكها أصواتًا، تعتمد درجتها على عوامل منها: طول الوتر وقوة شده. فكلما كان الوتر أطول كانت قوة الشد اللازمة أكبر؛ لنحصل على درجة الصوت نفسها. وبالمثل كلما كان الوتر أكثر سُمكًا كانت قوة الشد اللازمة أكبر لنحصل على درجة الصوت نفسها.

ويمكن تمثيل ذلك بدالة الجذر التربيعي $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{P}}$، حيث T قوة الشد، وP كتلة وحدة الأطوال للوتر (kg/m)، وL طول الوتر، وf درجة الصوت.

دوال الجذر التربيعي إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير فإنها تُسمى **دالة الجذر التربيعي**. وهي نوع من أنواع **الدالة الجذرية**.

مفهوم أساسي
الدالة الأم لدوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك



الدالة الأم:	$f(x) = \sqrt{x}$
نوع التمثيل البياني:	منحنى
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{y \mid y \geq 0\}$
المقطعان:	$x = 0, f(x) = 0$
غير معرّفة عندما:	$x < 0$
سلوك الدالة عند أطرافها:	$x \to 0, f(x) \to 0$
	$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة. ومجال $f(x) = \sqrt{x}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو المساوية للصفر. سلوك الدالة عند أطرافها هو سلوك التمثيل البياني عند اقتراب x من الصفر أو مالا نهاية $(x \to +\infty)$. ونلاحظ في التمثيل البياني للدالة الأم لدوال الجذر التربيعي أنه مع اقتراب x من الصفر تقترب $f(x)$ من الصفر، وكذلك مع اقتراب x من مالا نهاية تقترب $f(x)$ من مالا نهاية.

مثال 1
تعيين المجال والمدى

عيّن المجال والمدى للدالة $f(x) = \sqrt{x + 4}$.

مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط قيمًا يكون عندها ما تحت الجذر غير سالب.

بكتابة متباينة $x + 4 \geq 0$

بطرح 4 من الطرفين $x \geq -4$

لذا، المجال هو $\{x \mid x \geq -4\}$.

أوجد $f(-4)$ لتعيين الحد الأدنى للمدى.

$f(-4) = \sqrt{-4 + 4} = 0$

لذلك، فالمدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$.

تأكد

1A) المجال $= \{x \mid x \geq 3\}$، المدى $= \{y \mid y \geq 0\}$

1B) المجال $= \{x \mid x \geq -6\}$، المدى $= \{y \mid y \geq 2\}$

عيّن المجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

1A) $f(x) = \sqrt{x - 3}$

1B) $f(x) = \sqrt{x + 6} + 2$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ماقبل الدرس 1-3
تبسيط تعابير تحوي جذورًا تربيعية.

الدرس 1-3
تمثيل دوال الجذور التربيعية بيانيًّا وتحليلها.

مابعد الدرس 1-3
إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- إذا صدر عن وترين مختلفي الطول درجة الصوت نفسها، فأيهما له قوة شد أكبر؟ الوتر الأطول
- إذا صدر عن وترين مختلفي السمك درجة الصوت نفسها، فأيهما له قوة شد أقل؟ الوتر الأقل سمكًا
- ما المقدار الذي تم التعبير عنه في التعبير الجبري لِـ f، كدالة بدلالة المقادير الأخرى؟ درجة الصوت عبر عنه كدالة بدلالة طول الوتر، وقوة الشد وكتلة وحدة الأطوال للوتر.

مصادر الدرس 1-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (27)	• تنويع التعليم ، ص (27,28)	• تنويع التعليم ، ص (28)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

دوال الجذر التربيعي

مثال1 يُبيّن كيفية تحديد مجال دالة جذر تربيعي ومداها.

مثال2 يُبيّن كيفية تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا.

مثال3 يُبيّن طريقة حل مسألة من واقع الحياة عن طريق تمثيل دالة جذر تربيعي بيانيًّا، والاعتماد على هذا التمثيل في حل المسألة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 عين المجال والمدى للدالة $f(x)=\sqrt{x-2}$.

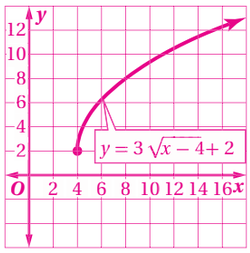
المجال $=\{x \mid x \geq 2\}$،
المدى $=\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

2 مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداها.

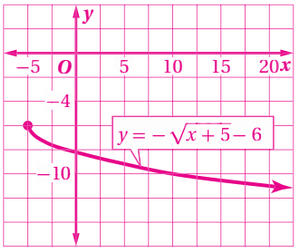
a) $y=3\sqrt{x-4}+2$

b) $y=-\sqrt{x+5}-6$

a) المجال $=\{x \mid x \geq 4\}$،
المدى $=\{y \mid y \geq 2\}$.



b) المجال $=\{x \mid x \geq -5\}$،
المدى $=\{y \mid y \leq -6\}$.



يمكنك تطبيق ما تعلمته في أثناء دراستك لتحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأخرى على التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي.

مفهوم أساسي تحويلات التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك

$$f(x)=a\sqrt{x-h}+k$$

h : إزاحة أفقية	k : إزاحة رأسية
إذا كانت h موجبة ، إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة يمينًا.	إذا كانت k موجبة ، إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدة إلى أعلى.
إذا كانت h سالبة ، إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة يسارًا.	إذا كانت k سالبة ، إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدة إلى أسفل.
المجال هو $\{x \mid x \geq h\}$.	المدى هو $\{y \mid y \geq k\}$.

a : الشكل والاتجاه

- إذا كانت $a<0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x قبل إجراء الإزاحة الأفقية والرأسية.
- إذا كانت $\lvert a \rvert > 1$، فإن التمثيل البياني يتوسع رأسيًّا.
- إذا كانت $0<\lvert a \rvert < 1$، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًّا.

إرشادات للدراسة

المجال والمدى
حدود المجال والمدى تمثل أيضًا إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا

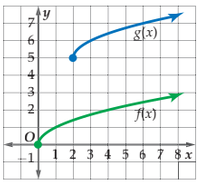
مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

a) $g(x)=\sqrt{x-2}+5$

القيمة الصغرى للدالة عند $(h,k)=(2,5)$. اعمل جدولًا من قيم x، حيث $x \geq 2$، ومثّل الدالة بيانيًّا. تلاحظ أن التمثيل البياني للدالة $g(x)=\sqrt{x-2}+5$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x)=\sqrt{x}$، مع إزاحة وحدتين إلى اليمين، و5 وحدات إلى أعلى. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف؛ فكلما زادت x، زادت y.

المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$ ، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4



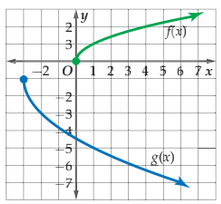
قراءة الرياضيات

الدوال الأسية
دالة الجذر التربيعي هي دالة أسية، أسها $\frac{1}{2}$.

b) $g(x)=-2\sqrt{x+3}-1$

القيمة الصغرى للدالة عند $(h,k)=(-3,-1)$. اعمل جدولًا من قيم x، حيث $x \geq -3$، ومثل الدالة بيانيًّا. ستلاحظ أن التمثيل البياني للدالة $g(x)=-2\sqrt{x+3}-1$، هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x)=\sqrt{x}$، مع انعكاس حول المحور x، ثم إزاحة 3 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل. وبما أن $\lvert a \rvert > 1$ ؛ فإن التمثيل البياني يتوسع رأسيًّا.

x	y
−3	−1
−2	−3
−1	−3.8
0	−4.5
1	−5
2	−5.5
3	−5.9



المجال هو $\{x \mid x \geq -3\}$ ،
المدى هو $\{y \mid y \leq -1\}$.

إرشادات للدراسة

طريقة حل أخرى
لاحظ أيضًا في الجزء b من مثال 2 أن التمثيل البياني للدالة $g(x)=-2\sqrt{x+3}-1$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x)=\sqrt{x}$ مع إزاحة 3 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم انعكاس حول المستقيم $y=-1$، وبما أن $\lvert a \rvert \geq 1$ ؛ فإن التمثيل البياني يتوسع رأسيًّا.

تأكد للتدريبين 2A, 2B انظر الهامش

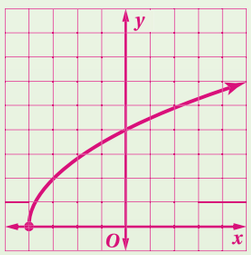
مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداها.

2A) $g(x)=2\sqrt{x+4}$

2B) $g(x)=\frac{1}{4}\sqrt{x-5}+3$

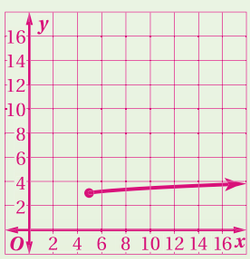
إجابات :

2A)



المجال $=\{x \mid x \geq -4\}$،
المدى $=\{y \mid y \geq 0\}$

2B)



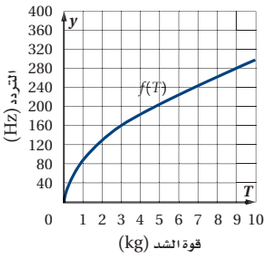
المجال $=\{x \mid x \geq 5\}$،
المدى $=\{y \mid y \geq 3\}$

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال التمثيل البياني لتحليل دالة الجذر التربيعي

الصوت: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية هذا الدرس يمكن تحديد درجة الصوت أو التردد بالهرتز (Hz) لوتر معين باستعمال الدالة $f(T) = \frac{1}{1.28}\sqrt{\frac{T}{0.0000708}}$، حيث T تمثّل قوة الشد (kg).

a) مثّل دالة قوة الشد بيانيًّا للمجال $\{T \mid 0 \le T \le 10\}$.

اعمل جدولًا من قيم T، حيث $0 \le T \le 10$ ثم مثّل الدالة بيانيًّا.



T	$f(T)$
6	227.4
7	245.7
8	262.6
9	278.5
10	293.6

T	$f(T)$
0	0
1	92.8
2	131.3
3	160.8
4	185.7
5	207.6

b) ما قوة الشد المطلوبة لدرجة صوت أعلى من 200 Hz؟

بناءً على التمثيل البياني والجدول فإنه يتطلب أكثر من 4.5 kg من قوة الشد للحصول على درجة صوت أعلى من 200 Hz.

تأكد

3) الصوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة $F = 200\sqrt{T}$، حيث F تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، وT قوة الشد مقيسة (Pound). مثّل الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le T \le 10$، ثم أوجد التردد عندما تكون $T = 3, 6, 9$ Pounds. انظر ملحق الإجابات

الربط مع واقع الحياة

لدى عازف الجيتار 24 طريقة مختلفة تقريبًا لتقصير طول كل وتر في الجيتار وهذا يعطي 24 ترددًا مختلفًا لكل وتر منها.

إرشادات حل المسألة

عمل جدول يعد عمل جدول طريقة جيدة لترتيب الأزواج المرتبة؛ لدراسة سلوك تمثيل بياني بشكل عام.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 23

عيّن المجال والمدى لكل دالة مما يأتي: **1)** المجال $= \{x \mid x \ge 0\}$، المدى $= \{y \mid y \ge 0\}$

1) $f(x) = \sqrt{4x}$ **2)** $f(x) = \sqrt{x-5}$ **3)** $f(x) = \sqrt{x+8} - 2$

مثال 2 صفحة 24

مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداها: للتمارين 7–4 انظر الهامش

4) $g(x) = \sqrt{x} - 2$ **5)** $g(x) = 3\sqrt{x-1}$

6) $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$ **7)** $g(x) = -\sqrt{x-5} + 5$

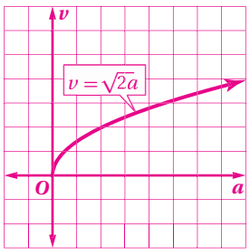
مثال 3 صفحة 25

8) محيطات: يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال المعادلة $v = 356\sqrt{d}$، حيث v تمثل السرعة (km/h)، وd متوسط عمق الماء km. إذا كانت سرعة الموجة 145 km/h، فما متوسط عمق الماء ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر. **0.17 km**

مثال إضافي

3 فيزياء: عندما يدور جسم في مسار دائري نصف قطره 2 m بسرعة v متر لكل ثانية، فإن تسارعه المركزي (عجلته) a بالأمتار لكل ثانية مربعة يكون في اتجاه مركز الدائرة، ويُعبّر عن العلاقة بين v، a بالدالة $v = \sqrt{2a}$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا للمجال $\{a \mid a \ge 0\}$.



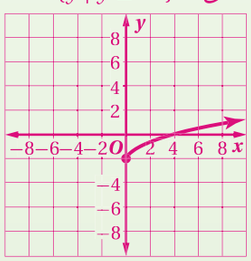
b) أوجد التسارع المركزي (العجلة) لجسم يدور في مسار دائري بسرعة 4 m/sec لكل ثانية. $8\ \text{m/sec}^2$

التعليم باستعمال التقنيات

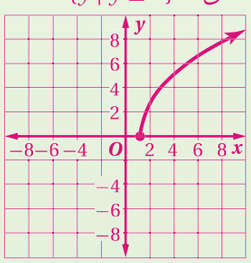
تسجيل مرئي اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات، لتسجيل مقطع فيديو يبينون من خلاله كيفية تمثيل دالة جذر تربيعي بيانيًّا، مضمّنين تسجيلاتهم توضيحًا لكيفية تحديدهم لمجال الدالة. ثم اطلب إليهم تبادل تسجيلاتهم فيما بينهم وعرضها.

إجابات :

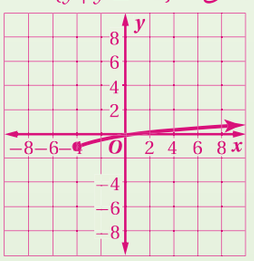
4) المجال $= \{x \mid x \ge 0\}$، المدى $= \{y \mid y \ge -2\}$



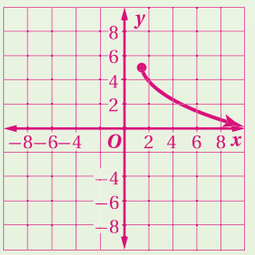
5) المجال $= \{x \mid x \ge 1\}$، المدى $= \{y \mid y \ge 0\}$



6) المجال $= \{x \mid x \ge -4\}$، المدى $= \{y \mid y \ge -1\}$



7) المجال $= \left\{x \mid x \ge \frac{5}{3}\right\}$، المدى $= \{y \mid y \le 5\}$



3 التدريب

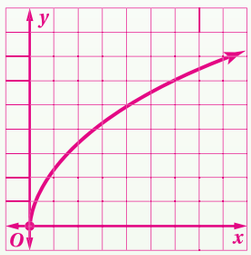
التقويم التكويني

استعمل التمارين 8-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

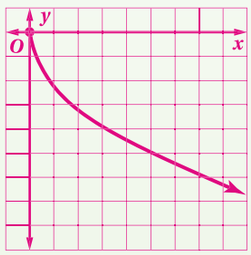
إجابات :

(12



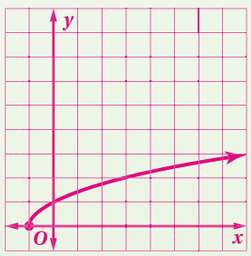
المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$،
المدى $= \{y \mid y \geq 0\}$

(13



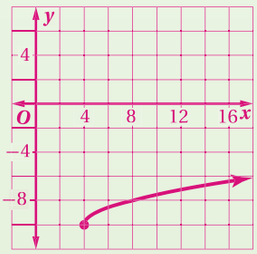
المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$،
المدى $= \{y \mid y \leq 0\}$

(14



المجال $= \{x \mid x \geq -1\}$،
المدى $= \{y \mid y \geq 0\}$

(15



المجال $= \{x \mid x \geq 4\}$،
المدى $= \{y \mid y \geq -10\}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 23

عيِّن المجال والمدى لكل دالة مما يأتي:

9) $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ **10)** $f(x) = \sqrt{x} - 6$ **11)** $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$ انظر ملحق الإجابات

مثال 2 صفحة 24

مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداها: للتمارين 15–12 انظر الهامش ، للتمرينين 17–16 انظر ملحق الإجابات

12) $g(x) = \sqrt{6x}$ **13)** $g(x) = -\sqrt{5x}$ **14)** $g(x) = \sqrt{x+1}$

15) $g(x) = \sqrt{x-4} - 10$ **16)** $g(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ **17)** $g(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$

مثال 3 صفحة 25

18) القفز بالمظلات: إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يُعطى بالعلاقة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$. إذا قفز مظلي قبل 11 sec من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟ 1936 ft

19) العربة الدوّارة: إذا كانت سرعة العربة الدوّارة في مدينة الألعاب في أثناء نزولها من أعلى مرتفع تعطى بالعلاقة $V = \sqrt{v^2 + 64h}$، حيث v السرعة الابتدائية (ft/sec)، و h الارتفاع الرأسي (ft). أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة 90 ft/sec عندما تصل أسفل المرتفع.

a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند قمة المرتفع هي 10 ft/sec ، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف. $90 = \sqrt{100 + 64h}$

b) ليتحقق ما يريده المصمم، كم يجب أن يكون ارتفاع قمة المرتفع، إذا كانت سرعة العربة الابتدائية عند قمة المرتفع 10 ft/sec ؟ 125 ft

20) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سيرٍ تحديدَ سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل)، وذلك باستعمال المعادلة $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة (mi/h)، و f معامل الاحتكاك، و d طول أثر احتكاك العجلات (ft). بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، فافترض أن $f = 0.6$.

a) أوجد سرعة سيارة طول أثر احتكاك عجلاتها بالأرض 25 ft. 21.2 mi/h تقريبًا

b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة 35 mi/h، فكم قدمًا تحتاج لتقف تمامًا؟ 68 ft تقريبًا

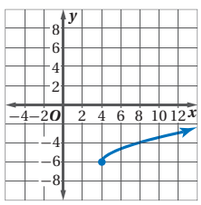
c) إذا تضاعفت سرعة سيارة فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ؟ فسر إجابتك. لا؛ لأن الدالة $v = \sqrt{30fd}$ ليست خطية، فطول أثر احتكاك العجلات سيساوي 4 مرات من طول أثر الاحتكاك الأصلي

الربط مع واقع الحياة

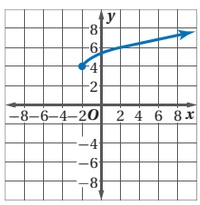
توصلت إحدى الدراسات إلى أن السبب الأول لحوادث السيارات بين أوساط الشباب يعود إلى إرسال رسائل نصية من هواتفهم أثناء القيادة.

اكتب دالة الجذر التربيعي لكل تمثيل بياني مما يأتي:

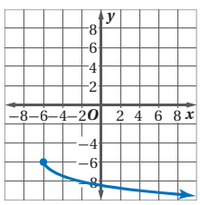
21)



22)



23)



21) $y = \sqrt{x-4} - 6$
22) $y = \sqrt{x+2} + 4$
23) $y = -\sqrt{x+6} - 6$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	19-9 ، 39-28
ضمن ضمن المتوسط	19–9 فردي، 26–20 ، 39-28
فوق فوق المتوسط	35-20 ، (اختياري: 39-36)

24) تمثيلات متعددة: في هذا التمرين ستستعمل الدوال الثلاث الآتية لاستقصاء التحويلات لدوال الجذر التربيعي. **للفروع a–e انظر ملحق الإجابات**

$h(x) = \sqrt{x+3} + 2$ | $g(x) = \sqrt{x+1} - 6$ | $f(x) = 4\sqrt{x-6} + 3$

a) تمثيل بياني: مثّل بيانيًّا جميع الدوال السابقة على المستوى الإحداثي نفسه.

b) تحليل: ما التحويلات التي أجريتها على التمثيل البياني للدالة الأم لتمثل بيانيًّا كلًّا من الدوال السابقة؟

c) تحليل: ما الدوال التي أظهر تمثيلها البياني اتساعًا أو ضيقًا رأسيًّا في التمثيل البياني للدالة الأم؟ فسر إجابتك.

d) تعبير لفظي: يبدو أن الدالتين المتسعتين رأسيًّا اتسعتا بالمقدار نفسه، فكيف يكون ذلك ممكنًا؟

e) جدولة: اعمل جدولًا لمعدلات التغير في الدوال الثلاث بين 8 و12 وقارنها بمعدلات التغير بين 12 و16، وبناءً على ذلك، ما التعميم الذي يمكنك التوصل إليه فيما يخص معدل تغير دوال الجذر التربيعي؟

25) بندول: يُمثل الزمن الدوري للبندول بالدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T الزمن (sec)، وL الطول (ft)، وg تسارع (عجلة) السقوط الحر، الذي يساوي $32\,\text{ft/sec}^2$. **للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات**

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le L \le 10$.

b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8,5,2 ft؟

26) فيزياء: تنص النظرية النسبية لأينشتاين من خلال الدالة $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$ على أن الكتلة الظاهرية m لجسم ما تعتمد على سرعته v.

والكتلة الظاهرية m لجسم يتحرك بسرعة عالية تقترب من سرعة الضوء c، تكون أكبر من كتلته الساكنة m_0.

a) استعمل الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل دالة الكتلة الظاهرية m لمركبة فضائية تزن 100000 kg في المجال $0 \le v \le 300000000$. افترض أن سرعة الضوء هي 300000000 m/sec. **انظر الهامش**

b) ما نافذة العرض التي استعملتها لعرض الشكل؟ **انظر الهامش**

c) حدد الكتلة الظاهرية m للمركبة إذا كانت السرعة، 100000000 m/sec، 200000000 m/sec، 299000000 m/sec. (100000000, 10607) , (200000000, 13416) , (299000000, 122577)

مسائل مهارات التفكير العليا

27) إجابة ممكنة: $y = -\sqrt{x+4} + 6$

27) تحدٍّ: اكتب معادلة لدالة جذر تربيعي مجالها $\{x \mid x \ge -4\}$، ومداها $\{y \mid y \le 6\}$، وتمر بالنقطة (5, 3).

28) تبرير: ما قيم a الموجبة التي تجعل مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[a]{x}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (R)؟ **كل الأعداد الفردية الموجبة**

29) اكتب: وضح لماذا $y = \pm\sqrt{x}$ لا تمثل دالة؟ **انظر الهامش**

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا،

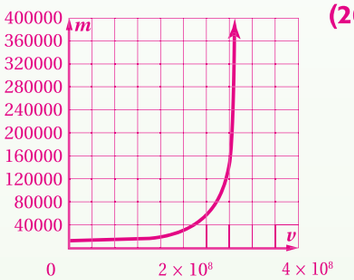
فاطلب إليهم العمل في مجموعات ثنائية أو صغيرة لمناقشة كيفية تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا كما هو مطلوب في التمارين 12-17. كما ينبغي للطلبة مناقشة كيفية تحديد مجال الدالة ومداها.

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلبة في التمرين 24 ، التمثيل البياني وجدول القيم، والتحليل؛ لتعيين أثر التحويلات في دوال الجذور التربيعية.

إجابات :

26a)



26b) {0,400000000} scl: 40000000 by {0,400000} scl: 40000

29) حتى تمثل المعادلة دالة، يجب أن يكون لكل قيمة من قيم المتغير x قيمة واحدة فقط للمتغير y تناظرها. إلا أن ذلك لا يتحقق في هذه المعادلة، إذ توجد لكل قيمة من قيم المتغير x قيمتان للمتغير y إحداهما موجبة، والأخرى سالبة، بالإضافة إلى كون التمثيل البياني للمعادلة لا يحقق اختبار الخط الرأسي.

4 التقويم

تعلم لاحق سيقوم الطلبة في الدرس التالي بتبسيط التعابير الجذرية، واستعمال الآلة الحاسبة؛ لتقريب قيم الجذور؛ لذا اطلب إلى الطلبة كتابة تصوراتهم عن ارتباط ما تعلموه في الدرس الحالي بالفكرة الرئيسة للدرس اللاحق.

تدريب على اختبار معياري

30) ما مدى الدالة $f(x) = \sqrt{x+2} + 5$؟ **B**

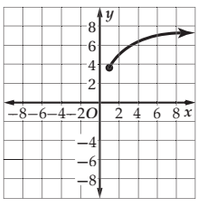
A $\{y \mid y > 5\}$

B $\{y \mid y \geq 5\}$

C $\{y \mid y < 5\}$

D $\{y \mid y \leq 5\}$

31) يمثّل الشكل أدناه التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. أي مما يأتي صحيح؟ **D**



A المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

B المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

C الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

D المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريبًا

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى، مجيبًا بِـ "نعم" أو "لا" مع توضيح السبب: (الدرس 2-1)

32) $f(x) = 2x$، $g(x) = \frac{1}{2}x$ نعم؛ لأن $[fog](x) = [gof](x) = x$

33) $f(x) = 3x - 7$، $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{16}$ لا؛ لأن $[fog](x) = x - \frac{133}{16}$

34) $f(x) = \frac{3x+2}{5}$، $g(x) = \frac{5x-2}{3}$ نعم؛ لأن $[fog](x) = [gof](x) = x$

35) زمن: إذا كانت الصيغة $h = \frac{m}{60}$ تستعمل لتحويل الدقائق m إلى ساعات h، والصيغة $d = \frac{h}{24}$ تستعمل لتحويل الساعات h إلى أيام d، فاكتب دالة يمكن استعمالها لتحويل الدقائق إلى أيام. (الدرس 1-1) $[doh](m) = \frac{m}{1440}$

مراجعة المتطلبات السابقة

حدد ما إذا كان كل عدد مما يأتي نسبيًّا أو غير نسبي:

36) 6.34 عدد نسبي

37) 3.787887888... عدد نسبي

38) 5.333... عدد نسبي

39) 1.25 عدد نسبي

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x-3} - 5$، والتمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$؟ التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x-3} - 5$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$، مع إزاحة 3 وحدات إلى اليمين، و 5 وحدات إلى أسفل.

1-4 الجذر النوني
nth Root

لماذا؟

لوحظ أن عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق تزداد كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالمعادلة $c = \sqrt[3]{b^2}$، حيث b عدد الدراجات، و c عدد الحوادث.

تبسيط الجذور يعد إيجاد الجذر التربيعي لعددٍ عمليةً عكسية لتربيعه؛ فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a. وبالمثل العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد **الجذر النوني** للعدد.

الجذور	التعبير اللفظي	العوامل	القوى
$\sqrt[3]{64} = 4$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	$x^3 = 64$
$\sqrt[4]{625} = 5$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	$x^4 = 625$
$\sqrt[5]{32} = 2$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	$x^5 = 32$
$\sqrt[n]{b} = a$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ من المرات للعامل } a} = b$	$a^n = b$

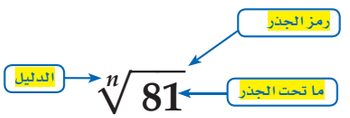
يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني.

مفهوم أساسي — **تعريف الجذر النوني** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين a , b ، ولأي عدد صحيح موجب n ، إذا كان $a^n = b$ ، فإن a هو الجذر النوني للعدد b.

مثال بما أن $(3)^4 = 81$، فإن 3 هو جذر رابع للعدد 81، والعدد 3 يُسمى الجذر الرئيس.

يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.



بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، 64 لها جذران تربيعيان هما: 8 و -8؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كلاهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، وتكون n عددًا زوجيًّا فإن الجذر غير السالب يسمى **الجذر الرئيس**.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ⇐ $\sqrt{25}$ يدل على الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$-\sqrt{25} = -5$ ⇐ $-\sqrt{25}$ يدل على عكس إشارة الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ⇐ $\pm\sqrt{25}$ يدل على كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

فيما سبق

درست التعامل مع دوال الجذور التربيعية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أبسّط تعابير جذرية.
- أستعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات الأساسية

الجذر النوني nth root

رمز الجذر radical sign

الدليل index

ما تحت الجذر radicand

الجذر الرئيس principal root

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-4

التعامل مع دوال الجذور التربيعية.

الدرس 1-4

تبسيط تعابير جذرية.

استعمال الآلة الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

ما بعد الدرس 1-4

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا ؟".

اسأل:

- ما المتغير المستقل في المعادلة؟
  عدد الدراجات الهوائية
- ما المتغير التابع الذي يمكن ايجاده؟
  عدد الحوادث
- هل تعتقد أن عدد الحوادث سوف يزيد أو ينقص بازدياد عدد الدراجات الهوائية؟
  عدد الحوادث يزداد بازدياد عدد الدراجات الهوائية.

مصادر الدرس 1-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (31)	• تنويع التعليم ، ص (31, 33)	• تنويع التعليم ، ص (33)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

تبسيط الجذور

مثال 1 يُبيّن كيفية تبسيط تعابير الجذور النونية.

مثال 2 يُبيّن استعمال القيمة المطلقة للناتج عند تبسيط جذور نونية لتعابير ذات قوى زوجية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 بسّط كلًّا مما يأتي:

a $\pm\sqrt{16x^8}$ $\pm 4x^4$

b $-\sqrt{(q^3+5)^4}$ $-(q^3+5)^2$

c $\sqrt[5]{243a^{10}b^{15}}$ $3a^2b^3$

d $\sqrt{-4}$ $2i$

تنبيه!

أخطاء شائعة تأكد من أن الطلبة استوعبوا أنه لكون $3^2 = 9$ و $(-3)^2 = 9$، فإن العدد 9 له جذران تربيعيان هما $-3, 3$، ومع ذلك فإن قيمة $\sqrt{9}$ هي العدد 3 فقط. وللدلالة على كلا الجذرين التربيعيين وليس الجذر الرئيس فقط، يجب أن يكون التعبير الجذري على الصورة $\pm\sqrt{9}$.

التركيز في المحتوى الرياضي

استعمال القيمة المطلقة بشكل عام، إذا كان n عددًا صحيحًا أكبر من أو يساوي 2، وكان a عددًا حقيقيًّا، فإن $\sqrt[n]{a^n} = a$ إذا كان n عددًا فرديًّا، و $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ إذا كان n عددًا زوجيًّا.

مفهوم أساسي — الجذر النوني الحقيقي

أضف إلى مطويتك

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًّا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	يوجد جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$؛ الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك فقط جذر حقيقي موجب، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	لا يوجد جذور حقيقية موجبة، وهناك جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$

مثال 1 — إيجاد الجذور

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a $\pm\sqrt{16y^4}$

$\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$

$= \pm 4y^2$

الجذور التربيعية لـ $16y^4$ هي $\pm 4y^2$.

b $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

$-\sqrt{(x^2-6)^8} = -\sqrt{[(x^2-6)^4]^2}$

$= -(x^2-6)^4$

عكس إشارة الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2-6)^8$ هو $-(x^2-6)^4$.

c $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

$\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$

$= 3a^4b^5$

الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

d $\sqrt{-16x^4y^8}$

$\sqrt[2]{-16x^4y^8}$ ← a عدد سالب، n عدد زوجي

لا توجد جذور حقيقية؛ لأن $\sqrt{-16}$ ليس عددًا حقيقيًّا. ومع ذلك يوجد جذر تخيلي هو $4ix^2y^4$.

مراجعة المفردات

الأعداد التخيلية البحتة هي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة. لأي عدد حقيقي موجب b، $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2}\cdot\sqrt{-1} = bi$ حيث i تمثل الوحدة التخيلية.

تأكد

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

1A $\pm\sqrt{36x^{10}}$ $\pm 6x^5$

1B $-\sqrt{(y+7)^{16}}$ $-(y+7)^8$

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وأس ما تحت الجذر عددًا زوجيًّا، وكان أس الناتج عددًا فرديًّا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد أن الجواب ليس سالبًا.

إرشادات للدراسة

دليل الجذر إذا كان n عددًا فرديًّا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًّا، فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

مثال 2 — التبسيط باستعمال القيمة المطلقة

بسّط كلًّا مما يأتي:

a $\sqrt[4]{y^4}$

$\sqrt[4]{y^4} = |y|$

بما أن y من الممكن أن تكون سالبة فالجذر الرئيس لهذا التعبير يساوي القيمة المطلقة لـ y

b $\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}}$

$\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}} = 2|(x^2-3)^3|$

بما أن دليل الجذر (العدد 6) عدد زوجي، وأس العبارة x^2-3 (العدد 3) عدد فردي؛ إذن يجب استعمال رمز القيمة المطلقة.

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي:

2A $\sqrt{36y^6}$ $6|y^3|$

2B $\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$ $2|(x-3)^3|$

تنبيه!

تجنب الأخطاء أثناء مناقشة المعلومات التي تلي المثال 1، اقترح طريقة أخرى لتبسيط الجذور التي تتضمن أعدادًا فقط وليس متغيرات، وهي تبسيط التعبير تحت رمز الجذر أولًا. فعلى سبيل المثال، يمكن إعادة كتابة $\sqrt{(-5)^2}$ عن طريق تبسيط ما تحت رمز الجذر أولاً لتصبح $\sqrt{25}$. ثم إيجاد الجذر الرئيس ليكون الناتج 5. وبالمثل يمكن تبسيط $\sqrt{(-2)^6}$ ليصبح $\sqrt{64}$، والجذر التربيعي الرئيس لهذا التعبير هو 8.

تقريب الجذور باستعمال الآلة الحاسبة تذكر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها كأعداد عشرية منتهية أو دورية تُسمى أعدادًا غير نسبية. وغالبًا ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة — تقريب الجذور

تجنب الحوادث: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، وb تمثل عدد الدراجات الهوائية فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريق، إذا عُلم أن **1000** دراجة تمر خلاله كل شهر.

افهم تريد إيجاد عدد الحوادث.

خطّط عوض عن b (عدد الدراجات الهوائية) بالعدد 1000.

حل

المعادلة الأصلية	$c = \sqrt[5]{b^2}$
$b = 1000$	$= \sqrt[5]{1000^2}$
باستعمال الآلة الحاسبة	≈ 15.85

هناك 16 حادثًا تقريبًا كل شهر على ذلك الطريق.

تحقق

$c = 15.85$	$15.85 \stackrel{?}{=} \sqrt[5]{b^2}$
برفع الطرفين للقوة 5	$15.85^5 \stackrel{?}{=} b^2$
بالتبسيط	$1000337 \stackrel{?}{=} b^2$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$1000 \approx b$ ✓

b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريقٍ ما في أحد الأشهر يساوي **21** حادثًا، فقدِّر عدد الدراجات الهوائية التي سارت على ذلك الطريق.

المعادلة الأصلية	$c = \sqrt[5]{b^2}$
$c = 27$	$21 = \sqrt[5]{b^2}$
برفع الطرفين للقوة 5	$21^5 = b^2$
بالتبسيط	$4084101 = b^2$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$2021 \approx b$

تأكد

3A) يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها، باستعمال القانون $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$، حيث V تمثل حجم الكرة. أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200\,\text{in}^3$. **165 in² تقريبًا**

3B) إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5\,\text{in}^2$، فأوجد حجم الكرة. **295.4 in³ تقريبًا**

الربط مع واقع الحياة

تُتخذ الدراجات الهوائية والنارية وسيلة نقل في كثير من بلدان العالم، لأسباب عدة؛ منها الحفاظ على البيئة، وارتفاع سعر وقود السيارات.

تأكد من فهمك

المثالان 1 , 2 صفحة 30

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\pm\sqrt{100y^8}$ — **$\pm 10y^4$**

2) $-\sqrt{49u^8v^{12}}$ — **$-7u^4v^6$**

3) $\sqrt{(y-6)^8}$ — انظر الهامش

4) $\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}}$ — **$2g^4h^6$**

5) $\sqrt{-16y^4}$ — لا توجد جذور حقيقية؛ لأن $\sqrt{-16}$ ليس عددًا حقيقيًا

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}}$ — **$2|(2y+1)^3|$**

مثال 3 صفحة 31

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

7) $\sqrt{58}$ — **7.616**

8) $-\sqrt{76}$ — **−8.718**

9) $\sqrt[5]{-43}$ — **−2.122**

10) $\sqrt[4]{71}$ — **2.903**

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا مدونة يوضحون فيها كيفية إيجاد عدد الجذور (وإشاراتها) قبل إجراء أي حسابات.

مثال إضافي

2 بسّط كلاً مما يأتي:

a. $|t|$ — $\sqrt[6]{t^6}$

b. $3(x+2)^3$ — $\sqrt[5]{243(x+2)^{15}}$

تقريب الجذور باستعمال الآلة الحاسبة

مثال 3 يُبيّن للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة؛ لتقريب الحل في مواقف من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 **فضاء:** يراعى في تصميم الأقمار الصناعية حمايتها من الدمار الناتج من اصطدامها بالأجسام السابحة في الفضاء. وقد أفادت دراسة أن قطر الثقب d بالمليمترات في الخلية الشمسية للقمر الصناعي، والناتج عن الارتطام بجسم يتحرك بطاقة حركية مقدارها k جول، يمكن تقريبه بالعلاقة $d = 0.926\sqrt[3]{k} + 0.169$

a) قدر قطر ثقب ناتج عن الارتطام بجسم يتحرك بطاقة حركية مقدارها 3.5J . 1.237 mm

b) إذا كان قطر ثقب 2.5mm، فقدر الطاقة الحركية للجسم الذي أحدث ارتطامه الثقبَ. 23.9J

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون يعتقد بعض الطلبة أن x يجب أن تمثل عددًا موجبًا، و $x-$ يجب أن تمثل عددًا سالبًا. لذا، فإن قراءة $x-$ على أنها "معكوس x" تساعد الطلبة على فهم أنه إذا كانت x تساوي 9−، فإن $x-$ تساوي 9. بَيِّنْ لهم كذلك أن 9− ليس لها جذر تربيعي حقيقي؛ أيْ أنه لا يوجد هناك عدد حقيقي مربعه يساوي 9−. وذكّرهم بأن $\sqrt{-9} = 3i$ ، وهو عدد تخيلي.

إجابة:

3 $\sqrt{(y-6)^8} = \sqrt{[(y-6)^4]^2}$
$= (y-6)^4$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 11-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

12 $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}} = \pm\sqrt{(15a^8b^{18})^2}$
$= \pm 15a^8b^{18}$

36 النسر الأصلع:
$P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$
$= 73.3\sqrt[4]{4.5^3}$
≈ 226.5 Cal/d

الكلب:
$P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$
$= 73.3\sqrt[4]{30^3}$
≈ 939.6 Cal/d

التنين:
$P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$
$= 73.3\sqrt[4]{72^3}$
≈ 1811.8 Cal/d

الدولفين:
$P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$
$= 73.3\sqrt[4]{156^3}$
≈ 3235.5 Cal/d

الفيل:
$P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$
$= 73.3\sqrt[4]{2300^3}$
≈ 23344.4 Cal/d

11) قمر صناعي: إذا كان نصف القطر r لمدار قمر صناعي تلفزيوني يُعطى بالصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$، حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني، M كتلة الأرض، t الزمن اللازم لإكمال القمر الصناعي دورة واحدة حول الأرض، فأوجد نصف قطر مدار القمر الصناعي إذا كانت
$G = 6.67 \times 10^{-11} N\,m^2/kg^2$, $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $t = 2.6 \times 10^6$ s
4.088×10^8 m تقريبًا

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 صفحة 30

بسّط كلًّا مما يأتي:

12) انظر الهامش $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}}$ **13)** $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$ **14)** $-20x^{16}y^{20}$
15) $3b^6c^4\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ **16)** $\sqrt{-(x+2)^8}$ **17)** $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$
18) $|x^3|\sqrt[6]{x^{18}}$ **19)** $a^4\sqrt[3]{a^{12}}$ **20)** $3|(x+4)|\sqrt[4]{81(x+4)^4}$
21) $(y^3+5)^6\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}}$ **22)** $x^2|y|\sqrt[8]{x^{16}y^8}$ **23)** $2a^3b^2\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$

16) لا توجد جذور حقيقية؛ لأن ما تحت الجذر سالب.
$(a^2+4a)^6\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$

مثال 3 صفحة 31

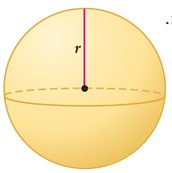
24) شحن: يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروبًا في مكعب عدد ثابت F؛ أيْ أن $N = V \cdot F^3$، فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي $0.8\,ft^3$، والحجم الجديد يساوي $21.6\,ft^3$؟ 3

25) هندسة: يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$، حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة. أوجد طول ضلع مكعب حجمه $512\,cm^3$. 8 cm

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

26) $-\sqrt{150}$ **27)** -12.247 **28)** $\sqrt{0.43}$ 0.656 **29)** $\sqrt[5]{-4382}$ -5.350 **30)** $\sqrt[6]{(8912)^2}$ 20.733

30) هندسة: يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



a) أوجد نصف قطر كل من الكرات ذات الأحجام الآتية:
$1000\,cm^3$, $8000\,cm^3$, $64000\,cm^3$. 6.2, 12.4, 24.8

b) ما مقدار التغير في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

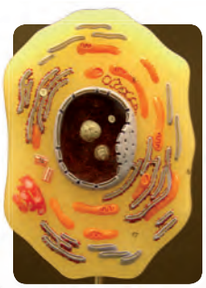
بسّط كلًّا مما يأتي:

31) $\sqrt{196c^6d^4}$ **32)** $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$ **33)** $\sqrt[4]{-16x^{16}y^8}$ **34)** $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$
31) $14|c^3|d^2$ **32)** $-3a^5b^3$ **34)** $4(x+y)^2$

35) فيزياء: ابتكر جوهانز كيبلر (Johannes Kepler) القانون $d = \sqrt[3]{6t^2}$، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كانت سنة كوكب المريخ تساوي 687 يومًا أرضيًّا، فكم يبعد كوكب المريخ عن الشمس؟ 141 مليون ميل تقريبًا

36) أحياء: يبين قانون كليبر (Kleiber)، $P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$ العلاقة بين كتلة كائن حي بالكيلوجرام m، ومتوسط الأيض اليومي له بالسعرات الحرارية P. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول المجاور. انظر الهامش

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التنين	72
الدولفين	156
الفيل	2300



الربط مع واقع الحياة

الأيض عملية تجري داخل الخلية الحية، وفيها يتم تفكيك المواد الممتصة من الطعام - ومنها البروتينات والدهون - وتحويلها إلى طاقة يستفيد منها جسم الكائن الحي في نشاطاته.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	29-12، 40-38، 52-42
ضمن ضمن المتوسط	29-13 فردي، 32-30، 37-34، 39، 40، 52-42
فوق فوق المتوسط	49-30، (اختياري: 52-50)

37) تمثيلات متعددة: ستستعمل في هذا التمرين كلًّا من: $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ في استكشاف المعكوس.

للفروع a–e انظر ملحق الإجابات

a) جدولة: اعمل جدولًا لكل من $f(x)$, $g(x)$ مستعملاً $n = 4$, $n = 3$.

b) تمثيل بياني: مثّل كلًّا من المعادلات السابقة بيانيًّا.

c) تحليل: أي المعادلات السابقة تمثل دالة؟ وأيّها تمثل دالة واحد لواحد؟

d) تحليل: ما قيم n التي يكون عندها كل من الدالتين $f(x)$, $g(x)$ معكوسًا للأخرى؟

e) تعبير لفظي: ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول $g(x) = \sqrt[n]{x}$ و $f(x) = x^n$، لقيم n الزوجية الموجبة، وقيم n الفردية؟

مسائل مهارات التفكير العليا

38) تحدٍّ: ما قيم x التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة $\sqrt[3]{x} > x$؟ $0 < x < 1, x < -1$

39) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا يكون الجذر التربيعي الرئيس له والجذر التكعيبي عددين صحيحين. 39) إجابة ممكنة: 64

40) اكتب: وضّح متى يكون استعمال رمز القيمة المطلقة ضروريًّا عند إيجاد الجذر النوني؟ ولماذا؟ انظر الهامش

41) تحدٍّ: اكتب تعبيرًا جذريًّا مكافئًا للتعبير الجذري $\sqrt[3]{8y} \cdot \sqrt[3]{2x}$، ثم بسّطه. $2\sqrt[3]{2xy}$

تدريب على اختبار معياري

42) ما أبسط صورة للتعبير $\sqrt{4n^2 + 12n + 9}$؟ **C**

A $2n + 3$ **B** $2n - 3$ **C** $|2n + 3|$ **D** $|2n - 3|$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-1) للتمارين 45–43 انظر الهامش

43) $y = \sqrt{x - 5}$ **44)** $y = \sqrt{x} - 2$ **45)** $y = 3\sqrt{x} + 4$

46) صحة: تبلغ كتلة طفل ولد حديثًا $7\frac{1}{2}$ pounds، وطوله 19.5 in. إذا كان 1kg ≈ 2.2 pounds، 1cm ≈ 0.3937in، فأوجد كتلة المولود بالكيلوجرامات وطوله بالسنتمترات. (الدرس 2-1) 3.41 kg, 49.53 cm تقريبًا

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f + g)(x)$ للدالتين $g(x)$, $f(x)$ في كل مما يأتي: (الدرس 1-1) للتمارين 49–47 انظر ملحق الإجابات

47) $f(x) = 2x$, $g(x) = -4x + 5$

48) $f(x) = x - 2$, $g(x) = 2x - 7$

49) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 5$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي:

50) $(x + 4)(x + 5)$ $x^2 + 9x + 20$

51) $(x + 2y)(x - y)$ $x^2 + xy - 2y^2$

52) $2(w + z)(w - 4z)$ $2w^2 - 6wz - 8z^2$

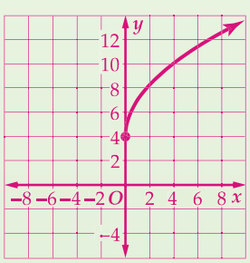
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع ما الشروط التي يتطلب توافرها لكي تكون المعادلة $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ صحيحة؟

يجب أن يكون n عددًا صحيحًا موجبًا، وإذا كان n عددًا زوجيًّا، فيجب أن تكون $a \geq 0$ ، $b > 0$ ، على حين إذا كان n عددًا فرديًّا، فيجب أن تكون $b \neq 0$.

45)



تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين **37**، جدول القيم، والتمثيل البياني، والتحليل المنطقي لاستكشاف الدوال العكسية.

4 التقويم

بطاقة خروج اعمل خمسة تعابير جذرية شبيهة بتلك الموجودة في المثال 1 بعدة نسخ. وأعط تعبيرًا لكل طالب لتبسيطه. واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

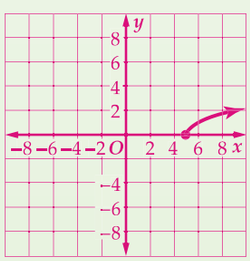
التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين **1-4, 1-3** بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 1.

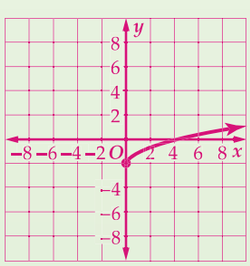
إجابات:

40) إجابة ممكنة، نحتاج القيمة المطلقة؛ للتأكد من كون الإجابة ليست سالبة. فعندما نأخذ أي جذر فردي لعدد، نجد أنه يوجد إجابة واحدة فقط. إذا كان العدد موجبًا، فإن الجذر يكون موجبًا. وإذا كان العدد سالبًا، فإن الجذر يكون سالبًا. لكل عدد حقيقي موجب جذران نونيان، إذا كان n الدليل عددًا زوجيًّا، فإن أحد الجذرين موجب والآخر سالب. وليس للأعداد الحقيقية السالبة جذر نوني إذا كانت n عددًا زوجيًّا. ولا تستعمل القيمة المطلقة عند إيجاد جذور فردية، ولكن عند إيجاد جذور نونية زوجية، فإن القيمة المطلقة تكون أحيانًا ضرورية، مثل إيجاد الجذور التربيعية.

43)



44)



1 التركيز

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًّا.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

هناك أكثر من طريقة لإدخال دالة الجذر التربيعي في قائمة $Y=$. فيمكن إدخال الدالة $\sqrt{x}$ باستعمال مفتاح الجذر التربيعي، أو باستعمال مفتاح الأس مثل $x \wedge (1/2)$ ، أو $x \wedge (0.5)$.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلبة في مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط.

اسأل:

- ما قيم n التي تسمح بوجود قيم سالبة في مجال $\sqrt[n]{x}$ ؟ قيم n الفردية
- لماذا يشترط أن يكون لمجال $\sqrt[n]{x}$ قيم غير سالبة عندما يكون n عددًا زوجيًا؟ الجذر الزوجي لعدد سالب ليس عددًا حقيقيًّا.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 1–8.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–3؛ لتقويم مدى قدرة الطلبة على استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًّا.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلبة أن يصفوا كيفية إيجاد الأزواج المرتبة لنقاط تقاطع تمثيل بياني مع المحور y ، وكذلك الأزواج المرتبة لنقاط تقاطع تمثيل بياني مع المحور x.

افترض أن $x = 0$، ثم حُلّ بالنسبة للمتغير y

افترض أن $y = 0$، ثم حُلّ بالنسبة للمتغير x.

تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا
Graphing *n*th Root Function

يمكنك استعمال آلة حاسبة بيانية لتمثيل دوال الجذور النونية بيانيًّا.

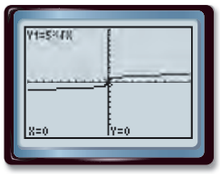
مثال 1 تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

مثّل بيانيًّا $y = \sqrt[5]{x}$.

أدخل المعادلة على أنها **Y1**، ثم مثّلها بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

Y= 5 MATH 5 X,T,θ,n GRAPH

هناك طريقة أخرى لإدخال المعادلة، وهي أن تستعمل $y = x^{\frac{1}{5}}$. وسوف تتعلم ذلك لاحقًا في هذا الفصل.



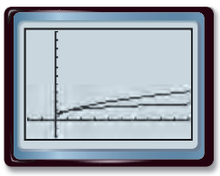
مثال 2 دوال الجذور النونية المختلفة الدليل

مثّل الدالتين $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[4]{x}$ بيانيًّا، وقارن بينهما.

أدخل المعادلة $y = \sqrt{x}$ على أنها **Y1**، والمعادلة $y = \sqrt[4]{x}$ على أنها **Y2**. ثم مثّل بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

Y= CLEAR 2nd [√] X,T,θ,n ENTER 4

MATH 5 X,T,θ,n GRAPH



مثال 3 دوال الجذور النونية المختلفة ما تحت الجذر

مَثّل الدوال الثلاث $y = \sqrt[3]{x}$ ، $y = \sqrt[3]{x + 4}$ ، $y = \sqrt[3]{x} + 4$ بيانيًّا، وقارن بينها.

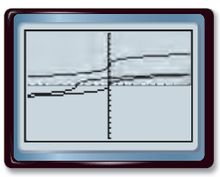
أدخل المعادلة $y = \sqrt[3]{x}$ على أنها **Y1**، وأدخل المعادلة $y = \sqrt[3]{x + 4}$ على أنها **Y2**، وأدخل المعادلة $y = \sqrt[3]{x} + 4$ على أنها **Y3**.

ثم مثّلها بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

Y= CLEAR 3 MATH 5 X,T,θ,n ENTER CLEAR 3

MATH 5 (X,T,θ,n + 4) ENTER 3 MATH

5 X,T,θ,n) + 4 ENTER ZOOM 6



تمارين:

مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي: للتمارين 1–6 انظر ملحق الإجابات

1) $y = \sqrt[4]{x}$ 2) $y = \sqrt[4]{x + 2}$ 3) $y = \sqrt[4]{x} + 2$

4) $y = \sqrt[5]{x}$ 5) $y = \sqrt[5]{x - 5}$ 6) $y = \sqrt[5]{x} - 5$

7) ما تأثير جمع أو طرح عدد ثابت تحت الجذر على التمثيل البياني للدالة؟ يتم إزاحة التمثيل البياني أفقيًّا يمينًا أو يسارًا

8) ما تأثير جمع أو طرح عدد ثابت خارج الجذر على التمثيل البياني للدالة؟ يتم إزاحة التمثيل البياني رأسيًّا إلى أعلى، أو إلى أسفل

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-1 إلى 1-4

إذا كان $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ ، $g(x) = 5x - 2$، فأوجد كل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

1) $(f+g)(x)$ — $(f+g)(x) = 2x^2 + 9x - 5$

2) $(f-g)(x)$ — $(f-g)(x) = 2x^2 - x - 1$

3) $(f \cdot g)(x)$ — $(f \cdot g)(x) = 10x^3 + 16x^2 - 23x + 6$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ — $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2+4x-3}{5x-2}$, $x \neq \frac{2}{5}$

5) $[f \circ g](x)$ — $[f \circ g](x) = 50x^2 - 20x - 3$

6) $[g \circ f](x)$ — $[g \circ f](x) = 10x^2 + 20x - 17$

7) **مطاعم:** حصلت فاطمة على قسيمة خصم بنسبة 25% من المبلغ الإجمالي في أحد المطاعم. إذا أضيف بدل خدمة بنسبة 6% إلى المبلغ الإجمالي بعد خصم نسبة القسيمة. (الدرس 1-1)

a) أوجد المبلغ الإجمالي بعد خصم القسيمة، والمبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة مستعملًا رمز دالة. لتكن x المبلغ قبل الخصم، $p(x)$ المبلغ بعد الخصم، $g(x)$ المبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة.

$p(x) = 0.75x$

$g(x) = 1.06x$

b) أي الدالتين الآتيتين تمثل المبلغ النهائي $g[p(x)]$ ، $p[g(x)]$؟ وضح إجابتك. بما أن $p[g(x)] = g[p(x)]$، إذًا فكلتا الدالتين تمثل المبلغ النهائي.

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى. مجيبًا بـ "نعم" أو "لا"، مع توضيح السبب: (الدرس 1-2)

8) $f(x) = 2x + 16$ ، $g(x) = \frac{1}{2}x - 8$ — نعم؛ $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

9) $g(x) = 4x + 15$ ، $h(x) = \frac{1}{4}x - 15$ — لا؛ $[g \circ h](x) \neq x$

10) $f(x) = x^2 - 5$ ، $g(x) = 5 + x^{-2}$ — لا؛ $[f \circ g](x) \neq x$

11) $g(x) = -6x + 8$ ، $h(x) = \frac{8-x}{6}$ — نعم؛ $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

للتمرينين 15–12 انظر الهامش

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي (إن وجد): (الدرس 1-2)

12) $h(x) = \frac{2}{5}x + 8$

13) $f(x) = \frac{4}{9}(x - 3)$

14) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$

15) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

16) **تنسيق حدائق:** تتقاضى مؤسسة لتنسيق الحدائق BD3 مقابل السماد المستعمل. إضافة إلى BD2 عن كل ساعة عمل. وتمثل الدالة $f(h) = 2h + 3$، تكلفة العمل لمدة h ساعة. (الدرس 1-2) a انظر الهامش

a) أوجد $f^{-1}(h)$. ماذا تمثل $f^{-1}(h)$؟

b) إذا كانت أجرة تنسيق حديقة BD11، فكم عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة؟ 4 h

للتمرينين 18,17 انظر الهامش

حدد مجال ومدى كل من الدوال الآتية: (الدرس 1-3)

17) $y = 2 + \sqrt{x}$

18) $y = \sqrt{x+4} - 1$

19) **اختيار من متعدد:** ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x+5}$؟ (الدرس 1-3) D

A $\{x \mid x > \frac{5}{2}\}$

B $\{x \mid x > -\frac{5}{2}\}$

C $\{x \mid x \geq \frac{5}{2}\}$

D $\{x \mid x \geq -\frac{5}{2}\}$

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-4)

20) $\sqrt{121a^4b^{18}}$ — $\pm 11a^2|b^9|$

21) $\sqrt{(x^4+3)^{12}}$ — $(y^4+3)^6$

22) $\sqrt[5]{-(y-6)^{20}}$ — $-(y-6)^4$

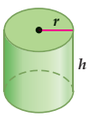
23) $\sqrt[3]{27(2x-5)^{15}}$ — $3(2x-5)^5$

24) $\sqrt[3]{8(x+4)^6}$ — $2(x+4)^2$

25) $\sqrt[4]{16(y+x)^8}$ — $2(y+x)^2$

26) **اختيار من متعدد:** نصف قطر الأسطوانة أدناه يساوي ارتفاعها. ويمكن إيجاد نصف قطرها r باستعمال الصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$، حيث V حجم الأسطوانة.

ما نصف القطر التقريبي للأسطوانة إذا كان حجمها $500\,in^3$؟ (الدرس 1-4) B



A 2.53 in

B 5.42 in

C 7.94 in

D 24.92 in

27) **إنتاج:** إذا كانت تكلفة إنتاج p من الهواتف النقالة بالدينار في مصنع ما يُعبّر عنها بالدالة $C(p) = 5p + 60$. وكان عدد الهواتف المنتجة في h ساعة يُعبّر عنه بالدالة $P(h) = 40h$. (الدرس 1-1)

a) أوجد $C[p(h)]$. $C[P(h)] = 200h + 60$

b) أوجد تكلفة الإنتاج بعد 8h. BD1660

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات
التقويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

المعالجة:

بناء على نتائج اختبار منتصف الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكّل تحديًا للطلبة.

مطوياتك متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 1-1 إلى 1-4.

إجابات:

12) $h^{-1}(x) = \frac{5}{2}(x - 8)$

13) $f^{-1}(x) = \frac{9}{4}x + 3$

14) $h^{-1}(x) = -\frac{3}{10}x - 5$

15) $f^{-1}(x) = 7x - 12$

16a) $f^{-1}(h) = \frac{h-3}{2}$ ، $f^{-1}(h)$ تمثل عدد ساعات العمل.

17) المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$

المدى $= \{y \mid y \geq 2\}$

18) المجال $= \{x \mid x \geq -4\}$

المدى $= \{y \mid y \geq -1\}$

مخطط المعالجة

المستوى الأول	ضمن المتوسط	المستوى الثاني	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس من 1-1 ، 1-2 ، 1-3 ، 1-4	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ماقبل الدرس 1-5

تبسيط تعابير تتضمن الجذر النوني.

الدرس 1-5

تبسيط تعابير جذرية.

جمع تعابير جذرية، وطرحها وضربها وقسمتها.

مابعد الدرس 1-5

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- هل المقام $(1-\sqrt{5})$ أكبر من 2 أم أقل؟ أقل من 2
- هل النسبة $(\frac{2}{\sqrt{5}-1})$ أكبر من 1 أم أقل؟ أكبر من 1

تبسيط التعابير الجذرية

مثال 1 يُبيّن كيفية استعمال خاصية ضرب الجذور؛ لتبسيط تعابير جذرية.

العمليات على التعابير الجذرية
Operations with Radical Expressions

فيما سبق

درست تبسيط تعابير تتضمن الجذر النوني.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أبسّط تعابير جذرية.
- أجمع تعابير جذرية وأطرحها وأضربها وأقسمها.

المفردات الأساسية

إنطاق المقام rationalizing the denominator

الجذور المتشابهة like radical expressions

المرافق conjugate

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

غُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم وتظهر العديد من المستطيلات الذهبية في مبنى بارثنون (Parthenon) في أثينا باليونان، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا. وستتعلم في هذا الدرس، تبسيط تعابير جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

تبسيط التعابير الجذرية يمكن تبسيط التعابير التي تحوي جذورًا نونية باستعمال خصائص العمليات عليها.

مفهوم أساسي خاصية ضرب الجذور

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين a, b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، إذا كانت n عددًا زوجيًا وكان a, b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًا.

مثال $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$ و $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

ولكي يكون التعبير الجذري في أبسط صورة، يجب أن لا يحتوي ما تحت الجذر عوامل هي قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثال 1 تبسيط تعابير جذرية باستعمال خاصية الضرب

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{32x^8}$

حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة: $\sqrt{32x^8} = \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot (x^4)^2}$

خاصية ضرب الجذور: $= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{2}$

بالتبسيط: $= 4x^4\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$

حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة للأس 4: $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot (a^6)^4 (b^3)^4 \cdot b}$

خاصية ضرب الجذور: $= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{(a^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^3)^4} \cdot \sqrt[4]{b}$

بالتبسيط: $= 2a^6|b^3|\sqrt[4]{b}$

ولا ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة في هذه الحالة؛ لأنه حتى يكون $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$ معرّفًا، يجب أن تكون b موجبة؛ لذا فإن $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = 2a^6b^3\sqrt[4]{b}$.

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي:

1A) $\sqrt{12c^6d^3}$ $2c^3d\sqrt{3d}$

1B) $\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$ $3y^4z^2\sqrt[3]{z}$

مصادر الدرس 1-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (39)	• تنويع التعليم ، ص (39)	• تنويع التعليم ، ص (41)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين ، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

خاصية قسمة الجذور هي خاصية أخرى تستعمل في تبسيط التعابير الجذرية.

مفهوم أساسي — **خاصية قسمة الجذور**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين a, b، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$، إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

أمثلة $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

لإزالة الجذور من المقام أو الكسر مما تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب كلًّا من البسط والمقام في مقدار بحيث يكون حاصل الضرب في المقام عددًا نسبيًّا.

مثال	فاضرب البسط والمقام في	إذا كان المقام
$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$
$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\sqrt[n]{b^x}$

مثال 2 تبسيط تعابير جذرية باستعمال خاصية القسمة

بسّط كلًّا مما يأتي:

(a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$

خاصية قسمة الجذور: $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$

حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة: $= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2 \cdot y}}$

خاصية ضرب الجذور: $= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{y}}$

بالتبسيط: $= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}}$

إنطاق المقام: $= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$

$\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$: $= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y^4}$

(b) $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

خاصية قسمة الجذور: $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}}$

إنطاق المقام: $= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3x^3}}{\sqrt[4]{5^3x^3}}$

خاصية ضرب الجذور: $= \frac{\sqrt[4]{6 \cdot 5^3x^3}}{\sqrt[4]{5x \cdot 5^3x^3}}$

بالضرب: $= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{\sqrt[4]{5^4x^4}}$

$\sqrt[4]{5^4x^4} = 5x$: $= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{5x}$

لاحظ أنه عند دمج جذرين (أو أكثر) لهما الدليل n، حيث n عدد زوجي، أو عند توزيع مثل هذا الجذر على ما تحت الجذر، فإن ما تحت الجذر يجب أن يكون كميات غير سالبة.

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي:

(2A) $\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}}$ $\qquad \frac{a^4\sqrt{ab}}{b^3}$

(2B) $\sqrt[5]{\frac{3}{4y}}$ $\qquad \frac{\sqrt[5]{24y^4}}{2y}$

إرشادات للدراسة

حل مختصر

يمكن اختصار الحل في الفرع a كالآتي:

$\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$

$= \frac{|x^3|}{\sqrt{y^7}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{\sqrt{y^8}}$

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y4}$

تبسيط التعابير الجذرية

مثال 2 يُبيّن كيفية استعمال خاصية قسمة الجذور؛ لتبسيط تعابير جذرية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 بسّط كلًّا مما يأتي:

(a) $\sqrt{25a^4b^9}$ $\qquad 5a^2b^4\sqrt{b}$

(b) $\sqrt[3]{125m^{30}p^{20}}$ $\qquad 5m^{10}p^6\sqrt[3]{p^2}$

2 بسّط كلًّا مما يأتي:

(a) $\sqrt{\frac{y^8}{x^7}}$ $\qquad \frac{y^4\sqrt{x}}{x^4}$

(b) $\sqrt[3]{\frac{2}{9x}}$ $\qquad \frac{\sqrt[3]{6x^2}}{3x}$

التركيز في المحتوى الرياضي

خاصية ضرب الجذور

تنص خاصية ضرب الجذور على أن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، وهذه العبارة صحيحة لأي عددين حقيقيين a, b، وذلك عندما يكون الدليل n عددًا صحيحًا فرديًّا أكبر من 1. وإذا كان الدليل n عددًا زوجيًّا، فإن a, b يجب أن يكونا عددين حقيقيين غير سالبين.

إرشادات للمعلم الجديد

خاصية ضرب الجذور عند مناقشة خاصية ضرب الجذور، أكد على ضرورة أن يكون كل من a، b عددين غير سالبين إذا كان الدليل n عددًا زوجيًّا.

فلا يمكن كتابة حاصل ضرب $\sqrt{-2}$ في $\sqrt{-8}$ على شكل $\sqrt{16}$، وذلك لأن $\sqrt{-2}$ وَ $\sqrt{-8}$ ليست أعدادًا حقيقية.

37 الدرس 5-1 العمليات على التعابير الجذرية

فيما يأتي ملخص للمفاهيم التي تستعمل في تبسيط التعابير الجذرية:

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

تبسيط التعابير الجذرية

يكون التعبير الجذري في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

العمليات على التعابير الجذرية يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض التعابير الجذرية وقسمتها.

مثال 3 ضرب التعابير الجذرية

بسّط التعبير الجذري $5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2}$.

$$5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{-12ab^4 \cdot 18a^2b^2}$$ خاصية ضرب الجذور

$$= 15 \cdot \sqrt[3]{(-2^2 \cdot 3) \cdot ab^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2}$$ بتحليل الثوابت

$$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3 \cdot a^3b^6}$$ بتجميع العوامل على صورة أسس تكعيبية، إذا أمكن ذلك

$$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$$ خاصية ضرب الجذور

$$= 15 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$$ بالتبسيط

$$= -90ab^2$$ بالضرب

تأكد

بسّط التعابير الجذرية الآتية:

(3A) $6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3}$ $96c^2d^4$

(3B) $2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2}$ $12x^2|y|$

يمكن جمع التعابير الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع أحاديات الحدود أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل وما تحت الجذر نفسهما.

$\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$ متشابهان

$\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$ غير متشابهين

$\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$ غير متشابهين

مثال 4 جمع التعابير الجذرية وطرحها

بسّط التعبير الجذري $\sqrt{98} - 2\sqrt{32}$.

$$\sqrt{98} - 2\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 7^2} - 2\sqrt{4^2 \cdot 2}$$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$$= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2}$$ خاصية ضرب الجذور

$$= 7\sqrt{2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$$ بتبسيط التعابير الجذرية

$$= 7\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$$ بالضرب

$$(7 - 8)\sqrt{2} = (-1)(\sqrt{2})$$

إرشادات للدراسة

جمع التعابير الجذرية وطرحها

بسّط كل جذر على حدة قبل محاولة تجميع الجذور المتشابهة.

تأكد

بسّط التعابير الجذرية الآتية:

(4A) $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$ $23\sqrt{2}$

(4B) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128}$ $16\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$

العمليات على التعابير الجذرية

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال خاصية ضرب الجذور لضرب التعابير الجذرية.

مثال 4 يُبيّن كيفية جمع التعابير الجذرية أو طرحها.

مثالان إضافيان

3 بسّط التعبير الجذري:
$50a$ $5\sqrt[3]{100a^2} \cdot \sqrt[3]{10a}$

4 بسّط التعبير الجذري:
$-3\sqrt{5}$ $3\sqrt{45} - 5\sqrt{80} + 4\sqrt{20}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء حث الطلبة على التحقق من أن إجاباتهم النهائية في أبسط صورة وذلك عن طريق اختبارها وفق الشروط الأربعة الواردة في ملخص المفاهيم حول تبسيط التعابير الجذرية.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب تعبيرًا على السبورة يتضمن جمع أو طرح تعابير جذرية. ولتبسيط هذا التعبير حرك الحدود المتشابهة لتجميعها ثم اجمعها.

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة ذاتها المتبعة في جمع أحاديات الحدود وطرحها، فإنه يمكنك أيضًا ضرب الجذور باستعمال الخاصية التوزيعية.

مثال 5 ضرب التعابير الجذرية

بسّط التعبير الجذري $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)$.

$$(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6) = 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\cdot(-6) + 5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\cdot(-6)$$

$= 12\sqrt{3\cdot 2} - 24\sqrt{3} + 15\sqrt{2^2} - 30\sqrt{2}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 12\sqrt{6} - 24\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{2}$ — بالتبسيط

تأكد

بسط التعابير الجذرية الآتية:

5A $(6\sqrt{3}-5)(2\sqrt{5}+4\sqrt{2})$ $12\sqrt{15}+24\sqrt{6}-10\sqrt{5}-20\sqrt{2}$

5B $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(7\sqrt{2}+3\sqrt{3})$ 71

ثنائيات الحدود التي على الصورة $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية تسمى أعدادًا مترافقة. ويمكنك استعمال **المرافق** لإنطاق المقام.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال المرافق لإنطاق المقام

هندسة معمارية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية هذا الدرس، واستعمل المرافق لإنطاق المقام وتبسيط التعبير الجذري: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

$\sqrt{5}+1$ مرافق لـ $\sqrt{5}-1$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

$= \frac{2\sqrt{5}+2(1)}{(\sqrt{5})^2+1(\sqrt{5})-1(\sqrt{5})-1(1)}$ — بالضرب

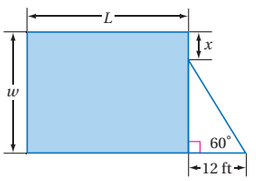
$= \frac{2\sqrt{5}+2}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}$ — بالتبسيط

$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$ — بالطرح

$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ — بالتبسيط

تأكد

6 هندسة: إذا كانت مساحة سطح المستطيل في الشكل المجاور تساوي $900\ \text{ft}^2$، فاكتب معادلة لطول المستطيل L بدلالة x، ثم بسطها.



$\frac{10800\sqrt{3}-900x}{432-x^2}$

إرشادات للدراسة

المرافق حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد نسبي دائمًا.

تاريخ الرياضيات

ثيانو (زوجة فيثاغورس، القرن الخامس قبل الميلاد) يعتقد أنه كان لها اهتمامات بالرياضيات وخصوصًا بعد وفاة زوجها. ومن أهم أعمالها تركيزها على فكرة النسبة الذهبية والتي هي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

تأكد من فهمك

الأمثلة 1-5 الصفحات 36-39

بسّط كل تعبير جذري مما يأتي:

1 $\sqrt{36ab^4c^5}$ **2** $\sqrt{144x^7y^5}$ $6b^2c^2\sqrt{ac}$ **1** $12x^3y^2\sqrt{xy}$ **2**

3 $\frac{\sqrt{c^5}}{\sqrt{d^9}}$ $\frac{c^2\sqrt{cd}}{d^5}$ **3** $\sqrt[4]{\frac{5x}{8y}}$ **4** $\frac{\sqrt[4]{10xy^3}}{2y}$ **4**

5 $5\sqrt{2x}\cdot 3\sqrt{8x}$ $60x$

6 $4\sqrt{5a^5}\cdot\sqrt{125a^3}$ $100a^4$

7 $3\sqrt[3]{36xy}\cdot 2\sqrt[3]{6x^2y^2}$ $36xy$

8 $\sqrt[4]{3x^3y^2}\cdot\sqrt[4]{27xy^2}$ $3xy$

9 $5\sqrt{32}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$ $20\sqrt{2}+13\sqrt{3}$

10 $4\sqrt{40}+3\sqrt{28}-\sqrt{200}$ $8\sqrt{10}+6\sqrt{7}-10\sqrt{2}$ **10**

العمليات على التعابير الجذرية

مثال 5 يُبيّن كيفية ضرب ثنائيتي حدود تحوي جذورًا.

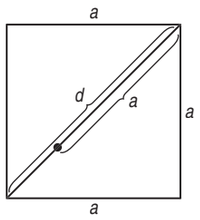
مثال 6 يُبيّن كيفية استعمال المرافق لإنطاق مقام تعبير جذري.

مثالان إضافيان

5 بسّط التعبير الجذري:
$(2\sqrt{3}+3\sqrt{5})(3-\sqrt{3})$
$6\sqrt{3}-6+9\sqrt{5}-3\sqrt{15}$

6 هندسة: مربع طول ضلعه a، ونسبة طول الضلع إلى الفرق بين طول القطر وطول الضلع هي $\frac{a}{a\sqrt{2}-a}$.

استعمل المرافق لإنطاق مقام النسبة، ثم بسّطها.



$\frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا قام بعض الطلبة عند تقديم تعابير جذرية مثل $6\sqrt{3}+11$ بجمع العددين 6، 11،

فقم بمقارنة التعبير الجذري $6\sqrt{3}+11$ بالتعبير $6x+11$؛ لتبين لهم أن ذلك غير ممكن. وركز على أن التعبير الجذري $(6\sqrt{3})$، هو تعبير ضرب يشبه التعبير $6x$. وذكّر الطلبة بأن ترتيب العمليات يستلزم إجراء عملية الضرب قبل عملية الجمع.

ربما يجد بعض الطلبة أنه من المفيد إعادة كتابة $6\sqrt{3}+11$ على الصورة $\sqrt{3}\cdot 6+11$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 17–1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 47 ورقة بيانية ونظرية فيثاغورس؛ لاستكشاف العمليات على الجذور المتشابهة.

تنبيه لحل تمرين

الورقة البيانية يتطلب التمرين 47 من الطلبة استعمال ورقة بيانية.

إجابات:

11) $12\sqrt{3}+16\sqrt{5}+6\sqrt{15}+40$

20) $3\,|a^3|\,bc^2\sqrt{2bc}$

24) $120y\sqrt{2z}$

25) $32a^5b^3\sqrt{b}$

26) $9\sqrt{10}+8\sqrt{5}+9\sqrt{2}$

27) $8\sqrt{7}-72\sqrt{10}+2\sqrt{11}$

32) $6\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

33) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$

34) $\frac{20-7\sqrt{3}}{11}$

37) $\frac{\sqrt[4]{1500a^2b^3x3y^2}}{5\,|a|\,b}$

11) $(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})$ انظر الهامش

12) $(8\sqrt{3}-2\sqrt{2})(8\sqrt{3}+2\sqrt{2})$ 184

13) $\frac{5}{\sqrt{2}+3}$ $\frac{15-5\sqrt{2}}{7}$

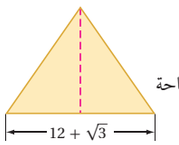
14) $\frac{8}{\sqrt{6}-5}$ $\frac{-40-8\sqrt{6}}{19}$

15) $\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$ $-2-\sqrt{2}$

16) $\frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$ $\frac{27-10\sqrt{3}}{13}$

مثال 6 صفحة 39

17) هندسة: أوجد ارتفاع المثلث في الشكل المجاور في أبسط صورة إذا كانت مساحة سطحه $189+4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. $(32-2\sqrt{3})\ \text{cm}$



تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4 الصفحات 38–36

بسّط كل تعبير جذري مما يأتي:

18) $\sqrt{72a^8b^5}$ $6a^4b^2\sqrt{2b}$

19) $\sqrt{9a^{15}b^3}$ $3a^7b\sqrt{ab}$

20) $\sqrt{18a^6b^3c^5}$

21) $\sqrt{\frac{7x}{10y^3}}$ $\frac{\sqrt{70xy}}{10y^2}$

22) $\frac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{5y}}$

23) $\frac{\sqrt[3]{150x^2y^2}}{5y}$

24) $\sqrt[4]{\frac{7x^3}{4b^2}}$ $\frac{\sqrt[4]{28b^2x^3}}{2|b|}$

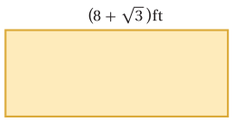
25) $3\sqrt{5y}\cdot 8\sqrt{10yz}$ $2\sqrt{32a^3b^5}\cdot\sqrt{8a^7b^2}$

للتمارين 27 - 20,24 انظر الهامش

26) $3\sqrt{90}+4\sqrt{20}+\sqrt{162}$

27) $4\sqrt{28}-8\sqrt{810}+\sqrt{44}$

28) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور في أبسط صورة. $16+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\ \text{ft}$



29) هندسة: أوجد مساحة سطح المستطيل في الشكل المجاور في أبسط صورة.

للتمارين 37 ,34-32 انظر الهامش

بسّط التعابير الجذرية الآتية:

30) $56\sqrt{3}+42\sqrt{6}-36\sqrt{2}-54$

31) $36\sqrt{2}+36\sqrt{6}+20\sqrt{3}+60$

المثالان 5, 6 صفحة 39

32) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

33) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

34) $\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$

35) $\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 2

للتمرين 39 انظر ملحق الإجابات

بسّط التعابير الجذرية الآتية:

36) $\sqrt[3]{-54x^6y^{11}}$

37) $-3x^2y^3\sqrt[3]{2y^2}$ $\sqrt[4]{\frac{12x^3y^2}{5a^2b}}$

38) $\frac{\sqrt[3]{36xy^2}}{\sqrt[3]{10xz}}$ $\frac{\sqrt[3]{450y^2z^2}}{5z}$

39)

الربط مع واقع الحياة

يطفو التفاح الطازج على الماء؛ لأن 25% من حجمه هواء.

40) $\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

41) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{\sqrt{x^3}-x}{x^2-1}$

42) تفاح: يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالصيغة $d=\sqrt[3]{3w}$، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات. 2.69 in تقريبًا

بسّط كل تعبير جذري مما يأتي، حيث b عدد زوجي:

43) $\sqrt[b]{a^b}$ $|a|$

44) $\sqrt[b]{a^{4b}}$ a^4

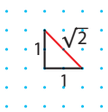
45) $\sqrt[b]{a^{2b}}$ a^2

46) $\sqrt[b]{a^{3b}}$ $|a^3|$

47) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين العمليات على الجذور المتشابهة.

للفروع a–e انظر ملحق الإجابات

a. عددي: انقل الشكل المجاور على ورقة بيانية، واستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الحمراء يساوي $\sqrt{2}$ وحدة.



b. تمثيل بياني: زد طول القطعة المستقيمة الحمراء ليصبح $\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

c. تحليل: استعمل الشكل الذي رسمته لتبين أن: $\sqrt{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{2+2}$.

d. تمثيل بياني: استعمل الورقة البيانية لرسم مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$ وحدة.

e. عددي: برهن أن مساحة سطح المربع الذي رسمته في الفرع d تساوي $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ وحدة مربعة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	35–18، 48، 63–50
ضمن ضمن المتوسط	41–19 فردي، 42، 43، 45، 47، 48، 63–50
فوق فوق المتوسط	60–36، اختياري: (63–61)

48) صالح: أخطأ ناصر؛ لأنه ضرب العدد 4 في العدد 16 بدلًا من ضربه في العدد 4، وضرب العدد 6 في العدد 9 بدلًا من ضربه في العدد 3.

50) 0 هي القيمة الوحيدة الممكنة للعدد a؛ لأن $\sqrt{a}$ يساوي عددًا حقيقيًّا عندما $a \geq 0$، وكذلك $\sqrt{-a}$ يساوي عددًا حقيقيًّا عندما $a \leq 0$.

مسائل مهارات التفكير العليا

48) اكتشف الخطأ: بسّط كلّ من صالح وناصر التعبير الجذري $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$ كما يأتي. أيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

صالح

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2}$$
$$= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$$
$$= 34\sqrt{2}$$

ناصر

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2}$$
$$= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$$
$$= 118\sqrt{2}$$

49) تحدَّ: بيّن أن $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ هو جذر تكعيبي للعدد 1. انظر ملحق الاجابات

50) تبرير: ما قيم a التي تجعل التعبير الجذري $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$ عددًا حقيقيًّا؟ فسر إجابتك.

51) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا غير الواحد الصحيح تكون كلٌّ من جذوره: التربيعي، التكعيبي، والرابع عددًا كليًّا موجبًا. إجابة ممكنة: 4096

52) اكتب: وضح لماذا لا يُعد وضع رمز القيمة المطلقة ضروريًّا عندما يكون ناتج الجذر النوني لقوى زوجية ذا قوى فردية. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

53) أيّ التعابير الجذرية الآتية مكافئة للتعبير الجذري $\sqrt{180a^2b^8}$؟ **B**

A $5\sqrt{6}|a|b^4$ **B** $6\sqrt{5}|a|b^4$ **C** $3\sqrt{10}|a|b^4$ **D** $36\sqrt{5}|a|b^4$

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من التعابير الجذرية الآتية: (الدرس 4-1)

54) $\sqrt{81x^6}$ $9|x^3|$ **55)** $\sqrt[3]{729a^3b^9}$ $9ab^3$ **56)** $\sqrt{(g+5)^2}$ $|g+5|$

أوجد $f \circ g$، $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا. (الدرس 1-1) انظر الهامش

57) $f = \{(7, -3), (-10, -3), (-7, -8), (-3, 6)\}$
$g = \{(4, -3), (3, -7), (9, 8), (-4, -4)\}$

58) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4)\}$
$g = \{(1, -4), (2, -3), (3, -2), (4, -1)\}$

59) $f(x) = -3x$
$g(x) = -x + 8$

60) $f(x) = x + 5$
$g(x) = 3x - 7$

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد ناتج كل مما يأتي:

61) $3\left(\frac{1}{8}\right)$ $\frac{3}{8}$ **62)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ $\frac{7}{8}$ **63)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{5}$ $\frac{13}{30}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد قيمتي a, b اللتين تحققان المعادلة $\sqrt{\frac{3^a}{7^b}} = \frac{3^2\sqrt{7}}{7^2}$. $a = 4, b = 3$

تنبية!

اكتشف الخطأ ينبغي أن يلاحظ الطلبة في التمرين 48. أن ناصرًا قد ارتكب خطأ في كل مرة كان يخرج فيها عاملًا من تحت رمز الجذر التربيعي. لذا، وضح للطلبة أن $4\sqrt{16 \cdot 2} = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ وأن $6\sqrt{9 \cdot 2} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ كما هو مبيّن في حل صالح.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يذكروا أوجه الشبه والاختلاف بين جمع تعابير جذرية، وجمع تعابير جبرية.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة يحتاج الطلبة إلى تبسيط تعابير تحوي جذورًا في كثير من دراستهم المستقبلية للجبر. لذا، وفر الوقت الكافي لتساعدهم على اكتشاف أخطائهم المفاهيمية وتصويبها عن طريق تحليل الأخطاء التي وقعوا فيها.

إجابات:

52) إجابة ممكنة: لأن ماتحت الجذر لابد أن يكون موجبًا لكي يكون الجذر النوني معرفًا.

57) $f \circ g = \{(4, 6), (3, -8)\}$
غير ممكن $g \circ f$

58) غير ممكن $f \circ g$
غير ممكن $g \circ f$

59) $f \circ g = 3x - 24$
$g \circ f = 3x + 8$

60) $f \circ g = 3x - 2$
$g \circ f = 3x + 8$

1-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-6

استعمال خصائص الأسس.

الدرس 1-6

كتابة تعابير ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية والعكس.

تبسيط تعابير أسية أو جذرية.

ما بعد الدرس 1-6

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما أس c في الصيغة $C = c(1 + r)^n$؟
  أس c هو 1
- ما التعبير المرفوع إلى الأس n؟
  n هي أس للمقدار $(1 + r)$
- لماذا كان الأس $\frac{1}{2}$ في الصيغة الأخيرة؟ n تمثل عدد السنوات، وستة أشهر تساوي نصف سنة

الأسس النسبية والتعابير الجذرية

مثال 1 يُبيّن كيفية كتابة تعابيرعلى الصورتين الجذرية والأسية.

1-6 الأسس النسبية
Rational Exponents

فيما سبق

درست استعمال خصائص الأسس.

والآن

الأفكار الرئيسة

- اكتب تعابير ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية والعكس.
- أبسّط تعابير أسية أو جذرية.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يمكن أن تستعمل الصيغة $C = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتمادًا على التضخم المالي، حيث C تمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r تمثل معدل التضخم، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلًا يمكن أن تستعمل الصيغة $C = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$ لتقدير الثمن المستقبلي لثلاجة في ستة أشهر.

الأسس النسبية والتعابير الجذرية تعلم أن تربيع عدد وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة تعبير يحتوي على أس نسبي كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك استقصاء إيجاد قيم مثل هذه التعابير بافتراض أن تعابير الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في تعابير الأسس الصحيحة.

بكتابته على صورة تعبير ضربي $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$

بجمع الأسس $= b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

بالتبسيط $= b^1 = b$

لذا فإن $b^{\frac{1}{2}}$ هو عدد مربعه يساوي b إذن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

إرشادات للدراسة

قوانين الأسس الصحيحة

تذكر أنه لأي عددين حقيقيين a, b وأي عددين صحيحين m, n، فإن:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2) $(a^m)^n = a^{mn}$
3) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
6) $(a)^0 = 1, a \neq 0$
7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
8) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0, b \neq 0$

مفهوم أساسي $b^{\frac{1}{n}}$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عدد حقيقي b، وأي عدد صحيح موجب n، فإن $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$، إلا إذا كانت $b < 0$، و n عددًا زوجيًا فإن الجذر النوني قد يكون عددًا مركبًا.

مثالان $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$ ، $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

مثال 1 الصورتان الجذرية والأسية

a) اكتب $x^{\frac{1}{6}}$ على الصورة الجذرية.

تعريف $b^{\frac{1}{n}}$ $x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$

b) اكتب $\sqrt[4]{z}$ على الصورة الأسّية.

تعريف $b^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$

تأكد

1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية. $\sqrt[5]{a}$

1B) اكتب $\sqrt[8]{c}$ على الصورة الأسّية. $c^{\frac{1}{8}}$

القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية السالبة.

مصادر الدرس 1-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (43)	• تنويع التعليم ، ص (44, 43)	• تنويع التعليم ، ص (44)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين ، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

إرشادات للدراسة

طريقة حل أخرى

يمكن حل مثال 2 على النحو الآتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}} = (3^4)^{-\frac{1}{4}}$

$= 3^{-1} = \frac{1}{3}$

b) $216^{\frac{2}{3}} = (216^2)^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{(6^3)^2}$

$= \sqrt[3]{(6^2)^3}$

$= 6^2 = 36$

مثال 2 إيجاد قيم تعابير تتضمن أسسًا نسبية

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}}$

$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$	$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}$
$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$	$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}}$
$81 = 3^4$	$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}$
بالتبسيط	$= \frac{1}{3}$

b) $216^{\frac{2}{3}}$

$216 = 6^3$	$216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}}$
أس مرفوع لأس	$= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}}$
بضرب الأسس	$= 6^2$
بالتبسيط	$= 36$

تأكد

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي:

2A) $-3125^{-\frac{1}{5}}$ $-\frac{1}{5}$

2B) $256^{\frac{3}{8}}$ 8

في المثالين $2a$, $2b$ استعمل تعريف $b^{\frac{1}{n}}$ وخصائص الأسس لإيجاد قيمة التعبير. ومنها يمكن اقتراح التعريف العام الآتي للأسس النسبية:

مفهوم أساسي الأسس النسبية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا ، ولأي عددين صحيحين x , y، بحيث $y > 1$، يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$، إلا إذا كانت $b < 0$، و y عددًا زوجيًا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركبًا.

أمثلة $(-16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{-16})^3 = (4i)^3 = -64i$, $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

الربط مع واقع الحياة

التضخم المالي يعمل خبراء الاقتصاد في مجال الخدمات المصرفية ، والمالية ، والمحاسبة ، والتجارة ، والتسويق ، وإدارة الأعمال. ويتشاورون في كثير من الأحيان قبل سن السياسات المالية. ويستعمل الاقتصاديون التسويق للحكم على الاقتصاد.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية

ثقافة مالية : ارجع إلى الفقرة في بداية هذا الدرس، وافترض أن ثمن الثلاجة الآن هو BD 390، فكم سيزيد الثمن خلال ستة أشهر، إذا كان معدل التضخم المالي السنوي 5.3%؟

الصيغة $C = c(1 + r)^n$

$= 390(1 + 0.053)^{\frac{1}{2}}$ $c = 390, r = 0.053, n = \frac{6 \text{ أشهر}}{12 \text{ شهرًا}} = \frac{1}{2}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 400.20

$400.20 - 390.00 = 10.20$ إذن سيزيد ثمن الثلاجة بعد ستة أشهر بمقدار BD 10.20 تقريبًا.

تأكد

3) افترض أن ثمن لتر الحليب الآن BD 0.4. فكم سيزيد الثمن بعد تسعة أشهر، إذا كان معدل التضخم المالي السنوي 5.3%؟ BD 0.016 تقريبًا

تبسيط التعابير خصائص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل تعبير على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحة موجبة؛ لذلك يمكن أن يكون إنطاق المقام ضروريًا.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب تعبيرًا يتضمن أس نسبي على السبورة. اعرض قالبًا، مثل: $a^{\square} = \sqrt[\square]{a^{\square}}$، ثم أدخل بسط الأس ومقامه للتعبير المكتوب لإعادة كتابة التعبير على صورة جذرية.

الأسس النسبية والتعابير الجذرية

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد قيم تعابير تتضمن أسسًا نسبية.

مثال 3 هو مثال من واقع الحياة يتضمن أسًّا نسبيًّا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 **a)** اكتب $a^{\frac{1}{7}}$ على الصورة الجذرية. $\sqrt[7]{a}$

b) اكتب $\sqrt{w}$ على الصورة الأسية. $w^{\frac{1}{2}}$

2 أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي:

a) $49^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{7}$ **b)** $32^{\frac{2}{5}}$ 4

3 **رفع الأثقال:** يمكن استعمال الصيغة $M = 512 - 146230B^{-\frac{8}{5}}$ لتقدير أكبر كتلة يمكن لرافع أثقال كتلته B kg أن يرفعها خطفًا.

اعتمادًا على الصيغة، ما أكبر كتلة بالكيلوجرامات، يمكن أن يرفعها رافع أثقال كتلته 168 kg؟ بالاعتماد على الصيغة يتوقع أنه يستطيع رفع 472 kg على الأكثر.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا لم يقرأ بعض الطلبة الأسس على نحوٍ صحيح،

فقم بتشجيعهم على قراءتها بصوت عالٍ، بطريقة تُمَيّزها عن المعامل، أو العدد الذي يتم ضربه. لذا، اطلب إليهم التدرب على قراءة الأسس على نحوٍ صحيح. فمثلًا، قراءة x^3 على أنها "x مرفوعة للقوة 3"، أو "x تكعيب" واطلب إليهم أيضًا التدرب على قراءة تعابير جذرية على نحو صحيح. فمثلًا قراءة $\sqrt{y^3}$ على أنها "الجذر التربيعي لـ y تكعيب، " أو "الجذر التربيعي للقوة الثالثة لـ y".

التركيز في المحتوى الرياضي

الأسس النسبية هناك قيود على المتغيرات b, m, n في التعريف العام للأسس النسبية، $(b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m)$ ، وهي: يجب أن يكون المتغير b عددًا حقيقيًّا غير صفري إلا عندما يكون n عددًا زوجيًّا فعندئذٍ يجب أن يكون b عددًا حقيقيًّا موجبًا، ويجب أن يكون المتغير m عددًا صحيحًا، والمتغير n عددًا طبيعيًا. ولا تقلل القيود على المتغيرين n, m من عمومية التعريف؛ لأن أي عدد نسبي يمكن التعبير عنه على صورة ناتج قسمة عدد صحيح على عدد طبيعي.

تبسيط التعابير

مثال 4 يُبيّن كيفية تبسيط تعابير بأسس نسبية.

مثال 5 يُبيّن كيفية تبسيط تعابير جذرية.

مثال إضافي

4 بسط كل تعبير مما يأتي:

a) $y^{\frac{5}{7}} \quad y^{\frac{1}{7}} \cdot y^{\frac{4}{7}}$

b) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} \quad x^{-\frac{2}{3}}$

تنبيه!

تجنب الاخطاء إذا واجه بعض الطلبة مشكلة في تحديد أي جزء من الأس الكسري هو دليل الجذر، فاقترح عليهم مراجعة التعريف الأساسي $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$

مثال 4 تبسيط تعابير بأسس نسبية

بسّط كل تعبير مما يأتي:

a) $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

خاصية ضرب القوى $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}}$

بجمع الأسس $= a^{\frac{6}{7}}$

b) $b^{-\frac{5}{6}}$

$b^{-n} = \frac{1}{bn}$ $b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}}$

لماذا نضرب في $\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$؟ $= \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$

$b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}$ $= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{6}{6}}}$

$b^{\frac{6}{6}} = b^1 = b$ $= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b}$

إرشادات

تبسيط التعابير: عند تبسيط تعابير تحوي أسسًا نسبية، اترك الأسس على الصورة النسبية بدلًا من كتابة التعبير على الصورة الجذرية.

تأكد

بسّط كل تعبير مما يأتي:

4A) $p^{\frac{5}{2}} \quad p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}}$

4B) $r^{-\frac{4}{5}} \quad \frac{r^{\frac{1}{5}}}{r}$

عند تبسيط تعبير جذري اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكّر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

مثال 5 تبسيط التعابير الجذرية

بسّط كل تعبير مما يأتي:

a) $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

الأسس النسبية $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$

$27 = 3^3$ $= \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$

خاصية قوة القوة $= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$

خاصية قسمة القوتين $= 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$

بالتبسيط $= 3^{\frac{1}{4}}$

إعادة كتابة التعبير على الصورة الجذرية $= \sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt[3]{64z^6}$

الأسس النسبية $\sqrt[3]{64z^6} = (64z^6)^{\frac{1}{3}}$

$64 = 8^2$ $= (8^2 \cdot z^6)^{\frac{1}{3}}$

خاصية قوة القوة $= 8^{\frac{2}{3}} \cdot z^{\frac{6}{3}}$

$8^{\frac{2}{3}} = 4$ $= 4z^2$

c) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2}$

$3x^{\frac{1}{2}} - 2$ مرافق لـ $3x^{\frac{1}{2}} + 2$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} \cdot \frac{3x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} - 2}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع افترض أن x ، y عددان حقيقيان غير سالبين، وأوجد ناتج ضرب $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right) \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$. $x - y$

$$= \frac{3x^{\frac{2}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x^{\frac{2}{2}} - 4} \quad \text{بالضرب}$$

$$= \frac{3x - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x - 4} \quad \text{بالتبسيط}$$

تأكد

بسّط كل تعبير مما يأتي:

5A. $\sqrt[12]{2^{11}}$ $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}}$

5B. $\sqrt[3]{16x^4}$ $2x\sqrt[3]{2x}$

5C. $\frac{y^{\frac{1}{2}}+2}{y^{\frac{1}{2}}-2}$ $\frac{y+4y^{\frac{1}{2}}+4}{y-4}$

إرشادات للدراسة

التعابير الجذرية

اكتب التعبير المبسط (الناتج النهائي) على الصورة التي كان عليها قبل التبسيط؛ أيْ إذا بدأت بتعبير جذري، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الجذرية. وإذا بدأت بتعبير يتضمن أسسًا نسبية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الأسية.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

تعابير تتضمن أسسًا نسبية

تكون التعابير التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا اجتمعت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- أي من البسط أو المقام أو كليهما ليس كسرًا.
- دليل الجذر أصغر ما يمكن.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 42

اكتب التعبير الأسي على الصورة الجذرية، والتعبير الجذري على الصورة الأسية في كل مما يأتي:

1) $10^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[4]{10}$

2) $x^{\frac{3}{5}}$ $\sqrt[5]{x^3}$

3) $15^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{15}$

4) $7^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{9}{4}}$ $\sqrt[4]{7x^6y^9}$

مثال 2 صفحة 43

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي:

5) $343^{\frac{1}{3}}$ 7

6) $32^{-\frac{1}{5}}$ $\frac{1}{2}$

7) $125^{\frac{2}{3}}$ 25

8) $\frac{24}{4^{\frac{3}{2}}}$ 3

مثال 3 صفحة 43

9) بستنة: إذا كانت المساحة A لسطح مربع معطاة، فإنه يمكن إيجاد طول ضلع المربع ℓ باستعمال القانون $\ell = A^{\frac{1}{2}}$. إذا اشتريت حديقة مربعة مساحتها 169m^2، فما طول ضلعها؟ انظر الهامش

المثالان 4, 5 صفحة 44

بسّط كل تعبير مما يأتي:

10) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ $a^{\frac{5}{4}}$

11) $\frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ $x^{\frac{3}{5}}$

12) $\frac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c}{b^{\frac{1}{3}}}$ $b^{\frac{8}{3}}c^{\frac{1}{2}}$

13) $\sqrt[4]{9g^2}$ $\sqrt{3g}$

14) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}}$ $2^{\frac{4}{5}}$ أو $\sqrt[5]{16}$

15) $\frac{g^{\frac{1}{2}}-1}{g^{\frac{1}{2}}+1}$ $\frac{g-2g^{\frac{1}{2}}+1}{g-1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 42

اكتب التعبير الأسي على الصورة الجذرية، والتعبير الجذري على الصورة الأسّية في كل مما يأتي:

16) $8^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{8}$

17) $(x^3)^{\frac{3}{2}}$ $\sqrt{x^9}$

18) $\sqrt{17}$ $17^{\frac{1}{2}}$

19) $\sqrt[4]{625x^2}$ $5x^{\frac{1}{2}}$

مثال 2 صفحة 43

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي:

20) $27^{\frac{1}{3}}$ 3

21) $256^{\frac{1}{4}}$ 4

22) $16^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{4}$

23) $(-27)^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{9}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	16–29، 47، 49–64
ضمن ضمن المتوسط	17–36 فردي، 38، 40–42، 45–47، 49–64
فوق فوق المتوسط	30–61، (اختياري: 62–64)

مثال إضافي

5 بسّط كل تعبير مما يأتي:

a) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ $\frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\sqrt[3]{2x^2}$ $\sqrt[6]{4x^4}$

c) $\frac{y^{\frac{1}{2}}+1}{y^{\frac{1}{2}}-1}$ $\frac{y+2y^{\frac{1}{2}}+1}{y-1}$

إرشادات للمعلم الجديد

التحقق من الإجابة حُث الطلبة على تعويض قيم في كل من التعبير الأصلي والتعبير المُبسط، إذا كانت قيم التعبيرين متساوية، فإن حلهم صحيح على الأغلب.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 15–1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

9 كتابة القانون $\ell = A^{\frac{1}{2}}$

$A = 169$

بإعادة كتابة التعبير على الصورة الجذرية $= 169^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{169}$

بالتبسيط $= 13\text{ ft}$

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 46 جدول القيم والتمثيل البياني؛ للمقارنة بين دالة تكعيبية ودالة جذر تكعيبي.

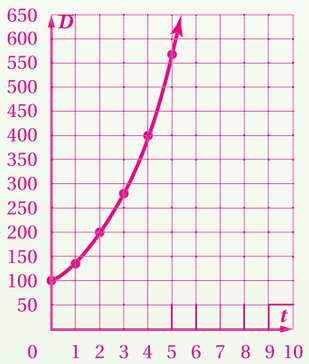
إجابات:

(37a) 475 تقريبًا

(37b)

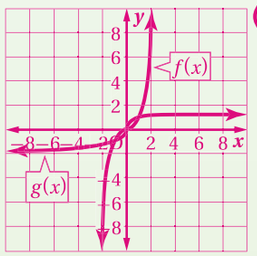
السنة	0	1	2	3	4	5
عدد الغزلان	100	141	200	282	400	565

(37c)



(37d) إجابة ممكنة: لا؛ ليس معقولًا القول بأن العدد سيستمر بالزيادة دون حدود. وهو لم يأخذ بعين الاعتبار معدل النفوق للغزلان.

(46b)



(38)

$$f^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{f^{\frac{1}{4}}},\ \frac{1}{f^{-\frac{1}{3}}}=f^{\frac{1}{3}} \qquad \frac{f^{-\frac{1}{4}}}{4f^{\frac{1}{2}}\cdot f^{-\frac{1}{3}}}=\frac{f^{\frac{1}{3}}}{4f^{\frac{1}{2}}\cdot f^{\frac{1}{4}}}$$

جمع القوى $=\dfrac{f^{\frac{1}{3}}}{4f^{\frac{3}{4}}}$

بالضرب لإنطاق المقام $=\dfrac{f^{\frac{1}{3}}}{4f^{\frac{3}{4}}}\cdot\dfrac{f^{\frac{1}{4}}}{f^{\frac{1}{4}}}$

$f^{\frac{1}{3}}\cdot f^{\frac{1}{4}}=f^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$ $=\dfrac{f^{\frac{7}{12}}}{4f}$

مثال 3 صفحة 43

(24) كرة السلة: يوجد حجمان لكرة السلة، حجم كبير للرجال وآخر صغير للنساء، كما في الصورة جانبًا، إذا كان نصف قطر الكرة r التي تسع V وحدة مكعبة من الهواء يعبر عنه بالعلاقة $r=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

a) أوجد نصف قطر كرة سلة النساء. 4.62 in تقريبًا

b) أوجد نصف قطر كرة سلة الرجال. 4.77 in تقريبًا

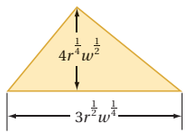
المثالان 4, 5 صفحة 44

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(25) $x^{\frac{11}{15}}\ x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{5}}$ **(26)** $\dfrac{y^{\frac{1}{5}}}{y}\ y^{-\frac{4}{5}}$ **(27)** $\sqrt[3]{3}\ \dfrac{\sqrt[6]{81}}{\sqrt[6]{3}}$ **(28)** $\sqrt{5x}\ \sqrt[4]{25x^2}$ **(29)** $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}+2}{x^{\frac{1}{4}}-2}$

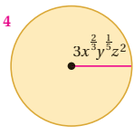
هندسة: أوجد مساحة سطح كل شكل مما يأتي:

(30)



$6r^{\frac{3}{4}}w^{\frac{3}{4}}$ وحدة مربعة

(31)



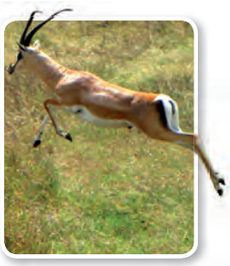
$28.27x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{5}}z^4$ وحدة مربعة تقريبًا

(32) أوجد أبسط صورة للتعبير $18^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}-32^{\frac{1}{2}}$. 0

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(33) $\left(y^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}\ y^{\frac{3}{20}}$ **(34)** $a^{\frac{7}{4}}\cdot a^{\frac{5}{4}}\ a^3$ **(35)** $\sqrt[6]{216}\ \sqrt{6}$ **(36)** $w^{-\frac{7}{8}}\ \dfrac{w^{\frac{1}{8}}}{w}$

(37) محميات: إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا أعيد 100 غزال إلى محمية، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبر عنه بالصيغة $D=100\cdot 2^{\frac{t}{2}}$، فأجب عما يأتي:



الربط مع واقع الحياة

الطريقة الأكثر دقة لتحديد عمر بعض أنواع الغزلان هي النظر إلى مقطع عرضي لأحد أسنانه، حيث تنمو له كل فصل شتاء طبقة كلسية تكسو السن على شكل حلقة، وكل حلقة تمثل سنة كما هو الحال في حلقات جذع الشجرة.

a) كم يصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟ الفروع a–d انظر الهامش

b) اعمل جدولًا يحدد عدد الغزلان في كل من السنوات الخمس القادمة.

c) مثّل بيانيًا بيانات الجدول الذي كوّنته في فرع **b**.

d) قرر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني، هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا، وفسر إجابتك.

بسّط كل تعبير مما يأتي: **(41)** $23\sqrt[6]{23}$ **(45)** $2\sqrt{6}-5$

(38) $\dfrac{f^{-\frac{1}{4}}}{4f^{\frac{1}{2}}\cdot f^{-\frac{1}{3}}}$ انظر الهامش **(39)** $\dfrac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}+2}\ \dfrac{g^3-2g^{\frac{5}{2}}}{g-4}$ **(40)** $c^{\frac{1}{2}}\ \dfrac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ **(41)** $\sqrt{23}\cdot\sqrt[3]{23^2}$

(42) $3\ \sqrt{\sqrt{81}}$ **(43)** $2\ \sqrt[4]{\sqrt{256}}$ **(44)** $\dfrac{xy}{\sqrt[3]{z}}\ \dfrac{xy\sqrt[3]{z^2}}{z}$ **(45)** $\dfrac{8^{\frac{1}{6}}-9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(46) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين الدالتين:

$f(x)=x^3, g(x)=x^{\frac{1}{3}}$.

a) جدولة: أكمل الجدول المجاور.

x	$f(x)$	$g(x)$
−2	−8	−1.26
−1	−1	−1
0	0	0
1	1	1
2	8	1.26

b) تمثيل بياني: مثّل بيانيًا كلًّا من $f(x), g(x)$. انظر الهامش

c) تعبير لفظي: صف التحويل الهندسي بين $f(x)$ و $g(x)$.

كل منهما انعكاس للآخر في المحور $y=x$

46 الفصل 1 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

47) غير صحيحة أبدًا؛ فعندما يكون معامل الأساس سالبًا وتكون إشارة السالب داخل القوسين والأس زوجيًّا يكون الناتج موجبًا. وإذا ضربت القوة ذات الأس الزوجي في عدد سالب يكون الناتج سالبًا.

49) $4^{\frac{1}{2}}$ و $16^{\frac{1}{4}}$

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **تبرير:** حدد ما إذا كانت المعادلة $-x^{-2} = (-x)^{-2}$ صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسر تبريرك.

48) **تحدٍّ:** بالنسبة للتعبير $\sqrt[4]{(-16)^3}$.

a) وضح لماذا لا يكون هذا التعبير عددًا حقيقيًّا. انظر الهامش

b) أوجد قيمة n بحيث يكون $\sqrt[n]{(-16)^3}$ عددًا حقيقيًّا. إجابة ممكنة: $\sqrt[4]{-1}$

49) **مسألة مفتوحة:** أوجد تعبيرين مختلفين على الصورة $x^{\frac{1}{a}}$ بحيث تكون قيمة كل منهما 2.

50) **اكتب:** وضح كيف يمكن أن يكون من الأسهل تبسيط تعبير باستعمال أس نسبية أكثر من استعمال الجذور. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

51) ما قيمة c التي تجعل التعبير $\sqrt{56 - c}$ مساويًا لعدد صحيح موجب؟ **B**

A 8 **C** 56
B −8 **D** 36

52) **سؤال ذو إجابة قصيرة** إذا كان $3^5 \cdot p = 3^3$، فأوجد قيمة p. 3^{-2}

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 5-1)

53) $\sqrt{243}$ $9\sqrt{3}$

54) $\sqrt[3]{16y^3}$ $2y\sqrt[3]{2}$

55) $3\sqrt[3]{56y^6z^3}$ $6y^2z\sqrt[3]{7}$

56) **فيزياء:** تُعطى سرعة الصوت في سائل بالعلاقة $s = \sqrt{\frac{B}{d}}$، حيث B معامل تغيّر حجم السائل، d كثافة السائل. أما بالنسبة للماء، فإن $B = 2.1 \times 10^9\ \text{N/m}^2$, $d = 10^3\ \text{kg/m}^3$. أوجد سرعة الصوت في الماء إلى أقرب متر لكل ثانية. (الدرس 4-1) 1449 m/sec تقريبًا

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f + g)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي: (الدرس 1-1) انظر الهامش

57) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

58) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8 - x$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي: (الدرس 2-1)

59) $f(x) = 4x$ $\frac{x}{4}$

60) $y(x) = -8x + 9$ $\frac{x - 9}{-8}$

61) $g(x) = x + 4$ $x - 4$

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كل تعبير مما يأتي:

62) $(\sqrt{x - 3})^2$ $x - 3$

63) $(\sqrt[3]{3x - 4})^3$ $3x - 4$

64) $(2\sqrt{x} - 5)^2$ $4x - 20\sqrt{x} + 25$

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدهم الدرس السابق التعابير الجذرية على كتابة تعابير ذات أسس نسبية في هذا الدرس وتبسيطها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 6-1, 5-1 بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 1.

إجابات:

48a) إجابة ممكنة:
$\sqrt[4]{(-16)^3} = \sqrt[4]{-4096}$
لا يوجد عدد حقيقي إذا رُفع للقوة الرابعة كانت النتيجة عددًا سالبًا.

50) إجابة ممكنة: قد يكون من الأسهل تبسيط تعابير تتضمن أسسًا نسبية؛ لأنه يمكن تطبيق جميع خصائص الأسس عليها، على حين لا يوجد الكثير من الخصائص للجذور. حيث، يمكننا تحويل كل تعبير جذري إلى تعبير نسبي بأسس نسبية، ثم استعمال خصائص الأسس للتبسيط.

57) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x^2+6}{2x^2+3x-5}$, $x \neq -\frac{5}{2}, x \neq 1$
$(f \cdot g)(x) = -2x^4 - 3x^3 + 17x^2 + 18x - 30$
$(f - g)(x) = -3x^2 - 3x + 11$
$(f + g)(x) = x^2 + 3x + 1$

58) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2}{8-x}$, $x \neq 8$
$(f \cdot g)(x) = 16x^2 - 2x^3$
$(f - g)(x) = 2x^2 + x - 8$
$(f + g)(x) = 2x^2 - x + 8$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ماقبل الدرس 1-7

حل معادلات خطية ومعادلات تربيعية في متغير واحد.

الدرس 1-7

حل معادلات تحتوي جذورًا

ما بعد الدرس 1-7

تحديد المقطع المخروطي من معادلة معطاة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما المتغير الذي يظهر تحت رمز الجذر في الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$ ؟، وماذا يمثل؟
  h : ارتفاع القفزة بالأقدام.
- ما قيمة t إذا كانت $h = 4$، صف إجابتك.
  إذا كانت $h = 4$، فإن $t = 1$ ؛ زمن تحليق قفزة ارتفاعها 4 ft يساوي ثانية واحدة.
- اعتمادًا على إجابتك عن السؤال السابق، كيف ستتأثر t إذا ضربت h في العدد 4؟ تتضاعف t مرة واحدة.

حل المعادلات الجذرية

مثال 1 يُبيّن كيفية حل ثلاث معادلات جذرية، الأولى والثانية لهما حل، والثالثة لها حل مرفوض.

1-7 حل المعادلات الجذرية
Solving Radical Equations

فيما سبق
درست حل معادلات خطية ومعادلات تربيعية في متغير واحد.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أحل معادلات تحتوي جذورًا.

المفردات الأساسية
المعادلة الجذرية radical equation
الحل المرفوض extraneous solution

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمنًا معينًا في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام، وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$.

إذا عُلم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريبًا، فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزته؟

حل المعادلات الجذرية تحتوي **المعادلات الجذرية** على تعابير جذرية. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأسٍّ معين.

مفهوم أساسي حل المعادلات الجذرية

أضف إلى مطويتك

خطوة 1 اجعل الجذور في طرف واحد من المعادلة.

خطوة 2 ارفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر؛ للتخلص من الجذر.

خطوة 3 حل المعادلة الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلًّا مرفوضًا**.

مثال 1 حل معادلات جذرية

حلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $\sqrt{x+2}+4=7$

المعادلة الأصلية	$\sqrt{x+2}+4=7$
بطرح 4 من الطرفين لعزل الجذر	$\sqrt{x+2}=3$
بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر	$(\sqrt{x+2})^2=3^2$
بإيجاد مربع الطرفين	$x+2=9$
بطرح 2 من الطرفين	$x=7$
تحقق: المعادلة الأصلية	$\sqrt{x+2}+4=7$
عوض عن x بالعدد 7	$\sqrt{7+2}+4 \stackrel{?}{=} 7$
بالتبسيط	$7=7$ ✓

b) $\sqrt{x+1}=x-1$

المعادلة الأصلية	$\sqrt{x+1}=x-1$
بتربيع الطرفين	$(\sqrt{x+1})^2=(x-1)^2$
بالتبسيط	$x+1=x^2-2x+1$
بطرح x و 1 من الطرفين	$0=x^2-3x$
بالتحليل إلى عوامل	$0=x(x-3)$
خاصية الضرب الصفري	$x=0$ or $x-3=0$
حل المعادلة	$x=3$

مصادر الدرس 1-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (50)	• تنويع التعليم ص (50, 52)	• تنويع التعليم ص (50, 52)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

تحقق:

المعادلة الأصلية	$\sqrt{x+1}=x-1$	$\sqrt{x+1}=x-1$
	$x=3$	$x=0$
بالتبسيط	$\sqrt{3+1}\stackrel{?}{=}3-1$	$\sqrt{0+1}\stackrel{?}{=}0-1$
	$\sqrt{4}\stackrel{?}{=}2$	$\sqrt{1}\stackrel{?}{=}-1$
	صحيحة ✓ $2=2$	خاطئة ✗ $1\neq -1$

إذن الصفر ليس حلًّا للمعادلة بينما 3 هو الحل الوحيد.

c) $\sqrt{x-12}=2-\sqrt{x}$

المعادلة الأصلية	$\sqrt{x-12}=2-\sqrt{x}$
بتربيع الطرفين	$(\sqrt{x-12})^2=(2-\sqrt{x})^2$
بإيجاد مربع الطرفين	$x-12=4-4\sqrt{x}+x$
بطرح $(x+4)$ من الطرفين لعزل الجذر	$-16=-4\sqrt{x}$
بقسمة الطرفين على -4	$4=\sqrt{x}$
بتربيع الطرفين	$16=x$

تحقق:

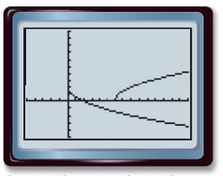
$\sqrt{x-12}=2-\sqrt{x}$

$\sqrt{16-12}\stackrel{?}{=}2-\sqrt{16}$

$\sqrt{4}\stackrel{?}{=}2-4$

$2\neq -2$ ✗

لا يحقق الحل المعادلة؛ لذا فالمعادلة لها حل مرفوض. والتمثيلان البيانيان للمعادلة $y=\sqrt{x-12}$، والمعادلة $y=2-\sqrt{x}$ لا يتقاطعان، وهذا يؤكد أنه لايوجد حل حقيقي.



[−10, 30] scl: 2 by [−5, 10] scl: 1

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من حل المعادلة، مثّل كل طرف من أطراف المعادلة الأصلية بيانيًا، ثم ابحث عن نقاط التقاطع.

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

1A. $\sqrt{x-2}-1=5$ 38 **1B.** $\sqrt{x+5}=x+3$ −1 **1C.** $\sqrt{x+15}=5+\sqrt{x}$ لا يوجد حل

للتخلص من الجذر التربيعي ربِّع التعبير الجذري، وللتخلص من الجذر التكعيبي ارفع التعبير للقوة 3.

مثال 2 حل معادلة جذر تكعيبي

حُلّ المعادلة $2(6x-3)^{\frac{1}{3}}-4=0$.

للتخلص من الأس $\frac{1}{3}$ (الجذر التكعيبي)، يجب أولًا جعل الجذر التكعيبي في طرف واحد من المعادلة، ثم رفع طرفي المعادلة للقوة 3.

المعادلة الأصلية	$2(6x-3)^{\frac{1}{3}}-4=0$
بإضافة العدد 4 للطرفين	$2(6x-3)^{\frac{1}{3}}=4$
بقسمة الطرفين على 2	$(6x-3)^{\frac{1}{3}}=2$
بتكعيب الطرفين	$\left[(6x-3)^{\frac{1}{3}}\right]^3=2^3$
بإيجاد مكعب الطرفين	$6x-3=8$
بإضافة 3 للطرفين	$6x=11$
بقسمة الطرفين على 6	$x=\frac{11}{6}$

حل المعادلات الجذرية

مثال 2 يُبيّن كيفية حل معادلة تتضمن جذر تكعيبي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $\sqrt{y-2}-1=5$ 38

b) $\sqrt{x-2}=x-4$ 6

c) $\sqrt{x-12}=2-\sqrt{x}$ لا يوجد حل

2 حُلّ المعادلة $(3y+1)^{\frac{1}{3}}+5=0$. −42

التركيز في المحتوى الرياضي

الجذور المرفوضة من الضروري دائمًا التحقق من صحة حل المعادلة وذلك بتعويض الحل في المعادلة الأصلية، وتزداد الأهمية عندما يكون طرفا المعادلة مرفوعين لقوة. وعندما يكون الحل تقريبيًا، فإنه من الصعب أحيانًا تحديد إذا كان عدم تساوي طرفي المعادلة عند التحقق ناتجًا عن التقريب أم عن الحل غير الصحيح. ويتعين على الطلبة التحقق من صحة الحلول غير التقريبية كلما كان ذلك ممكنًا.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلبة كتابة مدونة عن الحلول المرفوضة، واطلب إليهم توضيح المقصود بالحلول المرفوضة، وكيف يمكنهم التحقق من صحة الحل بيانيًا وجبريًا.

تنبيه!

تجنب الأخطاء ناقش الطلبة في العمليات التي يمكن أن ينجم عنها حلول مرفوضة، عند حل معادلة تحتوي جذورًا. وذكّرهم بأن رمز الجذر التربيعي في المعادلة يعني الجذر الرئيس.

حل المعادلات الجذرية

مثال 3 يُبيّن كيفية الإجابة عن أسئلة اختبار معياري تتضمن معادلات جذرية.

مثال إضافي

3 **مثال على اختبار معياري:**

ما حل المعادلة $7(\sqrt[6]{5m+4}) - 4 = 10$ ؟ C

a $m = -2$ **C** $m = 12$

b $m = 0$ **d** $m = 14$

تحقق:

المعادلة الأصلية $2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$

بتعويض $\frac{11}{6}$ عن x $2\left(6 \cdot \frac{11}{6} - 3\right)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$

بالتبسيط $2(8)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$

الجذر التكعيبي للعدد 8 هو 2 $2(2) - 4 \stackrel{?}{=} 0$

بالطرح $0 = 0$ ✓

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

2A. $(3n+2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$ **−1**

2B. $3(5y-1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$ $\frac{7}{27}$

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أيًّا كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي تعبير ارفعه للقوة n.

مثال 3 على اختبار معياري

ما حل المعادلة $3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$؟

A -1 **B** 1 **C** 5 **D** 11

المعادلة الأصلية $3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$

بإضافة العدد 6 للطرفين $3(\sqrt[4]{2n+6}) = 6$

بقسمة الطرفين على 3 $\sqrt[4]{2n+6} = 2$

برفع الطرفين للأس 4 $(\sqrt[4]{2n+6})^4 = 2^4$

بإيجاد قيمة الطرفين $2n + 6 = 16$

بطرح 6 من الطرفين $2n = 10$

$n = 5$

إذن الجواب هو C .

إرشادات الاختبار

تعويض البدائل

يمكنك أيضًا حل سؤال الاختبار بتعويض كل البدائل المعطاة لقيمة n في المعادلة، لاختيار الحل الصحيح منها.

تأكد

3) ما حل المعادلة $4(3x+6)^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$ ؟ G

F $x = 7$ **G** $x = 25$ **H** $x = 29$ **J** $x = 37$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات، للمقارنة بين حل معادلات جذرية وحل أنواع أخرى من المعادلات. واطلب إليهم كتابة أوجه الشبه والاختلاف بين الإجراءات المستعملة في الحل، أو تقديم عرض مختصر يبين ذلك.

تأكد من فهمك

المثالان 1, 2 الصفحات 48-50

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $\sqrt{x-4}+6=10$ — 20
2) $\sqrt{x+13}-8=-2$ — 23
3) $8-\sqrt{x+12}=3$ — 13
4) $\sqrt{x-8}+5=7$ — 12
5) $\sqrt[3]{x-2}=3$ — انظر الهامش
6) $(x-5)^{\frac{1}{3}}-4=-2$ — 13
7) $(4y)^{\frac{1}{3}}+3=5$ — 2
8) $\sqrt[3]{n+8}-6=-3$ — 19
9) $\sqrt{y}-7=0$ — 49
10) $2+4z^{\frac{1}{2}}=0$ — لا يوجد حل
11) $5+\sqrt{4y-5}=12$ — $\frac{27}{2}$
12) $\sqrt{2t-7}=\sqrt{t+2}$ — 9

13) **فيزياء:** يعطى الزمن الدوري لبندول لإتمام دورته بالصيغة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T هو الزمن (sec) الذي يستغرقه البندول لإكمال مرجحة واحدة (الزمن الدوري)، L طول البندول (ft)، g تسارع (عجلة) الجاذبية الأرضية، ويساوي $32\,\text{ft/sec}^2$.

a) يوجد في طوكيو باليابان بندول ضخم طوله 73 ft تقريبًا، أوجد الزمن الدوري له. 9.5 sec تقريبًا

b) يريد صانع ساعات أن يصنع بندولًا يستغرق 20 sec لإتمام مرجحة واحدة. كم يجب أن يكون طول البندول؟ 324 ft تقريبًا

مثال 3 صفحة 50

14) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة $(2y+6)^{\frac{1}{4}}-2=0$ ؟ B

A $y=1$ B $y=5$ C $y=11$ D $y=15$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 الصفحتان 48 , 49

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

15) $6+\sqrt{3x+1}=11$ — 8
16) $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$ — 3
17) $\sqrt{x-15}=3-\sqrt{x}$ — لا يوجد حل
18) $2+\sqrt{3y-5}=10$ — 23
19) $\sqrt{7a-2}=\sqrt{a+3}$ — $\frac{5}{6}$
20) $\sqrt{b-6}+\sqrt{b}=3$ — $\frac{25}{4}$

21) **فيزياء:** تصف الصيغة $t=\frac{1}{4}\sqrt{d-h}$ الزمن t بالثواني واللازم لوصول جسم إلى الارتفاع h عن سطح الأرض عند سقوطه من ارتفاع d متر عن سطح الأرض، إذا سقطت مفاتيح بدر من أعلى العجلة الدوارة في مدينة الألعاب على ارتفاع 65 m، فما ارتفاع المفاتيح عن سطح الأرض بالأمتار بعد مرور ثانيتين؟ 1 m

مثال 2 الصفحتان 49 , 50

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

22) $(5n-6)^{\frac{1}{3}}+3=4$ — $\frac{7}{5}$
23) $(6q+1)^{\frac{1}{4}}+2=5$ — $\frac{40}{3}$
24) $(4z-1)^{\frac{1}{5}}-1=2$ — 61
25) $3(x+5)^{\frac{1}{3}}-6=0$ — 3
26) $\sqrt[3]{4n-8}-4=0$ — 18
27) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}}=1$ — $\frac{49}{2}$

مثال 3 صفحة 50

28) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة $\sqrt[4]{y+2}+9=14$ ؟ D

A 23 B 53 C 123 D 623

29) **بندول:** تمثل الصيغة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ الزمن الدوري للبندول، حيث L طول البندول (ft). احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 sec لإتمام دورته. 1.82 ft تقريبًا

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 14-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

تجنب الأخطاء تأكد أن الطلبة يأخذون بعين الاعتبار القيود على قيم المتغيرات في المعادلة الجذرية بحيث تكون الحلول أعدادًا حقيقية.

إرشادات للمعلم الجديد

في التمرين 27 ذكّر الطلبة بعدم ضرب العدد $\frac{1}{7}$ في المقدار $14a$، وذلك لأن المقدار $14a$ مرفوع للأس $\frac{1}{3}$، وذكّرهم بأن ترتيب العمليات يستلزم إجراء عمليات الأسس قبل إجراء عمليات الضرب.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	15-28، 32، 34-37، 39-48
ضمن ضمن المتوسط	15-27 فردي، 29-32، 34-37، 39-48
فوق فوق المتوسط	29-48

إجابة:

5) $\sqrt[3]{x-2}=3$ — المعادلة الأصلية

$(\sqrt[3]{x-2})^3=3^3$ — برفع كل طرف للقوة الثالثة

$x-2=27$ — بالتبسيط

$x=29$ — بجمع 2 لكلا الطرفين

4 التقويم

بطاقة خروج اعمل خمس معادلات جذرية مختلفة بعدة نسخ. وأعط كل طالب معادلة لحلها. واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة لمفاهيم الدرس **1-7** بإعطائهم اختبار قصير **4** من مصادر الفصل **1**.

إجابات:

31) إذا أمكن الربط بين ارتفاع قفزة الشخص والزمن الذي يمضيه في الهواء بمعادلة جذرية، فإنه يمكن إيجاد ذلك الزمن من خلال حل تلك المعادلة.

34) غير صحيحة أبدًا ؛

$$\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x} = x$$

$$\frac{x^2}{-x} = x$$

$$x^2 = (x)(-x)$$

$$x^2 \neq -x^2$$

37a) إجابة ممكنة: $y = 6x^{\frac{2}{3}} - 5$

37b) إجابة ممكنة: $4y = x^{\frac{4}{5}} - 9$

37c) إجابة ممكنة: $10x^{\frac{8}{7}} - 2 = -1$

30) أسماك: يمكن تقريب العلاقة بين طول سمكة ما وكتلتها بالمعادلة $L = 0.46\sqrt[3]{M}$، حيث L الطول (m)، M الكتلة (kg). حُلّ هذه المعادلة بالنسبة للمتغير M. $M = \left(\frac{L}{0.46}\right)^3$

31) زمن التحليق: ارجع إلى الفقرة في بداية هذا الدرس، وصف كيف يرتبط ارتفاع القفزة بزمن التحليق. واكتب توضيحًا مفصّلًا لكيفية تحديد ارتفاع قفزة زمن تحليقها 0.98 sec . **انظر الهامش**

مسائل مهارات التفكير العليا

32) أيُّها لا ينتمي؟ أي معادلة مما يأتي ليس لها حل حقيقي؟ $\sqrt{x+2} - 7 = -10$

$\sqrt{x-1} + 3 = 4$ | $\sqrt{x+1} + 3 = 4$

$\sqrt{x-2} + 7 = 10$ | $\sqrt{x+2} - 7 = -10$

33) تحدٍّ: قالت عائشة إن بإمكانها الحكم بعدم وجود حل حقيقي للمعادلة $(x+5)^{\frac{1}{4}} = -4$ دون حلها. هل ما تقوله صحيح؟ فسر إجابتك.

33) نعم؛ بما أن $\sqrt[4]{x+5} \geq 0$، فإن الطرف الأيسر للمعادلة غير سالب. لذا فإن الطرف الأيسر للمعادلة لن يساوي -4. فالمعادلة ليس لها حل حقيقي.

34) تبرير: حدِّد إذا كانت المعادلة $\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x} = x$، صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا، وذلك إذا كان x عددًا حقيقيًّا. فسر إجابتك. **انظر الهامش**

35) مسألة مفتوحة: اختر عددًا كليًّا، واعمل بشكل عكسي، لكتابة معادلتين جذريتين يكون حلهما ذلك العدد الكلي. بحيث تكون إحداهما معادلة جذر تربيعي، والأخرى معادلة جذر تكعيبي. وقد تحتاج إلى القيام بمحاولات عدة؛ كي تجد العدد.

35) اجابة ممكنة باستعمال العدد 6

$\sqrt{x-2} = 2$

$(x+21)^{\frac{1}{3}} = 3$

36) اكتب: وضِّح العلاقة بين دليل جذر المتغير في المعادلة الجذرية والأس الذي ترفع طرفي المعادلة له عند حلها. **كل منهما مقلوب الآخر**

37) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة يمكن حلها برفع كلا الطرفين للأس المعطى: **انظر الهامش**

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{7}{8}$

38) تحدٍّ: حُلّ المعادلة $7^{3x-1} = 49^{x+1}$ بالنسبة للمتغير x. (إرشاد: $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$). **3**

تدريب على اختبار معياري

39) إذا كان x عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن قيمة $\frac{x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ يساوي: **B**

A $x^{\frac{3}{3}}$ B $\sqrt[3]{x^5}$ C $x^{\frac{3}{2}}$ D $\sqrt[5]{x^3}$

40) إذا كان $\sqrt{x+5} + 1 = 4$ ، فما قيمة x ؟ **F**

F 4 G 11 H 10 J 20

مراجعة تراكمية

احسب قيمة كل مما يأتي: (الدرس 6-1)

41) $27^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{9}$ **42)** $9^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{5}{3}}$ 81 **43)** $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{9}{4}$

44) هندسة: التعبيران $4x^2y^2, 8x^2y^2$ يمثلان طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية، أوجد تعبيرًا ثالثًا يمثل طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس، ثم بسّطه. (الدرس 5-1) $4\sqrt{5}x^2y^2$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي: (الدرس 2-1)

45) $y = 3x - 4$ **46)** $y = -2x - 3$ **47)** $y = x^2$ $y = \pm\sqrt{x}$ $y = \frac{-x-3}{2}$ **48)** $y = (2x+3)^2$ $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع قدم المسألة الآتية للطلبة: يعبر عن نصف قطر مدار قمر صناعي r بالصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^4}}$، حيث G ثابت الجذب الكوني ، M كتلة الجسم المركزي، t الزمن اللازم لإكمال القمر دورة واحدة في مداره. حل هذه الصيغة بالنسبة للمتغير t. $t = 2\pi^2 r\sqrt{\frac{r}{GM}}$

حل المعادلات الجذرية
Solving Radical Equations

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل المعادلات الجذرية. ومن طرائق الحل إعادة كتابة المعادلة، بحيث يكون أحد طرفيها صفرًا، ثم استعمال ميزة **الصفر** في الآلة الحاسبة.

مثال 1 المعادلة الجذرية

حُلّ المعادلة $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=3$.

خطوة 1 أعد كتابة المعادلة.

- اطرح 3 من طرفي المعادلة لتحصل على $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}-3=0$.
- أدخل الدالة $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+2}-3$ في Y= list، بالضغط على المفاتيح:

Y= 2nd $[x^2]$ X,T,θ,n) + 2nd

$[x^2]$ X,T,θ,n + 2) − 3 ENTER

خطوة 2 استعمل جدولًا.

- يمكنك استعمال **جدول** الدالة لتعيين الفترات التي يقع فيها الحل أو الحلول. أولًا أدخل القيمة الابتدائية والفترة للجدول بالضغط على المفاتيح.

2nd [TBLSET] 0 ENTER 1 ENTER

خطوة 3 قدّر الحل.

- أكمل الجدول وقدّر الحل (أو الحلول)، بالضغط على المفاتيح:

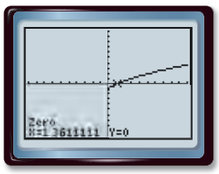
2nd [TABLE]

بما أن إشارة الدالة تتغير من سالب إلى موجب بين $x=2$, $x=1$ إذن هناك حل بين العددين 2 , 1.

خطوة 4 استعمل ميزة **الصفر** في الآلة الحاسبة البيانية.

- مثّل الدالة، ثم اختر **ZERO** من قائمة **CALC**، بالضغط على المفاتيح.

2nd [CALC] 2



ضع المؤشر على نقطة تكون عندها $y<0$، ثم اضغط ENTER لـ **LEFT BOUND**، ثم ضع المؤشر على نقطة تكون عندها $y>0$، ثم اضغط ENTER لـ **Right Bound**. تستطيع استعمال النقطة نفسها لتخمين الحل باختيار **GUESS** لِـ **RIGHT BOUND**.

الحل هو 1.36 تقريبًا، وهو قريب من القيمة التقديرية الناتجة عن **استعمال الجدول**.

تمارين:

استعمل طريقة بيانية مناسبة لحل كل معادلة مما يأتي:

1) $\sqrt{x+4}=3$ 5
2) $\sqrt{3x-5}=1$ 2
3) $\sqrt{x+5}=\sqrt{3x+4}$ 0.5
4) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=4$ 3.89 تقريبًا
5) $\sqrt{3x-7}=\sqrt{2x-2}-1$ 2.52 تقريبًا
6) $\sqrt{x+8}-1=\sqrt{x+2}$ 4.25

1 التركيز

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لحل المعادلات الجذرية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

وضح للطلبة المعلومات الآتية المتعلقة بالآلات الحاسبة البيانية التي يستعملونها.

- بعض الآلات الحاسبة البيانية تدرج القوس الأيسر على نحو آلي بعد كل رمز جذر، فعند إدخال الدوال في قائمة Y= ، يكون من الضروري إدراج القوس الأيمن حيثما يلزم ذلك؛ لضمان الحصول على التمثيل البياني والنتائج العددية الصحيحين.
- ولعرض الجدول في الخطوة 2، يجب أن يتحقق الطلبة من أنه تم اختيار البديل *Auto* على كل من السطرين الآخرين من شاشة *TABLE SETUP*.
- لتحديد حلول فعلية للكسور العشرية الدورية، كما في الصفر التقريبي المعروض على شاشة الآلة في الخطوة 4، عُد إلى الشاشة الرئيسة بعد هذه الخطوة مباشرة واستعمل المفاتيح X,T,θ,n ENTER 1 MATH ستعرض الآلة الحاسبة البيانية كسرًا يمثل الحل الفعلي، وهو $\frac{49}{36}$. ويمكن استعمال الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من أن هذا هو الحل الفعلي للمعادلة فعلاً.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلبة في مجموعات ثنائية ذوي القدرات المتفاوتة، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط الآتي وحل التمارين **1-3** .

نشاط

- اطلب إلى الطلبة حل المعادلة الجذرية مرة أخرى، باعتبار أن كل طرف دالة مستقلة. والفت انتباههم إلى أن الطرف الأيمن يمكن تمثيله بيانيًّا بسهولة مثل الدالة $y=3$.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين **4-6**.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين **5** ؛ لتقويم مدى استيعاب الطلبة كيفية حل معادلة جذرية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل:

- كيف تعرف عند تفحص جدول القيم للمعادلة في النشاط السابق، إن كان الحل يقع بين قيمتين من قيم x تتغير عندهما إشارة الدالة الممثلة بيانيًّا؟

إجابة ممكنة: بما أنه تم حل المعادلة الأصلية بمساواة أحد الطرفين بالصفر، فإن الدالة التي تمثل الطرف الآخر لها قيمة تساوي صفرًا عندما y تساوي صفرًا. وذلك عندما تقع قيمةٌ للمتغير x بين قيمتين أخريين للمتغير نفسه، على أن تكون قيمتا الدالة المناظرتين لهاتين القيمتين لهما إشارتان مختلفتان (لأن الصفر يقع بين الأعداد الموجبة والسالبة).

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 7–1، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل.

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

العمليات على الدوال (الدرس 1-1)

العملية	القاعدة
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	الجمع
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	الطرح
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$	الضرب
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$	القسمة
$[f\circ g](x)=f[g(x)]$	التركيب

العلاقات والدوال العكسية ودوال الجذر التربيعي (الدرسان 1-2, 1-3)

- اعكس إحداثيات الأزواج المرتبة لتجد معكوس العلاقة.
- تكون الدالتان إحداهما معكوس للأخرى إذا وفقط إذا كان كل من تركيبيهما يساوي الدالة المحايدة.

الجذر النوني (الدرس 1-4)

الجذور الحقيقية النونية للعدد b , $-\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{b}$

n	إذا كان $b>0$ فإن $\sqrt[n]{b}$	إذا كان $b<0$ فإن $\sqrt[n]{b}$	إذا كان $b=0$ فإن $\sqrt[n]{b}$
عدد زوجي	له جذر وحيد موجب وجذر وحيد سالب	ليس له جذور حقيقية	له جذر حقيقي وحيد وهو 0
عدد فردي	له جذر وحيد موجب وليس له جذور سالبة	ليس له جذور موجبة وله جذر وحيد سالب	

التعابير الجذرية (الدرسان 1-5, 1-6)

لأي عددين حقيقيين a, b ولأي أعداد صحيحة n, x, y حيث $n>1, y>1$ يُعد كل مما يأتي صحيحًا : $b\neq 0$

- خاصية الضرب: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
- خاصية القسمة: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- الأسس النسبية: $b^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{b^x}=\left(\sqrt[y]{b}\right)^x, b\geq 0$

مطويتك منظم افكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

تركيب دالتين ص 12
العلاقة العكسية ص 17
الدالة العكسية ص 17
دالة الجذر التربيعي ص 23
الدالة الجذرية ص 23
الجذر النوني ص 29
رمز الجذر ص 29
الدليل ص 29
ما تحت الجذر ص 29
الجذر الرئيس ص 29
إنطاق المقام ص 37
الجذور المتشابهة ص 38
المرافق ص 39
المعادلة الجذرية ص 48
الحل المرفوض ص 48

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) عند تركيب دالتين تستعمل نواتج الدالة الأولى لحساب نواتج الدالة الأخرى.

2) عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي فإن الجذر غير السالب يُسمّى الجذر الرئيس.

3) للتخلص من الجذور في المقام فإنك تستعمل عملية تُسمّى إنطاق المقام.

4) المعادلات التي تتضمن متغيرات فيما تحت الجذر تُسمّى معادلات جذرية.

5) عند حل معادلات جذرية، تحصل أحيانًا على عدد لا يحقق المعادلة الأصلية. ويُسمّى مثل هذا العدد الحل المرفوض.

6) دالة الجذر التربيعي نوع من أنواع الدوال الجذرية.

7) تمثل العلاقة علاقة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا احتوت إحداهما على الزوج المرتب (a, b) ، واحتوت الأخرى الزوج المرتب (b, a).

مطويتك منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلةً لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة. وبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

1-1 العمليات على الدوال (الصفحات 16–10)

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ لكل مما يأتي: للتمارين 15–10 انظر الهامش

8) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x - 5$

9) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 7$

10) $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = -2x + 1$

11) $f(x) = 4x$, $g(x) = 5x - 1$

12) $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 1$

13) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x + 1$

14) **قياسات:** تستعمل الصيغة $y = 3f$ لتحويل اليادرات y إلى أقدام f، كذلك تستعمل الصيغة $f = \frac{n}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدام f. اكتب تركيب الدالتين الذي يحوّل اليادرات إلى بوصات. $n = 36y$

مثال 1

إذا كان $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x^2 + 3$، فأوجد $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

بالتعويض عن $f(x)$ بالمقدار $x^2 + 3$: $g[f(x)] = 3(x^2 + 3) - 2$

بالضرب: $= 3x^2 + 9 - 2$

بالتبسيط: $= 3x^2 + 7$

بالتعويض عن $g(x)$ بالمقدار $3x - 2$: $f[g(x)] = (3x - 2)^2 + 3$

بالضرب: $= 9x^2 - 12x + 4 + 3$

بالتبسيط: $= 9x^2 - 12x + 7$

1-2 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات 21–17)

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي: للتمارين 22–17 انظر الهامش

15) $f(x) = 5x - 6$

16) $f(x) = -3x - 5$

17) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

18) $f(x) = \frac{4x + 1}{5}$

19) $f(x) = x^2$

20) $f(x) = (2x + 1)^2$

21) **تسوق:** ترغب سوسن في شراء جهاز للتمارين الرياضية، ولديها كوبون خصم 6% من ثمن الجهاز. ويضيف البائع مبلغ BD 5 بدل التوصيل والتركيب، إذا دفعت سوسن مبلغ BD 132 للبائع، فما الثمن الأصلي للجهاز إلى أقرب دينار؟ BD 135

22) **ثقافة مالية:** قام عبدالله بالنشاطات المالية الآتية خلال الشهر الماضي: أودع مبلغين قيمة كل منهما BD 450، ومبلغًا آخر يعادل مثلي رصيده الأصلي، ثم سحب مبلغ BD 350 خمس مرات من رصيده. إذا كان رصيده الآن BD 1890، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة، وكم كان رصيده في بداية الشهر؟

$1890 = x + 2(450) + 2x - 5(350)$ ، BD 913.33 تقريبًا

مثال 2

أوجد معكوس الدالة $f(x) = -2x + 7$.

ضع المتغير y بدلًا من رمز الدالة $f(x)$: $y = -2x + 7$، ثم قم بالتبديل بين المتغيرين x , y، وحل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

بالتبديل بين المتغيرين: $x = -2y + 7$

بالحل بالنسبة للمتغير y: $2y = -x + 7$

بقسمة الطرفين على 2: $y = \frac{-x + 7}{2}$

ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y: $f^{-1}(x) = \frac{-x + 7}{2}$

مثال 3

اشترى حسن أجهزة كهربائية عددها مثلي العدد الموجود في المستودع، ثم حصل على صفقتين في كل منهما 200 جهاز، وعقد 6 صفقات بيع شملت كل منها 150 جهازًا. إذا كان عدد الأجهزة في المستودع الآن 400 جهاز، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة. وكم كان عدد الأجهزة في المستودع؟

افترض أن عدد الأجهزة في المستودع x ، فيكون عدد الأجهزة التي اشتراها $2x = 400$ ، والتي باعها $6\ (150) = 900$.

$x + 2x + 400 - 900 = 400$

وبحل المعادلة يكون $x = 300$ عدد الأجهزة التي كانت في المستودع.

مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

بناء الاختبارات
التقـــويم

إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل من (ص 58-54) يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات؛ لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا، أو على الجزء من الفصل الذي ما زال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

إجابات:

8) $[f \circ g](x) = 8x - 9$
$[g \circ f](x) = 8x - 1$

9) $[f \circ g](x) = x^2 - 14x + 50$
$[g \circ f](x) = x^2 - 6$

10) $[f \circ g](x) = 4x^2 - 4x + 5$
$[g \circ f](x) = -2x^2 - 7$

11) $[f \circ g](x) = 20x - 4$
$[g \circ f](x) = 20x - 1$

12) $[f \circ g](x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$[g \circ f](x) = x^3 - 1$

13) $[f \circ g](x) = x^2 + 4x$
$[g \circ f](x) = x^2 + 2x - 2$

15) $f^{-1}(x) = \frac{x + 6}{5}$

16) $f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{-3}$

17) $f^{-1}(x) = 2x - 6$

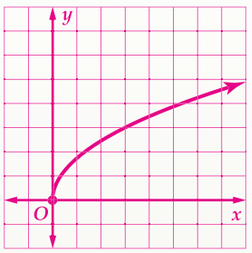
18) $f^{-1}(x) = \frac{5x - 1}{4}$

19) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

20) $f^{-1}(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{x}}{2}$

إجابات:

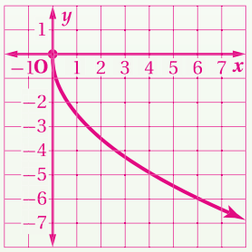
(23)



المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

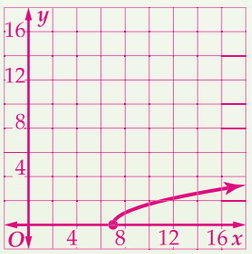
(24)



المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$

المدى = $\{y \mid y \leq 0\}$

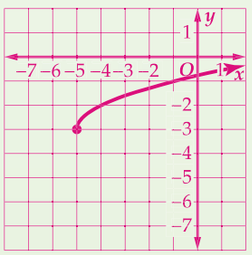
(25)



المجال = $\{x \mid x \geq 7\}$

المدى = $\{y \mid y \geq 0\}$

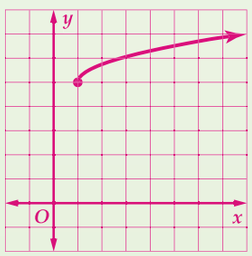
(26)



المجال = $\{x \mid x \geq -5\}$

المدى = $\{y \mid y \geq -3\}$

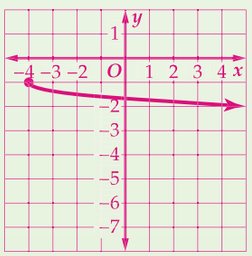
(27)



المجال = $\{x \mid x \geq 1\}$

المدى = $\{y \mid y \geq 5\}$

(28)



المجال = $\{x \mid x \geq -4\}$

المدى = $\{y \mid y \leq -1\}$

1-3 دوال الجذر التربيعي (الصفحات 23–28)

مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

(23) $f(x) = \sqrt{3x}$ للتمارين 28 – 23 انظر الهامش

(24) $f(x) = -\sqrt{6x}$

(25) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

(26) $f(x) = \sqrt{x + 5} - 3$

(27) $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x - 1} + 5$

(28) $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x + 4} - 1$

(29) **هندسة:** يُعبر عن مساحة سطح الدائرة بالقانون $A = \pi r^2$. ما نصف قطر دائرة مساحة سطحها $300\,\text{cm}^2$؟ **9.8 cm تقريبًا**

مثال 4

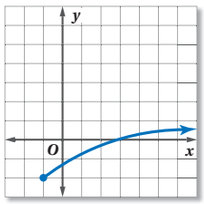
مثل بيانيًّا الدالة $f(x) = \sqrt{x + 1} - 2$، وحدّد مجالها ومداها:

تحديد المجال:

$x + 1 \geq 0$ ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر

$x \geq -1$ بطرح 1 من الطرفين

اعمل جدولًا لبعض قيم المتغير x، حيث $x \geq -1$، ومثّل الدالة بيانيًّا.



x	$f(x)$
−1	−2
0	−1
1	−0.59
2	−0.27
3	0
4	0.24
5	0.45

المجال هو $\{x \mid x \geq -1\}$، والمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq -2\}$.

1-4 الجذر النوني (الصفحات 29–33)

بسّط كلاًّ مما يأتي:

(30) $\pm\sqrt{121}$ ± 11

(31) $\sqrt[3]{-125}$ -5

(32) $\sqrt{(-6)^2}$ 6

(33) $\sqrt{-(x + 3)^4}$ $\pm i(x + 3)^2$

(34) $\sqrt[3]{27(x + 3)^3}$ $3(x + 3)$

(35) $\sqrt[6]{(x^2 + 2)^{18}}$ $(x^2 + 2)^3$

(36) $\sqrt[4]{a^8 b^{12}}$ $a^2|b^3|$

(37) $\sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$ $3x^2y^5$

(38) **فيزياء:** تستعمل العلاقة $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ لحساب سرعة جسم، حيث v السرعة بالأمتار لكل ثانية، m كتلة الجسم بالجرام، K الطاقة الحركية بالجول. أوجد السرعة بالأمتار لكل ثانية لجسم كتلته 17 g، وطاقته الحركية 850 J. **10 m/sec**

مثال 5

بسّط التعبير الجذري $\sqrt{64x^6}$

$64x^6 = (8x^3)^2$

$\sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2}$ بالتبسيط

$= 8|x^3|$

استعمل رمز القيمة المطلقة لتجنب القيم السالبة للمتغير x.

مثال 6

بسّط التعبير الجذري $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}}$

$4096x^{12}y^{24} = (4x^2y^4)^6$

$\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}} = \sqrt[6]{(4x^2y^4)^6}$ بالتبسيط

$= 4x^2y^4$

1-5 العمليات على التعابير الجذرية (الصفحات 41–36)

بسّط كل تعبير جذري مما يأتي:

(39) $3\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{54}$

(40) $12ab^2\sqrt{ab}\ \sqrt{144a^3b^5}$

(41) $12|x|y\sqrt{42}\ 4\sqrt{6y}\cdot 3\sqrt{7x^2y}$

(42) $80\sqrt{2}\ 6\sqrt{72}+7\sqrt{98}-\sqrt{50}$

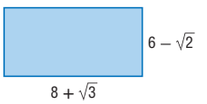
(43) $74+18\sqrt{10}\ (6\sqrt{5}-2\sqrt{2})(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})$

(44) $\dfrac{m^2\sqrt{6mp}}{p^6}\ \dfrac{\sqrt{6m^5}}{\sqrt{p^{11}}}$

(45) $\dfrac{15-3\sqrt{2}}{23}\ \dfrac{3}{5+\sqrt{2}}$

(46) $-\sqrt{15}-3\sqrt{2}\ \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$

(47) **هندسة:** احسب محيط المستطيل في الشكل أدناه ومساحة سطحه.



المحيط $=(28+2\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ وحدة طول

المساحة $=(48+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}-\sqrt{6})$ وحدة مربعة

مثال 7

بسّط التعبير $2\sqrt[3]{18a^2b}\cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$2\sqrt[3]{18a^2b}\cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$=(2\cdot 3)\sqrt[3]{18a^2b\cdot 12ab^5}$ خاصية ضرب الجذور

$=6\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}$ بالتحليل إلى العوامل

$=6\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$=6\cdot 2\cdot 3\cdot a\cdot b^2$ بإيجاد الجذر التكعيبي

$=36ab^2$ بالتبسيط

مثال 8

بسّط التعبير $\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}}$

$\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}}=\dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^5}}$ خاصية قسمة الجذور

$=\dfrac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^2)^2\cdot y}}$ بتحليل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$=\dfrac{x^2}{y^2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ بإنطاق المقام

$=\dfrac{x^2\sqrt{y}}{y^3}$ $\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=y$

الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة 57

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حل المسألة فذكّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع من مصادر الفصل 1، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 1.

الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

1-6 الأسس النسبية (الصفحات 47–42)

بسّط كل تعبير مما يأتي:

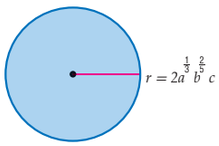
48) $x^{\frac{7}{6}}$ $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ 49) $m^{-\frac{3}{4}}$ $\frac{m^{\frac{1}{4}}}{m}$ 50) $\frac{d^{\frac{5}{12}}}{d}$ $\frac{d^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{3}{4}}}$

بسّط كل تعبير مما يأتي:

51) $\frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}$ $\frac{y^{\frac{3}{4}}}{y}$ 52) 3 $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ 53) $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$ $\frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

54) **هندسة:** ما مساحة سطح الدائرة في الشكل أدناه؟

$4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}c^2\pi$ وحدة مربعة



مثال 9

بسّط التعبير $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}$

خاصية ضرب القوى: $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}$

بجمع الأسس: $= a^{\frac{13}{15}}$

مثال 10

بسّط التعبير $\frac{2a}{\sqrt[3]{b}}$

بكتابة التعبير على الصورة الأسية: $\frac{2a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}$

بإنطاق المقام: $= \frac{2a}{b^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$

بكتابة التعبير على الصورة الجذرية: $= \frac{2ab^{\frac{2}{3}}}{b} = \frac{2a\sqrt[3]{b^2}}{b}$

1-7 حل المعادلات الجذرية (الصفحات 52–48)

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

55) $\sqrt{x-3} + 5 = 15$ 103 56) $-\sqrt{x-11} = 3 - \sqrt{x}$ 60) لا يوجد حلّ

57) $4 + \sqrt{3x-1} = 8$ 2 58) $\sqrt{m+3} = \sqrt{2m+1}$ $\frac{17}{3}$

59) $\sqrt{2x+3} = 3$ 3 60) $(x+1)^{\frac{1}{4}} = -3$

61) $a^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$ 64 62) $3(3x-1)^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$ 3

63) **فيزياء:** تمثل الصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ الزمن الدوري للبندول، حيث T الزمن (sec)، و L طول البندول (ft). أوجد طول البندول الذي يستغرق 2.75 sec لإتمام دورته. 6.13 ft تقريبًا

مثال 11

حُلّ المعادلة الجذرية $\sqrt{2x+9} - 2 = 5$

المعادلة الأصلية	$\sqrt{2x+9} - 2 = 5$
بإضافة العدد 2 للطرفين	$\sqrt{2x+9} = 7$
بتربيع الطرفين	$(\sqrt{2x+9})^2 = 7^2$
بإيجاد مربع الطرفين	$2x + 9 = 49$
بطرح 9 من الطرفين	$2x = 40$
بقسمة الطرفين على 2	$x = 20$

58 الفصل 1 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

1 اختبار الفصل

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى، مجيبًا بـ "نعم" أو "لا" مع توضيح السبب.

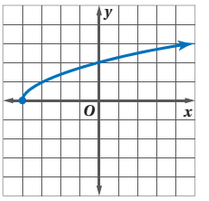
1) $f(x)=3x+8, g(x)=\frac{x-8}{3}$ نعم؛ لأن $[fog](x)=[gof](x)=x$

2) $f(x)=\frac{1}{3}x+5, g(x)=3x-15$ نعم؛ لأن $[fog](x)=[gof](x)=x$

3) $f(x)=x+7, g(x)=x-7$ نعم؛ لأن $[fog](x)=[gof](x)=x$

4) $f(x)=\frac{x-2}{3}, g(x)=3x-2$ لا؛ لأن $[gof](x)\neq x$

5) **اختيار من متعدد:** ما دالة الجذر التربيعي التي يمثلها الشكل أدناه؟ A



A $y=\sqrt{x+4}$ B $y=\sqrt{x-4}$

C $y=\sqrt{x}+4$ D $y=\sqrt{x}-4$

إذا كان $f(x)=3x+2, g(x)=x^2-2x+1$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

6) $(f+g)(x)$ $(f+g)(x)=x^2+x+3$

7) $(f\cdot g)(x)$ $(f\cdot g)(x)=3x^3-4x^2-x+2$

8) $(f-g)(x)$ $(f-g)(x)=-x^2+5x+1$

9) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3x+2}{x^2-2x+1}, x\neq 1$

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

10) $\sqrt{a+12}=\sqrt{5a-4}$ 4

11) $\sqrt{3x}=\sqrt{x-2}$ لا يوجد حل

12) $4(\sqrt[4]{3x+1})-8=0$ 5

13) $\sqrt[3]{5m+6}+15=21$ 42

14) $\sqrt{3x+21}=\sqrt{5x+27}$ −3

15) $1+\sqrt{x+11}=\sqrt{2x+15}$ 5

16) $\sqrt{x-5}=\sqrt{2x-4}$ لا يوجد حل

17) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x}=3$ لا يوجد حل

18) **اختيار من متعدد:** ما قيمة التعبير $125^{-\frac{1}{3}}$؟ H

F -5 G $-\frac{1}{5}$

H $\frac{1}{5}$ J 5

بسّط كلًّا مما يأتي:

20) $17\sqrt{2}-25$ 19) $(2+\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})$ −3 $(3-2\sqrt{2})(-7+\sqrt{2})$

21) $\frac{12}{2-\sqrt{3}}$ $12\sqrt{3}+24$ 22) $\frac{m^{\frac{1}{2}}-1}{2m^{\frac{1}{2}}+1}$ $\frac{2m-3m^{\frac{1}{2}}+1}{4m-1}$

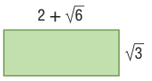
23) $4\sqrt{3}-8\sqrt{48}$ $-28\sqrt{3}$ 24) $5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{6}}$ 5^2 أو 25

25) $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$ $3ab^4\sqrt{a}$ 26) $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$ $2x^3y^2$

27) $w^{-\frac{4}{5}}$ $\frac{w^{\frac{1}{5}}}{w}$ 28) $\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{6}}}$ $r^{\frac{1}{2}}$

29) $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}}$ $\frac{a^{\frac{5}{12}}}{6a}$ 30) $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}+2}$ $\frac{y^2-2y^{\frac{3}{2}}}{y-4}$

31) **اختيار من متعدد:** ما مساحة سطح المستطيل في الشكل أدناه؟ A



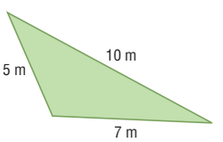
A $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ وحدة مربعة

B $4+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ وحدة مربعة

C $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ وحدة مربعة

D $2\sqrt{3}+3$ وحدة مربعة

32) **هندسة:** مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c يمكن إيجادها من خلال القانون $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. اكتب مساحة سطح المثلث في الشكل أدناه على الصورة الجذرية. $2\sqrt{66}\ \text{m}^2$



بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 1 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكّل تحديًا للطلبة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-1، 1-2، 1-3، 1-4، 1-5، 1-6، 1-7	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية الحل عكسيًّا؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- هل فقدت يومًا شيئًا ما، وعُدت بخطواتك بحثًا عن ذلك الشيء؟ تختلف إجابات الطلبة.
- هل عُدت بخطواتك في ترتيب عكسي أم عشوائي؟ تختلف إجابات الطلبة.
- ماعكس عملية الجمع؟ وما عكس عملية الضرب؟ الطرح، القسمة.

الحل عكسيًّا

تعطي بعض مسائل الرياضيات معلومات عن النتيجة النهائية، وتتطلب استنتاج بعض الأمور التي حدثت من قبل. ويمكنك في مثل هذه المسائل الحل باستعمال استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجية الحل عكسيًّا:

خطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المعلومات المعطاة؟
- ما المطلوب إيجاده؟
- هل توجد معطيات ترتبط مع النتيجة النهائية؟
- هل المطلوب هو إحدى القيم غير المعطاة والتي لم تذكر في نص المسألة؟
- ما العمليات المستعملة في المسألة؟

خطوة 2

نمذج المسألة بما يناسبها: معادلة أو متباينة أو تمثيلًا بيانيًّا، ثم اعمل عكسيًّا لحل المسألة.

- مثّل تتابع الأحداث بمخطط حسب نص المسألة إذا تطلب الأمر ذلك.
- استعمل العمليات العكسية للتخلص من أي إجراءات في أثناء الحل عكسيًّا لتصل إلى الإجابة.

خطوة 3

تحقق من صحة الحل مبتدئًا بإجابتك التي حصلت عليها، وتأكد أنك ستصل إلى النتيجة نفسها المعطاة في نص المسألة؟

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلها.

اشترى عبدالرحمن سيارة مستعملة من معرض لبيع السيارات المستعملة، فدفع BD3552. وقد تضمَّن ذلك المبلغ رسوم نقل الملكية وهي BD16، وعمولة المعرض وهي 4% من ثمن السيارة. ما الثمن الأصلي للسيارة؟ بيّن خطوات الحل.

اقرأ المسألة بعناية. أنت تعلم المبلغ الذي دفعه عبد الرحمن بما فيه رسوم نقل الملكية وعمولة المعرض .

والمطلوب هو إيجاد ثمن السيارة قبل إضافة رسوم نقل الملكية وعمولة المعرض.

افرض أن x تمثل الثمن الأصلي للسيارة. اكتب معادلة، واستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا لحلها.

التعبير اللفظي	ثمن السيارة مضافًا إليه رسوم نقل الملكية وعمولة المعرض يساوي المبلغ الذي دفعه عبدالرحمن.
المتغير	x = الثمن الأصلي للسيارة.
المعادلة	$1.04x + 16 = 3552$

ينتج عن استعمال استراتيجية الحل عكسيًّا معادلة بسيطة. استعمل العمليات العكسية؛ لإيجاد قيمة x.

$$1.04x + 16 = 3552$$
$$1.04x = 3536$$
$$x = 3400$$

تحقق من صحة حلك بالبدء في الإجابة التي حصلت عليها؛ لتتأكد أنك ستحصل على القيمة نفسها المعطاة في نص المسألة.

بإيجاد عمولة المعرض	$3400\ (1.04) = 3536$
بإضافة رسوم نقل الملكية	$3536 + 16 = 3552$
القيمة نفسها المعطاة	$3552 = 3552$

لذلك، فإن الثمن الأصلي للسيارة هو BD3400.

تمارين ومسائل

اقرأ المسائل الآتية جيدًا، وحدد المطلوب في كل منها، ثم استعمل معطياتها لحلها:

1) تستعمل المعادلة $d = \frac{v^2}{30f}$ لإيجاد طول الأثر الذي تتركه عجلات سيارة على الطريق عند الوقوف المفاجئ. حيث d طول الأثر على الطريق بالأقدام، v سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك وهو يصف حالة سطح الطريق. إذا كان طول أثر عجلات سيارة على الطريق يساوي 120 ft.

a) اكتب معادلة لإيجاد سرعة السيارة قبل الوقوف المفاجئ $s = \sqrt{30df}$ بدلالة طول الأثر على الطريق d، ومعامل الاحتكاك f.

b) إذا كان معامل الاحتكاك للطريق يساوي 0.75، فكم كانت السرعة التقريبية للسيارة قبل الوقوف؟ **52 mi/h تقريبًا**

c) كم كانت سرعة السيارة قبل الوقوف إذا كان معامل الاحتكاك للطريق 1.1؟ **63 mi/h تقريبًا**

2) قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 800ft/sec. إذا كان ارتفاع الجسم h بالأقدام بعد t ثانية يُعبر عنه بالمعادلة: $h = -16t^2 + 800t$، فبعد كم ثانية يصل الجسم إلى ارتفاع 10000ft؟ **B**

A 10 sec

B 25 sec

C 100 sec

D 625 sec

3) يقوم علي بعمل نموذج لسيارة، مستعملًا مقياس رسم، فوجد أن ارتفاع نموذج السيارة يعادل $\frac{1}{32}$ من ارتفاع السيارة الحقيقي x. أي المعادلات الآتية تمثّل هذه العلاقة؟ **H**

F $y = x - \frac{1}{32}$

G $y = -\frac{1}{32}x$

H $y = \frac{1}{32}x$

J $y = x + \frac{1}{32}$

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

حصل خالد على بطاقة خصم من أحد المحلات بقيمة BD10 واستعملها لدفع جزء من ثمن جهاز اشتراه من المحل وبعد إضافة بدل التوصيل والتركيب الذي تبلغ نسبته 6.5% من ثمن الجهاز وتبرعه بمبلغ BD0.35، كان مجموع ما دفعه خالد زيادة على قيمة بطاقة الخصم BD86.2 . فما ثمن الجهاز الأصلي؟ **C**

A BD95.85

B BD96.2

C BD90

D BD106.2

3 التقويم

استعمل التمارين **1–3**؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يقدم محل خصمًا نسبته 20% على جميع لوازم التخييم. ويملك محمّد قسيمة خصم إضافية بقيمة BD 5 عند أي عملية شراء من المحل. إذا استعمل محمّد القسيمة بعد الخصم لشراء خيمة، فأي الدوال الآتية يمكن أن تستعمل لإيجاد سعر خيمة سعرها الأصلي d BD؟ **B**

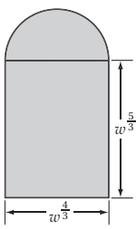
A $P(d) = 0.8 \times (d + 5)$

B $P(d) = (0.8 \times d) - 5$

C $P(d) = 0.2 \times (d - 5)$

D $P(d) = 0.8 \times (d - 5)$

2) ما المعادلة التي يمكن أن تستعمل لتحديد مساحة سطح الشكل المركب أدناه، علمًا بأن الجزء العلوي من الشكل يمثل نصف دائرة؟ **J**



F $A = w^3 + \frac{1}{2}\pi w^{\frac{8}{3}}$

G $A = w^3 + \frac{1}{4}\pi w^{\frac{8}{3}}$

H $A = w^3 + \frac{1}{8}\pi w^{\frac{16}{9}}$

J $A = w^3 + \frac{1}{8}\pi w^{\frac{8}{3}}$

3) ما مساحة سطح الكرة التي طول نصف قطرها يساوي $(2+\sqrt{5})$ cm؟ **D**

A $(8 + 4\sqrt{5})\pi$ cm^2

B $(9 + 4\sqrt{5})\pi$ cm^2

C $(16 + 4\sqrt{5})\pi$ cm^2

D $(36 + 16\sqrt{5})\pi$ cm^2

4) اشترى سلمان سيارة مستعملة، أضيف إلى ثمنها 6.5% من ثمن البيع بدل صيانة دورية، ودفع BD 16 رسوم نقل الملكية. ما ثمن السيارة إذا كان مجموع ما دفعه سلمان BD 6832؟ **H**

F 6414 H 6400

G 6800 J 6816

إرشادات الاختبار

سؤال 4 تعلم المبلغ الكلي الذي دفعه سلمان، والمطلوب هو ثمن السيارة. استعمل استراتيجية الحل عكسيًا.

5) ما أبسط صورة للتعبير الجذري $\sqrt[3]{-27b^6c^{12}}$؟ **B**

A $-3b^3c^6$ C $3b^2c^4$

B $-3b^2c^4$ D $3b^3c^6$

6) ما التعبير الجذري للتعبير الأسي $(a^2)^{\frac{4}{5}}$؟ **H**

F $\sqrt[4]{a^{10}}$

G $\sqrt[4]{a^5}$

H $\sqrt[5]{a^8}$

J $\sqrt[5]{a^2}$

7) ما حل المعادلة $\sqrt[3]{5x} = 10$؟ **C**

A 2

B 20

C 200

D 1000

8) ما معكوس الدالة $f(x) = x - 5$؟ **F**

F $f(x) = x + 5$ H $f(x) = \frac{x}{5}$

G $f(x) = 5x$ J $f(x) = 5 - x$

9) ما أبسط صورة للتعبير الجذري $\sqrt[4]{81x^4y^8}$ بصورة تعبير أسي؟ **A**

A $3\,|x|\,y^2$

B $3\,x\,y^2$

C $3\,|x|\,y^{\frac{1}{2}}$

D $3\,x\,y^{\frac{1}{2}}$

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملاً لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

1) A جمع قيمة القسيمة إلى السعر الأصلي، ثم الضرب في النسبة التي يجب أن تدفع.
B الإجابة الصحيحة.
C طرح قيمة القسيمة من السعر الأصلي، ثم الضرب في نسبة الخصم.
D طرح قيمة القسيمة من السعر الأصلي، ثم الضرب في النسبة التي يجب أن تدفع.

2) F خمّن الإجابة.
G جمع مساحة سطح الدائرة إلى مساحة سطح المستطيل.
H لم يجد القيمة الصحيحة لنصف القطر.
J الإجابة الصحيحة.

3) A لم يربّع طول نصف قطر الكرة.
B استعمَل قانون مساحة سطح الدائرة بدلًا من قانون مساحة سطح الكرة.
C أخطأ في إيجاد مربع طول نصف قطر الكرة.
D الإجابة الصحيحة.

4) F خمن الإجابة.
G لم يحسب ما دفعه بدلًا للصيانة بالشكل الصحيح.
H الإجابة الصحيحة.
J أهمل ما تم دفعه بدلًا للصيانة.

5) A لم يجد الجذر التكعيبي للمتغيرات بصورة صحيحة.
B الإجابة الصحيحة.
C لم يجد الجذر التكعيبي للعدد 27− بصورة صحيحة.
D خمّن الإجابة.

6) F اعتَبر بسط الأس النسبي دليلًا للجذر.
G أهمل أن المتغير a مرفوع للأس 2.
H الإجابة الصحيحة.
J أهمَل بسط الأس النسبي.

7) A أهمل وجود الجذر التكعيبي.
B أخطأ في تكعيب العدد 10.
C الإجابة الصحيحة.
D أهمل معامل x.

8) F الإجابة الصحيحة.
G قام بالضرب بدلاً من الجمع.
H قام بالقسمة بدلاً من الجمع.
J ضرب في العدد 1− بدلاً من تبديل المتغيرات ثم الحل.

9) A الإجابة الصحيحة.
B لم يضع رمز القيمة المطلقة لـ x.
C لم يجد $\sqrt[4]{y^8}$ بشكل صحيح.
D لم يجد $\sqrt[4]{y^8}$ بشكل صحيح، ولم يضع رمز القيمة المطلقة لـ x.

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

10) إذا كان $f(x) = x^2$، $g(x) = x - 5$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a $(f+g)(x)$ $(f+g)(x) = x^2 + x - 5$

b $(f \cdot g)(x)$ $(f \cdot g)(x) = x^3 - 5x^2$

c $(\frac{f}{g})(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-5}, x \neq 5$

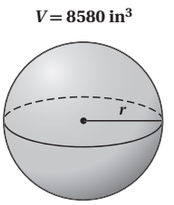
d $[f \circ g](x)$ $[f \circ g](x) = x^2 - 5$

11) حدد ما إذا كان كل زوج من الدوال الآتية يمثل معكوسًا للأخرى أم لا، وبرر إجابتك:

a $f(x) = 4x + 6$ نعم؛ لأن $x = [f \circ g](x) = [g \circ f](x)$
$g(x) = \frac{x-6}{4}$

b $f(x) = x^2 - 9$ لا؛ لأن $[f \circ g](x) = x^2 + 6x$
$g(x) = x + 3$

12) يمكن إيجاد نصف قطر كرة r حجمها V باستعمال الصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



a ما نصف قطر الكرة في الشكل المجاور مقربًا إلى أقرب عُشر؟ 12.7 in

b استعمل الصيغة السابقة لإيجاد الحجم V بدلالة نصف القطر r. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

c احسب حجم كرة سلة قطرها 9 in مقربًا إلى أقرب عُشر. $381.7\ \text{in}^3$

13) حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

a $\sqrt{x-4} = \sqrt{2x-13}$ 9

b $\sqrt{x-10} = 1 - \sqrt{x}$ لايوجد حل

14) عيّن مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt{x-1} - 3$. انظر الهامش

أسئلة ذات إجابات مطولة

15) إذا كانت $f(x)$، $g(x)$ دالتين كل منهما معكوس للأخرى.

a فصف التمثيل البياني لكلتا الدالتين $f(x)$, $g(x)$ على مستوى إحداثي واحد. انظر الهامش

b فما قيمة $f[g(2)]$؟ وضح إجابتك. انظر الهامش

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟															
إذا لم تستطع الاجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
اذهب للدرس ...	1-1	1-6	1-5	1-2	1-5	1-6	1-7	1-2	1-4	1-1	1-2	1-5	1-7	1-3	1-2

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

بناء الاختبارات
التقـــويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات؛ لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل اختبارات TIMSS أو NAEP.

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل الثاني تعطى الأسئلة الواردة في صفحة 65 واجبًا منزليًّا للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم المتطلبات السابقة للفصل 2.

إجابات:

14. المجال = $\{x | x \geq 1\}$
المدى = $\{y | y \geq -3\}$

15a. إجابة ممكنة: سيكونان انعكاسًا لبعضهما بعضًا في $y = x$.

15b. إجابة ممكنة: 2؛ بما أن كلًّا من f ، g معكوس للأخرى، إذن $[f \circ g](2) = [g \circ f](2) = 2$.

الدرس 1-1 ص10-16

8)

$(f+g)(x) = 6x - 3$

$(f-g)(x) = -4x + 1$

$(f \cdot g)(x) = 5x^2 - 7x + 2$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-1}{5x-2}, x \neq \frac{2}{5}$

9)

$(f+g)(x) = x^2 - x + 1$

$(f-g)(x) = x^2 + x - 1$

$(f \cdot g)(x) = -x^3 + x^2$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{-x+1}, x \neq 1$

10

قاعدة جمع الدوال $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$f(x) = 3x, g(x) = -2x + 6$ $= (3x) + (-2x + 6)$

بالتبسيط $= x + 6$

قاعدة طرح الدوال $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

بالتعويض $= (3x) - (-2x + 6)$

بالتبسيط $= 5x - 6$

قاعدة ضرب الدوال $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

بالتعويض $= (3x)(-2x + 6)$

$= -6x^2 + 18x$

قاعدة قسمة الدوال $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

بالتعويض $= \frac{3x}{-2x+6}, x \neq 3$

11)

$(f+g)(x) = 4x^2 - 8x$

$(f-g)(x) = 2x^2 + 8x - 8$

$(f \cdot g)(x) = 3x^4 - 24x^3 + 8x^2 + 32x - 16$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x^2-4}{x^2-8x+4}, x \neq 4 \pm 2\sqrt{3}$

13) $[g \circ f](-8) = 0$

$[f \circ g](-4) = 4$

14) $[f \circ g](-4)$ غير معرفة، $[g \circ f](-8)$ غير معرفة.

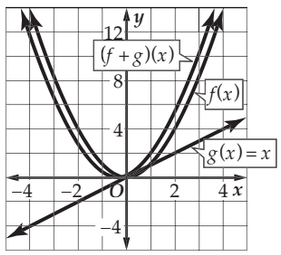
15) $[g \circ f](2) = -3$

16) $[g \circ f](2)$ غير معرفة.

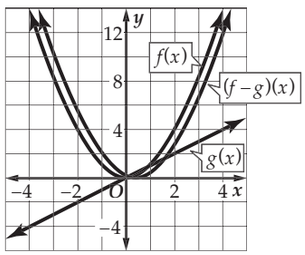
31a)

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x$	$(f+g)(x) = x^2 + x$	$(f-g)(x) = x^2 - x$
–3	9	–3	6	12
–2	4	–2	2	6
–1	1	–1	0	2
0	0	0	0	0
1	1	1	2	0
2	4	2	6	2
3	9	3	12	6

31b)



31c)



31d) إجابة ممكنة: لأي قيمة من قيم x تكون المسافة الرأسية بين التمثيل البياني للدالة g والمحور x مساوية للمسافة الرأسية بين التمثيلين البيانيين للدالتين f ، $(f+g)$ وهي مساوية أيضًا للمسافة الرأسية بين التمثيلين البيانيين للدالتين f ، $(f-g)$.

32

a) افترض أن $m(x)$ تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، $w(x)$ تمثل عدد النساء اللآتي تم توظيفهن.

قاعدة جمع الدوال $(m+w)(x) = m(x) + w(x)$

بالتعويض $= 7x + 6 + 5x + 5$

بالتبسيط $= 12x + 11$

تمثل المعادلة $y = 12x + 11$ العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم.

b) تمثل $(f-g)(x)$ عدد الرجال الذين تم توظيفهم ناقص عدد النساء اللآتي تم توظيفهن.

الدرس 2-1 ص17-21

27 a) قانون مساحة سطح الدائرة $A = \pi r^2$

بكتابة القانون كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y $y = \pi x^2$

بتبديل كل من المتغيرين x, y في المعادلة $x = \pi y^2$

بقسمة كلا الطرفين على π $\frac{x}{\pi} = y^2$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\sqrt{\frac{x}{\pi}} = y$

ضع r مكان y، و A مكان x $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

b) دالة المعكوس $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$A = 36$ $r = \sqrt{\frac{36}{\pi}}$

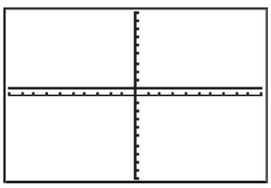
$\approx 3.39\,\text{cm}$

29a) $F^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$

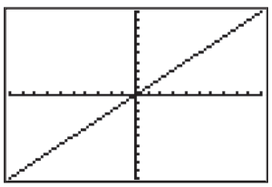
$$F[F^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(x - 32)\right] + 32$$
$$= x - 32 + 32$$
$$= x$$

$$F^{-1}[F(x)] = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x + 32 - 32\right)$$
$$= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x + 0\right)$$
$$= x$$

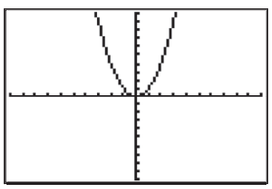
30a)



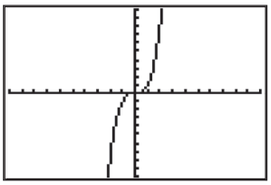
$[-10, 10]$ *scl*: 1 *by* $[-10, 10]$ *scl*: 1



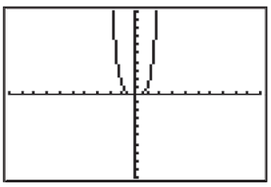
$[-10, 10]$ *scl*: 1 *by* $[-10, 10]$ *scl*: 1



$[-10, 10]$ *scl*: 1 *by* $[-10, 10]$ *scl*: 1



$[-10, 10]$ *scl*: 1 *by* $[-10, 10]$ *scl*: 1



$[-10, 10]$ *scl*: 1 *by* $[-10, 10]$ *scl*: 1

30b)

المعادلة	هل تمثل دالة؟
$y = x^0$ أو $y = 1$	لا
$y = x^1$ أو $y = x$	نعم
$y = x^2$	لا
$y = x^3$	نعم
$y = x^4$	لا

40) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+5}{x-3}, x \neq 3$

$(f \cdot g)(x) = x^2 + 2x - 15$

$(f - g)(x) = 8$

$(f + g)(x) = 2x + 2$

41) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x-20}{x-2}, x \neq 2$

$(f \cdot g)(x) = 3x^2 - 26x + 40$

$(f - g)(x) = 2x - 18$

$(f + g)(x) = 4x - 22$

42) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-9}{2x+3}, x \neq -\frac{3}{2}$

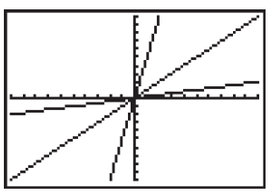
$(f \cdot g)(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x - 27$

$(f - g)(x) = x^2 - 2x - 12$

$(f + g)(x) = x^2 + 2x - 6$

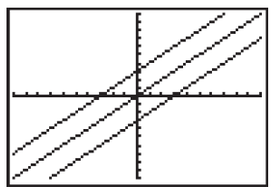
الدرس 2-1 (توسّع) ص22

1)



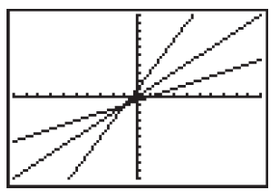
$[-10, 10]$ *scl*: 1 *by* $[-10, 10]$ *scl*: 1

(2



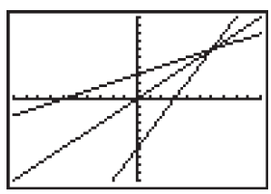
[−10, 10] *scl*: 1 *by* [−10, 10] *scl*: 1

(3



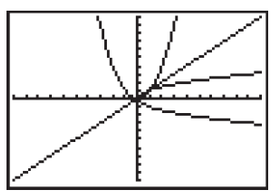
[−10, 10] *scl*: 1 *by* [−10, 10] *scl*: 1

(4



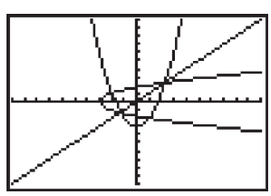
[−10, 10] *scl*: 1 *by* [−10, 10] *scl*: 1

(5



[−10, 10] *scl*: 1 *by* [−10, 10] *scl*: 1

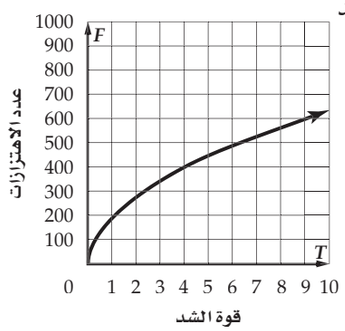
(6



[−10, 10] *scl*: 1 *by* [−10, 10] *scl*: 1

الدرس 3-1 ص28-23

3) تأكد



350, 500, 600 تقريبًا

11 مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط قيمًا يكون عندها ما تحت الجذر غير سالب.

بكتابة متباينة $x - 2 \geq 0$

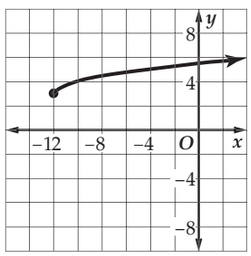
بإضافة 2 لكلا الطرفين $x \geq 2$

لذا المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$. أوجد $f(2)$ لتعيين الحد الأدنى للمدى.

$$f(2) = 4\sqrt{2-2} - 8$$
$$= 0 - 8$$
$$= -8$$

لذا المدى هو $\{y \mid y \geq -8\}$

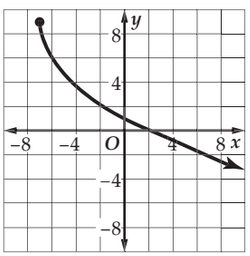
(16



المجال $= \{x \mid x \geq -12\}$

المدى $= \{y \mid y \geq 3\}$

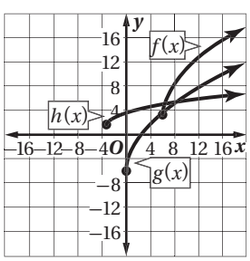
(17



المجال $= \{x \mid x \geq -7\}$

المدى $= \{y \mid y \leq 9\}$

(24a



(24b $f(x)$: 6 وحدات إلى اليمين ، 3 وحدات إلى أعلى.

$g(x)$: $\frac{1}{16}$ وحدة إلى اليسار، 6 وحدات إلى أعلى.

$h(x)$: 3 وحدات إلى اليسار، وحدتان إلى أسفل.

(24c إجابة ممكنة: $f(x)$, $g(x)$

أظهر التمثيل البياني للدالتين اتساعًا رأسيًّا في التمثيل البياني للدالة الأم؛ لأن مقدار تزايد التمثيل البياني لهما أكبر من مقدار تزايد التمثيل البياني للدالة الأم

(24d لأن $\sqrt{16} = 4$

(24e

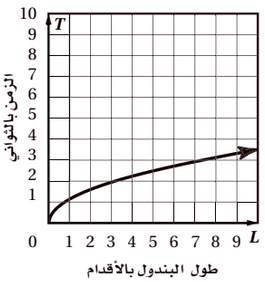
$x = 8$	$x = 12$	$x = 16$	معدل التغيرين 8,12	معدل التغيرين 12,16
$f(8) = 8.66$	$f(12) = 12.798$	$f(16) = 15.65$	1.0345	0.713
$g(8) = 5.36$	$g(12) = 7.89$	$g(16) = 10.03$	0.6325	0.535
$h(8) = 5.317$	$h(12) = 5.873$	$h(16) = 6.359$	0.139	0.1215

معدل تغير دوال الجذور التربيعية من الصورة $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$ يتناقص مع زيادة قيم x، حيث $a > 0$.

25 a) الدالة الأصلية $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$g = 32$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$

كون جدول قيم للفترة $0 \le L \le 10$. ومثل الدالة بيانيًا.



L	r
0	0
1	1.11
2	1.57
3	1.92
4	2.22
5	2.48
6	2.72
7	2.94
8	3.14
9	3.33
10	3.51

b) استعمل الجدول في الجزء **a**.

(2, 1.57) تعني أن طول الفترة لبندول طوله 2ft يساوي 1.57 sec

(5, 2.48) تعني أن طول الفترة لبندول طوله 5ft يساوي 2.48 sec.

(8, 3.14) تعني أن طول الفترة لبندول طوله 8ft يساوي 3.14 sec تقريبًا.

الدرس 4-1 ص 29-33

(37a

$n = 3$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-125	-64	-27	-8	-1	0
x	1	2	3	4	5	
$f(x)$	1	8	27	64	125	

$n = 4$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	625	256	81	16	1	0
x	1	2	3	4	5	
$f(x)$	1	16	81	256	625	

$n = 3$

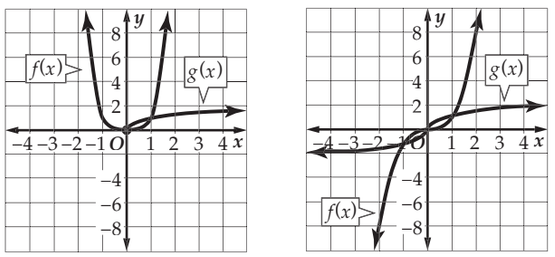
x	-125	-64	-27	-8	-1	0
$g(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	1	8	27	64	125	
$g(x)$	1	2	3	4	5	

$n = 4$

x	625	256	81	16	1	0
$g(x)$	تخيلي	تخيلي	تخيلي	تخيلي	تخيلي	0
x	1	16	18	256	625	
$g(x)$	1	2	3	4	5	

(37b

$n = 3$ $n = 4$



(37c $f(x)=x^3, f(x) = x^4, g(x)= \sqrt[3]{x}, f(x) =x^3, g(x) =\sqrt[3]{x}$

(37d قيم n الفردية الموجبة.

(37e إجابة ممكنة: لكل قيم n الفردية الموجبة في $g(x)$ و $f(x)$ هي دوال عكسية.

ولكل قيم n الزوجية الموجبة في $g(x)$ و $f(x)$ هي دوال عكسية فقط إذا كان مدى $f(x)$، ومجال $g(x)$ يقتصر على القيم غير السالبة.

(47

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x}{-4x+5}, x \neq \frac{5}{4}$

$(f \cdot g)(x) = -8x^2 + 10x$

$(f-g)(x) = 6x-5$

$(f+g)(x) = -2x+5$

(48 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-2}{2x-7}, x \neq \frac{7}{2}$

$(f \cdot g)(x) = 2x^2 - 11x + 14$

$(f-g)(x) = -x + 5$

$(f+g)(x) = 3x-9$

(49 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-5}, x \neq 5$

$(f \cdot g)(x) = x^3 - 5x^2$

$(f-g)(x) = x^2 - x+5$

$(f+g)(x) = x^2 + x - 5$

الدرس 4-1 (توسّع) ص34

(1 [−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

(2 [−10, 10] scl: 1 by [−10.10] scl: 1

(3 [−10.10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

(4 [−10.10] scl: 1 by [−10.10] scl: 1

(5 [−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

(6 [−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الدرس 5-1 ص36-41

29 مساحة المستطيل $A = \ell w$

$\ell = 8 + \sqrt{3}, w = \sqrt{6}$

$= (8 + \sqrt{3})(\sqrt{6})$

خاصية التوزيع $= 8 \cdot \sqrt{6} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

خاصية الضرب $= 8\sqrt{6} + \sqrt{18}$

بالتبسيط $= 8\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$ ft²

39

$\sqrt{x}+1$ مرافق $\sqrt{x}-1$ $\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

بإجراء الضرب $= \frac{x(\sqrt{x})+1(x)+1(\sqrt{x})+1(1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x})+1(\sqrt{x})+-1(\sqrt{x})+(-1)(1)}$

بتبسيط $= \frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}$

بالتبسيط $= \frac{x(\sqrt{x}+1)+(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

بالتبسيط $= \frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

(47a $a^2 + b^2 = c^2$

$1^2 + 1^2 = c^2$

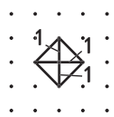
$2 = c^2$

$c = \sqrt{2}$

(47b

(47c طول وتر المثلث القائم الزاوية المتطابق الضلعين والذي طول كل من ضلعيه وحدتان يساوي $(\sqrt{2}+\sqrt{2})$ وحدة. لذا، $2 < \sqrt{2}+\sqrt{2}$.

(47d



(47e بما أن المربع ينتج أربعة مثلثات طول قاعدة كل منها وحدة واحدة، وارتفاعه وحدة واحدة. لذا، مساحة سطح كل منها تساوي:

$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2} \cdot 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

(49 $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{(-1-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{8}$

$= \frac{(1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3i^2)(-1-i\sqrt{3})}{8}$

$= \frac{(2i\sqrt{3}-2)(-1-i\sqrt{3})}{8}$

$= \frac{-2i\sqrt{3}-6i^2+2+2i\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{-6i^2+2}{8}$

$= \frac{8}{8}$

$= 1$

ملاحظات

الفصل 2

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (65)

	الدرس 2-1 حصتان ونصف	استكشاف 2-2 نصف حصة	الدرس 2-2 حصة	الدرس 2-3 حصتان
العنوان	**تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا**	**معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل المعادلات الأسية**	**حل المعادلات الأسية**	**اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية**
الأهداف	• تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا. • تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لحل معادلات أسية بيانيًّا.	• حل معادلات أسية.	• إيجاد قيم تعابير لوغاريتمية. • تمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.
المفردات الأساسية	الدالة الأسية النمو الأسي خط التقارب عامل النمو الاضمحلال الأسي عامل الاضمحلال		المعادلة الأسية الربح المركب	اللوغاريتم الدالة اللوغاريتمية
تمثيلات متعددة	ص(71)		ص(78)	
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (11) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (12) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 1 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (13) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون
التقنيات لكل درس	• الكاميرا التوثيقية • تدريس الجبر باليدويات دون ضمن	• الآلة الحاسبة البيانية		• السبورة التفاعلية
تنويع التعليم	ص(68,72)		ص(76,78,79)	ص(81,86)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (87)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(11) حصة	(2) حصة	(13) حصة

الدرس 2-4 حصة ونصف	الدرس 2-5 حصتان	الدرس 2-6 حصة	توسع 2-6 نصف حصة
حل المعادلات اللوغاريتمية	**خصائص اللوغاريتمات**	**اللوغاريتمات الاعتيادية**	**معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل معادلات لوغاريتمية**
• حل معادلات لوغاريتمية.	• تبسيط تعابير وإيجاد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات. • حل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.	• حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات الاعتيادية. • إيجاد قيمة تعابير لوغاريتمية باستعمال قانون تغيير الأساس.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية، لحل معادلات أسية ولوغاريتمية.
المعادلة اللوغاريتمية		اللوغاريتم الاعتيادي قانون تغيير الأساس	
ص(90)		ص(101)	
مصادر الفصل 2 • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (14) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 2 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (15) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (16) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 3 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية
• التسجيل المرئي	• السبورة التفاعلية	• السبورة التفاعلية	• الآلة الحاسبة البيانية
ص(89,91)	ص(94,97)	ص(100,102)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (104-106)
- اختبار الفصل، ص (107)

التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 2	المرجع		المرجع
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الثاني، ص (65)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (65)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	تأكد من فهمك	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	أمثلة إضافية	دليل المعلم	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	تنبيه!	دليل المعلم		
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (87)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 2، ص (104-106)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (107)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري تراكمي، ص (110-111)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 2**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل		

تنويع التعليم

الفصل 2

البديل 1 جميع المستويات فوق ضمن دون

المتعلمون البصريون بما أن الطلبة يدرسون العديد من الخصائص لأول مرة في هذا الفصل. لذا، اقترح عليهم عمل ملصقات لها، على أن تكون مختصرة قدر الإمكان، مع استعمال الألوان؛ لتسهيل فهم الخاصية بمجرد النظر إليها.

خصائص اللوغاريتمات

$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

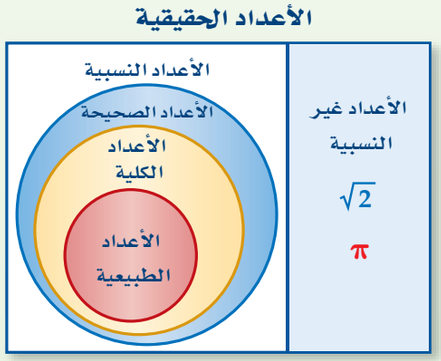
$\log_a (M/N) = \log_a M - \log_a N$

$\log_a (M^p) = p \log_a M$

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى طالبين أن يفترضا بدء استثمار بمبلغ BD 10000، واختر مُعدّل ربح يتم إضافته إلى رأس المال باستمرار، واطلب إليهما حساب المبلغ الكلي بعد 5، 10، 15، 20 سنة، وتمثيله في كل مرة باستعمال الأعمدة البيانية.

البديل 2 دون المتوسط دون

راجع الطلبة في مفهوم العدد الحقيقي، والنسبي، والصحيح، والكلي، والطبيعي، ثم اطلب إلى كل منهم رسم مخطط فن لمجموعات الأعداد المذكورة، ووضع مثال لكل مجموعة أعداد على الشكل .



البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلبة إعداد بحث باستعمال شبكة الإنترنت حول جداول اللوغاريتمات الاعتيادية للأعداد، ثم اطلب إليهم أن يستعملوا الجداول؛ لإيجاد قيم لوغاريتمات اعتيادية مثل $\log_{10}125$ ، ويقارنوا بين النتيجة التي توصلوا إليها والنتيجة باستعمال الآلة الحاسبة للوغاريتم نفسه.

الفصل 2

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 2

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال آليات تتضمن خصائص الأسس في تبسيط التعابير.

الفصل 2

- تحليل موقف ممثّل بدالة أسّية، وتكوين معادلة لحل مسألة.
- تطوير تعريف اللوغاريتم من خلال استكشاف العلاقات بين الدوال الأسية ومعكوساتها.
- استعمال الدوال الأم؛ لاستكشاف أثر تغير قيم المعالم في التمثيلات البيانية للدوال الأسية، واللوغاريتمية، ووصف المحددات على المجال والمدى واختبار سلوك خطوط التقارب.
- تحديد الحلول لمعادلات أسية ولوغاريتمية بيانيًّا وجبريًّا وباستعمال الجداول.
- تفسير معقولية الحلول لمعادلات أسية ولوغاريتمية وتحديدها.

ما بعد الفصل 2

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

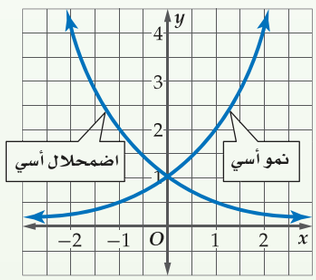
- وصف الدوال الأم بيانيًّا وبالرموز بحيث تتضمن الدالة: $f(x) = \log_a x$.
- استكشاف مفاهيم الاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وخطوط التقارب، وربط تلك الخصائص بالدوال الممثلة بيانيًّا وعدديًّا.
- استكشاف خصائص الأسس واللوغاريتمات.

نظرة على الدروس

2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا

تُسمى المعادلة على الصورة $y = b^x$، حيث $b > 0, b \neq 1$ دالة أسية. مجال الدالة الأسية هو جميع الأعداد الحقيقية، وهناك نوعان من الدوال الأسية هما :

- دوال النمو الأسي، وذلك عندما تكون $b > 1$.
- دوال الاضمحلال الأسي، وذلك عندما تكون $0 < b < 1$.



- الدالة الأسية متصلة بحيث يمكن رسم منحناها دون رفع القلم عن الورقة.
- وهي كذلك دالة واحد لواحد؛ أي أن الخط الأفقي لا يقطع المنحنى سوى في نقطة واحدة.

وللتمثيل البياني للدالة الأسية خط تقارب أفقي، وهذا يعني أن تمثيلها البياني يقترب من خط أفقي. وبالنسبة للدالة الأم $f(x) = b^x$، فإن خط التقارب الأفقي هو المحور x .

وجميع تحويلات الدوال الأم التي سبق أن درستها يمكن تطبيقها على تمثيل الدالة الأسية البياني.

2-2 حل المعادلات الأسية

يظهر المتغير في الدوال الأسية على صورة أس. ويمكن استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية؛ لحل معادلات أسية، فعندما يتساوى أساسا حدين أسّيين، مثل:

$3^x = 3^7$ ، تكون الأسس متساوية ومن ذلك $x = 7$ ، وعندما لا تكون الأساسات متساوية، كما في $3^x = 9^4$، فلا بد من إعادة كتابتها أولًا، وفي هذا المثال يمكن كتابة العدد 9 على الصورة 3^2، حيث $9^4 = (3^2)^4 = 3^8$ ومنه $3^x = 3^8$. لذا، $x = 8$.

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

معكوس $y = b^x$ بشكل عام هو $x = b^y$.

ويُسمى b في المعادلة $x = b^y$ بالأساس، على حين يشار إلى y بأنها لوغاريتم x ، وتكتب هذه العلاقة عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، حيث $b > 0, b \neq 1$ ، وتقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b ، وتُسمى دالة لوغاريتمية.

والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ متصل وهو واحد لواحد ومجاله جميع الأعداد الحقيقية الموجبة، ويمثل المحور y خط تقارب رأسيًّا له. وجميع التحويلات على الدوال الأم التي درستها سابقًا يمكن تطبيقها على الدوال اللوغاريتمية.

2-4 حل معادلات لوغاريتمية

عند حل معادلات لوغاريتمية يكون من المهم تذكّر تعريف الدالة اللوغاريتمية وأن مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وهذا يعني أن لوغاريتم الصفر أو أي عدد سالب يكون غير معرّف لأي أساس. ومن المهم أيضًا التحقق من حلول المعادلة اللوغاريتمية بتعويضها في المعادلة الأصلية كي لا يكون مصدرها لوغاريتمًا للصفر أو أي عدد سالب.

2-5 خصائص اللوغاريتمات

وُجِدَتْ اللوغاريتمات؛ لتبسيط العمليات الحسابية، فوفقًا لخصائص اللوغاريتمات في الضرب والقسمة يتحول لوغاريتم حاصل الضرب إلى مجموع لوغاريتمات عوامله، بينما لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم البسط مطروحًا منه لوغاريتم المقام، فمثلًا $\log_3 (5 \cdot 7) = \log_3 5 + \log_3 7$.

وتنص خاصية لوغاريتم القوة على أن لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب القوة في اللوغاريتم، فمثلًا $\log_5 3^7 = 7 \log_5 3$.

إن استعمال خصائص اللوغاريتمات يساعدنا في حل المعادلات اللوغاريتمية.

2-6 اللوغاريتمات الاعتيادية

تُسمى اللوغاريتمات ذات الأساس 10 لوغاريتمات اعتيادية، فلا يكتب الأساس 10 عادة. فاللوغاريتم $\log_{10} x$ يكتب عادة على الصورة $\log x$، وتحتوي معظم الآلات الحاسبة على المفتاح LOG لحساب اللوغاريتمات الاعتيادية. ويمكن استعمال اللوغاريتمات؛ لحل معادلات أسية ليس من السهل كتابتها على صورة أسّ لأساس مشترك، فلحل المعادلة الأسية $5^x = 41$، خُذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة، ثم حُلّ بالنسبة لـ x. يمكن حساب قيم تعابير لوغاريتمية لأي أساس باستعمال قانون تغيير الأساس، والذي يحول اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات اعتيادية.

الفصل 2

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions and Relations

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية والخاصة والتربيعية وتحويلاتها بيانيًا.

والآن

الأفكار العامة

- أتعرّف الدوال الأسية واللوغاريتمية
- أمثّل الدوال الأسّية واللوغاريتمية بيانيًا.
- أحل مسائل تتضمن نموًا أسيًا واضمحلالاً أسّيًا.
- أحل معادلات أسية ولوغاريتمية.

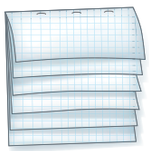
لماذا؟

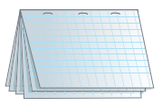
علوم ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطًا وثيقًا. ويظهر ذلك جليًا في الفيزياء والكيمياء والأحياء وغيرها. وتحتاج هذه الفروع إلى مهارات رياضية عالية. وستتعلم في هذا الفصل جوانب رياضية ذات صلة قوية بعلوم: الحاسوب، والفيروسات، والحشرات، ونمو البكتيريا، وانقسام الخلايا، وعلم الفلك، والأعاصير، والهزات الأرضية.

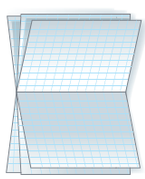
مطوياتك منظم أفكار

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظات للفصل الثاني حول العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية، مبتدئًا بثلاث أوراق من ورق المربعات.

1. **ضع** الأوراق الثلاث فوق بعضها، واطوها من المنتصف عرضيًا.
2. **ثبّت** الأوراق معًا عند خط الطي.
3. **قص** الورقة الأولى على بعد 5 cm من خط الطيّ، ثم قص كل ورقة تالية بحيث تزيد 2 cm على الورقة السابقة.
4. **سمّ** كل صفحة حسب الشكل.







مشروع الفصل

قياس شدّة الصوت

يستعمل الطلبة ما تعلموه عن الدوال الأسية واللوغاريتمية؛ لتفسير ملاحظات وظواهر تتعلق بمستويات الصوت.

- أحضر مقياس مستوى الصوت من مختبر العلوم، ومصدرين متماثلين للصوت ؛ مُجفِّفي شعر مثلًا، أو ساعتي تنبيه أو ما شابه ذلك.
- قسّم الطلبة إلى مجموعات تتكون من 3 أو 4 طلبة، واطلب إليهم أن يقيسوا شدة أصوات في غرفة هادئة بوضع المقياس على بعد أقدام قليلة مقابل المصدر وتسجيل مستوى شدة الصوت، ثم يسجلوا مستوى شدة الصوت للمصدرين معًا عند نفس نقطة البعد عن مقياس الصوت. واطلب إليهم تكرار ذلك مع مصدرين آخرين للصوت.
- وبغض النظر عن مصدر الصوت فستجد أن استعمال مصدرين متشابهين معًا يجعل قراءة المقياس تساوي 3 أمثال قراءته للمصدر الواحد. لذا اطلب إلى المجموعات استعمال معرفتهم باللوغاريتمات لتفسير صحة هذه الظاهرة.
- وأخيرًا، اطلب إلى الطلبة أن يتنبؤوا بشدة صوت 3, 4, 5 مصادر صوت متماثلة.

المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية :

تعريف: تسمى y في الدالة $x = b^y$ لوغاريتم x للأساس b ، وتكتب: $y = \log_b x$.

وتقرأ "y تساوي لوغاريتم x للأساس b "

مثال: $3 = \log_2 8$

سؤال: كيف تكتب $3^5 = 243$ بالصورة اللوغاريتمية؟

$\log_3 243 = 5$

مطوياتك منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلبة ملاحظاتهم في أثناء دراستهم للعلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل. لتدوين ملاحظاتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجع الطلبة في أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

CRM **مسرد مفردات الطالب، ص (1, 2)**

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضًا للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل الثاني

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كل تعبير مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا: (مهارة سابقة)

1) a^{12} $a^4a^3a^5$

2) $8x^3y^9z^6$ $(2xy^3z^2)^3$

3) $\frac{-3x^6}{2y^3z^5}$ $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$

4) $\frac{4r^4}{81n^4t^2}$ $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

5) **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. إذا كانت كتلة جسم 7.5×10^3g، وحجمه $1.5 \times 10^3\ \text{cm}^3$، فما كثافته؟ 5g/cm^3

للأسئلة 6-14 انظر الهامش

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي: (الدرس 2-1)

6) $f(x) = 2x + 5$ 7) $f(x) = x - 3$

8) $f(x) = -4x$ 9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$ 11) $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد في كل دالتين مما يأتي إذا كانت إحداهما معكوسًا للأخرى أم لا، مع توضيح السبب: (الدرس 2-1)

12) $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$

13) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5$

14) **طعام:** تكلف شطيرة الجبنة 0.4 BD، وتكلف كل إضافة عليها 0.1 BD. إذا كانت الدالة $f(x) = 0.1x + 0.4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافًا إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$، موضحًا ماذا تعني. (الدرس 2-1)

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط التعبير $\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$ مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

$\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$

$= \frac{a^6b^2c^4}{a^6b^3c^8}$ بتبسيط البسط باستعمال خاصية قوة القوة، والمقام باستعمال خاصية ضرب الأسس

$= \frac{1}{bc^4}$ بالتبسيط باستعمال خاصية قسمة الأسس

مثال 2

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 3x - 1$.

خطوة 1 ضع المتغير y بدلًا من رمز الدالة $f(x)$ في المعادلة الأصلية:

$f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$

خطوة 2 بدّل بين كلٍّ من المتغيرين x، y

$x = 3y - 1$

خطوة 3 حُلّ المعادلة بالنسبة لـ y.

$x + 1 = 3y$ بإضافة العدد 1 إلى الطرفين

$\frac{x+1}{3} = y$ بقسمة كل طرف على العدد 3

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y$ بالتبسيط

خطوة 4 ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y.

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا ... فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين.
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	دليل المعلم مشروع الفصل، ص(64)
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من التمارين.
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مصادر الفصل دليل الدراسة والمعالجة
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

6) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

7) $f^{-1}(x) = x + 3$

8) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x$

9) $f^{-1}(x) = 4x + 12$

10) $f^{-1}(x) = 2x + 1$

11) $f^{-1}(x) = 3x - 12$

12) نعم؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

13) لا؛ لأن $[f \circ g](x) = 4x - 5$

14) $f^{-1}(x) = 10x - 4$، هي تعطي عدد الإضافات التي يحصل عليها شخص دفع x دينارًا.

2-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

تمثيل دوال خطية، وخاصة، وتربيعية بيانيًّا.

الدرس 2-1

تمثيل دوال النمو الأسّي بيانيًّا.

تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا.

ما بعد الدرس 2-1

حل معادلات أسّية.

2 التدريس

أسئلة تعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- كم شخصًا سيستلم الرسالة عند إعادة الإرسال للمرّة الثانية؟ 25
- كم شخصًا سيستلم الرسالة عند إعادة الإرسال للمرّة الرابعة؟ 625
- افرض أنه تم طلب توجيه الرسالة إلى 8 أشخاص، فاكتب معادلة تمثل الموقف الجديد. $y = 8^x$

النمو الأسّي

مثال 1 يُبيّن كيفية تمثيل دالة النمو الأسّي بيانيًّا.

2-1 تمثيل الدوال الأسّية بيانيًّا
Graphing Exponential Functions

فيما سبق

درست تمثيل دوال خطية وخاصة وتربيعية بيانيًّا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أمثّل دوال النمو الأسّي بيانيًّا.
- أمثّل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا.

المفردات الأساسية

الدالة الأسية
exponential function
النمو الأسّي
exponential growth
خط التقارب
asymptote
عامل النمو
growth factor
الاضمحلال الأسّي
exponential decay
عامل الاضمحلال
decay factor

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هل استلمت يومًا بريدًا إلكترونيًّا يطلب إليك إعادة إرساله إلى 5 أشخاص؟ فإذا أرسله كل شخص من هؤلاء إلى 5 أشخاص آخرين واستمر الإرسال هكذا، سيزداد عدد الذين سيتسلمون هذا البريد ازديادًا أسيًّا؟

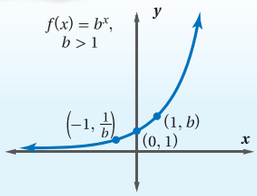
يمكن استعمال المعادلة $y = 5^x$ لتمثيل هذا الموقف، حيث x تمثل عدد مرات إعادة الإرسال.

النمو الأسّي تُسمى الدالة التي على الصورة $y = 5^x$، حيث الأساس عدد ثابت، والأس هو المتغير المستقل **بالدالة الأسّية**، وأحد أنواع الدوال الأسية هو دالة **النمو الأسّي** التي تكتب على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$. وفي التمثيل البياني للدالة الأسية يوجد مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة يسمى **خط التقارب**. كذلك نلاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x، ونقول حينئذ: إن $f(x)$ دالة متزايدة.

مفهوم أساسي — الدالة الأم لدوال النمو الأسّي

أضف إلى مطويتك

الدالة الأم	$f(x) = b^x, b > 1$
نوع التمثيل البياني	منحنى
المجال	جميع الأعداد الحقيقية (R)
المدى	جميع الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
خط التقارب	المحور x
نقطة التقاطع مع المحور y	$(0, 1)$

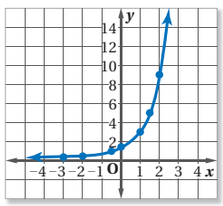


مثال 1 تمثيل دوال النمو الأسّي بيانيًّا

مثّل $y = 3^x$ بيانيًّا، ثم حدد مجال الدّالة ومداها.

أنشئ جدول قيم، وعيّن النقاط ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 3^x$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$3^0 = 1$
x	1	$\frac{3}{2}$	2	
$y = 3^x$	$3^1 = 3$	$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$	$3^2 = 9$	



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+).

تأكد

1) مثّل الدالة $y = 4^x$ بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها. انظر ملحق الإجابات

مصادر الدرس 2-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (68)	• تنويع التعليم، ص (68)	• تنويع التعليم، ص (72)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

التمثيل البياني للدالة $f(x) = b^x$ هو التمثيل البياني للدالة الأم للدوال الأسية. يمكن تطبيق التحويلات التي درستها سابقًا على التمثيل البياني للدوال الأسية.

مفهوم أساسي — **تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسّية**

أضف إلى مطويتك

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

k : إزاحة رأسية	h : إزاحة أفقية
إذا كانت k موجبة، إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدة إلى أعلى	إذا كانت h موجبة، إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة إلى اليمين
إذا كانت k سالبة، إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدة إلى أسفل	إذا كانت h سالبة، إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة إلى اليسار

a : الشكل والاتجاه

إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x قبل إجراء الإزاحة الأفقية والرأسية.

إذا كانت $\lvert a \rvert > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا.

إذا كانت $\lvert a \rvert < 1$، $0 <$، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.

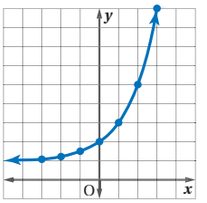
مثال 2 — **تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي**

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها، ومداها:

a) $g(x) = 2^x + 1$

تمثل المعادلة إزاحة لمنحنى الدالة الأم $f(x) = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى.

x	$g(x) = 2^x + 1$
-3	$2^{-3} + 1 = 1.125$
-2	$2^{-2} + 1 = 1.25$
-1	$2^{-1} + 1 = 1.5$
0	$2^0 + 1 = 2$
1	$2^1 + 1 = 3$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$2^3 + 1 = 9$



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، المدى $= \{y \mid y > 1\}$

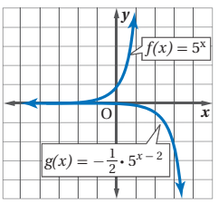
b) $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$

التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = 5^x$

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًا.
- $h = 2$: يزاح التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا توجد إزاحة رأسية للتمثيل البياني.

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R) .

المدى $= \{y \mid y < 0\}$



تأكد للتدريبين 2A, 2B انظر ملحق الإجابات

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها، ومداها.

2A) $g(x) = 2^{x+3} - 5$ **2B)** $g(x) = 0.1(6)^x - 3$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في مثال 2 هو مجال الأعداد الحقيقية (R). تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني مع اقتراب x من مالانهاية أو سالب مالانهاية. نلاحظ في المثال $2a$ أنه مع اقتراب x من مالانهاية، تقترب y من مالانهاية أيضًا. وفي المثال $2b$ عندما تقترب x من مالانهاية، y تقترب من سالب مالانهاية.

النمو الأسّي

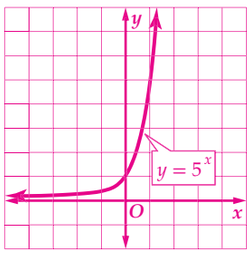
مثال 2 يُبيّن كيفية تمثيل تحويلات دوال النمو الأسّي بيانيًّا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 مثّل الدالة $y = 5^x$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

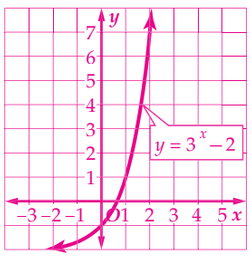


المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى= مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

2 مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال كل منهما ومداها.

a) $y = 3^x - 2$



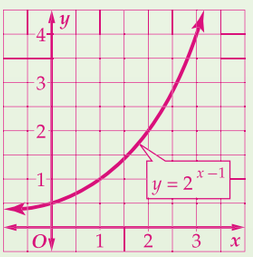
المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى $= \{y \mid y > -2\}$

b) $y = 2^{x-1}$

إجابة :

(2b)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى $= \{y \mid y > 0\}$

التعليم باستعمال التقنيات

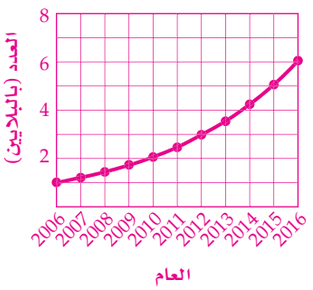
الكاميرا التوثيقية اختر طالبًا ليحل مثالًا أمام الطلبة، واطلب إليه أن ينشئ جدول قيم للدالة، ويوضح كيفية تمثيل الدالة بيانيًّا. وكلّف أحد الطلبة بتوثيق الحل باستعمال الكاميرا.

النمو الأسّي

مثال 3 يُبيّن كيفية تمثيل دالة أسّية بيانيًّا لنمذجة موقف حياتي للنموّ.

مثال إضافي

3 **إنترنت:** بلغ عدد مستعملي الإنترنت في العالم عام 2006 نحو 1020000000 مستعمل، وفي ذلك الوقت كانت نسبة نمو عدد مستعملي الإنترنت 19.5%. إذا استمر نمو عدد المستعملين، فأوجد معادلة أسية تمثل عدد مستعملي الإنترنت منذ ذلك الوقت حتى عام 2016، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.



$y = (1020000000)\ (1.195)^t$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة تأكد أن الطلبة لا يخلطون بين دوال كثيرات الحدود والدوال الأسية، فالدالتان $y = x^2$, $y = 2^x$ كل منهما تحتوي أسًّا، إلا أن الدالة $y = x^2$ هي دالة كثيرة حدود، والدالة $y = 2^x$ هي دالة أسية.

التركيز في المحتوى الرياضي

الدوال الأسية الدالة $f(x) = b^x$، حيث b عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ هي دالة أسّية. عندما تكون $b > 1$، فإن الدالة لا تقطع المحور x بل يكون لها مقطع واحد للمحور y، وهي دالة متزايدة ولها خط تقارب أفقي هو المحور x، وعندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة لا تقطع المحور x بل يكون لها مقطع واحد للمحور y . والتمثيل البياني للدالة متناقص وله خط تقارب أفقي هو المحور x .

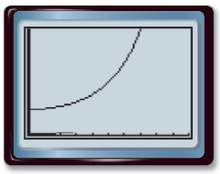
يمكن تمثيل النمو الأسّي بنسبة مئوية ثابتة تتزايد في فترات زمنية محددة باستعمال الدالة :

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

ويمكن استعمال الدالة لإيجاد القيمة $A(t)$ بعد فترة زمنية مقدارها t ، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية. لاحظ أن أساس التعبير الأسي هو $(r + 1)$، ويُسمى **عامل النمو**.

مثال 3 من واقع الحياة — تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا

تعداد سكاني: أُجري سابع تعداد سكاني في مملكة البحرين عام 1412 هـ – 1991م، وكان عدد السكان حينئذٍ 508037 نسمة تقريبًا. وبلغ المعدل السنوي للنمو السكاني خلال الفترة 2001 - 1991، 2.7% سنويًّا تقريبًا. أوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثّلها بيانيًّا.



أولًا: أوجد المعادلة مستعملًا $a = 508037,\ r = 0.027$.

$y = 508037(1.027)^t$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

تأكد انظر ملحق الإجابات

3) ثقافة مالية: يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 3.5% سنويًّا، فإذا كان إنفاق العائلة عام 2004م هو 8000 BD، فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 2004م، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

الربط مع واقع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي يتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد تم إجراء أول تعداد سكاني في مملكة البحرين عام 1362 هـ – 1941 م.

إرشادات للدراسة

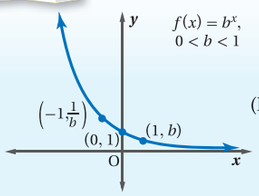
الربح يُعد قانون الربح البسيط $i = prt$، مثالًا على النمو الخطي، وقانون الربح المركب $A(t) = a(1 + r)^t$ مثالًا على النمو الأسي، وهذا يعني أن اعتماد الربح المركب في الاستثمار يؤدي إلى زيادة الأرباح.

الاضمحلال الأسّي النوع الثاني من الدوال الأسية هو **الاضمحلال الأسّي**.

مفهوم أساسي — الدالة الأم لدوال الاضمحلال الأسّي

أضف إلى مطويتك

الدالة الأم	$f(x) = b^x,\ 0 < b < 1$
نوع التمثيل البياني	منحنى
المجال	جميع الأعداد الحقيقية (R)
المدى	جميع الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
خط التقارب	المحور x
نقطة التقاطع مع المحور y	(0, 1)



ويمكن تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x ، ونقول حينئذ: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

إرشادات للدراسة

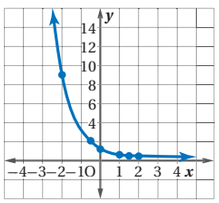
الاضمحلال الأسّي تأكد من عدم الخلط بين التضيق، حيث $|a| < 1$ والاضمحلال الأسي، حيث $0 < b < 1$.

مثال 4 — تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كل منهما:

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.



x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−3	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
−2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

تنويع التعليم

دون ضمن

توسّع كلف الطلبة بالبحث في الانترنت، أو أي مصدر آخر عن تطبيقات حياتية تتضمن دوال النمو الأسي، ثم ناقش ما توصل إليه الطلبة من تطبيقات.

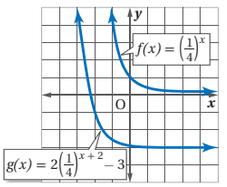
b) $g(x) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$

التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

اختبر كلًّا من:

- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = -2$: يزاح التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يزاح التمثيل البياني 3 وحدات إلى الأسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .



تأكد (4A, 4B) انظر الهامش

مثل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كل منهما:

(4A) $g(x) = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

(4B) $g(x) = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

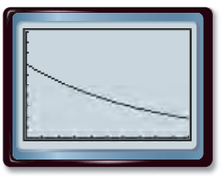
ويمكنك تمثيل الاضمحلال الأسي بنسبة مئوية ثابتة تتزايد في فترة زمنية محددة بطريقة تمثيل النمو الأسي نفسها، باستعمال الدالة $A(t) = a(1-r)^t$ ، أساس التعبير الأسي هو $(1-r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

مثال 5 من واقع الحياة

تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا

شاي: يحتوي كوب الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% من كمية الكافيين من أجسامهم تقريبًا في الساعة.

a) أوجد معادلة أسّية تمثل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًّا.


[0, 10] scl: 1 by [0, 50] scl: 5

$$y = a(1-r)^t$$
$$= 35(1-0.125)^t$$
$$= 35(0.875)^t$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$	المعادلة من الفرع a
$= 35(0.875)^3$	بتعويض 3 بدلًا من الزمن t
≈ 23.45	باستعمال الآلة الحاسبة

سيبقى في جسم الشخص اليافع 23.45mg من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

إرشادات ثقافية

الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل إصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.

تأكد

5) يحتوي كوب الشاي الأسود 68mg من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الآلة الحاسبة البيانية، ثم قدّر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب. $y=68\ (0.875)^t$ ، للتمثيل البياني انظر الهامش ، 52.06 mg تقريبًا

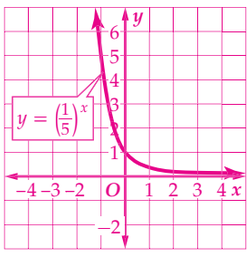
الاضمحلال الأسّي

المثالان 5 ، 4 يُبيِّنان كيفية تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا.

مثالان إضافيان

4 مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال كل منهما ومداها.

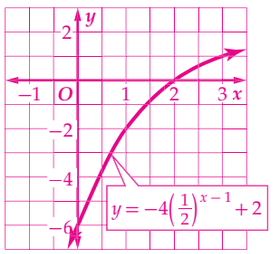
a) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

b) $y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$

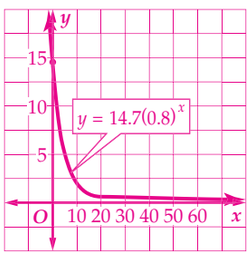


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y < 2\}$

5 **ضغط الهواء:** يبلغ الضغط الجوي $14.7\ \text{lb/in}^2$ على سطح الأرض. ويتناقص بنسبة 20% كلما ارتفعنا 1mi إلى أعلى ويستمر هذا التناقص حتى ارتفاع 50 mi عن سطح الأرض.

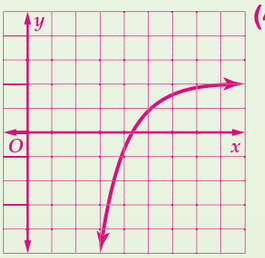
a) أوجد معادلة أسية تمثل الضغط الجوي للارتفاعات 0-50 mi. ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الآلة الحاسبة البيانية. $y=14.7\ (0.8)^x$



b) قدّر الضغط الجوي على ارتفاع 10 mi. $1.6\ \text{lb/in}^2$

إجابات (تأكد):

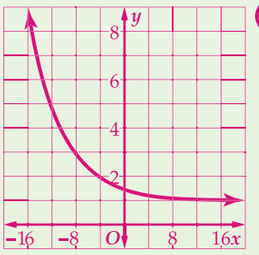
(4A)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y < 2\}$

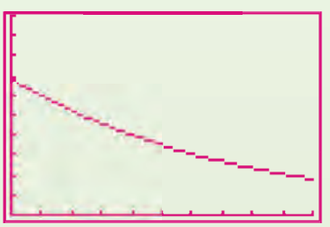
(4B)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y > 1\}$

5) تأكد



[0, 10] scl: 1 by [0, 100] scl: 10

3 التدريب

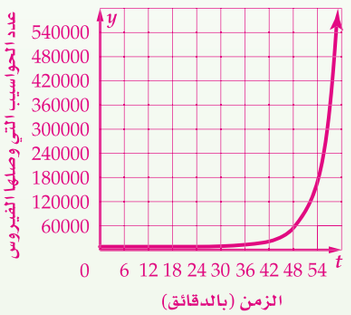
التقويم التكويني

استعمل التمارين **1-12** ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

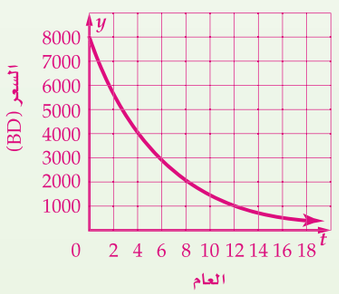
إجابات :

7) $y = (1.25)^t$



بعد الساعة الأولى يكون الفيروس انتشر في 652530 حاسوب تقريبًا

12) $y = 8000\ (0.85)^t$



بعد 20 سنة يكون ثمنها BD 310 تقريبًا.

23) $y = 23500\ (0.95)^t$

في المباراة 15 يكون الحضور 10887 تقريبًا.

تأكد من فهمك

المثالان 2 , 1 الصفحتان 66,67

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثم حدّد مجالها ومداها : **للتمارين 6-1 انظر ملحق الإجابات**

1) $g(x) = 2^x$ **2)** $g(x) = 5^x$ **3)** $g(x) = 3^{x-2} + 4$

4) $g(x) = 2^{x+1} + 3$ **5)** $g(x) = 0.25(4)^x - 6$ **6)** $g(x) = 3(2)^x + 8$

المثال 3 صفحة 68

7) حاسوب: انتشر فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% من أجهزة الشبكة كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد معادلة أسية تمثل انتشار الفيروس منذ البداية، ومثّلها بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانيّة، ثم قدر انتشاره بعد الساعة الأولى. **انظر الهامش**

المثال 4 الصفحتان 68, 69

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها : **للتمارين 11-8 انظر ملحق الإجابات**

8) $g(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$ **9)** $g(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$

10) $g(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$ **11)** $g(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

المثال 5 صفحة 69

12) سيارات: يتناقص سعر سيارة جديدة بمعدل 15% كل سنة. أوجد معادلة أسية تمثل السعر المتبقي من السيارة بعد t سنة من شرائها، ومثّلها بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. ثم قدّر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها. **انظر الهامش**

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 الصفحتان 66,67

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها : **للتمارين 22-13 انظر ملحق الإجابات**

13) $g(x) = 2(3)^x$ **14)** $g(x) = -2(4)^x$ **15)** $g(x) = 4^{x+1} - 5$

16) $g(x) = 3^{2x} + 1$ **17)** $g(x) = -0.4(3)^{x+2} + 4$ **18)** $g(x) = 1.5(2)^x + 6$

المثال 3 صفحة 68

19) علوم: يتكاثر نحل في خلية بمعدل 30% كل أسبوع. إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة، فأوجد معادلة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثّلها بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد النحل بعد 10 أسابيع.

المثال 4 الصفحتان 68,69

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها :

20) $g(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$ **21)** $g(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$ **22)** $g(x) = -\frac{5}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{x+4} + 2$

المثال 5 صفحة 69

23) كرة سلة: تناقص عدد الحضور لمباريات فريق كرة سلة بمعدل 5% لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم. أوجد معادلة أسية تمثل عدد الحضور في المباراة (t) ، إذا كان عددهم في المباراة الأولى 23500، ومثّلها بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد الحضور في المباراة 15 . **انظر الهامش**

24) هواتف: تناقص عدد الهواتف العمومية في الآونة الأخيرة نتيجة انتشار الهواتف المحمولة. فإذا كان عدد الهواتف العمومية بالآلاف في إحدى المدن يعطى بالدالة $P(x) = (2.28)(0.9)^x$ في x سنة منذ عام 1999م.

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. **انظر الهامش**

b) وضّح ماذا يمثل مقطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة. **انظر الهامش**

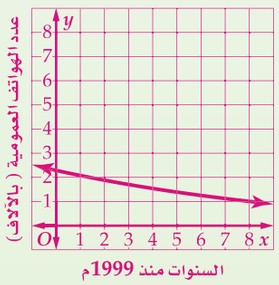
25) صحة: يأخذ مريض حقنة كل 10 أيام. وفي كل يوم يستهلك الجسم 10% من المادة المحقونة.

a) مثّل الدالة التي تعبّر عن هذا الموقف بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. **انظر الهامش**

b) متى يكون في جسم المريض 50% من المادة المحقونة ؟ **بعد 6 أيام**

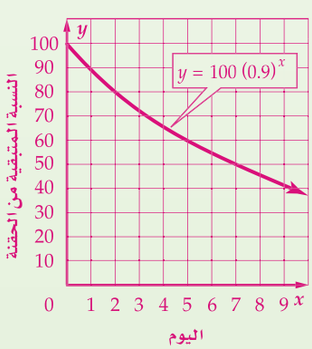
c) كم يبقى من المادة المحقونة في الجسم بعد 9 أيام؟ **أقل بقليل من 40%**

(24a)



24b) يمثل المقطع $P(x)$ عدد الهواتف العمومية عام 1999 م، وخط التقارب هو المحور x ، وسيتناقص عدد الهواتف العمومية ليقترب من 0 ولن يصل إليه، وذلك منطقي؛ لأنه ستكون هنالك حاجة دائمًا للهواتف العمومية.

(25a)



26) نظرية الأعداد: تتبع متتابعة عددية نمطًا معينًا حيث يساوي كل حد فيها 125% من الحد السابق له، فإذا كان الحد الأول يساوي 18، فأجب عما يأتي :

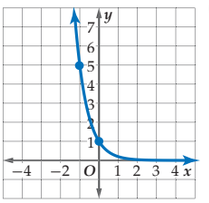
a) اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف. $f(x) = 18(1.25)^{x-1}$

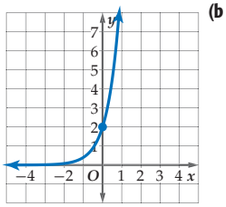
b) مثّل الدالة بيانيًّا لأول 10 حدود باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. انظر الهامش

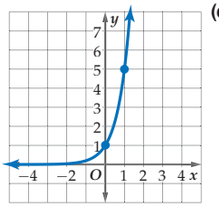
c) ما قيمة الحد العاشر؟ قرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. 134

قابل بين كل دالة مما يأتي، وتمثيلها البياني:

27) $y = 5^x$ **28)** $y = 2(5)^x$ **29)** $f(x) = (\frac{1}{5})^x$

a) 

b) 

c) 

c (27
b (28
a (29

30) تمثيلات متعددة: ستستعمل لحل هذا التمرين جداول القيم أدناه للدوال الأسية $f(x), g(x), h(x)$. للفروع a–d انظر ملحق الإجابات

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	−1	−5	−13	−29

x	−1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	−1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a) تمثيل بياني: مثّل كل دالة بيانيًّا في الفترة $-1 \le x \le 5$ على ورقة تمثيل بياني مستقلة.

b) تعبير لفظي: أي الدوال معاملها (a) سالب؟ وضّح إجابتك .

c) تحليل: أي الدوال أزيحت إلى اليسار؟

d) تحليل: أي الدوال تمثل نموًا أسيًّا ؟ وأيها يمثل اضمحلالًا أسيًّا؟

إرشادات للدراسة

الدالة الأم

للتمرين 30 ربما يساعدك التذكّر أن التمثيل البياني لأي دالة رئيسة $y = b^x$. يمر بالنقطة (0,1)

31a) صحيحة دائمًا؛ إجابة ممكنة: مجال الدالة الأسية هو مجموعة الأعداد الحقيقية. لذا، $(0, y)$ دائمًا موجودة.

31b) صحيحة أحيانًا؛ إجابة ممكنة. التمثيل البياني للدالة الأسية يقطع المحور x عندما $k < 0$.

32c) صحيحة أحيانًا؛ إجابة ممكنة: الدالة ليست أسية إذا كانت $b = 1$ أو $b = -1$.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) تبرير: حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك.

a) الدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ لها مقطع المحور y.

b) الدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ لها مقطع المحور x .

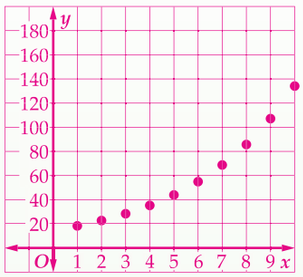
c) الدالة $f(x) = |b|^x$ هي دالة نمو أسي إذا كان b عددًا صحيحًا.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	13-22 ، 31-32، 34-50
ضمن ضمن المتوسط	13-21 فردي ، 23-26 ، 28 ، 30-32 ، 34-50
فوق فوق المتوسط	23-46 ، (اختياري: 47-50)

إجابة :

26b)



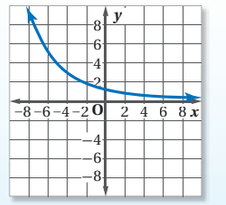
تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 30 جدول القيم، والتمثيلات البيانية، والتحليل؛ لاستكشاف الدوال الأسّية وتمييز أنماط النمو الأسي من أنماط الاضمحلال الأسي.

4 التقويم

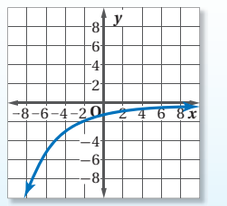
بطاقة خروج اكتب خمس دوال أسية مختلفة بعدة نسخ. وأعط دالة لكل طالب؛ ليكتب إن كانت الدالة تمثّل دالة نمو أسي أم دالة اضمحلال أسي. واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

(32) اكتشف الخطأ: طُلب إلى عمر وماجد أن يمثّلا الدالة $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$ بيانيًّا. أي منهما تمثيله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

عمر



ماجد



(33) تحدٍّ: تتناقص مادة بنسبة 35% كل يوم، وبعد 8 أيام بقي 8mg منها. كم مليجرامًا من المادة كان موجودًا في البداية؟ 251 mg تقريبًا

(34) مسألة مفتوحة: أعط قيمة للثابت b تجعل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ دالة اضمحلال أسّي. إجابة ممكنة: 10

(35) اكتب: صِف التحويل الذي ينقل الدالة $g(x) = b^x$ إلى الدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$.

32) ماجد؛ أهمل عمر الضرب في إشارة السالب.

35) إجابة ممكنة: الدالة الأم $g(x) = b^x$ تتسع رأسيًّا إذا كانت $|a| > 1$، وتضيق رأسيًّا إذا كانت $0 < |a| < 1$، كما أنها تنسحب إلى أعلى k وحدة إذا كانت k موجبة، وإلى أسفل $|k|$ وحدة إذا كانت k سالبة، كما أنها تنسحب إلى اليمين h وحدة إذا كانت h موجبة، وتنسحب إلى اليسار $|h|$ وحدة إذا كانت h سالبة.

انتبه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلبة في التمرين 32، بأن ضرب أي دالة في عدد سالب يعكس تمثيلها البياني في المحور x.

تدريب على اختبار معياري

(36) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$؟ A

A 3
B 2
C 1
D 0

(37) إذا كانت $g(x) = 4x$، $f(x) = \sqrt{x+1}$ فما قيمة $(fog)(2)$؟ C

A $\sqrt{3}$
B $4\sqrt{3}$
C 3
D 8

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (الدرس 7-1)

(38) $\sqrt{y+5} = \sqrt{2y-3}$ 8

(39) $\sqrt{y+1} + \sqrt{y-4} = 5$ 8

(40) $\sqrt{y-8} + 1 = 9$ 72

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 6-1)

(41) $\frac{1}{y^{\frac{2}{5}}}$ $\frac{y^{\frac{3}{5}}}{y}$

(42) $\frac{xyz^{\frac{2}{3}}}{z}$ $\frac{xy}{\sqrt[3]{z}}$

(43) $3x^{\frac{5}{3}} + 4x^{\frac{8}{3}}$ $\frac{3x + 4x^2}{x^{-\frac{2}{3}}}$

(44) $\sqrt{3x}$ $\sqrt[6]{27x^3}$

(45) $\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3}}$

(46) $\frac{a^{\frac{5}{12}}}{6a}$ $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كل تعبير مما يأتي، مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

(47) $f^{-7} \cdot f^4$ $\frac{1}{f^3}$

(48) $(3x^2)^3$ $27x^6$

(49) $(2y)(4xy^3)$ $8xy^4$

(50) $\left(\frac{3}{5}c^2f\right)\left(\frac{4}{3}cd\right)^2$ $\frac{16}{15}c^4d^2f$

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلبة أن يلقوا 50 قطعة نقد ويعدوا القطع التي يظهر عليها الصورة، ثم اطلب إليهم أن يستثنوا القطع التي ظهر عليها الصورة ويعيدوا تطبيق النشاط على القطع المتبقية ويستمروا في ذلك، مسجلين عدد القطع التي يظهر عليها الصورة في كل مرة، ثم اطلب إليهم تمثيل نواتج التجربة بيانيًّا (رقم مرة إلقاء القطع، عدد مرات ظهور الصورة) والتوصيل بين النقاط بمنحنى، واطلب إليهم أيضًا أن يفسروا نظريًّا لماذا يمكن تمثيل بياناتهم بالمعادلة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

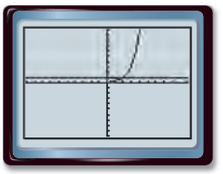
حل المعادلات الأسية
Solving Exponential Equations

يمكن استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل المعادلات الأسية بالتمثيل البياني أو باستعمال خاصية الجدول.

ولعمل ذلك اكتب هذه المعادلات على صورة نظام من المعادلات.

مثال

حُلّ المعادلة: $3^{x-4} = \frac{1}{9}$



خطوة 1 مثّل كل طرف للمعادلة بيانيًّا كدالة مستقلة.

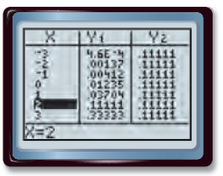
أدخل 3^{x-4} ليمثل Y1، وأدخل $\frac{1}{9}$ ليمثل Y2

تأكد من وضع الأقواس حول كل أسّ، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا.

خطوة 2 استعمل خاصية intersect.

يمكنك استعمال خاصية intersect في قائمة CALC لتقريب إحداثيي النقطة التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

ستُظهر الشاشة أن الإحداثي x لنقطة التقاطع يساوي 2؛ ولذا فإن حل المعادلة يساوي 2.



خطوة 3 استعمل خاصية TABLE.

يمكنك استعمال خاصية table أيضًا لتحديد النقطة التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

سيُعرض في الجدول قيم x وقيم y المناظرة لكل تمثيل بياني . تفحص الجدول لتجد قيمة x التي تكون عندها قيمتا y للتمثيلين البيانيين متساويتين. عند $x = 2$، يكون للدالتين قيمة y نفسها وهي $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$ مما يعني أن حل المعادلة يساوي 2.

تحقق عوّض عن x بـ 2 في المعادلة الأصلية.

المعادلة الأصلية	$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$
بتعويض 2 بدلًا من x	$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$
بالتبسيط	$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$
الحل صحيح	$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓

تمارين:

حُلّ كل معادلة فيما يأتي :

1) $9^{x-1} = \frac{1}{81}$ **−1**
2) $4^{x+3} = 2^{5x}$ **2**
3) $5^{x-1} = 2^{x}$ **1.76**
4) $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$ **−1.2**
5) $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$ **−2.6**

6. **اكتب:** وضح لماذا يكون تمثيل نظام من المعادلات بيانيًّا صالحًا لحل معادلات أسية.

6. بما أن النظام يتكون من تعابير في كلا طرفي المعادلة الأصلية، فمهما كانت قيم حلول النظام ستحقق المعادلة الأصلية.

1 التركيز

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لحل معادلات أسية بيانيًّا، أو باستعمال ميزة الجداول.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

ذكّر الطلبة بوضع الأسس بين قوسين في الخطوة 1 من النشاط.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلبة في مجموعات ثنائية أو ثلاثية ذوي قدرات متفاوتة، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط وحل التمارين 1-5.

نشاط

- قبل البدء بمناقشة النشاط، استعمل معادلة بسيطة مثل $2x = 6$ لتذكّر الطلبة بكيفية حل المعادلات بيانيًّا.
ثم مثّل المعادلتين $y = 2x$ و $y = 6$ بيانيًّا، وحدد نقطة التقاطع.
- اسأل الطلبة ما أهمية وضع الأسس بين أقواس في الخطوة 1 من النشاط.
- اطلب إلى الطلبة تعويض حل النشاط في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 2-5.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 4؛ لتقويم مدى إتقان الطلبة لاستعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات أسية.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

تمثيل الدوال الأسّية بيانيًّا.

الدرس 2-2

حل معادلات أسّية.

ما بعد الدرس 2-2

تطوير تعريف اللوغاريتمات من خلال استكشاف ووصف العلاقة بين الدوال الأسية ومعكوسها.

2 التدريس

أسئلة تعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما قيمة x التي تمثّل عام 2010 م؟ 6
- ما عدد المشتركين الذي يمكن تمثيله بالقيمة $y = 5.2$؟ 5200000
- كم سيكون عدد المشتركين عام 2012 م؟ 27300000 مشترك تقريبًا

حل المعادلات الأسّية

مثال 1 يُبيّن كيفية حل معادلات أسية.

حل المعادلات الأسية
Solving Exponential Equations

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الأسية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل معادلات أسية.

المفردات الأساسية

المعادلة الأسية
exponential equation

الربح المركب
compound interest

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كانت الاشتراكات في أحد المواقع تُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ 1425 هـ – 2004 م، و y عدد المشتركين بالمليون.

فيمكنك استعمال $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

حل المعادلات الأسية: تكون المتغيرات في المعادلة الأسية في موقع الأسس.

مفهوم أساسي خاصية المساواة للدوال الأسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$. و إذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$.

يمكن استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية لحل معادلات أسية.

مثال 1 حل معادلات أسية

حُلّ كلًّا من المعادلتين الأسيتين الآتيتين:

a) $2^x = 8^3$

المعادلة الأصلية	$2^x = 8^3$
بكتابة 8 على صورة 2^3	$2^x = (2^3)^3$
خاصية قوة القوة	$2^x = 2^9$
خاصية المساواة للدوال الأسية	$x = 9$

b) $9^{2x-1} = 3^{6x}$

المعادلة الأصلية	$9^{2x-1} = 3^{6x}$
بكتابة 9 على صورة 3^2	$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$
خاصيةقوة القوة	$3^{4x-2} = 3^{6x}$
خاصية المساواة للدوال الأسية	$4x - 2 = 6x$
بطرح $4x$ من كلا الطرفين	$-2 = 2x$
بقسمة الطرفين على 2	$-1 = x$

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين الأسيتين الآتيتين:

1A) $4^{2n-1} = 64$ 2 **1B)** $5^{5x} = 125^{x+2}$ 3

مصادر الدرس 2-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (76)	• تنويع التعليم، ص (76, 78, 79)	• تنويع التعليم، ص (78, 79)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

يمكنك استعمال معلومات عن النمو أو الاضمحلال لكتابة معادلة دالة أسية.

مثال 2 من واقع الحياة — **كتابة دالة أسّية**

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير أعداد البكتيريا بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

الدالة الأسية $y = ab^x$

في بداية التجربة كان الزمن 0 ساعة، وكان هناك 7500 خلية بكتيرية؛ لذا فمقطع y أو قيمة a تساوي 7500.

عندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000؛ لذا عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500 — $23000 = 7500 \cdot b^4$

بقسمة الطرفين على 7500 — $3.067 \approx b^4$

بإيجاد الجذر الرابع للطرفين — $\sqrt[4]{3.067} \approx b$

باستعمال الآلة الحاسبة — $1.323 \approx b$

المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y \approx 7500(1.323)^x$.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية في العينة بعد 12 ساعة؟

المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية — $y \approx 7500(1.323)^x$

بالتعويض عن x بالعدد 12 — $\approx 7500(1.323)^{12}$

باستعمال الآلة الحاسبة — ≈ 215665

سيكون هنالك 215665 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

تأكد

2) إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 2005 م ، وفي عام 2010 م أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها سابقًا.

A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب معادلة تمثل إنتاج المصنع سنويًّا من العبوات المعادة تصنيعها . $y = 3200000(0.67)^x$

B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات معادة التصنيع عام 2050 م؟ لا شيء

تستعمل الدوال الأسية في مواقف تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الناتج عن إضافة الربح إلى المبلغ المستثمر أو رأس المال.

مفهوم أساسي — **الربح المركب**

أضف إلى مطويتك

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال القانون

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة.

P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي، n عدد مرات احتساب الربح في السنة .

الربط مع واقع الحياة

قبل إعادة تدوير البلاستيك يتم غسله بمادة الصودا الكاوية المضاف إليها الماء الساخن. ولا ينصح باستعمال مخلفات البلاستيك في إنتاج منتجات تتفاعل مع المواد الغذائية.

حل المعادلات الأسّية

مثال 2 يُبيّن كيفية كتابة دالة أسية لنمذجة موقف حياتي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $3^x = 9^4$ 8

b) $2^{5x} = 4^{2x-1}$ –2

2 **سكان:** يقدر عدد سكان إحدى المدن عام 2000 م بـ 1321045 نسمة، وفي عام 2007 م قدّر بـ 1512986نسمة.

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها؛ لتمثيل عدد السكان. ليكن x عدد السنوات منذ عام 2000 م.

$y = 1321045(1.0196)^x$

b) تنبأ بعدد سكان تلك المدينة عام 2013 م. 1700221

التركيز في المحتوى الرياضي

حل المعادلات الأسّية يمكن حل المعادلات الأسّية البسيطة من خلال إعادة كتابة طرف، أو كلا طرفي المعادلة على أن تكون الأساسات متساوية، وعندئذٍ يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية؛ لإيجاد قيم المتغيرات.

حل المعادلات الأسّية

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الربح المركّب باستعمال دالة أسّية.

مثال إضافي

3 يعطي استثمار ما ربحًا مركبًا مُعدّل نسبته 5.4% سنويًّا، ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال 4 مرات سنويًّا، إذا تم استثمار مبلغ BD 4000، فكم سيصبح المبلغ الكلي بعد 8 سنوات؟ BD 6143.56

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة : اطلب إلى الطلبة كتابة، وشرح خاصية المساواة للدوال الأسية مع تضمينها أمثلة متنوعة.

مثال 3 الربح المركب

استثمر حمد مبلغ BD2500 في مشروع تجاري بربح مركب سنوي بمعدل 4.2% . إذا تم إضافة الأرباح إلى رأس المال كل شهر، فكم سيكون رأس المال بعد 15 سنة إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ المتجمع بعد 15 سنة.

خطط: استعمل قانون الربح المركب.

$P = 2500, r = 0.042, n = 12, t = 15$

حُلّ:

قانون الربح المركب

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

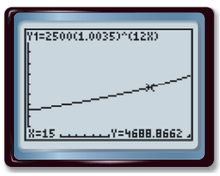
$P = 2500, r = 0.042, n = 12, t = 15$

$$= 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot (15)}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 4688.87$$

تحقق: مثّل المعادلة المناظرة بيانيًّا $y = 2500(1.0035)^{12t}$، استعمل **CALC: value** لتجد y عندما $x = 15$.



قيمة y هي 4688.8662 وهي قريبة جدًّا من القيمة 4688.87 فالإجابة معقولة.

تنبية !

النسبة المئوية تذكّر أن تحول جميع أشكال النسب إلى كسور عشرية فمثلًا، $4.2\% = 0.042$

تأكد

3) استثمر علي مبلغ BD100 بربح مركب مرتين شهريًّا بمعدل 1.2% سنويًّا، كم سيكون المبلغ الكلي بعد 20 سنة إلى أقرب منزلتين عشريتين. **BD127.12 تقريبًا**

تأكد من فهمك

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي :

مثال 1 صفحة 74

1) $3^{5x} = 27^{2x-4}$ **12**

2) $16^{2y-3} = 4^{y+1}$ $\frac{7}{3}$

3) $2^{6x} = 32^{x-2}$ **−10**

4) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$ $\frac{8}{3}$

مثال 2 صفحة 75

5) علوم: الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين للخلية الأصلية تمامًا، ويمكن لأحد أنواع الخلايا البكتيرية النشطة أن تجري عملية الانقسام بعد كل 15 دقيقة.

a) اكتب دالة أسّية تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق. $c = 2^{\frac{t}{15}}$

b) إذا بدأت بخلية بكتيرية واحدة، فكم خلية ستتكون بعد 1h؟ **16 خلية**

مثال 3 صفحة 76

6) استثمر مبلغ BD500 بربح مركب مرتين شهريًّا بمعدل 2.25%، كم سيكون المبلغ الكلي بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ **BD572.23 تقريبًا**

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا أردت أن يتحقق الطلبة من صحة حلهم للمعادلة،

فذكرهم بتعويض هذا الحل في المعادلة الأصلية؛ للتأكد من أنه يحققها.

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي :

مثال 1 صفحة 74

7) $8^{4x+2} = 64$ 0

9) $81^{a+2} = 3^{3a+1}$ انظر ملحق الإجابات

11) $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$ $\frac{5}{3}$

8) $5^{x-6} = 125$ 9

10) $256^{b+2} = 4^{2-2b}$ −1

12) $8^{2y+4} = 16^{y+1}$ −4

مثال 2 صفحة 75

13) **مال:** ورث خالد مبلغ BD 10000 عام 2003 واستثمره في مشروع تجاري، وقدّر خالد أن المبلغ المستثمر سيصبح BD 16960 بحلول عام 2015.

a) اكتب دالة أسية تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 2003. $y = 10000(1.045)^x$

b) افترض أن المبلغ استمر في الزيادة بالمعدل نفسه، فكم سيصبح عام 2025 إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ BD 26336.52 تقريبًا

اكتب دالة أسية للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط مما يأتي:

14) $(3, 100), (0, 6.4)$ $y = 6.4(2.5)^x$

15) $(4, 81), (0, 256)$ $y = 256(0.75)^x$

16) $(5, 371293), (0, 128)$ $y = 128(4.926)^x$

17) $(4, 21609), (0, 144)$ $y = 144(3.5)^x$

مثال 3 صفحة 76

18) استثمر حسن مبلغ BD 700 بربح مركب شهريًّا بمعدل 4.3% سنويًّا. كم سيكون المبلغ الكلي بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين. BD 945.34 تقريبًا

19) استثمر جاسم وحمد مبلغ BD 21000 في مشروع تجاري بربح مركب شهريًّا بمعدل 13.2% سنويًّا. كم سيكون المبلغ الكلي بعد 12 سنة إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ BD 101481.22 تقريبًا

20) **علوم:** وضع كوب من الشاي درجة حرارته 90°C في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي 20°C فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارته بعد t دقيقة بالدالة $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة. 45.02° C تقريبًا

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة. 28.94° C تقريبًا

c) إذا كانت درجة الحرارة المناسبة للشرب 60°C ، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساويةً لها أم أقل منها بعد 10 دقائق؟ أقل منها

21) **حيوانات:** أفادت الدراسات أن الحيوانات تدافع عن موطنها ضمن مساحة مقدرة بالياردات المربعة تتناسب طرديًّا مع وزن الحيوان بالأرطال مرفوعًا للأس 1.31. للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

a) إذا دافع قندس يزن 45 رطلًا عن منطقة مساحتها $170yd^2$، فاكتب معادلة لمساحة المنطقة a التي يدافع عنها قندس وزنه w رطلًا .

b) يعتقد العلماء أن أحد أنواع القندس التي عاشت في الماضي كان يصل طوله إلى 11ft، ويزن 430 رطلًا. استعمل المعادلة السابقة لتحديد مساحة المنطقة التي كان يدافع عنها.

22) **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طرديًّا مع الارتفاع بالأمتار مرفوعًا للأس $\frac{3}{2}$.

a) يبلغ طول شجرة صغيرة من أشجار الحور 6 m، وقطر قاعدة جذعها 19.1cm.استعمل هذه المعطيات لكتابة معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة إذا كان ارتفاعها h متر. $d = 1.30h^{\frac{3}{2}}$

b) اعتمادًا على المعلومات في فقرة "الربط مع واقع الحياة". أوجد قطر قاعدة جذع الشجرة المذكورة. 1001 cm تقريبًا

الربط مع واقع الحياة

إحدى أقدم الأشجار الحية في العالم موجودة في ولاية كاليفورنيا الأمريكية، ويُقدر عمرها بين 2100 عام إلى 2500عام، ويبلغ ارتفاعها 84m، ومن أطول الأشجار عمرًا في مملكة البحرين شجرة الحياة التي ظلت قائمة منذ 4 قرون دون أي مصدر مرئي للمياه.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 6-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	7-19 ، 32 ، 35-50
ضمن ضمن المتوسط	7-19 فردي ، 20 ، 21 ، 23-27 فردي ، 29-32 ، 35-50
فوق فوق المتوسط	20-47 ، (اختياري: 48-50)

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي:

23) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$ $-\frac{2}{5}$ **24)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$ $\frac{1}{7}$ **25)** $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$ -6

26) $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$ $-\frac{4}{13}$ **27)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$ $\frac{11}{8}$ **28)** $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$ 1

29) سكان: بلغ عدد سكان العالم عام 1950م، 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار . اكتب المعادلة بدلالة x حيث x عدد السنوات منذ عام 1950م (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف) $y = 2.556(1.0187)^x$

b) افترض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدّر عدد السكان عام 2000. **6.455 مليارات تقريبًا**

c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان. **انظر الهامش**

d) استعمل المعادلة التي توصلت إليها في فرع **a** لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضح إجابتك. **انظر الهامش**

30) ثقافة مالية: عُرِض على سعيد خياران للاستثمار، وعليه أن يختار أحدهما. **انظر الهامش**

a) اكتب معادلة كل من الخيار الأول والخيار الثاني للاستثمار.

b) مثّل بيانيًّا منحنىً يوضح المبلغ الكلي من كل استثمار بعد t سنة.

c) وضح أيهما أفضل للاستثمار: الخيار الأول أم الخيار الثاني؟

31) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين الزيادة المتسارعة في الدوال الأسية . قص ورقة إلى نصفين، وضعهما بعضهما فوق بعض، ثم قصهما معًا إلى نصفين وضعهما بعضهما فوق بعض، وكرر هذه العملية عدة مرات.

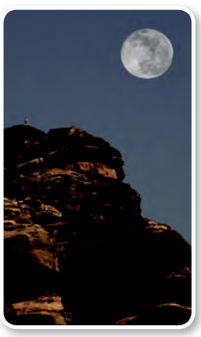
a) محسوس: عُدّ قطع الورق الناتجة بعد القص الأول، ثم بعد القص الثاني، والثالث، والرابع. **2. 4. 8. 16**

b) جدولة: دوّن نتائجك في جدول. **انظر ملحق الإجابات**

c) ترميز: استعمل النمط في الجدول لكتابة معادلة تمثل عدد قطع الورق بعد قصها x مرة. $y = 2^x$

d) تحليل: يقدر سُمك الورقة الاعتيادية بنحو 0.003in، اكتب معادلة تمثل سُمك رزمة الورق بعد قصها x مرة. $y = 0.003(2)^x$

e) تحليل: ما سُمك رزمة من الورق بعد قصها 30 مرة؟ **3221225.47 in تقريبًا.**



الربط مع واقع الحياة

نظريًا إذا قصصت رزمة من الورق إلى نصفين، ورتبتهما بعضهما فوق بعض، وكررت هذه العملية **42** مرة، فإنك ستصل إلى القمر.

إجابات:

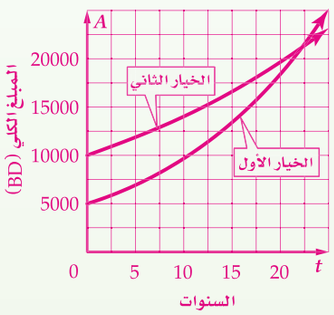
29c) التقدير أكبر من العدد الحقيقي للسكان بـ 375 مليون.

29d) 9.3498 مليارًا تقريبًا، وبما أن التنبؤ بعدد السكان عام 2000 كان أكبر من العدد الحقيقي، فقد يكون هذا التنبؤ أكبر مما سيكون عليه في الواقع في ذلك الوقت.

30a) $A = 5000\left(\frac{4.065}{4}\right)^{4t}$

$A = 5000\left[\left(\frac{12.042}{12}\right)^{12t} + \left(\frac{52.023}{52}\right)^{52t}\right]$

30b)



30c) إجابة ممكنة:

خلال أول 22 سنة يكون الخيار الثاني أفضل؛ لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الأول.

وبعد 22 سنة يصبح الخيار الأول أفضل لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الثاني.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين **31**؛ النموذج الحسي، وجدول القيم، والمعادلة، والتحليل؛ لوصف دالة أسّية.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع ساعد الطلبة على تطوير حسهم الاستثماري من خلال توفير مبلغ من المال لاستثماره، والطلب إليهم أن يبحثوا في الإنترنت أو في الصحف عن استثمارات بمعدلات ربح مناسبة. وعليهم أن يسجلوا معلومات موثقة تشمل اسم المشروع الاستثماري ، ومعدل نسبة الربح، وزمن إضافة الأرباح إلى رأس المال، والقيود التي يجب الالتزام بها. ثم اطلب إليهم أن يمثّلوا المبلغ الكلي مع مرور الزمن بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتب:** صف ما يحدث في مسألة الربح المركب إذا زاد عدد مرات احتساب الأرباح خلال العام، ولم يتغير المبلغ الأصلي وكذلك الفترة الزمنية الكلية للاستثمار. انظر ملحق الإجابات

33) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة الأسية $4^x = 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18}$. 37.1610

34) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك

a) $2^x > -(8^{20x})$ لكل قيم x.

b) التمثيل البياني لمعادلة النمو الأسي متزايد.

c) التمثيل البياني لمعادلة الاضمحلال الأسي متزايد.

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$. إجابة ممكنة: $4^x = 4^2$

36) **برهان:** أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$. انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار معياري

37) ما قيمة x في المعادلة الأسية $7^{x-1} + 7 = 8$؟ H

F -1 H 1
G 0 J 2

38) إذا كانت $f(x) = 5x$، فما قيمة $f[f(-1)]$؟ A

A -25 B -5
C 5 D 25

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة أسية مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-1) 54–56. انظر الهامش

39) $y = 2(3)^x$ **40)** $y = 5(2)^x$ **41)** $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (الدرس 1-7)

42) $\sqrt{x+5} - 3 = 0$ 4 **43)** $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$ 18 **44)** $\sqrt[4]{2x-1} = 2$ 8.5

45) $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$ 5 **46)** $(3x-2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$ $\frac{1}{3}$ **47)** $(7x-1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$ -1

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد $[h \circ g](x)$, $[g \circ h](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

48) $h(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x + 4$ $6x + 1$, $6x + 7$

49) $h(x) = x + 4$, $g(x) = |x|$ $[g \circ h](x) = x+4$, $[h \circ g](x) = |x| + 4$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي:

50) $f(x) = 2x + 1$ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

51) $g(x) = -2x^2$ $g^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{x}{2}}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة توسعة حل المثال 3، وذلك بزيادة عدد مرات إضافة الأرباح إلى المبلغ الأصلي. ولتكن هذه الإضافة يوميًّا ($n = 365$)، ثم استكشف ما الذي سيحصل لو تغيرت n إلى عشرات آلاف المرات في العام. لاحظ في هذه الحالة أن القيمة النهائية يمكن أن تصل إلى الحد الأعلى، وهو BD4694.03 .

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة وصف قيم b الممكنة في تعبير الدالة الأسية على الصورة $y = b^x$.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-2 ,2-1 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 2 .

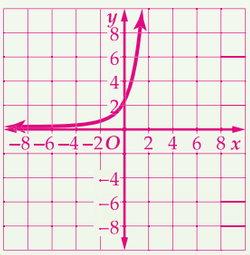
إجابات:

34a) صحيحة دائمًا؛ لأن 2^x موجبة لجميع قيم x، بينما $-(8^{20x})$ سالبة لجميع قيم x .

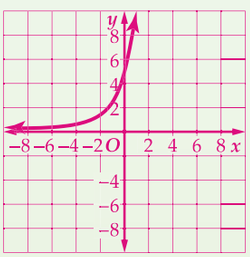
34b) صحيحة دائمًا.

34c) غير صحيحة أبدًا؛ لأنه حسب التعريف يكون التمثيل البياني لمعادلة الاضمحلال الأسي متناقصًا.

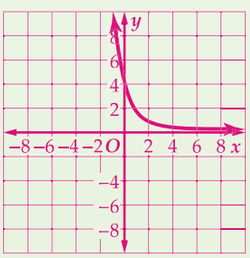
39)



40)



41)



1 التركيز

الترابط الرأسي

ماقبل الدرس 2-3

إيجاد المعكوس لدالة.

الدرس 2-3

إيجاد قيمة تعابير لوغاريتمية.

تمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.

ما بعد الدرس 2-3

إيجاد حلول معادلات لوغاريتمية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة تعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- سمِّ أشياء تسبح في الفضاء بالقرب من الكرة الأرضية؟ إجابة ممكنة: كويكبات، نيازك، مذنبات.
- ماالمقصود بمدى التأثير؟ إجابة ممكنة: احتمالية اصطدام مجسم بالأرض.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
Logarithms and Logarithmic Functions

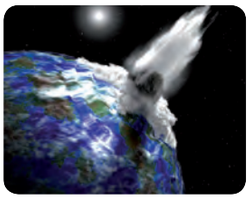
فيما سبق
درست إيجاد معكوس الدالة.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجد قيمة تعابير لوغاريتمية.
- أمثّل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

المفردات الأساسية
اللوغاريتم
logarithm
الدالة اللوغاريتمية
logarithmic function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

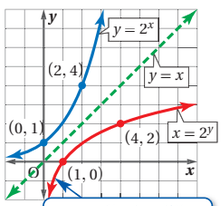


يعتقد كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف الأشياء القريبة من الأرض اعتمادًا على مدى تأثيرها. ولجعل المقارنة بين هذه الأشياء أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات. ويمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS للأشياء من خلال المعادلة $PS = \log_{10} R$، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الشيء.

الدوال والتعابير اللوغاريتمية لتتناول الدالة الأسية $f(x) = 2^x$ ومعكوسها. تذكّر أنه يمكنك تمثيل معكوس تلك الدالة بيانيًّا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة للدالة الأسية.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



مع تناقص قيم y تقترب قيم x من الصفر.

يمكن تعريف معكوس $y = 2^x$ بأنه $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن معكوس $y = b^x$ هو $x = b^y$. في المعادلة $x = b^y$ يسمى المتغير y **لوغاريتم** x، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$، ويقرأ y تساوي $\log x$ للأساس b.

مفهوم أساسي — اللوغاريتم للأساس b

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرَّف على أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز افرض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$b^y = x \iff \log_b x = y$$

مثال $\log_3 27 = y \iff 3^y = 27$

إرشادات للدراسة
تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، و $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

مثال 1 — التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a $\log_2 8 = 3$

$8 = 2^3$

b $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\frac{1}{256} = 4^{-4}$

تأكد

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

1A $\log_4 16 = 2$ $16 = 4^2$

1B $\log_3 729 = 6$ $729 = 3^6$

مصادر الدرس 2-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (81, 86)	• تنويع التعليم، ص (81, 86)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات المهارات	• كتاب التمارين، ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة معادلات أسّية على الصورة اللوغاريتمية أيضًا.

مثال 2 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

تأكد

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

2A $4^3 = 64$ $\log_4 64 = 3$

2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$ $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي.

تنبيه!

أساس اللوغاريتم

من السهل أن يختلط عليك معرفة أي الأعداد هو الأساس وأيها الأس في المعادلات اللوغاريتمية. لذا، استعمل تظليلًا بألوان مختلفة للأعداد أثناء الحل لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

مثال 3 إيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي

أوجد قيمة $\log_{16} 4$

بفرض أن اللوغاريتم يساوي y — $\log_{16} 4 = y$

تعريف اللوغاريتم — $4 = 16^y$

$16 = 4^2$ — $4^1 = 4^{2y}$

خاصية المساواة للدوال الأسية — $1 = 2y$

بقسمة كلا الطرفين على 2 — $\frac{1}{2} = y$

لذا، فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

تأكد

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي :

3A $\log_3 81$ 4

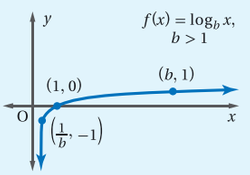
3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$ -8

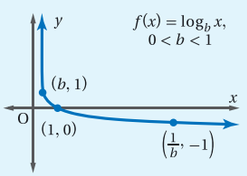
تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا تُسمى الدالة $y = \log_b x$، حيث $b \neq 1$ **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني الأم للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي الدالة الأم للدوال اللوغاريتمية

أضف إلى مطويتك

الدالة الأم	$f(x) = \log_b x$	نوع التمثيل البياني	منحنى
المجال	جميع الأعداد الحقيقية الموجبة	المدى	جميع الأعداد الحقيقية
خط التقارب	المحور y	نقطة التقاطع مع المحور x	(1, 0)





التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية عند تقديم اللوغاريتمات للطلبة، استعمل لونًا مختلفًا للأجزاء المتناظرة في جميع الدوال الأسية واللوغاريتمية. فمثلًا استعمل 3 ألوان مختلفة لكل من $\log_b x = y$ عند بيان أن x, y, b تناظر $x = b^y$.

الدوال والتعابير اللوغاريتمية

مثال 1 يُبيّن كيفية كتابة معادلات لوغاريتمية على الصورة الأسية.

مثال 2 يُبيّن كيفية كتابة معادلات أسية على الصورة اللوغاريتمية.

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال تعريف اللوغاريتمات؛ لإيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة الأسية:

a $\log_3 9 = 2$ $9 = 3^2$

b $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

2 اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة اللوغاريتمية:

a $5^3 = 125$ $\log_5 125 = 3$

b $27^{\frac{1}{3}} = 3$ $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

3 أوجد قيمة $\log_3 243$ 5

تنويع التعليم

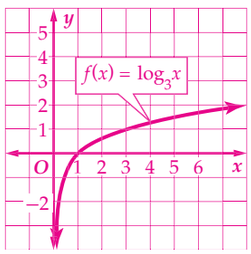
ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون بعد مناقشة تعريف اللوغاريتمات؛ اكتب المعادلة $y = 2x$ على السبورة، ثم اطلب إلى الطلبة حلها بالنسبة للمتغير x. $x = \frac{1}{2}y$، وحُلّ المعادلة $y = x^2$ أيضًا بالنسبة للمتغير x. $x = \pm\sqrt{y}$ والآن، اكتب المعادلة $y = 2^x$ على السبورة، واطلب إلى الطلبة حلها بالنسبة للمتغير x. وقد يربك ذلك الطلبة. لذا، وضح لهم أن المعادلة المقصودة هي $x = \log_2 y$، وأكد لهم أن اللوغاريتم يُعرّف على أنه معكوس دالة أسّية.

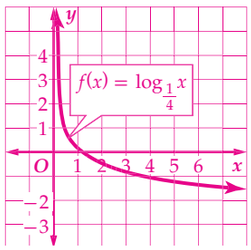
مثال إضافي

4 مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

(a $f(x) = \log_3 x$



(b $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

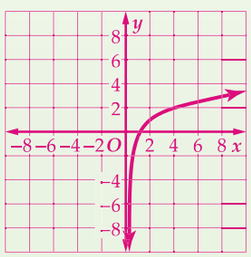


إرشادات للمعلم الجديد

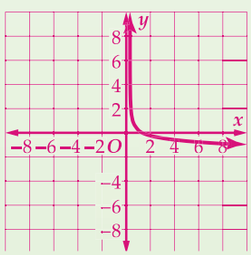
سرعة بما أن الطلبة لم يتعرفوا دوال اللوغاريتمات سابقًا، ويتوقع أن تسبب لهم بعض الإرباك. لذا، فقد يحتاجون إلى المزيد من الوقت لاستيعاب موضوع هذا الدرس، قبل إكمال باقي دروس الفصل.

إجابات :

(4A



(4B



إرشادات للدراسة

الأس الصفري

تذكر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$ ، وأن $\log_2 0$ غير معرف لأن $2^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x .

مثال 4 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

(a $f(x) = \log_5 x$

خطوة 1 حدّد الأساس.

$b = 5$

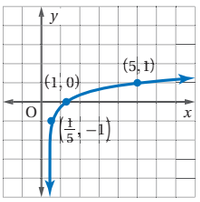
خطوة 2 حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $\left(\frac{1}{5}, -1\right), (1, 0), (5, 1)$

خطوة 3 مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى.



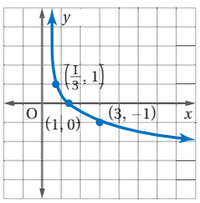
(b $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

خطوة 1 $b = \frac{1}{3}$

خطوة 2 $0 < \frac{1}{3} < 1$ ؛

لذا استعمل النقاط $\left(\frac{1}{3}, 1\right), (1, 0), (3, -1)$.

خطوة 3 ارسم المنحنى.



تأكد

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا : انظر الهامش

(4A $f(x) = \log_2 x$ **(4B** $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

يمكن تطبيق التحويلات التي تعلمتها سابقًا لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

مفهوم أساسي تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

أضف إلى مطويتك

$$f(x) = a \log_b (x - h) + k$$

h : إزاحة أفقية	k : إزاحة رأسية
إذا كان h موجبةً، إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة إلى اليمين إذا كان h سالبةً، إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة إلى اليسار	إذا كان k موجبةً، إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدة إلى الأعلى إذا كان k سالبةً، إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدة إلى الأسفل

a : الشكل والاتجاه

إذا كان $a < 0$، ينعكس التمثيل البياني حول المحور x قبل إجراء الإزاحة الأفقية والرأسية.

إذا كان $\lvert a \rvert > 1$ يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
إذا كان $0 < \lvert a \rvert < 1$، يضيق التمثيل البياني رأسيًّا.

التركيز في المحتوى الرياضي

اللوغاريتمات تُقرأ المعادلة $y = \log_b x$ على النحو الآتي "y تساوي لوغاريتم x للأساس b"، والأساس b هو دائمًا عدد موجب لا يساوي الواحد. وبما أن المعادلة $y = \log_b x$ مكافئة للمعادلة الأسية $x = b^y$ ، فإن اللوغاريتم هو أسّ، إذْ إنه الأس الذي يُرفع إليه الأساس b ليساوي العدد x.

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثال 4 يُبيّن كيفية تمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.

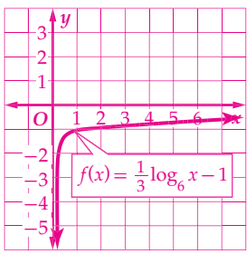
مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال التحويلات الهندسية؛ لتمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.

مثال 6 يُبيّن كيفية إيجاد معكوس الدالة الأسية، وذلك لحل مثال من واقع الحياة.

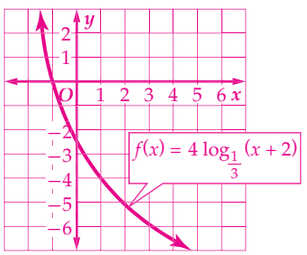
مثالان إضافيان

5 مثّل كلّ دالة مما يأتي بيانيًّا:

a) $f(x) = \frac{1}{3}\log_6 x - 1$



b) $f(x) = 4\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$



6 **الضغط الجوي:** يُعرّف الضغط الجوي عند سطح الأرض بوحدة أتموسفير واحدة، ويتناقص بنسبة 20% كلما ارتفعنا إلى أعلى 1mi. ويمكن تمثيل الضغط الجوي بالدالة $P = 0.8^x$، حيث x الارتفاع بالأميال.

a) أوجد الضغط الجوي عند نقطة على ارتفاع 8 mi عن سطح الأرض. 0.168 atm

b) أوجد معادلة لمعكوس الدالة P. $P = \log_{0.8} x$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

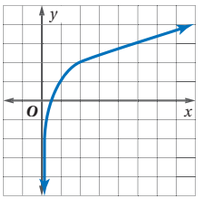
نلاحظ في المثال 5a أنه مع اقتراب x من مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى مالانهاية أيضًا.

مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة لوغاريتمية مما يأتي بيانيًّا:

a) $g(x) = 3\log_{10} x + 1$

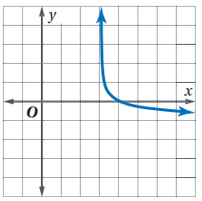
التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.



- $|a| = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 0$: لا توجد إزاحة أفقية.
- $k = 1$: يزاح التمثيل البياني وحدة واحدة إلى الأعلى.

b) $g(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.



- $|a| = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 3$: يزاح التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا توجد إزاحة رأسية.

تأكد

مثّل كل دالة لوغاريتمية مما يأتي بيانيًّا: انظر الهامش

5A) $g(x) = 2\log_3(x-2)$ **5B)** $g(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد معكوس الدوال الأسية

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالمعادلة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع واقع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	بتعويض 9.2 بدلاً من x
$= 10^{8.2}$	بالتبسيط
$= 158489319.2$	باستعمال الآلة الحاسبة

b) أوجد معادلة على الصورة $y = \log_{10} x + c$ لمعكوس الدالة.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	بإضافة العدد 1 لكلا الطرفين

تأكد

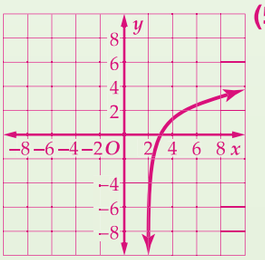
6) أوجد معادلة لمعكوس الدالة $y = 0.5^x$ $y = \log_{0.5} x$

الربط مع واقع الحياة

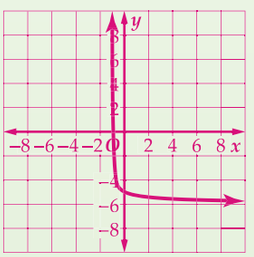
أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960 م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، وأزالت قرى كاملة وقتلت آلاف السكان.

إجابات:

5A)



5B)



تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 80

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية :

1) $\log_8 512 = 3$ $8^3 = 512$ **2)** $\log_5 625 = 4$ $5^4 = 625$

مثال 2 صفحة 81

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية :

3) $11^3 = 1331$ $\log_{11} 1331 = 3$ **4)** $16^{\frac{3}{4}} = 8$ $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

مثال 3 صفحة 81

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي :

5) $\log_{13} 169$ 2 **6)** $\log_2 \frac{1}{128}$ −7 **7)** $\log_6 1$ 0

المثالان 5 , 4 الصفحتان 83 , 82

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا : 11–8. انظر الهامش

8) $f(x) = \log_3 x$ **9)** $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

10) $g(x) = 4 \log_4 (x - 6)$ **11)** $g(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$

مثال 6 صفحة 83

12) علوم: استعمل المعلومات في فقرة "لماذا" في بداية الدرس. لمعرفة قيمة مقياس باليرمو لشيء ما من خلال الدالة $PS = \log_{10} R$، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الشيء. أوجد معكوس الدالة.

$R = 10^{PS}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 80

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية :

13) $\log_2 16 = 4$ $2^4 = 16$ **14)** $\log_7 343 = 3$ $7^3 = 343$ **15)** $\log_9 \frac{1}{81} = -2$ $9^{-2} = \frac{1}{81}$

16) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ $3^{-3} = \frac{1}{27}$ **17)** $\log_{12} 144 = 2$ $12^2 = 144$ **18)** $\log_9 1 = 0$ $9^0 = 1$

مثال 2 صفحة 81

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية :

19) $9^{-1} = \frac{1}{9}$ $\log_9 \frac{1}{9} = -1$ **20)** $6^{-3} = \frac{1}{216}$ $\log_6 \frac{1}{216} = -3$ **21)** $2^8 = 256$ $\log_2 256 = 8$

22) $4^6 = 4096$ $\log_4 4096 = 6$ **23)** $27^{\frac{2}{3}} = 9$ $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$ **24)** $25^{\frac{3}{2}} = 125$ $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

مثال 3 صفحة 81

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي :

25) $\log_3 \frac{1}{9}$ −2 **26)** $\log_4 \frac{1}{64}$ −3 **27)** $\log_6 216$ 3 **28)** $\log_{27} 3$ $\frac{1}{3}$

29) $\log_{32} 2$ $\frac{1}{5}$ **30)** $\log_{121} 11$ $\frac{1}{2}$ **31)** $\log_{\frac{1}{5}} 3125$ انظر الهامش **32)** $\log_{\frac{1}{8}} 512$ −3

33) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ 3

المثالان 5 , 4 الصفحتان 83 , 82

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا : للتمارين 42–34 انظر ملحق الإجابات

34) $g(x) = 4 \log_2 x + 6$ **35)** $g(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$ **36)** $g(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$

37) $g(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$ **38)** $g(x) = -8 \log_3 (x - 4)$ **39)** $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

40) $g(x) = \log_5 (x - 4) - 5$ **41)** $g(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$ **42)** $g(x) = -\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} (x + 2) - 5$

3 التدريب

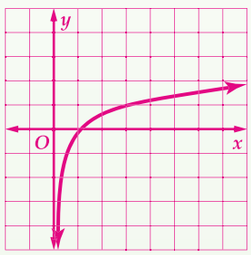
التقويم التكويني

استعمل التمارين 12-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

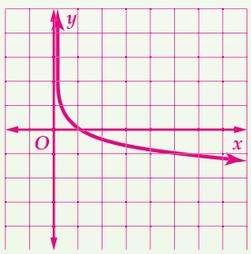
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

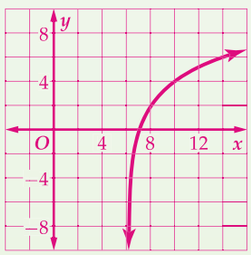
8)



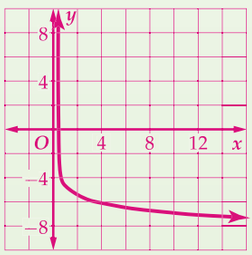
9)



10)



11)



31) بفرض أن اللوغاريتم يساوي y $\log_{\frac{1}{5}} 3125 = y$

تعريف اللوغاريتم $\left(\frac{1}{5}\right)^y = 3125$

$\frac{1}{5} = 5^{-1}$ $5^5 = 5^{-1y}$

خاصية المساواة في الدوال الأسية $5 = -1y$

بقسمة كل طرف على −1 $-5 = y$

لذا $\log_{\frac{1}{5}} 3125 = -5$.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	48–13 ، 51 ، 71–53
ضمن ضمن المتوسط	47-13 فردي ، 51-49 ، 71-53
فوق فوق المتوسط	67-49 ، (اختياري: 71-68)

مثال 6
صفحة 83

الربط مع واقع الحياة

يحدد زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير كمية الضوء الساقطة على الفيلم. وكل درجة إلى الأعلى تضاعف كمية الضوء السابقة.

43) تصوير: يمثل القانون $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة.

a) أعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي من درجات زر تعديل الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعديل نقص الإضاءة؟ **2**

b) مثّل الدالة بيانيًّا. **انظر الهامش**

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **b** للتنبؤ بنسبة إضاءة الشمس إذا قلت درجة زر ضبط الإضاءة 3 درجات، فهل يُسمح بزيادة كمية الضوء في الكرة أم نقصانها؟ **نقصان كمية الضوء، $\frac{1}{8}$**

44) تربية: لقياس مدى احتفاظ الطلاب بالمعلومات، يتم عادة اختبارهم بعد وقت من تعلمها، ويمكن تقدير درجة سلمان في مادة الرياضيات بعد انتهاء الفصل الدراسي باستعمال المعادلة $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$، حيث t عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي.

a) ما درجة سلمان في نهاية الفصل الدراسي $(t = 0)$ ؟ **85**

b) ما درجته بعد مضي 3 أشهر؟ **73**

c) ما درجته بعد مضي 15 شهرًا؟ **61**

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 48–45 انظر ملحق الإجابات

45) $g(x) = -3 \log_{12} (4x + 3) + 2$

46) $g(x) = 15 \log_{14} (x + 1) - 9$

47) $g(x) = 10 \log_5 (x - 4) - 5$

48) $g(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$

49) إعلانات: تزداد المبيعات عادة مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان، وتقدر قيمة المبيعات لشركة بآلاف الدنانير بالمعادلة، $S(a) = 10 + 20 \log_4 (a + 1)$، حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان بآلاف الدنانير، $a \geq 0$. **للفروع a, b, d انظر الهامش**

a) تعني القيمة $S(0) \approx 10$ أنه إذا لم ينفق شيء على الدعاية والإعلان، ستكون المبيعات BD 10000. أوجد كلًّا من: S (3), S (15), S (63).

b) فسر معنى كل قيمة للدالة في الفرع a.

c) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. **انظر ملحق الإجابات**

d) استعمل التمثيل البياني في الفرع c وإجابتك في الفرع a لتفسير تناقص أثر الدعاية عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها.

50) أحياء: زمن الجيل بالنسبة للبكتيريا هو الزمن اللازم ليصبح عددها مثليْ ما كان عليه. فإذا كان زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا باستعمال بيانات تجريبية يُعطى بالقانون $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$، حيث t الفترة الزمنية، b عدد البكتيريا عند بداية التجربة، f عدد البكتيريا عند نهاية التجربة.

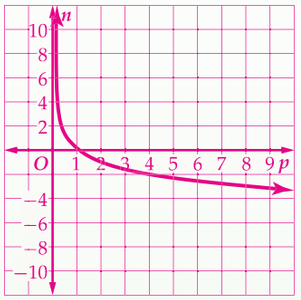
a) يبلغ زمن الجيل لبكتيريا مجهرية 16 h، كم الوقت الذي تحتاج إليه 4 من هذه البكتيريا ليصبح عددها 1024؟ **264 h أو 11 يومًا**

b) إذا كان زمن الجيل لنوع من البكتيريا المخبرية 5 h، فما الوقت الذي تحتاج إليه 20 خلية بكتيرية ليصبح عددها 160000؟ **66 h أو يومان و 18 h**

c) تنمو بكتيريا E.coli بسرعة بحيث تتكاثر 6 منها لتصبح 1296 في 4.4 h . احسب زمن الجيل لبكتيريا E.coli ؟ **20 min أو $\frac{1}{3}$ h**

إجابات:

43b)



49a) $S(3) = 30$،
$S(15) = 50$،
$S(63) = 70$

49b) إذا أنفق BD 3000 على الدعاية والإعلان ستكون مبيعات الشركة BD 30000 ، وإذا أنفق BD 15000 ستكون مبيعات الشركة BD 50000 وإذا أنفق BD 63000 عليهما ستكون مبيعات الشركة BD 70000.

49d) يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زاد المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان عن BD 70000 قل انحناء المنحنى ليتساوى المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان مع قيمة المبيعات تقريبًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

51) أيهما لا ينتمي؟ حدد التعبير المختلف عن التعابير الثلاثة الأخرى؟ فسر إجابتك. $\log_2 16$ ؛ لأن قيمته تساوي 4، أما قيمة التعابير الأخرى فتساوي 2.

$\log_3 9$	$\log_2 4$	$\log_2 16$	$\log_4 16$

52) تحدَّ: إذا كان $y = \log_b x$، حيث b, x, y أعداد حقيقية، فإن الصفر ينتمي إلى المجال دائمًا أو أحيانًا أو لا ينتمي أبدًا. وضح إجابتك. انظر الهامش

53) اكتشف الخطأ: يقول عيسى إن التمثيل البياني لجميع الدوال اللوغاريتمية يقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$ ؛ لأن أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1، ولكن سليمان لم يوافقه الرأي. أيهما على صواب؟ فسر إجابتك.

سليمان ؛ لأن التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية يمر بالنقطة $(1, 0)$ ولا يمر بالنقطة $(0, 1)$.

54) تبرير: قارن بين كلٍّ من: $\log_9 71$ ، $\log_8 61$ ، $\log_7 51$، دون استعمال الآلة الحاسبة، وبيّن أيها الأكبر قيمة. وضّح إجابتك.

$\log_7 51$ ؛ إجابة ممكنة: قيمته أكثر قليلاً من 2 وقيمة $\log_8 61$ أقل من 2 بقليل أيضًا وقيمة $\log_9 71$ أقل من 2 بقليل.

55) مسألة مفتوحة: اكتب تعبيرًا لوغاريتميًّا على الصورة $y = \log_b x$ لكل من الحالات الآتية:

انظر الهامش

a) y تساوي 25 **b)** y عدد سالب

c) y بين 0 و 1 **d)** x تساوي 1

56) اكتب: إذا كان $g(x) = a \log_{10}(x - h) + k$ تحويلًا للدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_{10} x$، فاشرح كيفية تمثيل هذا التحويل بيانيًّا. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

57) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$ ؟ **C**

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 2

58) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟ **D**

A 5 **B** $\frac{1}{5}$ **C** $-\frac{1}{5}$ **D** -5

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

59) $3^{n-2} = 27$; $n = 5$ **60)** $2^{2n} = \frac{1}{16}$; $n = -2$ **61)** $16^n = 8^{n+1}$; $n = 3$ **62)** $32^{5p+2} = 16^{5p}$; $p = -2$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 1-2) للتمارين 66–63 انظر ملحق الإجابات

63) $g(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$ **64)** $g(x) = -2.5(5)^x$ **65)** $g(x) = 30^{-x}$ **66)** $g(x) = 0.2(5)^{-x}$

67) إذا كان $4^{x+2} = 48$ ، فأوجد قيمة 4^x؟ 3

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

68) $9^x = \frac{1}{81}$; -2 **69)** $2^{6x} = 4^{5x+2}$; -1 **70)** $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$; $-\frac{7}{4}$ **71)** $9^{x^2} = 27^{x^2-2}$; $\pm\sqrt{6}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أشر إلى مسألة القسمة $\frac{32}{4} = 8$ يمكن كتابتها على الصورة $\frac{2^5}{2^2} = 2^3$. واسأل الطلبة أن يكتبوا لوغاريتمًا أساسه 2 في كل من المقسوم، والمقسوم عليه وناتج القسمة، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا معادلة تربط بين هذه اللوغاريتمات. $\log_2 32 = 5, \log_2 4 = 2, \log_2 8 = 3, \log_2 32 - \log_2 4 = \log_2 8$

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكر الطلبة في التمرين 53 ، بأن عيسى لم يفكر إلا في الدوال اللوغاريتمية على الصورة: $f(x) = a \log_b x$.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة أن يناقشوا كيف ستساعدهم دراسة اللوغاريتمات في هذا الدرس على حل معادلات لوغاريتمية في الدرس القادم.

إجابات:

52) لا ينتمي أبدًا؛ لأنه إذا انتمى الصفر للمجال ستصبح المعادلة $y = \log_b 0$ وعندها $b^y = 0$. ولكن لأي عدد حقيقي b لا يوجد أس حقيقي y بحيث يكون $b^y = 0$

55a–d) إجابات ممكنة.

55a $\log_2 33554432 = 25$

55b $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

55c $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

55d $\log_7 1 = 0$

56) إجابة ممكنة: في الدالة $g(x) = a \log_{10}(x - h) + k$ ، قيمة k هي إزاحة رأسية k وحدة إلى أعلى إذا كانت k موجبة، و $|K|$ وحدة إلى أسفل اذا كانت k سالبة. بينما قيمة h هي إزاحة أفقية h وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة، و $|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة، وإذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس في المحور x ، أما إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتمدد، وإذا كانت $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني يضيق.

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: (الدرس 1-2)

1) $g(x) = 3(4)^x$ 1–4. انظر ملحق الإجابات

2) $g(x) = -(2)^x + 5$

3) $g(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$

4) $g(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

5) **علوم:** بدأت تجربة مخبرية بـ 6000 خلية بكتيرية، وبعد ساعتين أصبح عددها 28000 خلية. (الدرس 1-2)

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير أعداد البكتريا بالمعدل نفسه.
$f(x) = 6000(2.16025)^x$

b) ما عدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 4 ساعات ؟
130667 تقريبًا

6) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين (0 ,125)، (3,1000)؟ (الدرس 1-2) D

A $f(x) = 125(3)^x$

B $f(x) = 1000(3)^x$

C $f(x) = 125(1000)^x$

D $f(x) = 125(2)^x$

7) **سكان:** كان عدد سكان إحدى المدن 45000 نسمة عام 1995 م، وتزايد عددهم ليصبح 68000 نسمة عام 2007 م. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لتمثيل عدد سكان المدينة بعد x سنة من عام 1995 م؟ $f(x) = 45000(1.0350)^x$

b) استعمل الدالة السابقة لتقدير عدد سكان المدينة عام 2015 م. 89541 تقريبًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-2) انظر ملحق الاجابات

8) $g(x) = 3\log_2(x-1)$

9) $g(x) = -4\log_3(x-2) + 5$

10) **اختيار من متعدد:** ما الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$ ؟ (الدرس 3-2) A

A $\log_{625} 5 = \frac{1}{4}$

B $\log_5 625 = \frac{1}{4}$

C $\log_5 625 = 4$

D $\log_{\frac{1}{4}} 5 = 625$

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

11) $\log_4 32$ $\frac{5}{2}$

12) $\log_5 5^{12}$ 12

13) اكتب المعادلة $\log_9 729 = 3$ على الصورة الأسية. (الدرس 3-2)
$9^3 = 729$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

14) $3^x = 27^2$ 6

15) $4^{3x-1} = 16^x$ 1

16) $\frac{1}{9} = 243^{2x+1}$ $-\frac{7}{10}$

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة.

للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات
التقويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

المعالجة:
بناءً على نتائج اختبار منتصف الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكّل تحديًا للطلبة.

مطوياتك متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حلّ أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 2-1 إلى 2-3.

مخطط المعالجة

المستوى الأول	ضمن المتوسط	المستوى الثاني	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 2-1، 2-2، 2-3	مصادر الفصل	خطة الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (64)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

2-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4

إيجاد قيمة تعابير لوغاريتمية.

الدرس 2-4

حل معادلات لوغاريتمية.

ما بعد الدرس 2-4

إيجاد حلول معادلات لوغاريتمية باستعمال الطرق الجبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ضمن أي فئات مقياس فوجيتا يقع إعصار سرعة الرياح المصاحبة له $100\,\text{mi/h}$؟ F-1
- ما مجال سرعة الرياح المصاحبة لإعصار من الفئة F-4؟ $207–260\ \text{mi/h}$
- كم مرّة وقعت أعاصير من الفئة F-6؟ 0

حل المعادلات اللوغاريتمية

مثال 1 يُبيّن كيفية حل معادلات تحتوي لوغاريتمًا واحدًا.

2-4 حل المعادلات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations

فيما سبق

درست إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل معادلات لوغاريتمية.

المفردات الأساسية

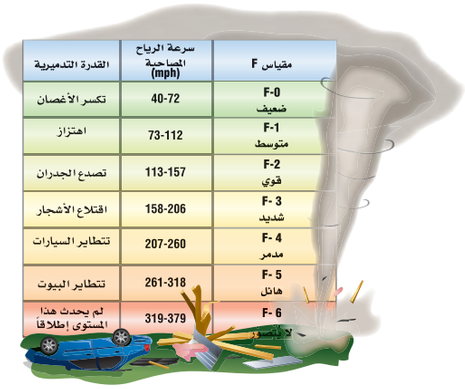
المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F ويصنف مقياس الإعصار إلى سبع فئات F0 – F6 حسب سرعة الرياح المصاحبة للإعصار، وطول مسار الإعصار، وعرضه، وقدرته التدميرية، وتكون الفئة F-6 هي أشد أنواع الأعصار تدميرًا.

مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة (mph)	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F-3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F-4 مدمر	207-260	تتطاير السيارات
F-5 هائل	261-318	تتطاير البيوت
F-6	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقًا



حل المعادلات اللوغاريتمية تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال 1 حل المعادلات اللوغاريتمية

حُلّ المعادلة اللوغاريتمية $\log_{36} x = \frac{3}{2}$.

المعادلة الأصلية	$\log_{36} x = \frac{3}{2}$
تعريف اللوغاريتم	$x = 36^{\frac{3}{2}}$
$36 = 6^2$	$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$
قوة القوة	$x = 6^3 = 216$

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين اللوغاريتميتين الآتيتين:

(1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$ 27 **(1B)** $\log_{16} x = \frac{5}{2}$ 1024

تستعمل الخاصية الآتية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في الطرفين لها الأساس نفسه.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

بالرموز إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا و فقط إذا كان $x = y$.

مثال إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$. وإذا كان $x = 8$، فإن $\log_5 x = \log_5 8$.

مصادر الدرس 2-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (89)	• تنويع التعليم، ص (89,91)	• تنويع التعليم، ص (91)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مثال 2 على اختبار معياري

حُلّ المعادلة اللوغاريتمية $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 B -1 C 2 D 4

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار

المعادلة الأصلية	$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$
خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	$x^2 - 4 = 3x$
بطرح $3x$ من كل طرف	$x^2 - 3x - 4 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(x - 4)(x + 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x + 1 = 0$ أو $x - 4 = 0$
بحل كل معادلة	$x = -1$ أو $x = 4$

تحقق عوض كل قيمة في المعادلة الأصلية.

$x = -1$: $\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$ ، $\log_2 (-3) \stackrel{?}{=} \log_2 (-3)$ ✗

$x = 4$: $\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$ ، $\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

لا يمكن أن يحتوي مجال الدالة اللوغاريتمية على العدد -3، لذا $\log_2 (-3)$ غير معرف والإجابة -1 مرفوضة، فالإجابة الصحيحة إذن هي D.

تأكد

2. حُلّ المعادلة اللوغاريتمية $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$. H

F -3 G -1 H 5 J 15

إرشادات اختبار

التعويض اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 88

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$ 16

2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$ 8

مثال 2 صفحة 89

3) اختيار من متعدد: حُلّ المعادلة اللوغاريتمية $\log_5 (x^2 - 10) = \log_5 3x$ C

A 10 B 2 C 5 D 2.5

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 الصفحتان 88 , 89

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

4) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ 27

5) $\log_{25} x = \frac{5}{2}$ 3125

6) $\log_8 \frac{1}{2} = x$ $-\frac{1}{3}$

7) $\log_6 \frac{1}{36} = x$ -2

8) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$ 4

9) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ 9

10) $\log_3 (3x + 8) = \log_3 (x^2 + x)$ -2 أو 4

11) $\log_{12} (x^2 - 7) = \log_{12} (x + 5)$ انظر ملحق الإجابات

12) $\log_6 (x^2 - 6x) = \log_6 (-8)$ لا يوجد حل

13) $\log_9 (x^2 - 4x) = \log_9 (3x - 10)$ 5

14) $\log_4 (2x^2 + 1) = \log_4 (10x - 7)$ 1 أو 4

15) $\log_7 (x^2 - 4) = \log_7 (-x + 2)$ -3

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا احتاج بعض الطلبة إلى مساعدة في تحديد مواقع الأعداد في الصورتين الأسية واللوغاريتمية المتكافئتين للمعادلات،

فاطلب إليهم عمل ملصقات ملونة تظهر عدة معادلات متكافئة بالصورتين الأسية واللوغاريتمية مثل $2^3 = 8$, $\log_2 8 = 3$، واقترح عليهم أن يستعملوا لونًا مختلفًا لكل من الأعداد 2, 3, 8 .

حل المعادلات اللوغاريتمية

مثال 2 يُبيّن كيفية حل معادلات تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حُلّ المعادلة $\log_4 x = \frac{5}{2}$ 32

2 **مثال على اختبار معياري:**

حُلّ المعادلة:

$\log_4 x^2 = \log_4 (-6x - 8)$ C

A 4 B 2 C -4 و -2 D لا يوجد حل

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية لإعداد عرض مرئي (Video) يتعلق بكيفية حل معادلة لوغاريتمية. وتحقق من أنهم يفسرون كل خطوة في عملهم، وخاصة كيفية إعادة كتابة المعادلة اللوغاريتمية على صورة معادلة أسّية.

89 الدرس 2-4 حل المعادلات اللوغاريتمية

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-3؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 18 الآلة الحاسبة البيانية، والمنطق، والتحليل للمقارنة بين التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

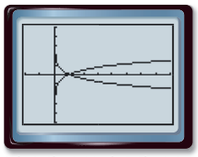
16) علوم: تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة بالقرب مركز الإعصار بالمعادلة: $w = 93 \log_{10} d + 65$، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل. اكتب المعادلة بصورة أسية. $d = 10^{\frac{w-65}{93}}$

الربط مع واقع الحياة

عرف أول جهاز لقياس الهزات الأرضية في الصين عام 132 ق.م. حيث أقيم تمثال مكون من 8 رؤوس يمثل كل منها تنين وتحت كل تنين يوجد تمثال لضفدعة مفتوحة الفم باتجاه التنين. وعند حدوث الهزة الأرضية فإن كرة أو أكثر تسقط من فم التنين في فم الضفدع.

17) علوم: تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = \log_{10} x$، حيث x سعة الموجة المسببة للحركة الأرضية. كم مرة تبلغ سعة موجة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بسعة موجة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه ؟ 10^3 أو 1000 مرة أكبر

18) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة التمثيل البياني للدالتين $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ ، $y = \log_4 x$. للفروع a – d انظر ملحق الإجابات



[−2, 8] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

a) تحليل: كيف تتم المقارنة بين منحنيي الدالتين؟
وكيف تتم المقارنة أيضًا بين خطوط التقارب ومقاطع المحور x؟

b) تعبير لفظي: صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

c) تمثيل بياني: استعمل ما تعرفه عن التحويلات للتمثيلات البيانية لمقارنة التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي بالتمثيل البياني للدالة $y = \log_4 x$ وذلك بعد تمثيل كل منها بيانيًّا:

1) $y = \log_4 x + 2$ 2) $y = \log_4 (x + 2)$ 3) $y = 3 \log_4 x$

d) تحليل: صف العلاقة بين كل من $y = -1(\log_4 x)$ و $y = \log_4 x$
وما المجال والمدى المقبولان لكل منهما؟

e) تحليل: اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشابه التمثيل البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار ووحدة إلى الأعلى. $y = \log_3 (x + 4) + 1$

19) صوت: تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالوات لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

الديسبل	شدة الصوت	الصوت
0	10^0	سقوط قطرة ماء
1	10^1	التنفس الطبيعي
6	10^6	مجففة الملابس
10	10^{10}	القطار
12	10^{12}	الإطفائية

a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1وات لكل متر مربع وكذلك لصوت شدته 10^{-2} وات لكل متر مربع.

b) إذا كانت شدة الصوت 1 وات لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة صوت تساوي 10^{-2} وات لكل متر مربع. فلماذا لا يساوي عدد وحدات الديسبل 100 مرة من 10^{-2} وات لكل متر مربع؟

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	4-15 ، 20 ، 22-38
ضمن المتوسط	5-15 فردي، 17-20 ، 22-38
فوق المتوسط	17-34 ، (اختياري: 35-38)

مسائل مهارات التفكير العليا

20) اكتشف الخطأ: تقوم هناء وريم بحل المعادلة اللوغاريتمية $\log_2 x = -2$. أي منهما حلها صحيح؟

اجابة ممكنة: ريم؛ لأن هناء حولت الصورة اللوغاريتمية إلى صورة أسية بشكل خطأ؛ لأنها أبقت اللوغاريتم.

هناء

$\log_2 x = -2$

$\log_2 x = 2^{-2}$

$x = \frac{1}{4}$

ريم

$\log_2 x = -2$

$x = 2^{-2}$

$x = \frac{1}{4}$

21) تحدٍّ: أوجد قيمة $\log_{243} 27 + \log_{81} 27 + \log_{27} 27 + \log_9 27 + \log_3 27$. $6\frac{17}{20}$

22) اكتب: وضح العلاقة بين مجال ومدى الدالة اللوغاريتمية ومجال ومدى الدالة الأسيّة المناظرة لها. انظر الهامش

23) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا على معادلة لوغاريتمية ليس لها حل. انظر الهامش

24) تبرير: اختر الجواب الصحيح لكل عبارة مما يأتي، مع ذكر السبب: (علمًا بأن جميع المعادلات اللوغاريتمية المذكورة بالسؤال على الصورة $y = \log_b x$).

a) إذا كان أساس اللوغاريتم أكبر من 1 وتقع قيمة x بين 0, 1 فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

b) إذا كان أساس اللوغاريتم بين 0, 1 وقيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

c) المعادلة $y = \log_b 0$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

d) المعادلة $y = \log_b 1$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

25) اكتب: فسر لماذا أي دالة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ تقطع المحور x عند النقطة (0 ، 1) ولا تقطع المحور y. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

26) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0,-10), (4,-160)$؟ **A**

A $f(x) = -10(2)^x$ **B** $f(x) = -10(4)^x$

C $f(x) = 10(2)^x$ **D** $f(x) = 10(4)^x$

27) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $\sqrt{6 - x} + 3 = 7$؟ **D**

A 10 **B** 2

C −2 **D** −10

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي: (الدرس 3-2)

28) $\log_4 256$ **4** **29)** $\log_2 \frac{1}{8}$ **−3** **30)** $\log_6 216$ **3** **31)** $\log_7 2401$ **4**

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

32) $3^{3x-2} = 81$ $x = 2$ **33)** $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$ $x = -8$ **34)** $8^{x-4} = 2^{4-x}$ $x = 4$

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كلًّا مما يأتي. مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي الصفر:

35) $x^5 \cdot x^3$ x^8 **36)** $(2p^2n)^3$ $8p^6n^3$ **37)** $\frac{x^4y^6}{xy^2}$ x^3y^4 **38)** $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$ **1**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يجدوا قيمتي $\log_3 27$, $\log_3 9$. 2, 3 ، ثم يتوقعوا قيمة $\log_3 (27 \cdot 9)$. وبعد تنفيذ عملية التوقع اطلب إليهم أن يتحققوا مما إذا كان رفع العدد 3 إلى القيمة المتنبأ بها يساوي 9•27 أو 243. ثم اطلب إليهم توقع قيمة $\log_3(mn)$. $\log_3 m + \log_3 n$

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلبة عند حل تمرين 20 ، بأن هناك فرقًا بين عملية رفع عدد إلى أسس سالبة، وضرب عدد في عدد سالب.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة كتابة شرح طريقة حل معادلات لوغاريتمية على الصورة $\log_8 n = \frac{7}{3}$ خطوة خطوة على ورقة وأن يسلموا إجاباتهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-4, 2-3 ، بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 2.

إجابات :

22) الدالة اللوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية من الصورة $y = b^x$ ، ومجال أحدهما يساوي مدى الأخرى، كما أن مدى أحدهما يساوي مجال الدالة الأخرى.

23) إجابة ممكنة:

$\log_3(x+4) = \log_3 (3x+12)$

25) مقطع المحور y للدالة الأسية $y = b^x$ هو (0, 1)، وعند قلب الإحداثيين x, y، فإن مقطع y – يتغير إلى مقطع المحور x عند النقطة (1, 0)، وبما أنه لا يوجد مقطع المحور x عند النقطة (0, 1) للدالة الأسية على الصورة $y = b^x$، فإنه عند قلب الإحداثيين فلن يكون هناك نقطة تناظر النقطة (0, 1)، ولن يكون للدالة مقطع المحور y.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5

إيجاد قيم تعابير لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية.

الدرس 2-5

تبسيط تعابير، وإيجاد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

حل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

ما بعد الدرس 2-5

حل معادلات أسية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- هل عصير الليمون حمضي أم قاعدي؟ حمضي
- هل الحليب حمضي أم قاعدي؟ قاعدي
- كم مرّة تساوي درجة حموضة الطماطم من درجة حموضة عصير الليمون؟ $10^{4.2-2.1} = 10^{2.1} \approx 126$

خصائص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

فيما سبق

درست إيجاد قيم تعابير لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أبسّط تعابير وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.
- أحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء الصافي	7.0
البيض	7.8

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون من حساسية في المعدة. وتحتوي معظم الأطعمة التي نتناولها على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل المقياس pH لقياس درجة الحموضة. فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالاً آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 على حين تساوي 7 للماء الطبيعي. لذا فإن درجة حموضة القهوة تعادل 100 مرة من درجة حموضة الماء؛ لأن $10^{7-5} = 10^2 = 100$.

خصائص اللوغاريتمات بما أن اللوغاريتمات هي أسس، فيمكن اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، فيمكن اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي خاصية الضرب في اللوغاريتمات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $x \neq 1$ فإن $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.

مثال $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افرض أن $b^x = a$ ، و $b^y = c$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $x = \log_b a$ و $y = \log_b c$.

بالتعويض	$b^x b^y = ac$
خاصية ضرب القوى	$b^{x+y} = ac$
خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	$\log_b b^{x+y} = \log_b ac$
خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات	$x + y = \log_b ac$
بالتعويض عن x, y بالقيم $\log_b a$ ، $\log_b c$ على الترتيب	$\log_b a + \log_b c = \log_b ac$

يمكن استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب تعابير لوغاريتمية.

إرشادات للدراسة

خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات

الدالة الأسية $f(x) = b^x$، والدالة اللوغاريتمية $g(x) = \log_b x$, $x > 0$ كلًا منهما معكوسًا للأخرى، لذلك فإن: $f[g(x)] = g[f(x)] = x$

$b^{\log_b x} = \log_b b^x = x$

وتسمى خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات.

فمثلًا: $\log_6 6^8 = 8$

مثال 1 استعمال خاصية الضرب

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

بالتعويض عن 192 بالقيمة 3×64 أو 3×4^3	$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$
خاصية الضرب في اللوغاريتمات	$= \log_4 4^3 + \log_4 3$
خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات	$= 3 + \log_4 3$
$\log_4 3 \approx 0.7925$	$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$

تأكد

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$. 2.5

مصادر الدرس 2-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (94)	• تنويع التعليم، ص (94)	• تنويع التعليم، ص (94,97)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.

افرض أن $b^y = c$ و $b^x = a$ ، إذن $\log_b a = x$، و $\log_b c = y$

	$\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c}$
خاصية قسمة القوى	$b^{x-y} = \frac{a}{c}$
خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	$\log_b b^{x-y} = \log_b \frac{a}{c}$
خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات	$x - y = \log_b \frac{a}{c}$
بالتعويض عن كل من x, y بالقيم $\log_b a$ ، $\log_b c$ على الترتيب	$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$

مفهوم أساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم البسط مطروحًا منه لوغاريتم المقام.

الرموز إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $x \neq 1$ فإن

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

مثال

$$\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$$

مثال 2 من واقع الحياة خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يعرّف pH للمادة بأنه تركيز أيونات الهيدوجين [+H] فيها بوحدة المول، ويُعطى بالقانون $\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{H^+}$. أوجد كمية الهيدوجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له تساوي 4.2.

افهم: أعطي في المسألة قانون إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة كمية الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

المعادلة الأصلية	$\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{H^+}$
بتعويض 4.2 بدلاً من H	$4.2 = \log_{10} \frac{1}{H^+}$
خاصية القسمة في اللوغاريتمات	$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} H^+$
بتعويض $\log_{10} 1 = 0$	$4.2 = 0 - \log_{10} H^+$
بالتبسيط	$4.2 = -\log_{10} H^+$
بضرب الطرفين في -1	$-4.2 = \log_{10} H^+$
تعريف اللوغاريتمات	$10^{-4.2} = H^+$

إذن، يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق:

$\text{pH} = 4.2$	$4.2 = \log_{10} \frac{1}{H^+}$
بتعويض $H^+ = 10^{-4.2}$	$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$
خاصية القسمة في اللوغاريتمات	$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$
بالتبسيط	$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$
	$4.2 = 4.2$ ✓

تأكد

2) الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل ويعطى بالقانون $L = 10 \log_{10} R$، حيث R شدة الصوت النسبية. أوجد الشدة النسبية لصوت ارتفاعه 120 dB. 10^{12}

الربط مع واقع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو . والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية، كما يظهر في الصورة أعلاه.

خصائص اللوغاريتمات

مثال 1 يُبيّن كيفية استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات؛ لتقريب قيم التعابير اللوغاريتمية.

مثال 2 يُبيّن كيفية استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات؛ لحل مسائل من واقع الحياة.

مثالان إضافيان

1 استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$؛ لتقريب قيمة $\log_5 250$. 3.4307

2 **علوم:** أوجد كمية الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له تساوي 5.5 .

$10^{-5.5} = 0.0000032$ moles

التركيز في المحتوى الرياضي

خصائص اللوغاريتمات بالإضافة إلى خاصيتي الضرب في اللوغاريتمات وقسمتها، وخاصية لوغاريتم القوة، هنالك خصائص مفيدة أخرى مثل الخصائص الأربع الآتية:

$$\log_b 1 = 0$$
$$\log_b b = 1$$
$$\log_b b^x = x$$
$$b^{\log_b x} = x$$

ستكون كل من الخاصية الأولى والثانية واضحة إذا كانت المعادلات مكتوبة على الصورة الأسية. أما الخاصيتان الثالثة والرابعة فهما نتيجتان لحقيقة أن كلًّا من الأسس واللوغاريتم معكوس لبعضهما بعضًا.

إرشادات للمعلم الجديد

حل المسألة عند مناقشة خاصية الضرب في اللوغاريتمات، أشر إلى أن اللوغاريتمات المستعملة في المثال تبين أن الخاصية تنطبق على جميع اللوغاريتمات وليس فقط على تلك التي يمكن تبسيطها.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بحل أمثلة متنوعة على السبورة التفاعلية مستعملاً خصائص مختلفة للوغاريتمات، واحفظ كل مثال في صفحة ملاحظات وعنونها باسم الخاصية التي استعملتها فيه، ثم أرسل هذه الصفحات إلكترونيًّا إلى كل طالب؛ لاتخاذها مصدرًا آخر خارج الفصل.

تذكّر أن قوة القوة تكون بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة الشبيهة بها.

مفهوم أساسي خاصية لوغاريتم القوة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في اللوغاريتم نفسه.

بالرموز لأي عدد حقيقي p، وأي عددين موجبين m, b، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b m^p = p \log_b m$$

مثال $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

مثال 3 خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$5^2 = 25$

$\log_2 25 = \log_2 5^2$

خاصية لوغاريتم القوة $= 2 \log_2 5$

بتعويض 2.3219 بدلًا من $\log_2 5$ $\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$

تأكد

3) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$، فقرّب قيمة $\log_3 49$. 3.5424 تقريبًا

حل معادلات لوغاريتمية يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لحل معادلات لوغاريتمية.

مثال 4 حل معادلات باستعمال خصائص اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة اللوغاريتمية $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$.

المعادلة الأصلية $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات $\log_6 x (x - 9) = 2$

تعريف اللوغاريتمات $x(x - 9) = 6^2$

بالتبسيط وطرح 36 من الطرفين $x^2 - 9x - 36 = 0$

بالتحليل $(x - 12)(x + 3) = 0$

خاصية الضرب الصفري $x - 12 = 0$ أو $x + 3 = 0$

بحل كل معادلة $x = 12$ $x = -3$

تحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

(4A) $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$ 9

(4B) $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$ 4

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة يمكنك التحقق من هذه الإجابة بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$ مستعملاً الآلة الحاسبة والإجابة التي ستحصل عليها هي 25 تقريبًا، ولكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ فهذا يعني أن $2^{4.6438} \approx 25$

خصائص اللوغاريتمات

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال خاصية لوغاريتم القوة؛ لتقريب قيمة تعبير لوغاريتمي.

مثال إضافي

3 إذا كان $\log_5 6 \approx 1.1133$، فقرّب قيمة $\log_5 216$. 3.3399

حل معادلات لوغاريتمية

مثال 4 يُبيّن كيفية حل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

مثال إضافي

4 حُلّ المعادلة:

5 $4 \log_2 x - \log_2 5 = \log_2 125$

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي حُث الطلبة على التحقق من إجاباتهم باستعمال التقدير، ففي المثال 3 كانت $2^4 = 16$، $2^5 = 32$، وهكذا. لذا، فمن المعقول أن يقع $\log_2 25$ بين 5، 4.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون مباشرة بعد مناقشة المثال 4، اطلب إلى طالبين إعادة حله معًا دون الرجوع إلى الحل المكتوب، واطلب إليهما تبادل الأدوار في توضيح خطوات الحل، وكذلك مناقشة معقولية حلهما.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين **1-11**؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تأكد من فهمك

المثالان 2 , 1 الصفحتان 93 , 92

استعمل $\log_4 5 \approx 1.1610$، $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

1) $\log_4 18$ — 2.085

2) $\log_4 15$ — 1.9535

3) $\log_4 \frac{5}{3}$ — 0.3685

4) $\log_4 \frac{3}{4}$ — −0.2075

مثال 2 صفحة 93

5) تسلق الجبال: يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع، ويُعطى الضغط الجوي اعتمادًا على الارتفاع بالقانون $a = 15500(5 - \log_{10} P)$، حيث a الارتفاع بالأمتار، P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول المجاور.

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

5) إفرست 26855.44 باسكال، تريسوني 34963.34 باسكال، بونيتي 36028.42 باسكال.

مثال 3 صفحة 94

إذا كان $\log_3 5 \approx 1.465$، و $\log_5 7 \approx 1.2091$، فقرّب قيمة كل مما يأتي:

6) $\log_3 25$ — 2.93

7) $\log_5 49$ — 2.4182

مثال 4 صفحة 94

حُلّ كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

8) $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ — 8

9) $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$ — 2

10) $3 \log_2 x = \log_2 8$ — 2

11) $\log_{10} a + \log_{10} (a - 6) = 2$ — 13.4403

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 الصفحتان 93 , 92

استعمل $\log_4 2 = 0.5$، $\log_4 3 \approx 0.7925$، و $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

12) $\log_4 30$ — 2.4535

13) $\log_4 20$ — 2.1610

14) $\log_4 \frac{2}{3}$ — −0.2925

15) $\log_4 \frac{4}{3}$ — انظر ملحق الإجابات

16) $\log_4 9$ — 1.5850

17) $\log_4 8$ — 1.5

مثال 2 صفحة 93

18) علوم: ضربت هزة أرضية قوتها 5.9 درجة على مقياس ريختر منطقة سان فرانسيسكو الأمريكية عام 1979م، وفي عام 1906م ضربت هزة أرضية بقوة 8.3 درجات على مقياس ريختر المنطقة نفسها.

a) كم مرة تزيد شدة الهزة الأرضية في عام 1906م عن شدة الهزة الأرضية في عام 1979م؟ $10^{2.4} \approx 250$ مرة

b) صنّف ريختر بنفسه الهزة الأرضية الأولى فقدر أن قوتها 8.3 درجات، وحديثًا دلت الأبحاث على أنها كانت 7.9 درجات على الأرجح، كم مرة تزيد شدة الهزة الأرضية عام 1906م على التقدير الذي دلت عليه الأبحاث؟ $10^{0.4} \approx 2\frac{1}{2}$ مرة

مثال 3 صفحة 94

إذا كان $\log_6 8 \approx 1.1606$ و $\log_7 9 \approx 1.1292$، فقرّب قيمة كل مما يأتي:

19) $\log_6 48$ — 2.1606

20) $\log_7 81$ — 2.2584

21) $\log_6 512$ — 3.4818

22) $\log_7 729$ — 3.3876

مثال 4 صفحة 94

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

23) $\log_3 56 - \log_3 n = \log_3 7$ — 8

24) $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$ — 2

25) $5 \log_2 x = \log_2 32$ — 2

26) $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$ — 4

27) $\log_3 6 + \log_3 x = \log_3 12$ — 2

28) $\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24$ — 3

29) $\log_{10} 18 - \log_{10} 3x = \log_{10} 2$ — 3

30) $\log_7 100 - \log_7 (y + 5) = \log_7 10$ — 5

31) $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$ — 108

32) $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$ — $85\frac{1}{3}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	12-26 ، 50-52 ، 54-70
ضمن المتوسط	13-49 فردي، 50-52 ، 54-70
فوق المتوسط	27-66 ، (اختياري: 67-70)

الدرس 2-5 خصائص اللوغاريتمات 95

حُلّ بالنسبة لـ n كل من المعادلتين الآتيتين:

33) $\log_a 6n - 3\log_a x = \log_a x$ $\frac{x^4}{6}$

34) $2\log_b 16 + 6\log_b n = \log_b (x-2)$ $\left(\frac{x-2}{256}\right)^{\frac{1}{6}}$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

35) $\log_{10} z + \log_{10} (z+9) = 1$ 1

36) $\log_3 (a^2+3) + \log_3 3 = 3$ $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$

37) $\log_2 (15b-15) - \log_2 (-b^2+1) = 1$

37) لا يوجد حل

38) $\log_4 (2y+2) - \log_4 (y-2) = 1$ 5

39) $\log_7 64 - \log_7 \frac{8}{3} + \log_7 2 = \log_7 4p$ 12

40) $\log_6 0.1 + 2\log_6 x = \log_6 2 + \log_6 5$ 10

الربط مع واقع الحياة

تعرف الحيتان الحدباء بأنها الحيتان المغنية؛ حيث تصدر أصواتًا وكأنها تغني. ويدرس العلماء هذه الأصوات للتوصل إلى تفسير مدلولها.

41) **بيئة:** الحيتان الحدباء هي أحد أنواع الحيتان المهددة بالانقراض، ولنفرض أن هناك 5000 حوت من هذا النوع اليوم ويتناقص هذا العدد بمعدل 4% سنويًّا، فأجب عن السؤالين الآتيين:

a) اكتب دالة لوغاريتمية للزمن t بالسنوات بدلالة p التي تمثل عدد الحيتان بعد t سنة. $t = \log_{0.96}\left(\frac{p}{5000}\right)$

b) بعد كم سنة يتناقص عدد حيتان هذا النوع لما دون 1000 حوت؟ مقربًا إجابتك إلى أقرب سنة. 40 سنة

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة:

42) $\log_8 (x-3) = \log_8 x - \log_8 3$ خاطئة

43) $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$ صحيحة

44) $\log_{10} 19k = 19\log_{10} k$ خاطئة

45) $\log_2 y^5 = 5\log_2 y$ صحيحة

46) $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ صحيحة

47) $\log_4 (z+2) = \log_4 z + \log_4 2$ خاطئة

48) $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$ خاطئة

49) $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$ صحيحة

مسائل مهارات التفكير العليا

50) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على تعبير لوغاريتمي لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بصورة مجموع أو فرق لوغاريتمات:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة. إجابة ممكنة: $\log_b \frac{xz}{5} = \log_b x + \log_b z - \log_b 5$

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة. إجابة ممكنة: $\log_b m^4p^6 = 4\log_b m + 6\log_b p$

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة. انظر الهامش

51) **برهان:** استعمل خصائص الأسس لبرهنة خاصية لوغاريتم القوة. انظر الهامش

52) **اكتب:** فسر صحة كل مما يأتي: انظر الهامش

a) $\log_b 1 = 0$ **b)** $\log_b b = 1$ **c)** $\log_b b^x = x$

53) **تحدٍ:** بسّط التعبير اللوغاريتمي $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$ لإيجاد القيمة العددية الفعلية. انظر الهامش

54) **أيها لا ينتمي؟** حدد التعبير المختلف عن التعابير الثلاثة الأخرى، وفسّر إجابتك:

$\log_b 24 \neq \log_b 20 + \log_b 4$؛ جميع الخيارات الأخرى تساوي $\log_b 24$

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

55) **تبرير:** استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$. انظر ملحق الإجابات

56) **تحدٍّ:** بسّط التعبير اللوغاريتمي $x^{3\log_x 2 - \log_x 5}$ لإيجاد القيمة العددية الفعلية. انظر ملحق الإجابات

إجابات:

50c) إجابة ممكنة:

$$\log_b \frac{x^3y^4}{z^5} = 3\log_b x + 4\log_b y - 5\log_b z$$

51)

$$m^p = m^p$$
$$\left(b^{\log_b m}\right)^p = b^{\log_b (m^p)}$$
$$b^{\log_b mp} = b^{\log_b (m^p)}$$
$$\log_b mp = \log_b (m^p)$$
$$p\log_b m = \log_b (m^p)$$

52a) $\log_b 1 = 0$؛ لأن $b^0 = 1$

52b) $\log_b b = 1$؛ لأن $b^1 = b$

52c) $\log_b b^x = x$؛ لأن $b^x = b^x$

53)

$$\log_{\sqrt{a}} (a^2) = x$$
$$(\sqrt{a})^x = a^2$$
$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^x = a^2$$
$$a^{\frac{x}{2}} = a^2$$
$$\frac{x}{2} = 2$$
$$x = 4$$

تدريب على اختبار معياري

57) ما قيمة x في المعادلة $\sqrt[6]{27x^3} = 6$ ؟ **C**

A 2 **B** 6 **C** 12 **D** 21

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 4-2)

58) $\log_5 (3x - 1) = \log_5 (2x^2)$ $\frac{1}{2}, 1$ **59)** $\log_{10} (x^2 + 1) = 1$ ± 3 **60)** $\log_{10} (x^2 - 10x) = \log_{10} (-21)$ لا يوجد حل

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

61) $\log_{10} 0.001$ -3 **62)** $\log_4 16^x$ $2x$ **63)** $\log_3 27^x$ $3x$

64) كهرباء: يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث P القدرة بالواط، R المقاومة بالأوم. كم كمية التيار الكهربائي التي يستهلكها جهاز ما إذا كانت قيمة $P = 120\text{w}$، وقيمة $R = 3\Omega$. قرب الجواب إلى أقرب عُشر. (الدرس 1-6) 6.3 Amp

حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى، مع ذكر السبب: (الدرس 1-2)

65) $f(x) = x + 73$ ، $g(x) = x - 73$ تمثل كل من الدالتين معكوسًا للأخرى؛ لأن $[fog](x) = [gof](x) = x$

66) $g(x) = 7x - 11$ ، $h(x) = \frac{1}{7}x + 11$ لا تمثل كل من الدالتين معكوسًا للأخرى؛ لأن $[goh](x) = x + 66$

مراجعة المتطلبات السابقة

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك:

67) $3^{4x} = 3^{3-x}$ $\frac{3}{5}$ **68)** $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$ 10 **69)** $49^x = 7^{x^2-15}$ $-3, 5$ **70)** $\log_2 (x + 6) = 5$ $x = 26$

4 التقويم

تعلم لاحق أخبر الطلبة بأنهم سيتعلمون في الدرس التالي حل معادلات باستعمال اللوغاريتم الاعتيادي (لوغاريتم الأساس 10). واطلب إليهم أيضًا كتابة رأيهم فيما تعلموه في هذا الدرس وعلاقته بالدرس التالي.

تنويع التعليم

فوق

توسّع اعرض على الطلبة ما يأتي:

$\log_{10} 3 \approx 0.4771$

$\log_{10} 30 \approx 1.4771$

$\log_{10} 300 \approx 2.4771$

$\log_{10} 3000 \approx 3.4771$

واطلب إليهم توقع قيمة $\log_{10} 30000$.
4.4771

واطلب إليهم أيضًا استعمال خصائص اللوغاريتمات؛ لتوضيح ذلك النمط. تفسير ممكن 3 ، 30 ، 300 ، 3000 يمكن كتابتها على الصورة 3×10^0 ، 3×10^1 ، 3×10^2 ، 3×10^3 على الترتيب، وبعد ذلك يمكن كتابة كل لوغاريتم اعتيادي منها على صورة مجموع لوغاريتمين اعتياديين ، فمثلًا يمكن كتابة:

$\log_{10} 3000$ على الصورة $\log_{10} (3 \cdot 10^3)$. ونتيجة لذلك، فإن:

$\log_{10} (3 \cdot 10^3) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10^3 = \log_{10} (3) + 3 = 3.4771$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-6

تبسيط تعابير وحل المعادلات باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

الدرس 2-6

حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات الاعتيادية.

إيجاد قيمة تعابير لوغاريتمية باستعمال قانون تغيير الأساس.

ما بعد الدرس 2-6

تحليل موقف أو مسألة حياتية ممثلة بدالة أسّية وحلها.

2 التدريس

أسئلة تعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟ ".

اسأل:

- كيف تُقارن بين درجة مقياس ريختر لهزة عظمى، وهزة خفيفة؟ ضعف الدرجة.
- كم مرة تعادل شدة الهزة العظمى من الهزة الخفيفة؟ 10000 مرة.
- أين تظهر هزة شدتها تساوي نصف 10^8 في الجدول؟ بين القوية جدًا والعظمى.

اللوغاريتمات الاعتيادية
Common Logarithms

فيما سبق

درست تبسيط تعابير وحل المعادلات باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات الاعتيادية.
- أجد قيمة تعابير لوغاريتمية باستعمال قانون تغيير الأساس.

المفردات الأساسية

اللوغاريتم الاعتيادي
common logarithm

قانون تغيير الأساس
Change of Base Formula

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم سعة الموجات المسجلة بجهاز السيسموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثير في المناطق السكنية.	لا يشعر بها ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = \log_{10} x$، حيث x سعة الموجة المسببة لحركة الأرض.

اللوغاريتمات الاعتيادية لعلك لاحظت أن دوال لوغاريتمات الأساس 10، $y = \log_{10} x$ تستعمل في كثير من التطبيقات وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات الاعتيادية**، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x,\ x > 0$$

معظم الآلات الحاسبة العلمية تحتوي المفتاح LOG لإيجاد قيمة اللوغاريتم الاعتيادي.

مثال 1 إيجاد اللوغاريتم الاعتيادي

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: LOG 5 ENTER 0.6989700043

$\log 5 \approx 0.6990$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: LOG 0.3 ENTER -0.5228787453

$\log 0.3 \approx -0.5229$

تأكد

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

1A) $\log 7$ 0.8451 **1B)** $\log 0.5$ -0.3010

ترتبط اللوغاريتمات الاعتيادية لقوى العدد 10 الصحيحة ارتباطًا وثيقًا. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$ تكون $x = 10^y$

$$10^y = x \iff \log x = y$$
$$10^0 = 1 \iff \log 1 = 0$$
$$10^1 = 10 \iff \log 10 = 1$$
$$10^m = 10^m \iff \log 10^m = m$$

مصادر الدرس 2-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (102, 100)	• تنويع التعليم، ص (102, 100)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

تستعمل اللوغاريتمات الاعتيادية لقياس الصوت. وإذا كانت شدة الصوت تعادل 36 dB يعتبر الصوت هادئًا.

مثال 2 من واقع الحياة — حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس علو (ارتفاع) الصوت L بالديسبل، ويعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما في مكان محدد على الأرض بعلو 66.6 dB تقريبًا. كم مرة تساوي شدة هذا الصوت من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$ ؟

المعادلة الأصلية	$L = 10 \log \frac{I}{m}$
$L = 66.6,\ m = 1$	$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$
بقسمة كل طرف على 10 ثم التبسيط	$6.66 = \log I$
الصورة الأسية	$I = 10^{6.66}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$I \approx 4570882$

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

الربط مع واقع الحياة

يستعمل مصطلح "ديسبل" كوحدة لقياس شدة صوت، على سبيل المثال: 10dB تمثل شدة حفيف أوراق الأشجار الهادئ، 90-100dB تمثل شدة صوت الرعد، 140dB تمثل شدة صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

تأكد

2) هزات أرضية: ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر. 2×10^{25} إيرج تقريبًا

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسّية للأساس نفسه، فإنه يمكنك حلها بأخذ لوغاريتم كل طرف.

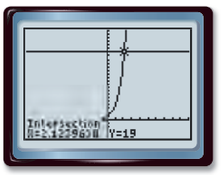
مثال 3 — حل معادلات أسّية باستعمال اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة الأسّية $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

المعادلة الأصلية	$4^x = 19$
خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	$\log 4^x = \log 19$
خاصية لوغاريتم القوة	$x \log 4 = \log 19$
بقسمة كل طرف على $\log 4$	$x = \frac{\log 19}{\log 4}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 2.1240$

الحل هو 2.1240 تقريبًا .

تحقق يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًّا، وذلك باستعمال الآلة الحاسبة البيانية . مثّل المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 19$ بيانيًّا. واستعمل قائمة CALC لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين وتكون نقطة التقاطع قريبة من الإجابة التي تم إيجادها جبريًّا. ✓



إرشادات للدراسة

تذكّر أن جول وحدة قياس طاقة، والإيرج $= 4^{-7}$ جول

تأكد

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

3A) $3^x = 15$ 2.4650 تقريبًا **3B)** $6^x = 42$ 2.0860 تقريبًا

اللوغاريتمات الاعتيادية

مثال 1 يُبيّن كيفية استعمال الحاسبة؛ لإيجاد قيمة اللوغاريتم الاعتيادي.

مثال 2 يُبيّن كيفية استعمال معكوس اللوغاريتم أو الصيغة الأسية؛ لحل معادلات لوغاريتمية في التطبيقات الحياتية.

مثال 3 يُبيّن كيفية حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قيمة التعبيرين الآتيين:
   a) $\log 6$ 0.7782 تقريبًا
   b) $\log 0.35$ −0.4559 تقريبًا

2. **محركات نفاثة:** عُد إلى المثال **2**. يمكن أن تصل شدة صوت المحرك النفاث إلى ما يقارب 125 dB، فكم مرة تساوي شدة ذلك الصوت من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان؟
   $10^{12.5}$ أو 3×10^{12} تقريبًا، ممّا يعني 3 ترليونات.

3. حُلّ المعادلة $5^x = 62$.
   2.5643 تقريبًا

قانون تغيير الأساس يسمح لك **قانون تغيير الأساس** بكتابة تعابير لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي قانون تغيير الأساس

أضف إلى مطويتك

بالرموز لأي أعداد موجبة a، b، n، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

مثال

$$\log_3 11 = \frac{\log_{10} 11}{\log_{10} 3}$$

لإثبات القانون، افرض أن $\log_a n = x$.

تعريف اللوغاريتم	$a^x = n$
خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	$\log_b a^x = \log_b n$
خاصية لوغاريتم القوة	$x \log_b a = \log_b n$
بقسمة كل طرف على $\log_b a$	$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$
$x = \log_a n$	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

يمكنك باستعمال قانون تغيير الأساس إيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي يحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات اعتيادية.

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي
هو أبو عبدالله محمد ابن موسى الخوارزمي (1550م–780م) لُقّب بأبي الجبر، وهو عالم عربي، مبتدع علم الجبر وواضع أسسه ومبتكر حساب اللوغاريتمات.

مثال 4 قانون تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ في صورة لوغاريتم اعتيادي، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

قانون تغيير الاساس $\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 2.7268

تأكد

4) اكتب $\log_6 8$ في صورة لوغاريتم اعتيادي، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. $\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \approx 1.1606$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 98

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $\log 5$ 0.6990 **2)** $\log 21$ 1.3222 **3)** $\log 0.4$ −0.3979 **4)** $\log 0.7$ −0.1549

مثال 2 صفحة 99

5) علوم: ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض عند الهزة الأرضية مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل هذه المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. 3.55×10^{24} إيرج

مثال 3 صفحة 99

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: للتمرينين 8 ,7 انظر الهامش

6) $6^x = 40$ 2.0588 **7)** $2.1^{a+2} = 8.25$ **8)** $7^{x^2} = 20.42$ **9)** $11^{b-3} = 5^b$ انظر ملحق الإجابات

مثال 4 صفحة 100

اكتب كلًّا مما يأتي في صورة لوغاريتم اعتيادي، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

10) $\log_3 7$ **11)** $\log_4 23$ **12)** $\log_9 13$ **13)** $\log_2 5$

التركيز في المحتوى الرياضي

اللوغاريتم الاعتيادي تُسمّى لوغاريتمات الأساس 10 باللوغاريتمات الاعتيادية. فعندما لا يكتب أساس اللوغاريتم فالمقصود هو الأساس 10، ويمكنك إيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي لأي أساس باستعمال قانون تغيير الأساس، وذلك بتحويله إلى تعبير يحتوي لوغاريتمات اعتيادية.

مثال إضافي

4 اكتب $\log_5 140$ باستعمال اللوغاريتم الاعتيادي، ثم احسب قيمته مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_5 140 = \frac{\log_{10} 140}{\log_{10} 5}$،

$\log_5 140 \approx 3.0704$

قانون تغيير الأساس

مثال 4 يُبيّن كيفية تحويل التعابير اللوغاريتمية إلى تعابير لوغاريتمية اعتيادية.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير عند مناقشة الطلبة في قانون تغيير الأساس أشر إلى أنه لا يشترط تغيير الأساس إلى الأساس 10، ولكنه الأساس الأكثر شيوعًا؛ لأنه يسمح بإيجاد قيمة اللوغاريتم باستعمال الآلة الحاسبة. وعندما لا يكتب أساس اللوغاريتم فالمقصود هو الأساس 10.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض على السبورة القالب $\log_{\square} \square = \frac{\log_b \square}{\log_b \square}$، وعوّض قيمًا في اللوغاريتم إلى يسار المعادلة لتوضيح قانون تغيير الأساس.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون ذكّر الطلبة بأن معادلة مثل $4^x = 19$ والتي وردت في المثال 3 يمكن إعادة كتابتها على الصورة اللوغاريتمية $\log_4 19 = x$، ومع أنه لايمكن إيجاد قيمة هذا اللوغاريتم بشكل مباشر، إلا أنه يمكن استعمال قانون تغيير الأساس للحصول على قيمة x وتساوي 2.1240 تقريبًا.

إجابات :

7) 0.8442

8) ± 1.2451

10) $\frac{\log 7}{\log 3} \approx 1.7712$

11) $\frac{\log 23}{\log 4} \approx 2.2618$

12) $\frac{\log 13}{\log 9} \approx 1.1674$

13) $\frac{\log 5}{\log 2} \approx 2.3219$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 98

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

14) $\log 3$ 0.4771 **15)** $\log 11$ 1.0414 **16)** $\log 3.2$ 0.5051

17) $\log 8.2$ 0.9138 **18)** $\log 0.9$ −0.0458 **19)** $\log 0.04$ −1.3979

مثال 2 صفحة 99

20) صوت: أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB .

a) كم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m=1$؟ 316227766 مرة تقريبًا

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ. 19952623 مرة تقريبًا , 93.7% تقريبًا

مثال 3 صفحة 99

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

21) $8^x = 40$ 1.7740 **22)** $5^x = 55$ 2.4899

23) $9^{b-1} = 7^b$ 8.7429 **24)** $15^{x^2} = 110$ ±1.3175

مثال 4 صفحة 100

اكتب كل لوغاريتم مما يأتي في صورة لوغاريتم اعتيادي، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

25) $\log_7 18$ $\frac{\log 18}{\log 7} \approx 1.4854$ **26)** $\log_5 31$ $\frac{\log 31}{\log 5} \approx 2.1337$

27) $\log_2 16$ $\frac{\log 16}{\log 2} = 4$ **28)** $\log_4 9$ $\frac{\log 9}{\log 4} \approx 1.5850$

29) $\log_4 12$ $\frac{\log 12}{\log 4} \approx 1.7925$ **30)** $\log_3 21$ $\frac{\log 21}{\log 3} \approx 2.7712$

31) $\log_5 (2.7)^2$ $\frac{\log 7.29}{\log 5} \approx 1.2343$ **32)** $\log_7 \sqrt{5}$ $\frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} \approx 0.4135$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

33) $10^{x^2} = 60$ ±1.3335 **34)** $4^{x^2-3} = 16$ انظر ملحق الإجابات **35)** $9^{6y-2} = 3^{3y+1}$ 0.5556

36) $8^{2x-4} = 4^{x+1}$ 3.5 **37)** $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$ 1 **38)** $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$ −3.8188

39) علوم البيئة: يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بـ 0.025 جزء من المليون (ppm)، كما أن مستوى pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5. فإذا كان قانون تركيز أيون الهيدروجين هو $\text{pH} = -\log H$.
(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1 L تقريبًا. $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg/kg}$)

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل سيقلق مهندس البيئة من ارتفاع مستوى الزرنيخ؟ نعم؛ لأن $10.9 > 9.5$

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة من 3l من الماء، فهل ماء البئر آمن للشرب؟ لا

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يكافئ مستوى pH المقلق (9.5)؟ 3.16×10^{-10}

40) تمثيلات متعددة: ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) جدولة: أدخل الدالة $y = 4^x$ في الآلة الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وابحث عن قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول. الحل يقع بين 1.8 و 1.9

b) تمثيل بياني: مثّل بيانيًا المعادلة $y = 4^x$ و المستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intresect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. (1.85, 13)

c) عددي: حُلّ المعادلة جبريًا. هل جميع طرائق الحل تؤدي إلى النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك.

الربط مع واقع الحياة

يعاني 1.1 مليار من سكان العالم تقريبًا من مشكلة تلوث المياه؛ وذلك بسبب التلوث الصناعي، وسوء الصرف الصحي وعوامل بيئية أخرى.

40c) نعم. جميع الطرائق تعطي النتيجة نفسها 1.85؛ لأنك بدأت من المعادلة نفسها وإن لم يكن كذلك فقد ارتكبت بعض الأخطاء.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-13؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 40 الآلة الحاسبة البيانية والجبر؛ لحل معادلة ذات مستوى متقدم، بيانيًّا وجبريًّا ويقارنون النتائج.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون — دون المتوسط	14-24 ، 41 ، 43-53
ضمن — ضمن المتوسط	15-23 فردي ، 29-37 فردي ، 39-41 ، 43-53
فوق — فوق المتوسط	29-53

مسائل مهارات التفكير العليا

41) اكتشف الخطأ: حَلَّ كل من بلال، خالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

بلال

$4^{3p} = 10$

$\log 4^{3p} = \log 10$

$3p \log 4 = \log 10$

$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$

خالد

$4^{3p} = 10$

$\log 4^{3p} = \log 10$

$p \log 4 = \log 10$

$p = \frac{\log 10}{\log 4}$

42) تحدٍّ: حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ لتجد قيمة x . وفسّر كل خطوة. انظر ملحق الإجابات

43) تبرير: اكتب $\frac{\log_5 9}{\log_5 3}$ على صورة لوغاريتم واحد. $\log_3 9$

44) برهان: أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. واكتب تخمينًا وبرهن على صحة العلاقة بين $\log_a b$ و $\log_b a$. انظر ملحق الإجابات

45) اكتب: فسر العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، وضمّن تفسيرك أمثلة شبيهة بتلك التي توضح كيفية حل معادلات لوغاريتمية باستعمال الأسس، وحل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات.

تدريب على اختبار معياري

46) أي التعابير الآتية يمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3$، و $g(x) = x - 5$؟ **B**

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

47) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$؟ **F**

F -4

G -2

H 2

J 4

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 5-2)

48) $\log_5 7 + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 x$ **14**

49) $2\log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$ **6**

50) $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$ **15**

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (الدرس 4-2)

51) $\log_4 x = \frac{1}{2}$ **2**

52) $\log_{81} 729 = x$ $\frac{3}{2}$

53) $\log_8 (3y - 1) = \log_8 (y + 5)$ $y = 3$

41) بلال؛ لأن خالد نسي أن يضرب في العدد 3 عند أخذ اللوغاريتم لكل طرف.
45) اللوغاريتمات: هي أسس. ولحل معادلات لوغاريتمية: اكتب كلًّا من الطرفين بالصورة الأسية، وحلها باستعمال خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات. ولحل معادلات أسية: استعمل خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية وخاصية القوة في اللوغاريتمات.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلبة في التمرين 41 بأن خاصية لوغاريتم القوة $\log_b m^p = p \log_b m$ ، p تمثل أسًّا لِـ m.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدتهم معرفة خصائص اللوغاريتمات على حل معادلات أسية.

التقويم التكويني

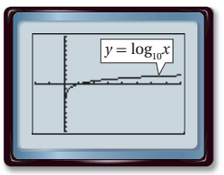
تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-6, 2-5 ، بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 2.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع ذكّر الطلبة بأنه يمكن استعمال القانون $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ ؛ لإيجاد المبلغ الكلي من استثمار مبلغ ما بربح مركب. واطلب إليهم استعمال اللوغاريتمات؛ لإيجاد عدد السنوات التي يتطلبها استثمار مبلغ BD5000 ليصبح BD8000 إذا كان معدل نسبة الربح 5% ، ويتم إضافته إلى رأس المال شهريًّا. 9.42 سنوات تقريبًا

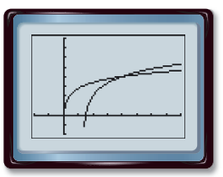
2-6 حل معادلات لوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations



لقد قمت بحل معادلات لوغاريتمية جبريًّا، ويمكنك أيضًا حلها بيانيًّا أو باستعمال جدول.
فالآلة الحاسبة البيانية تحتوي $y = \log_{10} x$ كأمر أساسي.
أدخل GRAPH LOG X,T,θ,n Y= لعرض التمثيل البياني للدالة $y = \log_{10} x$. ولتمثل دوال لوغاريتمية بأساسات لا تساوي عشرة، ينبغي عليك استعمال قانون تغيير الأساس $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$.

مثال

حُلّ $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.

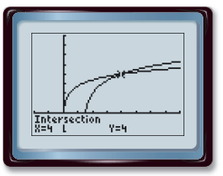


خطوة1 مثّل كل طرف من المعادلة بيانيًّا.

مثّل كل طرف من المعادلة بيانيًّا على أنه دالة مستقلة.
أدخل $\log_2 (6x - 8)$ لتكون Y1، و $\log_3 (20x + 1)$ لتكون Y2.
ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

Y= LOG 6 X,T,θ,n — 8) ÷ LOG 2)

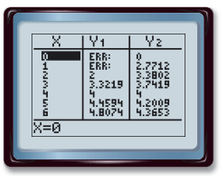
ENTER LOG 20 X,T,θ,n + 1) ÷ LOG 3) GRAPH



خطوة2 استعمل خاصية intersect.

استعمل خاصية intersect في قائمة CALC لتقريب إحداثيي الزوج المرتب لنقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. تبين شاشة الآلة الحاسبة البيانية أن الإحداثي x لنقطة التقاطع يساوي 4،

ولذا فإن حل المعادلة يساوي 4.



خطوة3 استعمل خاصية TABLE.

اختبر قيم الجدول لإيجاد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y للتمثيلين البيانيين
وهي $x = 4$، فعند القيمة $x = 4$ تكون قيمتا y للدالتين متساويتين، ولذا، فإن حل المعادلة يساوي 4.

تمارين:

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

1) $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$ **0, 2**
2) $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$ **5**
3) $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$ **0.7 تقريبًا**
4) $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$ **–1.5 تقريبًا**
5) $\log_4 (3x + 7) = \log_3 (5x - 6)$ **3**
6) $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x + 7)$ **6**
7) $\log_5 (2x + 1) = \log_4 (3x - 2)$ **2**
8) $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$ **1**

1 التركيز

الهدف استعمال آلة حاسبة بيانية؛ لحل معادلات أسية و لوغاريتمية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

أشر إلى أنه باستعمال مفتاح **log** يمكن إيجاد اللوغاريتم للأعداد أو التعابير. وذكّر الطلبة بأنه من المفيد وضع التعابير بين أقواس.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية أو ثلاثية ذوي قدرات متفاوتة، ثم اطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط، وحل التمارين 1-4.

نشاط

- اطلب إلى الطلبة قبل البدء بمناقشة النشاط استعمال قانون تغيير الأساس؛ لكتابة اللوغاريتمات في المعادلة على صورة لوغاريتمات اعتيادية.
- تأكد أن الطلبة قادرون على استعمال الجداول في الحاسبة؛ لإيجاد قيمة x التي تكون عندها قيمتا y متساويتين.
- اطلب إلى الطلبة تعويض الحل في المعادلة الأصلية؛ للتحقق من صحته.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 5-8.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 4؛ لتقويم مدى إتقان الطلبة لاستعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات لوغاريتمية.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبة في حلّ الأسئلة 7-1 فنبّههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

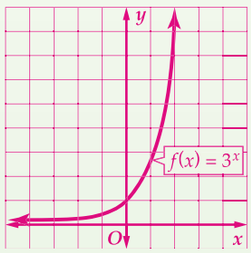
التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل.

أحاجي المفردات تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات، ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

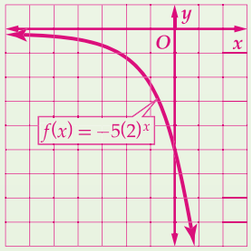
إجابات :

8)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y > 0\}$

9)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y < 0\}$

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدوال الأسية (الدرسان 2-2 ، 2-1)

- تكون الدوال الأسية على الصورة $y = ab^x$ ، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
- خاصية المساواة للدوال الأسية: إذا كان b عددًا موجبًا ، $b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, b > 1$ دالة نمو أسي.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, 0 < b < 1$ دالة اضمحلال أسي.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
(الدروس 3-2 إلى 6-2)

- افرض أن $b > 0$ و $b \neq 1$ فإنه لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا كان $b^y = x$.
- لوغاريتم حاصل الضرب يساوي مجموع لوغاريتمات عوامله.
- لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم البسط مطروحًا منه لوغاريتم المقام.
- لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في اللوغاريتم نفسه.
- قانون تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

مطويتك منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

الدالة الأسية	ص 66	الربح المركب	ص 75
النمو الأسي	ص 66	اللوغاريتم	ص 80
خط التقارب	66	الدالة اللوغاريتمية	ص 81
عامل النمو	ص 68	المعادلة اللوغاريتمية	ص 88
الاضمحلال الأسي	ص 68	اللوغاريتم الاعتيادي	ص 98
عامل الاضمحلال	ص 69	قانون تغيير الأساس	ص 100
المعادلة الأسية	ص 74		

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة فيما يأتي من القائمة أعلاه:

1) الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$ ، حيث $b > 1$ تسمى دالة نمو أسي .

2) في المعادلة $x = b^y$. المتغير y يسمى لوغاريتم x للأساس b .

3) يسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 اللوغاريتم الاعتيادي.

4) المعادلة الأسية هي معادلة يظهر فيها المتغير على صورة أس.

5) يمكنك باستعمال قانون تغيير الأساس كتابة تعابير لوغاريتمية مكافئة للوغاريتم بأساس مختلف.

6) الأساس $1 - r$ في الدالة الأسية $A(t) = a(1 - r)^t$ يُسمى عامل الاضمحلال.

7) الدالة $y = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1, b > 0$ تُسمى دالة لوغاريتمية.

مراجعة الدروس

2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانيًا (الصفحات 72-66)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا وحدد مجالها ومداها: للتمارين 13-8 انظر الهامش

8) $f(x) = 3^x$
9) $f(x) = -5(2)^x$
10) $f(x) = 3(4)^x - 6$
11) $f(x) = 3^{2x} + 5$
12) $f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$
13) $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$

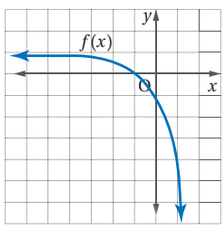
14) **سكان:** يبلغ عدد سكان مدينة 120000 نسمة، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3% سنويًا. $f(t) = 120000(0.97)^t$

a) اكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنة.

b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات؟ 88491

مثال 1

مثّل الدالة $f(x) = -2(3)^x + 1$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية .

المدى = $\{y \mid y < 1\}$.

مطويتك منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة. وبيّن لهم أن مطوياتهم يمكن أن تكون وسيلة مناسبة للمراجعة السريعة في أثناء دراستهم استعداداً لاختبار الفصل.

2-2 حل المعادلات الأسية (الصفحات 74-79)

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي:

(15) $16^x = \frac{1}{64}$ $-\frac{3}{2}$ (16) $3^{4x} = 9^{3x+7}$ -7

(17) $64^{3n} = 8^{2n-3}$ (18) $8^{3-3y} = 256^{4y}$ $\frac{9}{41}$

(19) $9^{x-2} = \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$ (20) $27^{3x} = 9^{2x-1}$

(19) $-\frac{2}{3}$ (20) $-\frac{2}{5}$

(21) **بكتيريا:** بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ5000 خلية. وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبًا.

a) اكتب دالة أسية تمثل عدد خلايا البكتيريا بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه. $y = 5000(1.240)^x$

b) ما عدد خلايا البكتيريا المتوقعة بعد 32 h؟ 4880496 تقريبًا

مثال 2

حُلّ المعادلة $4^{3x} = 32^{x-1}$.

المعادلة الأصلية	$4^{3x} = 32^{x-1}$
بإعادة الكتابة لتوحيد الأساس	$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$
بالتبسيط	$2^{6x} = 2^{5x-5}$
خاصية المساواة للأسس	$6x = 5x - 5$
بالتبسيط	$x = -5$

الحل هو -5.

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الصفحات 80-86)

(22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ على الصورة الأسية. $2^{-4} = \frac{1}{16}$

(23) اكتب $10^2 = 100$ على الصورة اللوغاريتمية. $\log_{10} 100 = 2$

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي:

(24) $\log_4 256$ 4 (25) $\log_2 \frac{1}{8}$ -3

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا: للتمارين 27–26 انظر الهامش

(26) $f(x) = 2\log_{10} x + 4$ (27) $f(x) = \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

مثال 3

أوجد قيمة $\log_2 64$.

بفرض أن اللوغاريتم يساوي y.	$\log_2 64 = y$
تعريف اللوغاريتم	$64 = 2^y$
	$2^6 = 2^y$
خاصية المساواة للدوال الأسية	$6 = y$

2-4 حل المعادلات اللوغاريتمية (الصفحات 88-91)

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

(28) $\log_{16} x = \frac{3}{2}$ 64 (29) $\log_2 \frac{1}{64} = x$ -6

(30) $\log_4 x = 3$ 64 (31) $\log_5 x = -3$ $\frac{1}{125}$

(32) $\log_9 (3x-1) = \log_9 (4x)$ لا يوجد حل

(33) $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$ -6

(34) $\log_3 (3x+4) = \log_3 (x-2)$ لا يوجد حل

(35) **هزات أرضية:** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يسمى مقياس ريختر، وتعطى قوة الهزة M بالمعادلة $M = \log_{10} x$، حيث x سعة الموجة التي تسبب حركة الأرض. كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية قوتها 10 درجات بمقياس ريختر من سعة هزة أخرى قوتها 7 درجات على المقياس نفسه؟ 1000مرة

مثال 4

حُلّ المعادلة: $\log_{27} x = \frac{2}{3}$

المعادلة الأصلية	$\log_{27} x = \frac{2}{3}$
تعريف اللوغاريتم	$x = 27^{\frac{2}{3}}$
بالتبسيط	$x = 9$

مثال 5

حُلّ المعادلة: $\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$

المعادلة الأصلية	$\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$
خاصية المساواة للوغاريتمات	$p^2 - 2 = p$
بطرح p من كلا الطرفين ثم التحليل	$p^2 - p - 2 = (p-2)(p+1) = 0$
بحل كل معادلة	$p = 2$ أو $p = -1$

الحل $p = 2$؛ لأن $\log_5 p$ غير معرف عند $p = -1$.

مراجعة الدروس

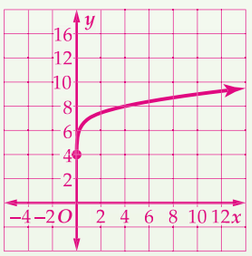
مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

بناء الاختبارات
التقـــويم

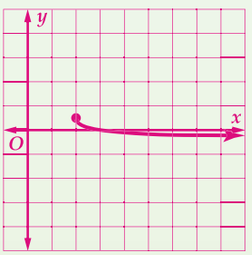
إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل من (ص 104-106) يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات؛ لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا، أو على الجزء من الفصل الذي مازال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

إجابات:

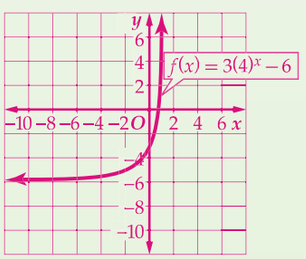
(26)



(27)

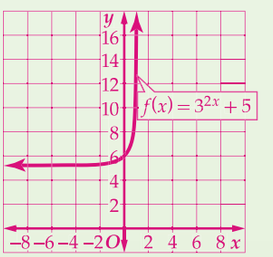


(10)



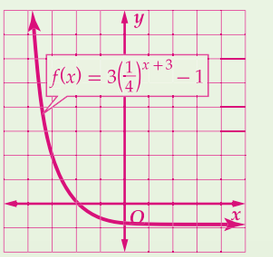
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y > -6\}$

(11)



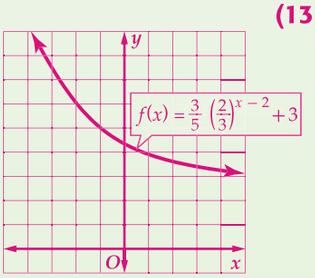
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y > 5\}$

(12)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y > -1\}$

(13)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y > 3\}$

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حل المسألة فذكرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 2 ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 2.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

2-5 خصائص اللوغاريتمات (الصفحات 97-92)

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227$، و $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب كل مما يأتي:

(36) $\log_5 8$ 1.2921 **(37)** $\log_5 64$ 2.5842

(38) $\log_5 4$ 0.8614 **(39)** $\log_5 \frac{1}{8}$ −1.2921

(40) $\log_5 \frac{1}{2}$ −0.4307

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك:

(41) $\log_5 x - \log_5 2 = \log_5 15$ 30

(42) $3 \log_4 a = \log_4 27$ 3

(43) $2 \log_3 x + \log_3 3 = \log_3 36$ $2\sqrt{3}$

(44) $\log_4 n + \log_4 (n-4) = \log_4 5$ 5

(45) **صوت:** استعمل القانون $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث L ارتفاع الصوت، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد كم مرة يعادل ارتفاع أصوات 20 شخصًا يتكلمون مقارنة بارتفاع صوت شخص واحد. على فرض أن الشدة النسبية لصوت شخص واحد تساوي 80 dB. 361.6 مرة

مثال 6

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227$ ، و $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة $\log_5 32$.

بالتعويض عن 32 بالقيمة (2×16)	$\log_5 32 = \log_5 (16 \times 2)$
خاصية الضرب في اللوغاريتمات	$= \log_5 16 + \log_5 2$
باستعمال الآلة الحاسبة	$\approx 1.7227 + 0.4307$
بالتبسيط	≈ 2.1534

مثال 7

حُلّ المعادلة اللوغاريتمية $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$

المعادلة الأصلية	$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$
خاصية الضرب في اللوغاريتمات	$\log_3 3x(4) = \log_3 36$
خاصية المساواة للوغاريتمات	$3x(4) = 36$
بالضرب	$12x = 36$
بقسمة كلا الطرفين على 12	$x = 3$

2-6 اللوغاريتمات الاعتيادية (الصفحات 102-98)

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

(46) $3^x = 15$ $x \approx 2.4650$ **(47)** $6^{x^2} = 28$ $x \approx \pm 1.3637$

(48) $8^{m+1} = 30$ $m \approx 0.6356$ **(49)** $12^{r-1} = 7^r$ $r \approx 4.6102$

(50) $3^{5n} = 24$ $n \approx 0.5786$ **(51)** $5^{x+2} = 3^x$ $x \approx -6.3013$

(52) اكتب كلًا مما يأتي في صورة لوغاريتم اعتيادي، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a) $\log_4 11$ **b)** $\log_2 15$

a) $\frac{\log 11}{\log 4} \approx 1.7297$

b) $\frac{\log 15}{\log 2} \approx 3.9069$

مثال 8

حُلّ المعادلة: $5^{3x} = 7^{x+1}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

المعادلة الأصلية	$5^{3x} = 7^{x+1}$
خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	$\log 5^{3x} = \log 7^{x+1}$
خاصية القوة للوغاريتمات	$3x \log 5 = (x+1) \log 7$
خاصية توزيع الضرب على الجمع	$3x \log 5 = x \log 7 + \log 7$
بطرح $x \log 7$	$3x \log 5 - x \log 7 = \log 7$
بإخراج x عامل مشترك	$x(3 \log 5 - \log 7) = \log 7$
بقسمة كلا الطرفين على $3 \log 5 - \log 7$	$x = \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 0.6751$

106 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها مداها: للتمارين 1, 2 انظر الهامش

1) $g(x) = 3^{x-3} + 2$

2) $g(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك:

3) $8^{c+1} = 16^{2c+3}$ $c = -\frac{9}{5}$

4) $9^{x-2} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x}$ $x = \frac{4}{5}$

5) $2^{a+3} = 3^{2a-1}$ $a \approx 2.1130$

6) $\log_2(x^2 - 7) = \log_2 6x$ $x = 7$

7) $\log_5 x = 2$ $x = 25$

8) $\log_3 x + \log_3(x-3) = \log_3 4$ $x = 4$

9) $6^{n-1} = 11^{n}$ $n = -2.9560$

استعمل $\log_5 11 \approx 1.4899$، و $\log_5 2 \approx 0.4307$، لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

10) $\log_5 44$ 2.3513

11) $\log_5 \frac{11}{2}$ 1.0592

12) **سكان:** كان عدد سكان مدينة قبل 10 أعوام 150000 نسمة، ثم تزايد بعد ذلك عددهم بمعدل ثابت كل سنة، ليصبح الآن 185000 نسمة.

a) $y = 185000\,(1.0212)^x$

b) اكتب دالة أسية يمكن أن تمثل عدد السكان بعد x سنة إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه.

b) كم يصبح عدد السكان بعد 25 سنة؟ 312566 تقريبًا

13) اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ على الصورة الأسية. $9^{\frac{3}{2}} = 27$

14) **اختيار من متعدد:** ماقيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟ A

A -3 B $-\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{3}$ D 3

15) **زراعة:** تمثل المعادلة $y = 3962520(0.98)^x$ تراجع عدد المزارع في بلد ما، حيث x عدد الأعوام منذ عام 1380 هـ − 1960 م، y عدد المزارع.

a) كيف يمكنك أن تعرف أن عدد المزارع يتناقص؟ $b < 1$

b) بأي نسبة يتناقص عدد المزارع؟ 2%

c) تنبأ بعد كم سنة يصبح عدد المزارع مليون مزرعة. 2028 تقريبًا

16) **توفير:** إذا وضع مبلغ BD 7500 في مشروع معدل ربحه المركب 3%، وتضاف الأرباح إلى رأس المال شهريًّا.

a) ما المبلغ الكلي بعد 5 سنوات إذا لم يسحب منه ولم يضف إليه؟ BD 8690 تقريبًا

b) بعد كم سنة يصبح المبلغ الكلي مثلي ما كان عليه؟ 2.31 سنة تقريبًا

c) بعد كم سنة يصبح المبلغ الكلي BD 10000؟ 9.6 سنة تقريبًا

17) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة: $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$؟ G

F $\frac{1}{2}$ G 2

H 4 J 8

بناء الاختبارات
التقويم

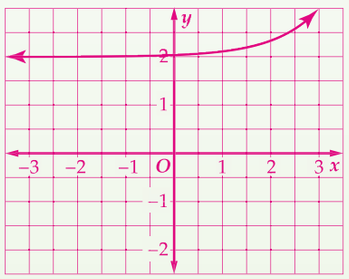
أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 2 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

المعالجة:

بناء على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكّل تحديًا للطلبة.

إجابات:

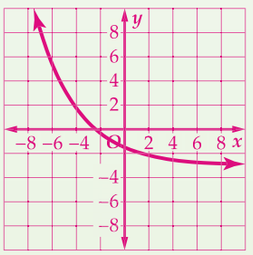
1)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y > 2\}$

2)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y > -3\}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 2-1، 2-2، 2-3، 2-4، 2-5، 2-6	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (64)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية استعمال التقنيات؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

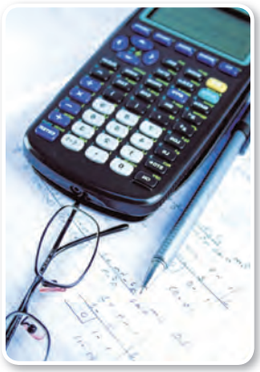
- سمِّ أدوات تستعملها لحل المسألة الرياضية.

إجابة ممكنة: الآلة الحاسبة، الفرجار، المنقلة، المسطرة، الورقة والقلم

- كيف تحدد الأداة التي تستعملها ؟

إجابة ممكنة: استعمل الآلة الحاسبة البيانية عند تمثيل الدوال بيانيًّا، واستعمل المنقلة عند قياس الزوايا، والمسطرة عند قياس الأطوال.

استعمال التقنيات



تشكل الآلة الحاسبة أداة مهمة في الاختبارات المعيارية، فبعض الأسئلة تتضمن خطوات وحسابات لابد من استعمال الآلة الحاسبة فيها. فاستعمال الآلة الحاسبة يساعد على حل المسائل بسرعة أكبر.

استراتيجيات استعمال التقنيات

خطوة 1

تُعد الآلة الحاسبة أداة مفيدة جدًّا، ولكن يجب ألا تُستعمل بإسراف خاصة أن الاختبارات المعيارية قد أعدت لقياس قدراتك على التفسير والتبرير وحل المسألة، لا على استعمال الآلة الحاسبة.

قبل أن تستعمل الآلة الحاسبة، اسأل نفسك:

- **كيف أحل هذا النوع من المسائل عادة؟**
- **هل هناك خطوات لا يمكن أن أجريها ذهنيًّا أو باستعمال الورقة والقلم؟**
- **هل استعمال الآلة الحاسبة ضروري لإجراء العمليات؟**
- **هل تساعدني الآلة الحاسبة على حل السؤال بسرعة وبدقة؟**

خطوة 2

متى يمكن استعمال الآلة الحاسبة؟

- عند حل مسائل تتضمن إجراء حسابات معقدة.
- عند حل مسائل تتطلب تمثيل دوال بيانيًّا، وإيجاد قيم دوال، وحل معادلات، وغيرها.
- عند التحقق من حل المسائل.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدّد المطلوب، واستعمل المعطيات لحلها:

تحتوي عبوة مشروبات غازية على 60 mg من مادة الكافيين. إذا كان الجسم يتخلص من 15% من الكافيين كل ساعة، فكم ساعة يحتاج الجسم للتخلص من نصف كمية الكافيين؟

A 4h **B** 4.25h **C** 4.5h **D** 4.75h

اقرأ المسألة بعناية، إذ يمكن حلها باستعمال الدالة الأسّية، واستعمل قانون الاضمحلال الأسي لتمثيل المسألة، ثم حلّها.

$$y = a(1 - r)^t$$

$$y = 60(1 - 0.15)^t$$

نصف 60 mg يساوي 30 mg؛ لذا افرض أن $y = 30$ ، وحل لتجد قيمة t.

$$30 = 60(1 - 0.15)^t$$

$$0.5 = (0.85)^t$$

استعمل خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية، واستعمل خاصية القوة للوغاريتم.

$$\log 0.5 = \log (0.85)^t$$

$$\log 0.5 = t \log 0.85$$

$$\frac{\log 0.5}{\log 0.85} = t$$

عند هذه الخطوة تكون بحاجة إلى استعمال الآلة الحاسبة لحساب اللوغاريتم وحل المسألة، وبعدئذٍ تحصل على $t \approx 4.265$، وعليه، تحتاج إلى 4.25 h تقريبًا للتخلص من نصف كمية الكافيين. والإجابة الصحيحة هي B.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي وحدد المطلوب، واستعمل المعطيات لحلها:

1) اشترى عبد الكريم سيارة بسعر BD 34750 ، فإذا كان ثمنها يتناقص بمعدل 12% كل عام، فما السعر التقريبي للسيارة بعد 7 سنوات من شرائها؟ **D**

A 13775

B 13890

C 14125

D 14200

2) استثمرت هدى مبلغ BD 2500 في مشروع تجاري على أن تتوفر فيه الشروط الآتية:
1) ألا يقل المبلغ عن BD 1000 ولا يسمح بسحبه قبل 12 شهرًا.
2) أن يستثمر بربح مركب يوميًّا بمعدل 4.25 سنويًّا.

استعمل المعادلة $2750 = 2500\left(1 + \frac{0.0425}{365}\right)^{365t}$ لحساب الزمن t بالسنوات الذي يتطلبه الحصول على ربح مقداره BD 250. **B**

A 2.15 سنة تقريبًا

B 2.24 سنة تقريبًا

C 2.35 سنة تقريبًا

D 2.46 سنة تقريبًا

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

بلغ عدد سكان بلدةٍ ما 4590 نسمة عام 1800م ، وتزايد عدد سكانها بنسبة 1.05% سنويًّا. في أي سنة يتوقع أن يصبح عدد السكان 37075 نسمةً؟ **D**

A 1808

B 1820

C 1997

D 2000

3 التقويم

استعمل التمارين **3–1**؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملاً لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

1) A الإجابة الصحيحة.
B أخطأ في تبسيط $\log 4 \div \log 1$.
C خمّن.
D أخطأ عندما افترض أن $4^0 = 4$، وليس $4^0 = 1$.

2) F أخطأ في إدخال البيانات في الآلة الحاسبة.
G الإجابة الصحيحة.
H أخطأ في استعمال خصائص اللوغاريتمات.
J أخطأ في استعمال خصائص اللوغاريتمات.

3) A لم يستعمل مُعدّلًا مئويًّا.
B استعمل معادلة غير صحيحة.
C افترض أن $t = 5$ بدلًا من 6.
D الإجابة الصحيحة.

4) A لم يدرك أن قيمة x لا يمكن أن تكون -2.
B لم يدرك أن قيمة x لا يمكن أن تكون -2.
C الإجابة الصحيحة.
D خمّن.

5) F لم يدرك أن قيمة x لا يمكن أن تكون صفرًا.
G لم يدرك أن قيمة x لا يمكن أن تكون صفرًا أو سالبة.
H الإجابة الصحيحة.
J لم يدرك أن قيمة x لا يمكن أن تكون صفرًا أو سالبة.

الفصل 2
اختبار معياري تراكمي
للفصلين 2 , 1

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة مما يأتي:

1) ما مقطع المحور y للدالة الأسية أدناه؟ **A**

$$y = 4^x - 1$$

0 **A** 1 **B** 2 **C** 3 **D**

إرشادات الاختبار

سؤال 2: استعمل التقنيات وخصائص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة t عندما $p = 3000$.

2) افرض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة. تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ لتقدير عدد السنوات t ليصبح عدد الطيور P. بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من ذلك النوع 3000 طائر؟ **G**

F سنتان
G 3 سنوات
H 5 سنوات
J 8 سنوات

3) يتكاثر نوع من الخلايا البكتيرية بحيث يصبح عددها ضعفي ما كان عليه خلال 20 min. إذا بدأت بخلية واحدة فكم سيصبح عدد الخلايا بعد ساعتين؟ **D**

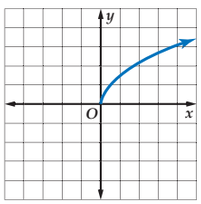
2 **A** 6 **B** 32 **C** 64 **D**

4) ما قيمة x في المعادلة $\log_3 (x^2 + 2x) = \log_3 (x+2)$؟ **C**

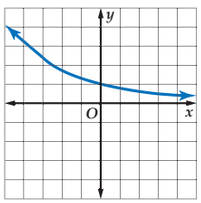
A $-2, 1$
B -2
C 1
D لا يوجد حل

5) أيّ مما يأتي هو التمثيل البياني للدالة $y = \log_5 x$؟ **H**

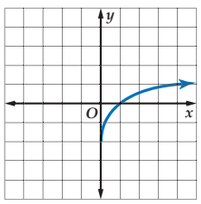
F



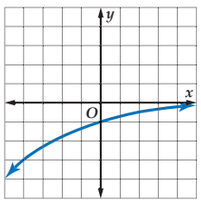
G



H



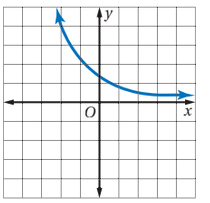
J



أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

6) التمثيل البياني الموضح أدناه للدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$، فما مجالها؟ **مجموعة الأعداد الحقيقية**



7) اشترى خالد سيارة بسعر BD 33750 وقدّر أن السعر يتناقص بنسبة 10.5% سنويًّا. فما السعر التقريبي للسيارة بعد 6 سنوات من الشراء؟ وضح خطوات الحل. **BD 17347 تقريبًا**

8) إذا كان $f(x) = x + 1, g(x) = \sqrt{2x}$، فأوجد:

a) مجال الدالة $(g \circ f)(x)$. $\{x \mid x \geq -1\}$

b) قيمة $(f \circ g)(2)$. **3**

9) إذا كان $f(x) = 3x$ ، $g(x) = x^2 - 1$، فما قيمة $f(g(-3))$؟ **24**

10) بسّط التعبير: $(-2a^{-\frac{1}{2}}b^{-6})(-3a^2b^{\frac{1}{3}})$. $\frac{6a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{17}{3}}}$

أسئلة ذات إجابات طويلة

11) إذا كان عدد غزلان المها في إحدى المحميات يتزايد سنويًّا بمعدل 10% منذ عام 1416هـ – 1995م، وكان عددها في ذلك الوقت 135000 غزال.

a) اكتب دالة تمثل عدد الغزلان في المحمية بعد t سنة. **انظر الهامش**

b) استعمل الدالة لتقدير عدد الغزلان عام 1421هـ – 2000م. قرّب الناتج إلى أقرب 100 غزال. **217400 غزالًا تقريبًا**

12) ورثت فاطمة عن والدها مبلغ BD 250000 واستثمرته في مشروع، وتزايد كما في الجدول أدناه:

السنة	المبلغ (BD)
1992	250000
2000	329202
2005	390989

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لإيجاد المبلغ الكلي بعد t سنة من الاستثمار. $A(t) = 250000(1.035)^t$

b) إذا استمر تزايد المبلغ بالمعدل نفسه. ففي أي سنة يصبح المبلغ الكلي BD 500000 تقريبًا؟ **2012**

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟												
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
أذهب للدرس ...	2-1	2-4	2-2	2-4	2-3	2-1	2-6	1-1	1-1	1-6	2-6	2-2

التقويم التكويني

يمكن استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

إجابة:

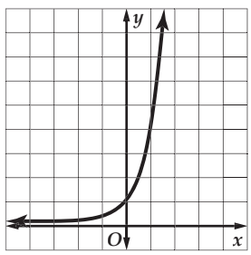
11a) $N = 135000(1.1)^t$ ، حيث N عدد الغزلان، و t الزمن بالسنوات منذ عام 1995 م.

بناء الاختبارات
التقـــويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات؛ لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل اختبارات TIMSS أو NAEP.

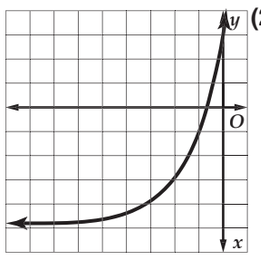
الدرس 1-2 ص 66-72

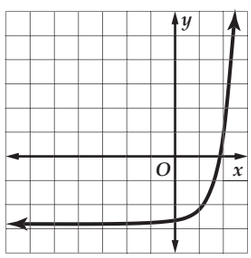
تأكد1)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى = $\{y \mid y > 0\}$

تأكد 2A) **تأكد 2B)**

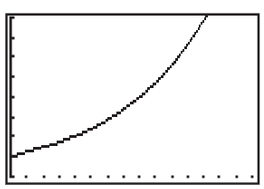




المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > -5\}$ المدى = $\{y \mid y > -3\}$

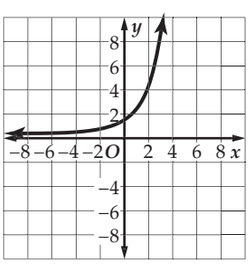
تأكد 3)



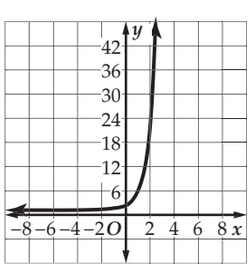
[0, 75] scl: 5 by [0, 64000] scl: 80000

$y = 80000\ (1.035)^t$

1)



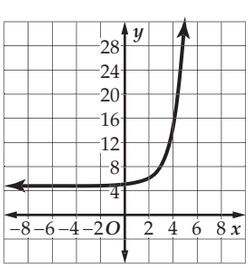
2)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > 0\}$ المدى = $\{y \mid y > 0\}$

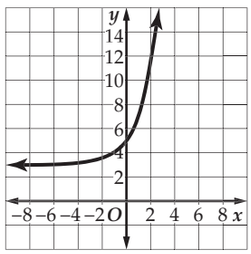
3 كوِّن جدول قيم، ومثل الدالة بيانيًّا.



$f(x) = 3^{x-2} + 4$	x
$3^{-2-2} + 4 = 4\frac{1}{81}$	-2
$3^{-1-2} + 4 = 4\frac{1}{27}$	-1
$3^{0-2} + 4 = 4\frac{1}{9}$	0
$3^{1-2} + 4 = 4\frac{1}{3}$	1
$3^{2-2} + 4 = 5$	2
$3^{3-2} + 4 = 7$	3
$3^{-2-2} + 4 = 13$	4

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى = $\{f(y) \mid f(y) > 4\}$

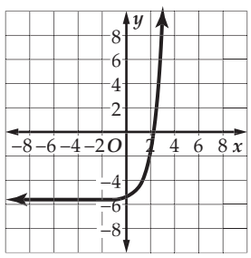
4)



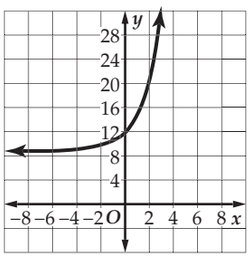
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > 3\}$

5)



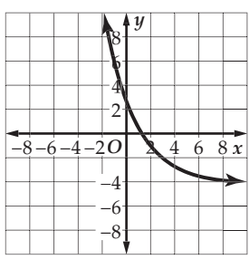
6)



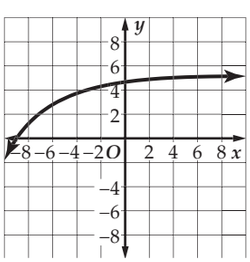
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > -6\}$ المدى = $\{y \mid y > 8\}$

8)



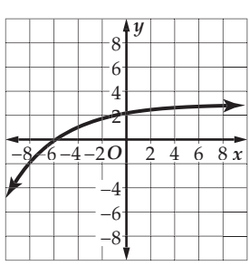
9)



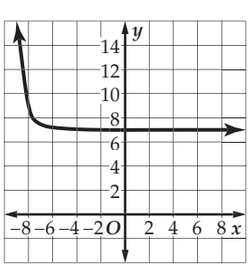
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > -4\}$ المدى = $\{y \mid y < 5\}$

10)



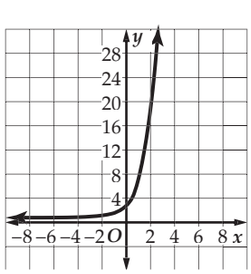
11)



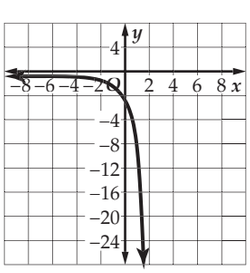
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y < 3\}$ المدى = $\{y \mid y > 7\}$

13)



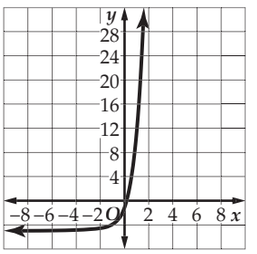
14)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > 0\}$ المدى = $\{y \mid y < 0\}$

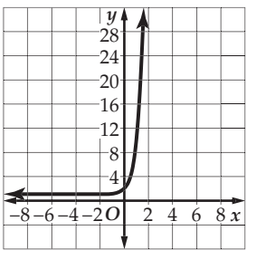
(15



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > -5\}$

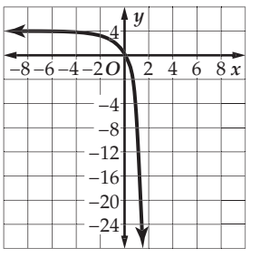
(16



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > 1\}$

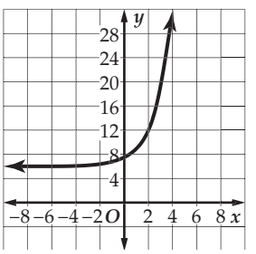
(17



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y < 4\}$

(18



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y > 6\}$

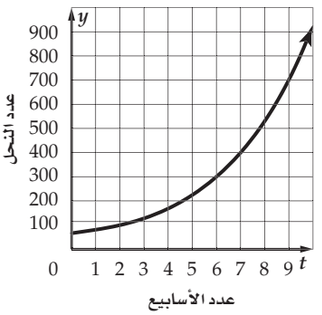
19 معادلة النمو الأسي $y = a(1 + r)^t$

$a = 65 , r = 0.3$ $y = 65(1 + 0.3)^t$

بالتبسيط $y = 65(1.3)^t$

كوِّن جدول قيم ومثل الدالة بيانيًّا.

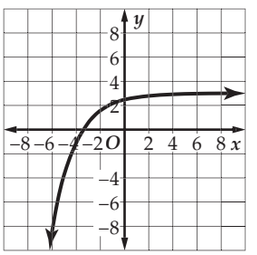
$y = 65(0.3)^t$	t
$y = 65(1.3)^0 = 65$	0
$y = 65(1.3)^2 \approx 110$	2
$y = 65(1.3)^4 \approx 186$	4
$y = 65(1.3)^6 \approx 314$	6
$y = 65(1.3)^8 \approx 530$	8
$y = 65(1.3)^{10} \approx 896$	10



$y = 65\,(1.3)^t$

عدد النحل بعد عشر أسابيع يساوي 896 نحلة تقريبًا

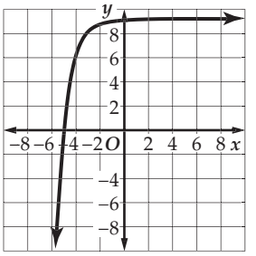
(20



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y < 3\}$

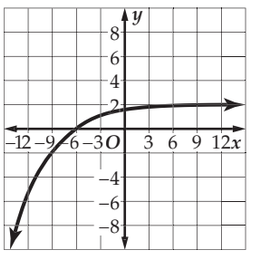
(21



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y < 9\}$

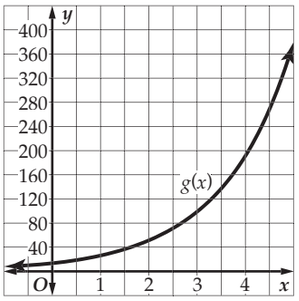
(22

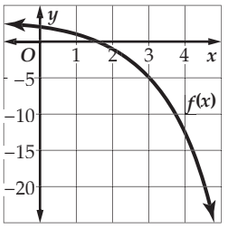


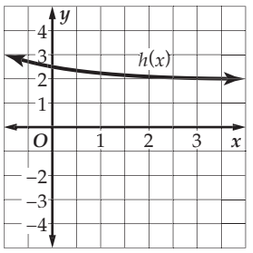
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،

المدى = $\{y \mid y < 2\}$

30 a)







b) إجابة ممكنة : التمثيل البياني لِـ $f(x)$ يظهر أنه يمثل $f(x) = b^x$ وقد عكس في المحور x . ومع ازدياد قيم x ، تنقص قيم المخرجات في الجدول.

c) إجابة ممكنة: يبدو أن منحنى $g(x)$ ومنحنى $h(x)$ قد أُزيحا إلى اليسار.

d) إجابة ممكنة : $f(x)$ ، $g(x)$ دالتا نمو أسي، على حين أن $h(x)$ دالة اضمحلال أسي؛ والقيم المطلقة للمخرجات متزايدة لدوال النمو الأسي ومتناقصة لدوال الاضمحلال.

الدرس 2-2 ص 74-79

9 المعادلة الأصلية $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

$81 = 3^4$ $(3^4)^{a+2} = 3^{3a+1}$

خاصية قوة القوة $3^{4(a+2)} = 3^{3a+1}$

خاصية التوزيع $3^{4a+8} = 3^{3a+1}$

خاصية المساواة للدوال الأسية $4a + 8 = 3a + 1$

بطرح $3a$ من كلا الطرفين $a + 8 = 1$

بطرح 8 من كلا الطرفين $a = -7$

21 a) بكتابة التناسب $\frac{a}{w^{1.31}} = \frac{170}{45^{1.31}}$

خاصية الضرب التبادلي $a \cdot 45^{1.31} = w^{1.31} \cdot 170$

بقسمة كل طرف على 451.31 باستعمال الحاسبة $a = \frac{w^{1.31} \cdot 170}{45^{1.31}}$

$a = 1.16w^{1.31}$

b) بكتابة المعادلة $a = 1.16w^{1.31}$

$w = 430$ $= 1.16(430)^{1.31}$

باستعمال الحاسبة ≈ 3268

(31b)

عدد مرات القص	عدد القطع
1	2
2	4
3	8
4	16

(32) إجابة ممكنة: يزداد المبلغ المتجمع بازدياد عدد مرات احتساب الأرباح إلى المبلغ الأصلي.

(36)

المعادلة الأصلية $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$

$3^4 = 81, 3^2 = 9, 3^3 = 27$ $(3^3)^{2x} \cdot (3^4)^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot (3^2)^{4x+1}$

قوة القوة $3^{6x} \cdot 3^{4x+4} = 3^{2x+2} \cdot 3^{8x+2}$

حاصل ضرب القوى $3^{10x+4} = 3^{10x+4}$

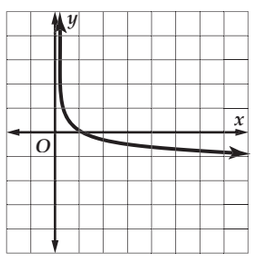
خاصية المساواة للدوال الأسية $10x + 4 = 10x + 4$

بطرح 4 من كلا الطرفين $10x = 10x$

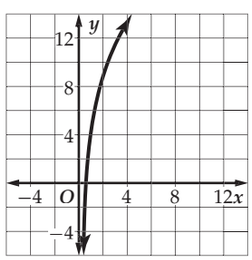
بقسمة كلا الطرفين على 10 $x = x$

الدرس 3-2 ص 80-86

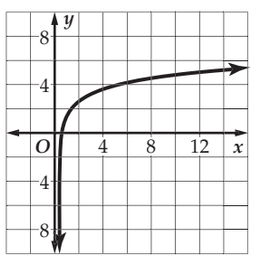
(34)



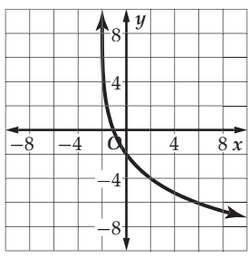
(35)



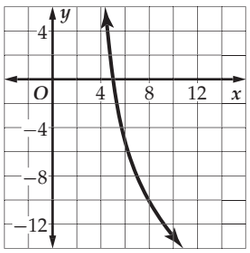
(36)



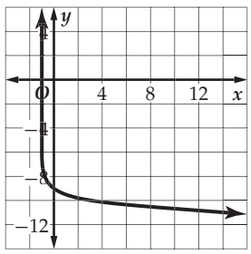
(37)



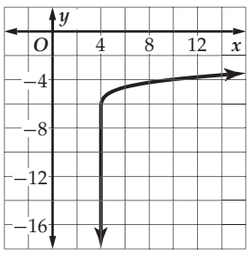
(38)



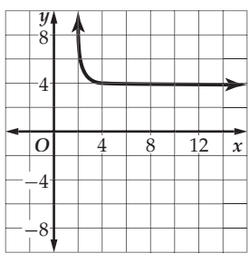
(39)



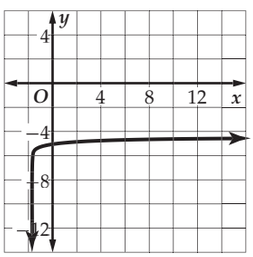
(40)



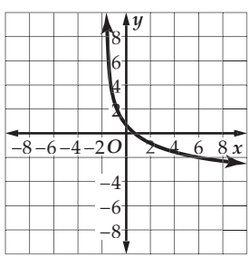
(41)



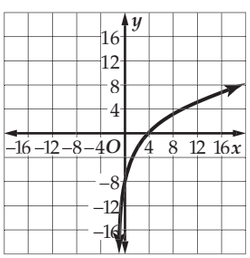
(42)



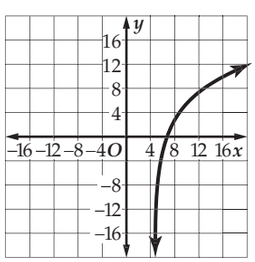
(45)



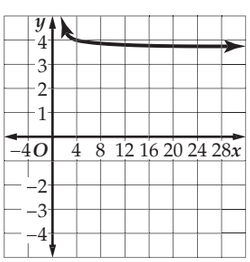
(46)



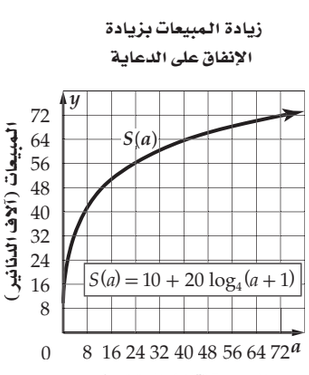
(47)



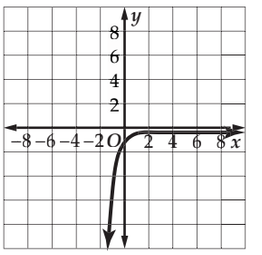
(48)



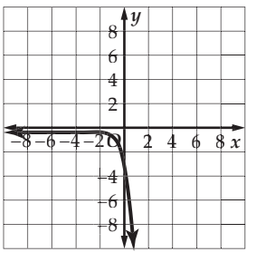
(49c)



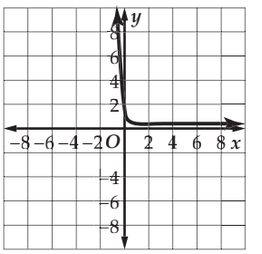
(63



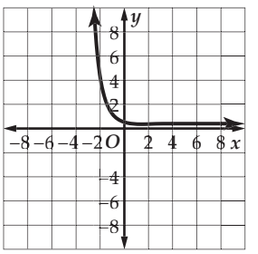
(64



(65

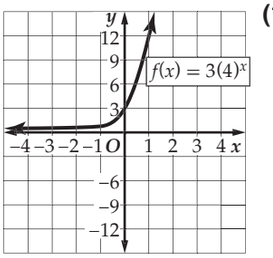


(66



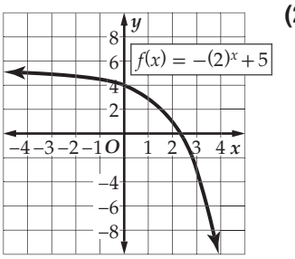
اختبار منتصف الفصل ص 87

(1



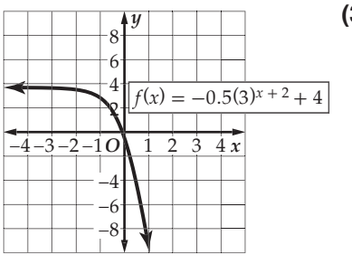
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى = $\{y \mid y > 0\}$

(2



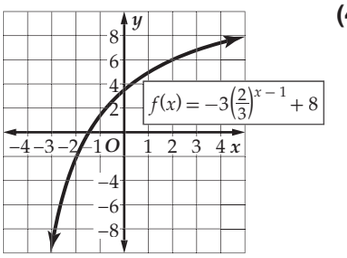
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى = $\{y \mid y < 5\}$

(3



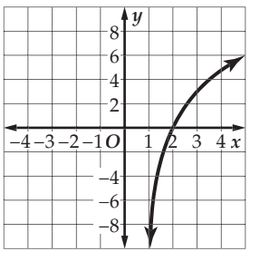
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى = $\{y \mid y < 4\}$

(4

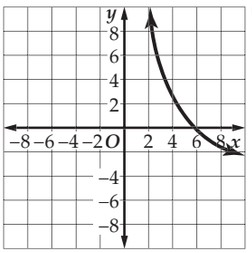


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y < 8\}$

(8



(9



الدرس 4-2 ص 91 - 88

11 المعادلة الأصلية $\log_{12}(x^2 - 7) = \log_{12}(x + 5)$

خاصية المساواة للدوال الآسية $x^2 - 7 = x + 5$

بطرح x من كلا الطرفين $x^2 - x - 7 = 5$

بطرح 5 من كلا الطرفين $x^2 - x - 12 = 0$

بالتحليل $(x - 4)(x + 3) = 0$

$x + 3 = 0$ أو $x - 4 = 0$

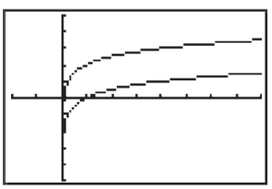
خاصية الضرب الصفري

بحل كل معادلة $x = -3$ $x = 4$

18a) التمثيلات البيانيان متشابهان، وخط تقارب كل منهما المحور y ، ومقطع المحور x لهما 1 .

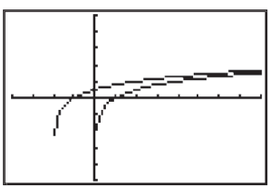
18b) التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا في المحور x.

18c1) التمثيل البياني الثاني مشابه للتمثيل البياني الأول مع إزاحة إلى أعلى وحدتان.



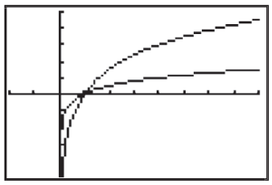
[−2, 8] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

18c 2) التمثيل البياني الثاني مشابه للتمثيل البياني الأول مع إزاحة أفقية بمقدار وحدتين.



[−4, 8] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

18c 3) الإحداثي y لكل نقطة على التمثيل البياني الثاني يساوي 3 أمثال الإحداثي المناظر له على التمثيل البياني الأول.



[−2, 8] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

18d) التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا في المحور x؛
المجال = $\{x|x>0\}$ ، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية.

19 a) المعادلة الأصلية $\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

$I = 1$ $= 10\log_{10}\left(\frac{1}{10^{-12}}\right)$

$\frac{1}{10^{-12}} = 10^{12}$ $= 10\log_{10}10^{12}$

تعريف اللوغاريتم $= 10(12) = 120$

المعادلة الأصلية $\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

$I = 10^{-2}$ $= 10\log_{10}\left(\frac{10^{-2}}{10^{-12}}\right)$

خاصية قسمة القوى $= 10\log_{10}10^{10}$

تعريف اللوغاريتم $= 10(10) = 100$

b) إجابة ممكنة: تتغير قوة اللوغاريتم بمقدار 2، ممّا يعني أن عدد وحدات الديسبل تتغير بمقدار $10\log_{10}10^2$
أو $2 \times 10\log_{10}10 = 20$.

الدرس 5-2 ص 97 - 92

15 خاصية القسمة $\log_4\frac{4}{3} = \log_4 4 - \log_4 3$

خاصية المعكوس للأسس و اللوغاريتمات $= 1 - \log_4 3$

$\log_4 3 = 0.7925$ $\approx 1 - 0.7925$

بالتبسيط ≈ 0.2075

55) المعادلة الأصلية $\log_a\frac{1}{x} = -\log_a x$

تعريف الأسس السالبة $\log_a x^{-1} = -\log_a x$

خاصية لوغاريتم القوة $\log_a x^{-1} = (-1)\log_a x$

بالتبسيط $\log_a\frac{1}{x} = -\log_a x$

56) $x^{3\log_x 2 - \log_x 5} = x^{3\log_x 2 - \log_x 5}$

$= x^{\log_x 2^3 - \log_x 5}$

$= x^{\log_x 8 - \log_x 5}$

$= x^{\log_x \frac{8}{5}}$

$= \frac{8}{5}$

الدرس 6-2 ص 102 - 98

9

المعادلة الأصلية $11^{b-3} = 5^b$

خاصية المساواة للأسس و اللوغاريتمات $\log 11^{b-3} = \log 5^b$

خاصية القوة للوغاريتمات $(b-3)\log 11 = b\log 5$

خاصية التوزيع $b\log 11 - 3\log 11 = b\log 5$

بطرح $b\log 11$ من كل طرف $-3\log 11 = b\log 5 - b\log 11$

خاصية التوزيع $-3\log 11 = b(\log 5 - \log 11)$

بقسمة كل طرف على $\log 5 - \log 11$ $\frac{-3\log 11}{\log 5 - \log 11} = b$

استعمال الحاسبة $9.1237 \approx b$

34 المعادلة الأصلية $4^{x^2-3} = 16$

$16 = 4^2$ $4^{x^2-3} = 4^2$

خاصية المساواة للدوال الأسية $x^2 - 3 = 2$

بجمع 3 لكلا الطرفين $x^2 = 5$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $x = \pm\sqrt{5}$

باستعمال الحاسبة $\approx \pm 2.2361$

42) المعادلة الأصلية $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$

قانون تغيير الأساس $\frac{\log_a 3}{\log_a\sqrt{a}} = \log_a x$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\frac{\log_a 3}{\frac{1}{2}} = \log_a x$

بضرب كلٍّ من البسط والمقام في العدد 2 $2\log_a 3 = \log_a x$

خاصية لوغاريتم القوة $\log_a 3^2 = \log_a x$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية $3^2 = x$

بالتبسيط $9 = x$

44) $\log_3 27 = 3$ ، $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$؛
تخمين: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

برهان:

العبارة الأصلية $\log_a b \stackrel{?}{=} \frac{1}{\log_b a}$

قانون تغيير الأساس $\frac{\log_b b}{\log_b a} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\log_b a}$

خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات $\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$

ملاحظات

الفصل 3 مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (113)

	الدرس 3-1 (3 حصص)	الدرس 3-2 (3 حصص)	الدرس 3-3 (حصة)
العنوان	تمثيل فضاء العينة	الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق	الاحتمال الهندسي
الأهداف	• استعمال القوائم، والجداول، ومخطط الشجرة البيانية لتمثيل فضاء العينة. • استعمال مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد النواتج الممكنة.	• استعمال التباديل في حساب الاحتمال. • استعمال التوافيق في حساب الاحتمال.	• إيجاد الاحتمالات باستعمال الطول. • إيجاد الاحتمالات باستعمال المساحة.
المفردات الأساسية	فضاء العينة مخطط الشجرة البيانية تجربة ذات مرحلتين تجربة متعددة المراحل مبدأ العدّ الأساسي	التباديل المضروب التبديل الدائري التوافيق	الاحتمال الهندسي
تمثيلات متعددة	ص (118)		
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (17) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (18) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 1 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (19) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الجداول الإلكترونية ضمن • اختبار قصير 2 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون
التقنيات لكل درس	آلة التصوير الرقمية	الموقع: www.obeikaneducation.com	آلة التصوير الرقمية
تنويع التعليم	ص (115, 119)	ص (123, 126)	ص (128, 131)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (133)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الاحتمال والقياس

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(11) حصة	(2) حصة	(13) حصة

الدرس 3-4 — حصة	الدرس 3-5 — حصة ونصف	الدرس 3-6 — حصة ونصف
محاكاة مواقف واقعية	**احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة**	**احتمالات الأحداث المتنافية**
• تصميم محاكاة لتقدير الاحتمالات. • تلخيص بيانات المحاكاة.	• إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة. • إيجاد احتمالات أحداث إذا علم وقوع أحداث أخرى.	• إيجاد احتمالات الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية. • إيجاد احتمال متمم حدث.
النموذج الاحتمالي المحاكاة المتغير العشوائي القيمة المتوقعة قانون الأعداد الكبيرة	الحدث المركب الأحداث المستقلة الأحداث غير المستقلة الاحتمال المشروط شجرة الاحتمال	الأحداث المتنافية الحدث المتمم
ص (139)		
مصادر الفصل 3 • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (20) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (21) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 3 فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (22) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 4 فوق ضمن دون
مصادر إضافية • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون
جهاز العرض الحاسوبي	السبورة التفاعلية	السبورة التفاعلية
ص (137, 140)	ص (142, 144, 146)	ص (151, 153)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (154-156)
- اختبار الفصل، ص (157)

التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 3	المرجع		المرجع
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الثالث، ص (113)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (113)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
	تأكد من فهمك	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	أمثلة إضافية	دليل المعلم	تنويع الواجبات المنزلية	دليل المعلم
	تنبيه!	دليل المعلم	دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (133)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (156-154)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (157)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري، ص (161, 160)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 3**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات			

الفصل 3 تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اكتب قائمة البدائل الآتية على السبورة:

1) أي حجوم المثلجات تريد صغيرًا أم متوسطًا أم كبيرًا؟

2) هل ترغب في مثلجات بالشوكولاتة أم بالفانيليا؟

3) هل ترغب في طعم الكراميل أو الشوكولاته و/ أو الفراولة؟ وهل ترغب في القشطة؟ اطلب إلى الطلبة أن يكوّنوا مخطط الشجرة البيانية؛ لتوضيح جميع أشكال المثلجات الممكنة.

المتعلمون الاجتماعيون ارسم لوحة لعبة السهم على السبورة. واطلب إلى الطلبة أن يقيسوا قطر الدائرة الداخلية في اللوحة، وبُعد كل دائرة عن الأخرى، ثم اطلب إليهم أن يستعملوا هذه المعلومات؛ لتحديد احتمال إصابة الدائرة الداخلية إذا أدّوا هذه اللعبة.

البديل 2 دون المتوسط دون

اكتب السؤال الآتي على السبورة: وضع في حقيبة أربعة مكعبات زرقاء، ومكعبان حمراوان ومكعب أصفر وآخر أخضر. افرض أن مكعبًا أحمر سُحب من الحقيبة ثم أُعيد، وسحب مكعب آخر ثم أعيد، واستمر سحب المكعبات وإعادتها، فما احتمال سحب مكعب أحمر كل مرة إذا استمر السحب لعشر مرات؟ اطلب إلى الطلبة أن يحلوا هذه المسألة ويبينوا كيف توصلوا إلى الإجابة.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلبة أن يعملوا في مجموعات ثنائية؛ لتصميم محاكاة وتنفيذها باستعمال حجر النرد، أو النقود أو القرص ذي المؤشر الدوّار. وأن يقرروا السؤال الذي يريدون الإجابة عنه، والخطوات التي سيتبعونها، ويسجلوا بياناتهم ويعرضوها على الصف.

الفصل 3

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 3

مواضيع ذات علاقة من الصف الثاني الإعدادي

- وصف أثر تغير أبعاد مجسّم بصورة متناسبة على حجمه.

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تمثيل العلاقات بالجداول وبيانيًّا.
- حل معادلات خطية.

الفصل 3

مواضيع ذات علاقة من الهندسة

- فهم فضاء العينة وتصميم محاكاة مواقف واقعية.
- حساب احتمالات الأحداث المستقلة، وغير المستقلة، والأحداث المتنافية وغير المتنافية والأحداث المشروطة.
- حساب الاحتمالات الهندسية.

ما بعد الفصل 3

الإعداد لما قبل التفاضل والتكامل

- تمثيل الأنماط باستعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- استعمال خصائص الدوال؛ لتحليل المسائل وحلّها والتوصل إلى توقعات.

نظرة على الدروس

3-1 تمثيل فضاء العينة

فضاء العينة لتجربة هو مجموعة جميع النواتج الممكنة. ويمكن تمثيل فضاء العينة باستعمال قائمة منظمة أو جدول أو مخطط الشجرة البيانية. وعند كتابته تسجل نواتج المراحل أو الأحداث المتكررة. وعندما يكون هناك أكثر من مرحلة تسمى التجربة متعددة المراحل. وينص مبدأ العد الأساسي على أنه "يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة".

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

يرمز إلى مضروب العدد الصحيح الموجب n، بالرمز $n!$، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي n. ويستعمل المضروب؛ لعدّ تراتيب العناصر. أما التبديل فهو تنظيم لمجموعة من العناصر يُعدّ الترتيب فيها مهمًّا. ويُعبّر عن عدد تباديل n من العناصر المتمايزة مأخوذة r في كل مرة بالصيغة: ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

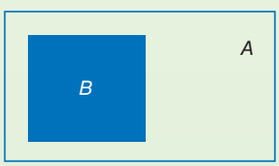
عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات، والآخر r_2 من المرّات، هو $\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$. وعدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n مرتبة في دائرة دون نقطة مرجع ثابتة يساوي $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

التوافيق هي تنظيم للعناصر الترتيب فيها ليس مهمًّا. وتُحسب توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة أو ${}_nC_r$، بقسمة عدد التباديل ${}_nP_r$ على عدد التراتيب التي تحتوي العناصر نفسها $r!$. ويعبّر عن عدد التوافيق بالصيغة ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

3-3 الاحتمال الهندسي

يسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسات هندسية مثل الطول أو المساحة احتمالًا هندسيًّا. و يمكنك إيجاد احتمال وقوع نقطة في جزء من شكل بمقارنة طول الجزء بالطول الكلي للشكل أو مساحة الجزء بالمساحة الكلية للشكل. إذا اختيرت نقطة E في منطقة A عشوائيًّا، فإن احتمال وقوع النقطة E في المنطقة B، التي تقع داخل المنطقة A هو:

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في المنطقة } B) = \frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$



افرض أن النقطة تقع ضمن منطقة الهدف عند تحديد الاحتمال الهندسي، وأن فرص وقوعها في أي منطقة متساوية.

3-4 محاكاة مواقف واقعية

النموذج الاحتمالي هو نموذج رياضي يُستعمل؛ لمقابلة الظاهرة العشوائية. والمحاكاة هي استعمال نموذج احتمالي؛ لإعادة تكوين موقفٍ ما وتكراره لتقدير احتمالات النواتج المختلفة. ويمكن تكوين المحاكاة باستعمال الاحتمالات الهندسية، وحجر النرد، والنقود وجداول الأعداد العشوائية ومولّدات الأعداد العشوائية.

المتغير العشوائي هو المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لكلٍّ منها احتمال معيّن. والقيمة المتوقعة هي معدل قيمة المتغير العشوائي التي يمكن أن تتوقعها بعد تكرار التجربة أو المحاكاة مرات عدة. وبما أن القيمة المتوقعة هي معدل فلا يشترط فيها أن تكون مساوية لإحدى قيم المتغير العشوائي.

3-5 احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة

يتكون الحدث المركب من حدثين بسيطين. يكون الحدثان A ، B مستقلين إذا كان احتمال وقوع A لا يؤثر في احتمال وقوع B. واحتمال وقوع حدثين مستقلين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي كل حدث على حدة.

$$P(A \text{ و } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

يكون الحدثان A ، B غير مستقلين إذا كان احتمال وقوع A بطريقة ما يؤثر في احتمال وقوع B. واحتمال وقوع حدثين غير مستقلين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحدث الأول في احتمال وقوع الحدث الثاني شرط وقوع الحدث الأول.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

يقدم قانون الاحتمال غير المستقل فكرة الاحتمال المشروط. و يمكن استعمال الاحتمال المشروط إذا عُلمت معلومات إضافية عن الحدث. والاحتمال المشروط لوقوع B شرط وقوع A يساوي

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

3-6 احتمالات الأحداث المتنافية

بُحث في الدرس 5 - 3 موضوع تقاطع حدثين. وسيتم في هذا الدرس دراسة اتحاد حدثين. لإيجاد احتمال وقوع حدث أو حدث آخر يجب أن نعلم العلاقة بينهما. إذا لم يكن وقوع الحدثين في آن معًا ممكنًا، فإنهما متنافيان؛ أيْ أنه لا يوجد نواتج مشتركة بينهما. وإذا كان A ، B حدثين متنافيين، فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمالي الحدثين.

$$P(A \text{ أو } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

أما إذا كان الحدثان غير متنافيين، فإن مجموع احتمالي كل منهما يزيد الاحتمال، وذلك بإضافة احتمال وقوع الحدثين معًا مرتين. وعليه، فإنه إذا كان A ، B حدثين غير متنافيين فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمالي كل منهما مطروحًا منه احتمال وقوع A و B معًا.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الفصل 3 الاحتمال والقياس
Probability and Measurement

فيما سبق
درست النواتج والأحداث واحتمالات الأحداث البسيطة في التجارب العشوائية.

والآن
الأفكار العامة
- أمثل فضاء العيّنة.
- أستعمل التباديل والتوافيق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الأحداث المركبة.

لماذا؟
الألعاب: يمكن استعمال الاحتمال للتنبؤ بالنتائج المختلفة لبعض الألعاب التي نمارسها.

مطويتك منظم أفكار

الاحتمال والقياس اعمل هذه المطويّة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الثالث حول الاحتمال. مبتدئًا بورقة واحدة.

1. **اطوِ الورقة** طوليًا.
2. **اطوِ الورقة** إلى نصفين مرتين.
3. **قصّ** كل خط طي أفقيًا في العمود الأيسر.
4. **اكتب العناوين كما في** الصورة المجاورة.

الفصل 3 ملاحظات

مشروع الفصل

ألعاب وتسلية

يستعمل الطلبة ما تعلموه حول مخطط الشجرة البيانية والاحتمال؛ لإيجاد فضاء العينة للنواتج التي يحصلون عليها خلال لعبهم في ألعاب التسلية في المهرجانات، أو المتنزهات.

- كانت ألعاب التسلية في المهرجانات جزءًا من المسارح المتنقلة لفترة طويلة. ابحث عن جميع الألعاب المختلفة الشائعة في المهرجانات. وكيف تُؤدى هذه الألعاب؟ وهل تعتقد أنها جميعًا عادلة؟ وما هي فرص الفوز بالجائزة في كل من هذه الألعاب حسب اعتقادك؟ وأي الألعاب تعتقد أن الفوز فيها صعب جدًّا؟ وأيها الفوز فيها أسهل؟
- صمّم لعبتك الخاصة التي تحتوي على جوائز متنوعة للربح معتمدًا على عدد المرات التي ربحت فيها. كوّن مخطط الشجرة البيانية الذي يبين النواتج الممكنة عند القيام بهذه اللعبة. وما احتمال أن تربح في لعبتك؟ وما احتمال أن تربح مرتين متتاليتين؟ وثلاث مرات؟ وهل لعبتك عادلة؟ وما احتمال ربح الجائزة الكبرى؟
- اعرض لعبتك على طلبة الصف، وكوّن نموذجًا لها ليؤديها الآخرون إن كان ذلك ممكنًا.

مفردات أساسية قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: يتكون الحدث المتمم A' من جميع نواتج فضاء العينة غير الموجودة في الحدث A.

مثال: إذا تكون الحدث A' من العددين 1, 5 عند رمي حجر نرد، فإن متمم A هو 2, 3, 4, 6.

سؤال: ما احتمال وقوع A أو متممه؟ 1

مطويتك منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلبة ملاحظاتهم أثناء دراستهم لطرق العد وأنواع الاحتمالات.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل. لتدوين ملاحظتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة والأمثلة المرتبطة بالدرس.

وقت استعمالها شجع الطلبة أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

CRM **مسرد مفردات الطالب**، ص (1)

يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب بتقديم التعريف المناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضًا للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل الثالث

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة) للأسئلة 6-1 انظر الهامش

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$ 2) $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$ 3) $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$

4) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$ 5) $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$ 6) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

7) **كرة القدم:** لدى فريق كرة القدم L 54 من الماء البارد في قوارير لشربها أثناء المباراة. كم قارورة بسعة 500 ml يمكن أن يشربها الفريق؟ 108

إذا ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، أوجد كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة) للسؤالين 8,10 انظر الهامش

8) P (أكبر من 1) 9) P (فردي) $\frac{1}{2}$ أو 50%

10) P (أقل من 2) 11) P (1 أو 6) $\frac{1}{3}$ أو 33%

12) **ألعاب:** يلعب صديقان لعبة برمي مجسم ذي 20 وجهاً، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 26 ماعدا الأعداد 4, 8, 12, 16, 20, 24. ما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عددًا أوليًّا؟ (مهارة سابقة) $\frac{9}{20}$ أو 45%

يبيّن الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 4-1. (مهارة سابقة)

التكرار	الإشارات	النتيجة
3	𝍸	1
7	𝍸 ||	2
6	𝍸 |	3
4	𝍸	4

14) $\frac{9}{20}$ أو 45%

15) $\frac{11}{20}$ أو 55%

13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟ $\frac{1}{5}$ أو 20%

14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟

15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}$.

بضرب البسط في البسط والمقام في المقام: $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\cdot1}{9\cdot2}$

$=\frac{6}{18}$

بالتبسيط: $=\frac{1}{3}$

مثال 2

إذا ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

P(أقل من 5) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$

$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

احتمال ظهور عدد أقل من 5 يساوي $\frac{2}{3}$، أو 67%.

مثال 3

في تجربة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، ظهرت النواتج المبينة في الجدول، أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5.

التكرار	الإشارات	النتيجة
4	𝍸	1
7	𝍸 ||	2
8	𝍸 |||	3
4	𝍸	4
2	||	5
5	𝍸	6

$P(5)=\frac{\text{عدد مرات ظهور 5}}{\text{عدد جميع النواتج}}=\frac{2}{30}$

الاحتمال التجريبي للحصول على 5 يساوي $\frac{2}{30}$ أو 6.7%

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	إذا أخطأ بعض الطلبة فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
مصادر الفصل	بنك المفاهيم والمهارات
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	إذا أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من التمارين،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

1) $\frac{7}{8}$
2) $1\frac{1}{9}$
3) $1\frac{11}{40}$
4) $\frac{1}{9}$
5) $\frac{3}{8}$
6) $\frac{1}{15}$
8) $\frac{5}{6}$ أو 83%
10) $\frac{1}{6}$ أو 17%

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-1

إيجاد النواتج والحوادث لتجربة ما.

الدرس 3-1

تمثيل فضاء العينة.

استعمال مبدأ العد الأساسي؛ لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

ما بعد الدرس 3-1

استعمال التباديل والتوافيق مع الاحتمال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما الذي يجعل قطعة النقد عادلة؟
  فرص ظهور أي من وجهي قطعة النقد متساوية.
- ما الطرق الأخرى العادلة التي تحددّ من يبدأ اللعب أولاً؟ رمي مكعب مرقم.
- ما العامل الذي يعطي ناتجًا عادلًا؟
  تساوي فرص جميع النواتج الممكنة.

تمثيل فضاء العيِّنة
Representing Sample Spaces

لماذا؟

يلقي الحكم عادة في مباريات كرة القدم، قطعة نقد مرة واحدة ليحدد أي الفريقين سيختار المكان في الملعب أولًا. وقد تكون النتيجة هي الصورة أو الكتابة.

تمثيل فضاء العيِّنة

لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والأحداث.

التعريف	المثال
التجربة العشوائية: هي التجربة التي يمكن تحديد جميع نواتجها مسبقًا، دون معرفة الناتج الفعلي قبل إجراء التجربة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة .
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج من تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الصورة أو الكتابة.
الحدث: هو ناتج أو أكثر للتجربة.	أحد أحداث هذه التجربة ظهور الكتابة.

فضاء العيِّنة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **مخطط الشجرة البيانية**. وجميع التجارب في هذا الفصل هي تجارب عشوائية.

مثال 1 تمثيل فضاء العيِّنة

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول ومخطط الشجرة البيانية.

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقود هما: الصورة (H) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اكتب أزواج النواتج الممكنة من الرمية الأولى مع النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

H , H　　T , H

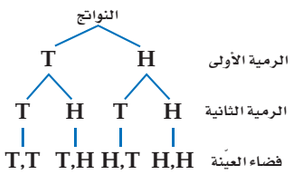
H , T　　T , T

الجدول

دوّنْ نواتج الرمية الأولى في العمود الأيسر، ونواتج الرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	صورة (H)	كتابة (T)
صورة (H)	H, H	H, T
كتابة (T)	T, H	T, T

مخطط الشجرة البيانية



تأكد

1) أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضًا، مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، ومخطط الشجرة البيانية. انظر ملحق الإجابات

فيما سبق

درستُ حساب الاحتمال التجريبي.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أستعمل القوائم، والجداول ، ومخطط الشجرة البيانية لتمثيل فضاء العيّنة.
- أستعمل مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات الأساسية

فضاء العيّنة
sample space

مخطط الشجرة البيانية
tree diagram

تجربة ذات مرحلتين
two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

المكعب المرقم

هو مكعب تحمل أوجهه أحد الأعداد من 1 إلى 6.

مصادر الدرس 3-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، (115)	• تنويع التعليم ، (115, 119)	• تنويع التعليم ، (115, 119)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين (17) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**، و هي تجربة بمرحلتين أو حدثين.
والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من واقع الحياة — مخطط الشجرة البيانية للتجارب متعددة المراحل

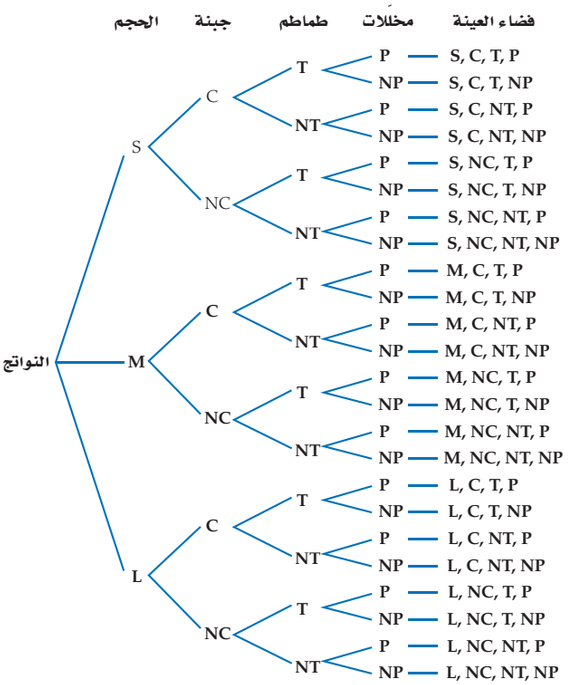
شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر اللحم، بالجبن والطماطم والمخللات، أو بأحدها، أو دون واحد منها، وبحجوم مختلفة.

مثّل فضاء العيّنة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال مخطط الشجرة البيانية.

يتكون فضاء العيّنة من أربع مراحل هي:

- شطيرة من اللحوم بأحجام (S: صغير، M: متوسط، L: كبير)
- جبنة (مع جبنة C، بدون جبنة NC)
- طماطم (مع طماطم T، بدون طماطم NT)
- مخلّلات (مع مخلل P، بدون مخلل NP)

أنشئ مخطط الشجرة البيانية للمراحل الأربع.



تأكد

2) **هواتف:** يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره ذا لون فضي أو أسود أو أحمر، وأن يكون بكاميرا أو بدونها. ويمكنه أن يحصل على سماعات و / أو حافظة للجهاز. مثّل فضاء العيّنة لهذا الموقف بمخطط الشجرة البيانية. انظر ملحق الإجابات.

تنبيه !

اختصار مراحل

في السؤال الثالث من الصورة المرافقة للمثال 2 ، يختصر الحرفان: و/ أو " أربع مراحل للاختيار: مع الطماطم، أو بدونها، ومع المخللات، أو بدونها.

قراءة الرياضيات

رموز مخطط الشجرة البيانية

اخترْ رموزًا واضحة لا غموض فيها للنواتج في مخطط الشجرة البيانية. ففي المثال 2، تدل C على الجبنة، بينما NC تدل على عدم اختيار الجبن، أمّا NT وNP فتدلان أيضًا على أنها دون طماطم ودون مخلّلات بالترتيب.

تمثيل فضاء العينة

المثالان 2 ، 1 يبيّنان كيفية إيجاد مجموعة النواتج الممكنة باستعمال قائمة منظمة أو جدول أو مخطط الشجرة البيانية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

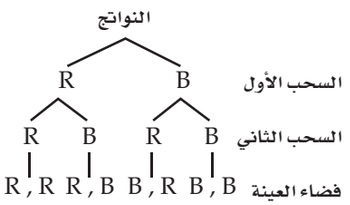
مثالان إضافيان

1 وضعت قطعة معدنية حمراء وأخرى سوداء في حقيبة. وسحبت قطعة واحدة وسجل لونها، ثم أعيدت إلى الحقيبة وسحبت قطعة مرة أخرى. مثّل فضاء العينة لهذه التجربة بعمل قائمة منظمة، أو جدول، أو مخطط الشجرة البيانية. القائمة المنظمة هي RR، RB، BR، BB. حيث ترمز R إلى اللون الأحمر، و B إلى اللون الأسود.

الجدول

النواتج	أحمر (R)	أسود (B)
أحمر (R)	RR	RB
أسود (B)	BR	BB

مخطط الشجرة البيانية



2 **طعام:** يقدم أحد المطاعم الكبسة بلحم الضأن أو لحم العجل أو الدجاج ويضاف إليها حسب رغبة الزبون الصنوبر والزبيب والبيض. ارسم مخطط الشجرة البيانية الذي يمثل النواتج الممكنة لاختيار وجبة الكبسة. لاحظ إجابات الطلبة

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون وزع الطلبة في مجموعات ثلاثية أو رباعية، وزوّد كل مجموعة بأربع أو ست أدوات مختلفة. وحفِّز المجموعات؛ لتكوين أكبر عدد ممكن من الطرق المختلفة التي يمكن تجميع الأدوات فيها. واطلب إليهم أن يرسموا هذه التجمعات ويسجلوا عددها وذلك باستعمال أداة واحدة كل مرة ثم اثنتين ثم ثلاث وهكذا. وحفِّز بعض المجموعات أن تجد العدد الكلي لجميع التجمعات الممكنة عندما يكون الترتيب مهمًّا (أيْ أن ABC تختلف عن BCA)، وعندما لا يكون الترتيب مهمًّا (أيْ أنّ ABC و BCA تمثل تجمعٌ واحدٌ). ثم اطلب إلى المجموعات أن تعرض على الصف الرسوم التي أعدتها وعدد التجمعات التي أوجدتها.

مبدأ العد الأساسي قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العيِّنة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عمليًّا أو ضروريًّا. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مبدأ العدّ الأساسي

التعبير اللفظي يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العيِّنة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز في تجربة عدد مراحلها k، افرض أن

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى.

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى.

$\vdots$

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل.

فإن العدد الكلي لنواتج التجربة التي عدد مراحلها k يساوي

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

إرشادات للدراسة

مبدأ العد

يُسمى مبدأ العدّ الأساسي أحيانًا قاعدة الضرب للعد.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال مبدأ العد الأساسي

الربط مع واقع الحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات أهمها البعدين المناخي والجمالي.

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوبٍ من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. ما عدد الخيارات المتاحة له ليختار ثوبًا مناسبًا؟

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الأكمام	3
القبّة	3
الفتحة الأمامية	2
الأزرار	2

استعمل مبدأ العد الأساسي.

الأزرار	الفتحة الأمامية	القبّة	الأكمام	اللون	القماش	
2	× 2	× 3	× 3	× 6	× 5	= 1080

لدى سعد 1080 خيارًا ليختار ثوبًا مناسبًا.

تأكد

3) أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور. 65536

B) رمي مكعب مرقم أربع مرات. 1296

C) **أحذية:** اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 39 ، 40 ، 41 ، 42 ، 43 ، 44 ، 45 وذات ألوان أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن تكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء. 168

نموذج الإجابة

1.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D
4.	A	B	C	D
5.	A	B	C	D
6.	A	B	C	D
7.	T	F		
8.	T	F		
9.	T	F		
10.	T	F		

تنبيه!

اختيارات ذكّر الطلبة في مثال 2، بما أن اختيار أحد البدائل يُعدّ ناتجًا وحيدًا، فإن عدم اختياره يكون أيضًا ناتجًا وحيدًا يجب أن يسجّل في فضاء العينة.

مبدأ العد الأساسي

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد عدد النواتج الممكنة دون كتابتها.

مثال إضافي

3 **سيارات:** توجد في السيارات الجديدة إضافات عديدة للزبائن. إذا اخترت واحدة من كل فئة من الجدول أدناه، فما عدد السيارات المختلفة التي يمكن أن يكونّها الزبون عند اختيار نوع السيارة وطرازها؟

عدد البدائل	إضافات السيارات
11	اللون الخارجي
7	اللون الداخلي
2	مواد المقاعد
2	المحرك
4	الإطارات
3	الأبواب

3696

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقمية اطلب إلى الطلبة تسمية مجموعات مختلفة من إعدادات التصوير المتوافرة (أبعاد الصورة، جودة الصورة، الإضاءة وعدمها ... إلخ). استعمل إعدادات التصوير هذه لإيجاد عدد البدائل المختلفة الممكنة لإعدادات آلة التصوير. واطلب إلى الطلبة أن يلخصوا نتائجهم باستعمال جدول أو أساليب عرض أخرى.

التركيز في المحتوى الرياضي

التباديل هي تعميم لمبدأ العد الأساسي على أن يُعدّ كل ترتيب وحيد من النواتج حدثًا وحيدًا.

إرشادات للمعلم الجديد

مبدأ العد الأساسي يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي؛ للتحقق من أنه قد تم إدراج جميع النواتج الممكنة في فضاء العينة لتجربة ما.

تأكد من فهمك

مثال 1
صفحة 114

مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة و الجدول ومخطط الشجرة البيانية.

1) عندما يضرب اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا أو لايسجل. افرض أن اللاعب ضرب ركلة جزاء مرتين.

2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها: عصير مجاني أو دفتر ملحوظات مجاني.

للتمارين 1-3 انظر ملحق الإجابات

مثال 2
صفحة 115

3) **ملابس:** تريد سمر حضور حفلة، وعليها أن تختار ما سوف ترتديه في الحفلة من القائمة في الشكل المجاور، مثّل فضاء العيِّنة في هذا الموقف بمخطط الشجرة البيانية.

مثال 3
صفحة 116

4) عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تحتوي على الأنواع المبينة أدناه، وكل نوع منها يحتوي على عدد من الأصناف. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كل نوع، فما عدد البدائل الممكنة؟ انظر الهامش

عدد البدائل	قائمة المأكولات
8	المقبلات
4	الحساء
6	السلطة
12	الطبق الرئيس
9	الحلوى

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 114

مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، ومخطط الشجرة البيانية:

5) صوّب شخص نحو هدف مرتين متتاليتين، حيث رمز إصابة الهدف (S) ، ورمز عدم إصابة الهدف (F).

6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تبادل ثقافي خلال كل من السنتين الأخيرتين في الكلية، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

للتمارين 5-10 انظر ملحق الإجابات

7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلثات، أحدهما يشتمل على مثلث منفرج الزاوية أو مثلث حاد الزوايا، والآخر يشتمل على مثلث متطابق الضلعين أو مثلث مختلف الأضلاع.

8) **رسم:** ينفّذ طلاب مشروعين للرسم، بحيث يستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، ومخطط الشجرة البيانية.

مثال 2
صفحة 115

مثّل فضاء العيِّنة مستعملًا مخطط الشجرة البيانية في كل مما يأتي:

9) **سيارات:** يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة أو عائلية أو نقل، بمقاعد مغطاة بالجلد أو القماش، مع إضافات: شاشة ملاحة و/ أو سقف متحرك.

10) **حقائب:** يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحد الألوان الآتية: الأسود أو البني أو الأزرق، ويمكن أن يكون للحقيبة مفتاح و/ أو قفل أرقام.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 4-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

4) عدد البدائل الممكنة = عدد أصناف المقبلات × عدد أصناف الحساء × عدد أصناف السلطة × عدد أصناف الطبق الرئيس × عدد أصناف الحلوى.

$8 \times 4 \times 6 \times 12 \times 9 = 20736$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	11-5، 27-17
ضمن ضمن المتوسط	11-5 فردي، 15-13، 27-17
فوق فوق المتوسط	24-12، (اختياري: 27-25)

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 15 مخطط الشجرة البيانية وأشكال ڤن؛ لتمثيل فضاء العينة لتجربة ما.

إجابات:

11 عدد النواتج الممكنة = عدد متنافسي مركز السكرتير × عدد متنافسي مركز أمين الصندوق × عدد متنافسي مركز نائب الرئيس × عدد متنافسي مركز الرئيس.

$3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$

14b) 5040؛ إجابة ممكنة: يوجد 10 خيارات للرقم الأول في المجموعة. وبما أنه لا يمكن لعصام أن يستعمل الرقم إلاّ مرة واحدة، فإن هناك 9 خيارات للرقم الثاني و8 للرقم الثالث و7 للرقم الرابع. وأن عدد التباديل الممكنة يساوي $7 \times 8 \times 9 \times 10$ أو 5040.

مثال 3
صفحة 116

إرشادات للدراسة

عدم إرجاع العناصر
إذا اخترت عنصرًا من مجموعة عناصر دون إرجاعه إلى المجموعة، فإن عدد عناصر المجموعة يتغير وكذلك عدد النواتج الممكنة.

11 تجري في إحدى المدارس الثانوية انتخابات لاختيار أعضاء مجلس الطلبة. ويسعى 3 طلاب للحصول على مركز السكرتير، و 4 للحصول على مركز أمين الصندوق، و 5 لمركز نائب الرئيس، وطالبان لمركز الرئيس. ما عدد النواتج الممكنة؟ انظر الهامش

12) فن: أعطى المعلم طلابه خيارين لرسم مضلعين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثّل فضاء العيِّنة باستعمال القائمة المنظمة والجدول ومخطط الشجرة البيانية. انظر ملحق الإجابات

13) إفطار: يقدم مطعم في وجبة الإفطار، البيض مع الخضراوات أو اللحمة أو الجبن مع الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز النخالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع من الخبز إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟ 18

14) دراجات: اشترى عصام قفلًا رقميًّا لدراجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9

a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟ 10000

b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

15) تمثيلات متعددة: تضم هذه التجربة مرحلتين. ففي المرحلة الأولى دوّر المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم حجر النرد، وإذا أشار إلى اللون الأخضر ألقِ مكعبًا مرقمًا، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدوّر المؤشر 2.

a) هندسي: استعمل مخطط الشجرة البيانية لتمثيل فضاء العيِّنة للتجربة. انظر ملحق الإجابات

b) منطقي: ارسم شكل ڤن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة. انظر ملحق الإجابات

c) تحليل: ما عدد النواتج الممكنة؟ 20

d) تعبير لفظي: هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضّح إجابتك.

15d) إجابة ممكنة: لا؛ بما أن المرحلة الثانية تعتمد على ما يحدث في المرحلة الأولى من التجربة فلا يمكن ضرب عدد نواتج كل مرحلة. بل يجب أن تجد عدد النواتج الممكنة لكل مرحلة ثم تجمعها.

مسائل مهارات التفكير العليا

16) **تحدٍّ:** يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة، فإذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برر إجابتك. للتمارين 19-16 انظر الهامش

17) **مسألة مفتوحة:** قد لا يكون مخطط الشجرة البيانية للتجربة متماثلًا. صِفْ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم مخطط الشجرة البيانية لهذه التجربة، وبرر إجابتك.

18) **تبرير:** تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n . اكتب معادلة للعدد الكلي للنواتج الممكنة p، ووضح إجابتك.

19) **اكتب:** وضح متى يكون استعمال مخطط الشجرة البيانية ضروريًّا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العدّ الأساسي.

تدريب على اختبار معياري

20) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. فإذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟ **B**

A 4 **C** 8
B 6 **D** 9

21) يستعمل أحمد كلمة مرور لبريده الإلكتروني من خمسة أرقام مختلفة من الأرقام 0 إلى 9. ما أكبر عدد ممكن من كلمات المرور المختلفة التي يمكن أن يختارها؟ **G**

F 15120 **H** 59049
G 30240 **J** 100000

22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أصناف للطبق الرئيسي، و 4 أصناف من الحساء، و 3 أصناف من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، وصنفًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟ **C**

A 12 **C** 60
B 35 **D** عدد لا نهائي

مراجعة تراكمية

أوجد عدد النواتج في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

23) اختيار ثلاثة كتب واحدًا بعد الآخر من بين خمسة كتب مختلفة. 60

24) اختيار وجبة طعام من قائمة تحتوي 3 أنواع من الشوربة ، 3 أنواع من اللحوم، ونوعين من كل من الخبز والمقبلات. 18

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

25) $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$ $\frac{9}{2}$

26) $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$ 12

27) $\frac{4^4 \cdot 3}{2 \cdot 4}$ 96

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا تجربة متعددة المراحل تتعلق بالتسويق، مثل: مزج التجهيزات وتناسقها، اختيار وجبة الطعام أو اختيار أنواع المعجنات. ثم اطلب إليهم أن يكوّنوا جدولًا يشمل جميع البدائل الممكنة، ويستعملوا مبدأ العد الأساسي؛ لتحديد عددها. ثم يرسموا مخطط الشجرة البيانية الذي يمثل فضاء العينة. ويُعدّوا أخيرًا نشرة تسويق إعلانية تلقي الضوء على عدد البدائل المتاحة من هذا المنتج.

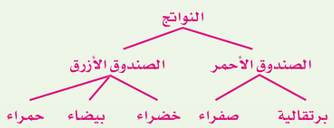
4 التقويم

تعلّم لاحق اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا حول العلاقة بين ما تعلّموه عن تمثيل فضاء العينة واستعمال مبدأ العد الأساسي مع التباديل والتوافيق.

إجابات:

16) $n^3 - 3n^2 + 2n$ ؛ إجابة ممكنة: يوجد n من العناصر في الصندوق عند سحب العنصر الأول. لذا، يوجد $n - 1$ من النواتج الممكنة بعد سحب العنصر الأول ويوجد $(n - 2)$ من النواتج الممكنة بعد سحب العنصر الثاني. إذن، عدد النواتج الممكنة يساوي حاصل ضرب أعداد النواتج الممكنة لكل تجربة، أو $n(n - 1)(n - 2)$.

17) إجابة ممكنة: في تجربة اختيار الصندوقين الأزرق أو الأحمر. ثم سحب كرة من الصندوق الذي اخترته عشوائيًّا دون النظر فيه، الصندوق الأزرق يحتوي على كرة حمراء وكرة بيضاء وكرة خضراء، والصندوق الأحمر يحتوي كرة صفراء وكرة برتقالية. وتُمثل النواتج على النحو الآتي:



18) $p = n^k$؛ إجابة ممكنة: المجموع الكلي لعدد النواتج الممكنة يساوي حاصل ضرب عدد النواتج لكل مرحلة من 1 إلى k. وبما أنه يوجد k من المراحل، فإنك توجد $n \times \ldots \times n$، k من المرات وهذا يساوي n^k.

19) إجابة ممكنة: يكون رسم مخطط الشجرة البيانية ضروريًّا إذا أردت عرض فضاء العينة لتجربة أو إذا أردت أن تعرف عدد مرات ظهور ناتج معيّن. تعرف عدد النواتج الممكنة باستعمال مبدأ العد الأساسي، لذا فإنه يكون مفيدًا فقط عندما تريد أن تعرف عدد النواتج الممكنة.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2

استعمال مبدأ العد الأساسي.

الدرس 3-2

استعمال التباديل في حساب الاحتمال.

استعمال التوافيق في حساب الاحتمال.

ما بعد الدرس 3-2

إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال والمساحات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- لماذا يكون الترتيب مهمًّا في الصورة؟ إجابة ممكنة: أطوال الأشخاص، تناسق ألوان الملابس، الأصدقاء.
- أيّ المواقف الأخرى يكون فيها ترتيب الأشياء مهمًّا؟ إجابة ممكنة: مكوّنات عجين الحلوى.
- أيّ المواقف قد لا يكون فيها ترتيب الأشياء مهمًّا؟ إجابة ممكنة: وضع التوابل والمقبّلات على الطعام.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

فيما سبق

درست استعمال مبدأ العد الأساسي.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- أستعمل التوافيق في حساب الاحتمال.

المفردات الأساسية

التبديل permutation

المضروب factorial

التبديل الدائري circular permutation

التوافيق combinations

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

وقف يوسف وعلي وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليسار ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًّا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد ثم يوسف. باستعمال مبدأ العد الأساسي يوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء.

يمكن كتابة التعبير $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4 .

مفهوم أساسي المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من أو تساوي n.

بالرموز $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ ، ويُعرّف $0! = 1$

مثال 1 الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة : نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. فإذا كان عدد أفراد الفريق 20 ويرتدي كل واحد منهم قميصًا مرقمًا من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، ما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1 : أوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة الممكنة. و هو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$.

الخطوة 2 : أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحدث وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 و يساوي $18! = !(2 - 20)$.

الخطوة 3 : احسب الاحتمال.

$$P(\text{نواف 1 و ماجد 2}) = \frac{18!}{20!} \quad \begin{matrix}\leftarrow \text{عدد نواتج الحدث} \\ \leftarrow \text{عدد النواتج الممكنة}\end{matrix}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{18!}}}{20 \cdot 19 \cdot \underset{1}{\cancel{18!}}} \quad \text{مفكوك } 20! \text{ و القسمة على العوامل المشتركة}$$

$$= \frac{1}{380} \quad \text{بالتبسيط}$$

تأكد

1) **تصوير :** ارجع إلى الفقرة الافتتاحية "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟ $\frac{1}{12}$

مصادر الدرس 3-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	تنويع التعليم ، ص (123, 126)	• تنويع التعليم ، ص (123, 126)	• تنويع التعليم ، ص (123, 126)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	كراسة الطالب	كراسة الطالب	كراسة الطالب

ارجع إلى الفقرة الافتتاحية "لماذا؟"، وافرض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يكون 4 أشخاص فقط في الصورة عشوائيًّا. وباستعمال مبدأ العد الأساسي فإن عدد تباديل 4 أصدقاء أُخذوا من مجموعة من 6 أصدقاء يساوي $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360.

هناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء إذا اختير 4 منهم في كل مرّة ويرمز إليها بالرمز ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروبات.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

قراءة الرياضيات

متمايز يعني مصطلح عناصر متمايزة أن العناصر مختلفة بطريقة ما.

مفهوم أساسي التباديل

أضف إلى مطويتك

بالرموز يرمز إلى عدد تباديل n من العناصر المتمايزة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$$

مثال 2 الاحتمال والتباديل ${}_nP_r$

يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، ما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًّا؟

إرشادات للدراسة

العشوائية عندما يتم اختيار النواتج عشوائيًّا تكون فرص وقوعها متساوية، ويمكن حساب احتمالاتها باستعمال التباديل والتوافيق.

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدًّا. عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي ${}_{10}P_3$.

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحدث يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيبًا واحدًا فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا، فإن احتمال اختيار فيصل ومحمد ومهند الثلاثة، يساوي $\frac{1}{720}$.

تأكد

2) يتكون رقم بطاقة طالب جامعي من 8 أرقام من بين الأرقام 9–0 بفرض أنه لا يسمح بتكرار الأرقام.

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟ 1814400

B) اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًّا، ما احتمال أن تحمل العدد 42135976؟ $\frac{1}{1814400}$

الاحتمال باستعمال التباديل

الأمثلة 1–4 تُبيّن كيفية استعمال التباديل؛ لإيجاد عدد الطرق الممكنة لترتيب العناصر.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 **مسابقة مواهب:** تقدم عبدالله وفيصل مع 30 طالبًا إلى مسابقة في الشعر . وقد دُعي الطلاب عشوائيًّا لتقديم أشعارهم أمام لجنة التحكيم. ما احتمال أن يُدعى عبدالله أولاً وفيصل ثانيًا؟ $\frac{1}{870}$

2 صندوق به 5 مصابيح ملونة بأحد الألوان الآتية: الأحمر، الأزرق، الأصفر، الأبيض، الأخضر، سحب 3 مصابيح عشوائيًّا، الواحد تلو الآخر بدون إرجاع. ما احتمال أن تكون المصابيح المسحوبة هي الأصفر، والأخضر، والأحمر؟ $\frac{1}{60}$

التعليم باستعمال التقنيات

الموقع www.obeikaneducation.com

اطلب إلى الطلبة أن يجدوا العدد الكلي للتدريبات الإثرائية وعدد تدريبات كل نوع منها، واحتمال أن يكون اختيار أحد التدريبات من التدريبات الإثرائية.

التركيز في المحتوى الرياضي

التباديل عند كتابة التباديل على الصورة ${}_nP_r$ ، تدل r على عدد العوامل المتتالية في التباديل، و n على العامل الأول. ويدل الرمز ${}_6P_4$ على أخذ 4 عوامل متتالية تبدأ بالعدد 6 أو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. وهذا هو الناتج نفسه من تطبيق قانون التباديل والاختصار. ويرمز إلى عدد التباديل أحيانًا بالرمز $P(n, r)$ أو ${}^nP_r$.

مفهوم أساسي

التباديل مع التكرار

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المتمايزة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات و آخر r_2 من المرات وهكذا ...، فإنه يساوي

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

مثال 3

الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفًا مبعثرة، ويطلب منه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكون اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟

الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف ا مرتين، و الحرف ي مرتين. ولذا؛ فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائيًا يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$.

تأكد

3) أرقام الهواتف: ما احتمال أن يكون 55652113 رقمًا لهاتف مكوّن من 8 أرقام هي 5, 1, 6, 5, 2, 1, 5, 3؟ $\frac{1}{3360}$

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليمين ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الزعتر أولًا من اليمين بدلًا من الكمون . لذا، فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي 5!.

أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى التراتيب الممكنة **تباديل دائرية** ، فإذا وضعتْ عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، لاحظ أنه إذا أديرت المنضدة باتجاه عقارب الساعة موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.

لذا فإن؛ تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما توضع العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4!$$

والذي يساوي $(5-1)!$

الربط مع واقع الحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة "فأسقيناكموه" من الآية 22 من سورة الحجر.

مثال إضافي

3 بلاط: يحتوي صندوق بلاط على 5 بلاطات زرقاء (bl)، وبلاطتين ذهبيتين (gd)، وبلاطتين خضراوين (gr) موضوعة عشوائيًّا دون ترتيب. والنمط المطلوب هو $bl, gd, bl, gr, bl, gd, bl, gr, bl$. إذا اخترت تبديلاً من هذه البلاطات عشوائيًّا، فما احتمال اختيار البلاطات في هذا التسلسل الصحيح؟ $\frac{1}{756}$

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي ذكِّر الطلبة بإعادة قراءة السؤال الذي سيجيبون عنه، وأن يتحققوا من معقولية إجاباتهم. فمثلاً في المثال 3 يمكن أن يحسب الطلبة عدد التباديل ويكتبوا الإجابة 1260، وإذا أعادوا قراءة المسألة فسيلاحظون أن المطلوب هو احتمال تبديل معين أو $\frac{1}{1260}$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة دون نقطة مرجع ثابتة يساوي

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجع ثابتة، فإن الترتيبات سُتعامل خطيًّا ويكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

مثال 4

الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، ووضح تبريرك.

a) زينة: إذا رُتِّبت 6 نماذج لعب صغيرة في إسوار عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه، فإن احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل يساوي $\frac{1}{5!}$ أو $\frac{1}{120}$.

b) طعام: جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضّدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟

بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحدث يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6.

لذا؛ فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

إرشادات للدراسة

قلب الدائرة إذا بقي الجسم الدائري كما هو عندما يقلب كما في حلقة المفاتيح، يجب قسمة عدد التباديل على 2 .

تأكد

4) كرة القدم: تجمَّع فريق كرة القدم المكوَّن من 11 لاعبًا في شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة.

A) ما احتمال أن يقف قلب الهجوم على يمين حارس المرمى مباشرة ،إذا تجمّع الفريق بشكل عشوائي؟ وضحّ تبريرك. انظر الهامش

B) إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال أن يقف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضّح تبريرك.

4B) بما أن تجمع اللاعبين كان حسب نقطة مرجع ثابتة فهذا تبديل خطي. إذن هناك $11!$ طريقة لترتيب اللاعبين في هذا التجمع. وعدد النواتج التي يتكون منها الحدث المطلوب يساوي عدد تباديل اللاعبين الآخرين العشرة على فرض أن الحكم يقف خلف حارس المرمى أيْ $10!$ ؛ ولذا فإن احتمال أن يقف الحكم خلف حارس المرمى يساوي $\frac{10!}{11!}$ أو $\frac{1}{11}$.

الاحتمال باستعمال التوافيق التوافيق هي تنظيم العناصر حيث يكون الترتيب غير مهم فيها. افرض أنك تحتاج إلى اختيار موظفين اثنين من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظفين غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرائق الممكنة المختلفة لاختيار الموظفين.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التوافيق

بالرموز يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$ ، حيث ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

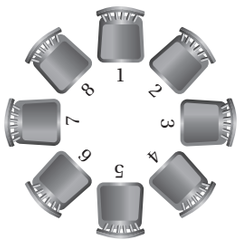
مثال عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي

$${}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{6}} = 56$$

مثال إضافي

4 أوجد الاحتمال المشار إليه في السؤالين الآتيين، ووضح تبريرك:

a) إذا جلس 8 طلاب عشوائيًّا على مقاعد موضوعة بشكل دائري كما في الشكل أدناه. فما احتمال أن يجلس الطلاب حسب الترتيب المبين؟



$\frac{1}{5040}$ ؛ بما أنه لا يوجد نقطة مرجع ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

b) إذا اشتريت صندوقًا فيه 8 أقلام تلوين مرتبة عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون قلم التلوين الذي في أقصى اليسار أحمر؟

$\frac{1}{8}$ ؛ بما أن الأقلام مرتبة في صف، فإن هذا تبديل خطي.

إجابة (تأكد):

4A) $\frac{1}{10}$ ؛ بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة، فإن هذا تبديل دائري. يوجد $(11-1)!$، أو $10!$ من التباديل المتمايزة للاعبين. عدد النواتج التي يتكون منها الحدث المطلوب يساوي عدد تباديل اللاعبين التسعة الآخرين في التجمع أو $9!$؛ لذا فإن احتمال أن يقف قلب الهجوم عن يمين حارس المرمى يساوي $\frac{9!}{10!}$ ، أو $\frac{1}{10}$.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون قسم الطلبة إلى مجموعات ثلاثية أو رباعية، وزود كل مجموعة بكمية من أربعة أشياء مختلفة، مثل حب الفاصولياء، أقراص ملونة أو خرز بلاستيك، ثم اطلب إلى إحدى المجموعات أن تكوّن جميع التوافيق الممكنة المكونة من شيئين، وأن تنفذ مجموعة أخرى النشاط نفسه بإيجاد عدد التباديل. وأن تجد مجموعات أخرى عدد التوافيق والتباديل لمجموعات مكونّة من ثلاثة أو أربعة أشياء. وأن تسجّل كل مجموعة على الورق جميع الطرق المختلفة التي رتبوا بها الأشياء. واطلب إلى المجموعات أن يتشاركوا النتائج مع الصف. وأرشدهم إلى أن ينتبهوا بصورة خاصة إلى الفرق بين عدد التوافيق والتباديل التي كوّنوها من العدد نفسه من الأشياء.

الاحتمال باستعمال التوافيق

مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد عدد طرق تنظيم مجموعة من الأشياء عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

مثال إضافي

5 وضعت في وعاء أحرف ممغنطة تمثل الحروف الهجائية العربية جميعها. إذا سُحبت 5 حروف من الوعاء عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون ب، هـ، ع، ل، م؟ $\frac{1}{98280}$

مثال 5 الاحتمال و ${}_nC_r$

كرة طائرة: يريد مدرِّب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق، ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًّا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة أي ${}_{10}C_6$

$${}_{10}C_6 = \frac{10!}{(10-6)!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون فيها الحدث، وفي هذه الحالة يساوي ${}_6C_6 = 1$، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًّا.

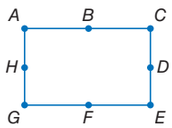
الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{{}_6C_6}{{}_{10}C_6} = \frac{1}{120}$

إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًّا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

تأكد



5) هندسة: إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًّا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟ $\frac{1}{14}$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 120

1) هندسة: إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صف من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلث هو الأول والمربع هو الثاني؟

$\frac{1}{20}$ أو 0.05

مثال 2 صفحة 121

2) معرض علمي: تعرُض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 15 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًّا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟ $\frac{1}{2730}$

مثال 3 صفحة 122

3) سيارات: تتكون لوحة سيارة في إحدى الدول من الأحرف ك، ر، ر والأرقام 1, 3, 3, 3. ما احتمال أن يكون ترتيبها ر 3 ر ك 133 ؟ $\frac{1}{420}$

مثال 4 صفحة 123

4) كيمياء: في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رُتّبت عشوائيًّا على صينية دائرية.

a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟ $\frac{1}{120}$

b) ما احتمال أن يكون أنبوب الاختبار 2 في الوسط الأعلى للصينية؟ $\frac{1}{6}$

مثال 5 صفحة 124

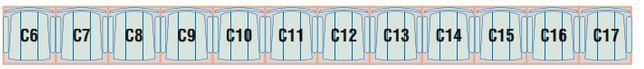
5) رسوم: اشترك 15 طالبًا من الصف الأول الثانوي و15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة رسم المناظر الطبيعية للفوز بأربع جوائز. ما احتمال أن تكون الجوائز الأربع من نصيب طلاب الصف الأول الثانوي؟ $\frac{13}{261}$ ، أو 5% تقريبًا

124 الفصل 3 الاحتمال والقياس

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 120

6) **محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كل منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟ $\frac{1}{132}$



7) **حفلات:** وزعت بطاقات مرقمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزياد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزياد البطاقة رقم 23؟ انظر ملحق الإجابات

مثال 2 صفحة 121

8) **مجموعات:** تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟ $\frac{1}{90}$ أو 1% تقريبًا

مثال 3 صفحة 122

9) **أحرف ممغنطة:** اشترى عدنان بعض الأحرف الممغنطة التي يمكن ترتيبها بحيث تشكل كلمات على باب ثلاجته. إذا اختار عشوائيًّا تبديلًا من الأحرف المبينة في الشكل المجاور، فما احتمال أن تشكل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟ انظر ملحق الإجابات

10) **رموز بريدية:** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي لمنطقة 39372375 إذا تم تكوينه عشوائيًّا من الأرقام 3، 7، 2، 3، 9، 5، 7، 3؟ $\frac{1}{3360}$

مثال 4 صفحة 123

11) **مجموعات:** يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي الأقرب إلى الباب؟ $\frac{1}{7}$

12) **مدينة الألعاب:** ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟ $\frac{1}{8}$

13) **ألعاب:** استعمل الشكل الآتي، مفترضًا أن الكرات رُتبت عشوائيًّا:

a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار؟ $\frac{1}{56}$

b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أعلاه؟ $\frac{1}{40320}$

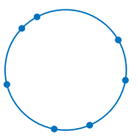
c) إذا أُعيد ترتيب الكرات عشوائيًّا بحيث شكلت دائرة. فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟ $\frac{2}{7}$

d) وضعت 7 كرات في صف، ثلاث منها أرقامها 8 ، وثلاث أرقامها 9، وكرة واحدة رقمها 6. ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث ذات الرقم 8 إلى يسار الكرة 6 ، والكرات الثلاث ذات الرقم 9 عن يمينها؟ $\frac{1}{140}$

مثال 5 صفحة 124

14) ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضّح حساباتك. انظر الهامش

15) اختيرت 7 نقاط عشوائيًّا تقع على دائرة كما في الشكل المجاور. انظر الهامش



a) إذا استعملت الأحرف من A إلى G، فما عدد تسمية النقاط على الدائرة؟

b) إذا أعطيت إحدى النقاط حرفًا معينًا، فما عدد الترتيبات الممكنة؟

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 5-1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

14) 45 ؛ إجابة ممكنة: عدد المستقيمات هو توافيق 10 نقاط مأخوذة 2 في كل مرّة، وهي $\frac{10!}{8!2!} = 45$.

15) **a)** $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{7} = 720$

b) $7\times6\times5\times4\times3\times2 = 5040$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	12-6، 16، 33-18
ضمن ضمن المتوسط	15-6 فردي، 16، 33-18
فوق فوق المتوسط	27-13، (اختياري: 33-28)

4 التقويم

التسمية في الرياضيات أعطِ الطلبة مسألة احتمال، واطلب إليهم أن يذكروا القانون الذي سيستعملونه؛ لإيجاد الاحتمال، ويبينوا السبب الذي يجعل القانون الذي اختاروه هو الأنسب للمسألة المعطاة.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-3 , 1-3 باعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

17) إجابة ممكنة:

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$r! \cdot {}_nC_r = r! \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$= \frac{n!r!}{(n-r)!r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= {}_nP_r$$

لذا، فإن $_nP_r$, $_nC_r$ يختلفان في العامل $r!$ ؛ لأنه يوجد دائماً $r!$ من الطرق لترتيب المجموعات التي يتم اختيارها؛ لذا، فإنه يوجد $r!$ تباديل لكل توفيق.

20) $_nC_{n-r} \stackrel{?}{=} {}_nC_r$

$$\frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \checkmark$$

21) إجابة ممكنة: تستعمل كل من التباديل والتوافيق؛ لإيجاد عدد التراتيب الممكنة لمجموعة من العناصر. ترتيب العناصر مهم في التباديل ولكنه غير مهم في التوافيق.

مسائل مهارات التفكير العليا

16) تبرير: إذا رُتِّبت n من العناصر المتمايزة في n من الأماكن على دائرة ذات نقطة مرجع ثابتة. فهل احتمال أن يكون عنصر معين في المكان الذي ترتيبه n يساوي $\frac{1}{n}$ أحيانًا أو دائمًا أو لا يساويه أبدًا؟ وضح ذلك. انظر ملحق الإجابات

17) تحد: يدّعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: $r! \cdot {}_nC_r = {}_nP_r$.
بيّن صحة هذه العلاقة جبريًّا، ثم وضّح لماذا يختلف $_nC_r$ و $_nP_r$ بعامل مقداره $r!$. انظر الهامش

18) مسألة مفتوحة: صف وضعًا يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{{}_7C_3}$ انظر ملحق الإجابات

19) تبرير: هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو أنها غير صحيحة أبدًا؟ برر إجابتك.
$_nP_r = {}_nC_r$ انظر ملحق الإجابات

20) برهان: برهن على أن $_nC_{n-r} = {}_nC_r$ انظر الهامش

21) اكتب: بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

22) احتمال: يقف رجلان وولدان في صف واحد. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟ C

A $\frac{1}{24}$ C $\frac{1}{6}$
B $\frac{1}{12}$ D $\frac{1}{2}$

23) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا اخترت عشوائيًّا تبديلًا للأحرف المبينة أدناه، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

ف	ء	س	ف	ي	س	ا

$\frac{1}{1260}$

24) احتمال: ألقي حجر نرد منتظم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي في 9 مرات. إذا ألقي حجر النرد نفسه للمرة العاشرة، فما احتمال ظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟ G

F 1
H $\frac{9}{10}$
G $\frac{1}{6}$
J $\frac{1}{10}$

مراجعة تراكمية

25) تسوّق: لدى محل تجاري معاطف نسائية بالمقاسات 8 أو 10 أو 14 أو 16 وبالألوان الآتية: الأسود، الأخضر، البني، الأحمر.
كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ 16 (الدرس 1-3)

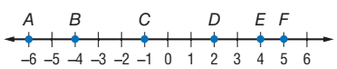
مثّل فضاء العيّنة في كل تجربة مما يأتي بمخطط الشجرة البيانية : (الدرس 1-3)

26) إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة الواحدة تلو الأخرى. انظر الهامش

27) سحب كرتين معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، 4 كرات بيضاء، و 3 كرات سوداء. انظر ملحق الإجابات

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد قياس كل مما يأتي مستعملًا خط الأعداد:



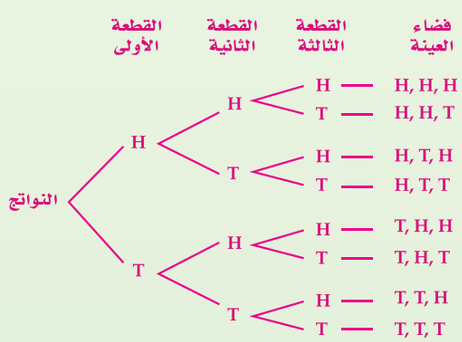
28) DF 3
29) AE 10
30) EF 1
31) BD 6
32) AC 5
33) CF 6

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا حول التأثير الممكن لفهم مبادئ الاحتمال وتطبيقها على اتخاذ قراراتهم في بعض المواقف. وشجعهم على استعمال أمثلة محددة ومفصّلة لمواقف تؤيد طرق تفكيرهم.

26)



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3

إيجاد احتمالات الأحداث البسيطة.

الدرس 3-3

إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال.

إيجاد الاحتمالات باستعمال المساحات.

ما بعد الدرس 3-3

تصميم محاكاة لتقدير الاحتمالات وتلخيص البيانات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- أيّ قسم من لوحة اللعبة هو الأسهل ليستقر فيه السهم؟ الحلقة الخارجية
- أيّ قسم من لوحة اللعبة هو الأصعب ليستقر فيه السهم؟ الدائرة الصغيرة الداخلية القريبة من المركز.
- ما العوامل الأخرى التي تؤثر في نواتج اللعبة؟ إجابة ممكنة: وزن السهم وسرعته ومكوّناته.

الاحتمال الهندسي
Geometric Probability

فيما سبق

درست إيجاد قيمة احتمالات الأحداث البسيطة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد الاحتمالات باستعمال الطول.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحة.

المفردات الأساسية

الاحتمال الهندسي
geometric probability

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

الهدف من اللعبة المبينة في الصورة هو تجميع نقاط من خلال قذف سهم باتجاه لوحة الهدف، وتحدد قيمة النقاط لكل منطقة حسب احتمال تصويب الشخص السهم إلى تلك المنطقة.

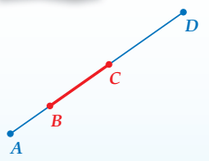
الاحتمال الهندسي احتمال الفوز في لعبة السهم يعتمد على مساحة الهدف. ويُسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة **احتمالًا هندسيًّا**.

مفهوم أساسي — الاحتمال و الطول

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$



مثال إذا اختيرت النقطة E على $\overline{AD}$ عشوائيًا، فإن

$$P(\text{تقع } E \text{ على } \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

مثال 1 — استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$. فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.

احتمال الطول

$$P(\text{تقع } X \text{ على } \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$$

$$KL = 7 \text{ , } JM = 3 + 7 + 4 = 14 \quad = \frac{7}{14}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

تأكد

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

1A) $P(\text{تقع } X \text{ على } \overline{LM})$ — $\frac{2}{7}$، أو 0.29 تقريبًا أو 29% تقريبًا

1B) $P(\text{تقع } X \text{ على } \overline{KM})$ — $\frac{11}{14}$، أو 0.79 تقريبًا، أو 79% تقريبًا

يمكن استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عددًا غير منتهٍ من النواتج.

مصادر الدرس 3-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (128)	• تنويع التعليم ، ص (128, 131)	• تنويع التعليم ، ص (128, 131)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين ، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الاحتمال والطول

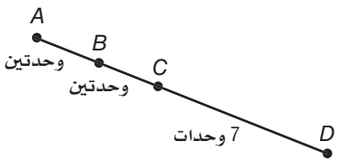
المثالان 2 , 1 يبيّنان كيفية إيجاد احتمال الأحداث التي تتضمن أطوالًا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 اختيرت النقطة Z عشوائيًّا على $\overline{AD}$. أوجد احتمال وقوع Z على $\overline{AB}$.



$\frac{2}{11}$، أو 0.18 تقريبًا أو 18% تقريبًا

2 **مدارات:** يدور مذنب هالي حول الأرض كل 76 سنة. ما احتمال أن يُكمل مذنب هالي مداره خلال العقد القادم؟

$\frac{5}{38}$، أو 0.13 تقريبًا أو 13% تقريبًا

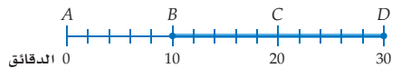
تنبيه!

الفترات ذكّر الطلبة بأن الفترة التي يتخذ الاحتمال قيمة منها هي جميع الأعداد الحقيقية التي تقع بين 0، 1 بما فيها العددين 0، 1.

مثال 2 من واقع الحياة — نمذجة احتمالات من واقع الحياة

مواصلات: تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره حافلة كل 30 min. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 min أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 min، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 min أو أقل. ويمثل حدث الانتظار 10 min أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:



أوجد احتمال هذا الحدث.

احتمال الطول

$$P(\text{انتظار 10 min أو أكثر}) = \frac{BD}{AD}$$

$$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

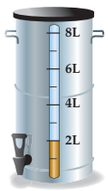
$AD = 30$ و $BD = 20$

لذا، فاحتمال انتظار 10 min أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$، أو 67% تقريبًا.

الربط مع واقع الحياة

تمتاز الحافلات بانخفاض تكاليف تشغيلها، وقلة استهلاكها للوقود، واتساعها لعدد أكبر من الركاب، وهي أكثر وسائل النقل أمانًا.

تأكد



2) شاي: يحضّر مطعم الشاي في وعاء سعته 8 L، عندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2 L يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.

A) إذا حاول شخص سكب كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2 L؟ $\frac{1}{4}$ أو 25%

B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أي وقت بين 2 L و 3 L؟ $\frac{1}{8}$ أو 12.5%

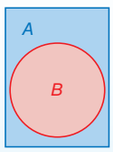
الاحتمال والمساحة تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

مفهوم أساسي — الاحتمال والمساحة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$



مثال إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A، فإن

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدفٍ ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة.
- احتمال وقوع الهدف في أي مكان من المنطقة متساوٍ .

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة نمذجة فضاء العينة البسيط باستعمال الاحتمالات الهندسية. إذ يمكن تمثيل كل حدث بقطعة مستقيمة طولها يتناسب مع احتمالها. مثلاً، يمكن تمثيل إلقاء قطعة نقد بقطعتين مستقيمتين متطابقتين فيكون احتمال أن تقع نقطة على أي منهما يساوي 50%.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال المساحة لإيجاد الاحتمال الهندسي

الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟

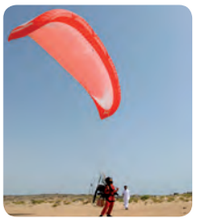
نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، نصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي 1 + 1 + 1، أو 3 m.

احتمال المساحة: $P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) = \dfrac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$

$A = \pi r^2$: $= \dfrac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$

بالتبسيط: $= \dfrac{\pi}{9\pi} = \dfrac{1}{9}$

احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء يساوي $\frac{1}{9}$، أو 11% تقريبًا.



الربط مع واقع الحياة

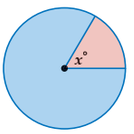
يهبط المظليون المشاركون في بطولات الهبوط بالمظلة على بعد أقل من بوصتين عن مركز مكان الهبوط.

تأكد

3) الهبوط بالمظلات: أوجد كل مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

A) (أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء) P . $\frac{5}{9}$، أو 56% تقريبًا

B) (أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء) P . $\frac{1}{3}$، أو 33% تقريبًا



يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.

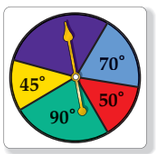
إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية ($x°$) إلى 360°. ستبرهن هذا في السؤال 22.

إرشادات للدراسة

القطاع الدائري

هو منطقة من دائرة نصف قطرها r محدودة بزاوية مركزية قياسها $x°$ والقوس المقابل لها ومساحتها هي: $A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$

مثال 4 — استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي



استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي:

(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

a) (استقرار المؤشر على اللون الأصفر) P

قياس زاوية القطاع الأصفر 45°.

(استقرار المؤشر على اللون الأصفر) $P = \dfrac{45}{360} \approx 12.5\%$

b) (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P

قياس زاوية القطاع البنفسجي 105°.

(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) $P = \dfrac{105}{360} \approx 29\%$

c) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق) P

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق 50° + 70° = 120° .

(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق) $P = \dfrac{360 - 120}{360} = \dfrac{240}{360} \approx 67\%$

إرشادات للدراسة

استعمل التقدير

في مثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$، أو 33% من القرص. لذا، فالجواب 29% يكون معقولًا.

تأكد

4A) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) P . $\frac{7}{36}$ أو 19% تقريبًا

4B) (استقرار المؤشر على اللون الأزرق) P . $\frac{3}{4}$ أو 75%

الاحتمال و المساحة

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية إيجاد احتمال الأحداث التي تتضمن مساحات.

التعليم باستعمال التقنيات

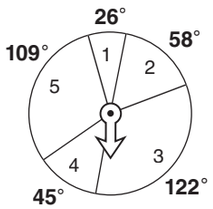
آلة التصوير الرقمية استعمل أشياء مختلفة الألوان؛ لتمثل مساحات مناطق مختلفة داخل شكل. واطلب إلى الطلبة نمذجة مسائل عدة تتضمن المساحات والاحتمال الهندسي وتوثيق ذلك باستعمال آلة التصوير.

مثالان إضافيان

3 **لعبة السهام:** يتكون الهدف في لعبة السهم من 3 دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية يساوي 4 in، وتبعد كل دائرة عن الدائرة التي تليها 3 in، فما احتمال أن يستقر سهم لاعب في الدائرة الداخلية؟

$\frac{1}{16}$ أو 6% تقريبًا

4 استعمل القرص ذي المؤشر الدوّار أدناه؛ لإيجاد كل مما يأتي:



a) (استقرار المؤشر على القطاع 3) P

$\frac{122}{360}$ أو 34% تقريبًا

b) (استقرار المؤشر على القطاع 1) P

$\frac{26}{360}$ أو 7% تقريبًا

التركيز في المحتوى الرياضي

المساحة تذكّر عند مقارنة مساحات الأشكال المتشابهة أن النسبة بين المساحات تساوي مربع النسبة بين الأضلاع.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–5؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

3 عدد البطاقات التي مع مروة 5 بطاقات، عدد البطاقات التي مع زينب 5 بطاقات، عدد البطاقات التي تم توزيعها 90 بطاقة، عدد البطاقات التي لم توزع 4 بطاقات. احتمال أن تكون البطاقة رقم 104 مع زينب أو لم توزع يساوي:

$$\frac{5+4}{99}=\frac{9}{99}=\frac{1}{11}\approx 0.09$$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة127

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AD}$. فأوجد كلًّا مما يأتي:

1) (تقع X على $\overline{BD}$) P 50%، أو 0.5، أو $\frac{1}{2}$

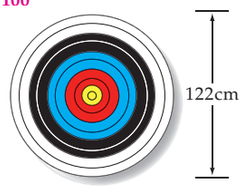
2) (تقع X على $\overline{BC}$) P 30%، أو 0.3، أو $\frac{3}{10}$

مثال 2 صفحة128

3 **بطاقات:** طبعت إدارة مدرسة بطاقات دعوة لحفل تخرج الطالبات مرقمة من 1 إلى 104 ، وأعطت كل طالبة 5 بطاقات. إذا لم تكن البطاقة رقم 104 مع الطالبة مروة، فما احتمال أن تكون مع زميلتها زينب، أو ضمن البطاقات التي لم توزع؟ انظر الهامش

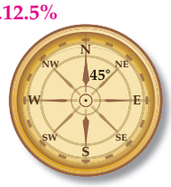
المثالان 3 و 4 صفحة129

4) **سهام:** يُسدد هدّاف سهمه نحو قرص قطره 122 cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الهدّاف مركز القرص. 1%، أو 0.01، أو $\frac{1}{100}$



5) **ملاحة:** ضَلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة فوجّه بوصلته عشوائيًّا. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) و الشمال الشرقي (NE).

12.5%، أو 0.125، أو $\frac{1}{8}$



6) $\frac{4}{9}$ ، أو 0.44 تقريبًا، أو 44% تقريبًا

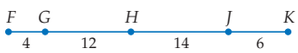
7) $\frac{13}{18}$ ، أو 0.72 تقريبًا، أو 72% تقريبًا

8) $\frac{5}{9}$، أو 0.56 تقريبًا، أو 56% تقريبًا

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة127

إذا اختيرت النقطة X على $\overline{FK}$ عشوائيًّا، فأوجد كلًّا مما يأتي:

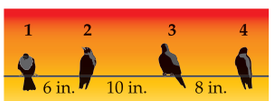


6) (تقع X على $\overline{FH}$) P

7) (تقع X على $\overline{GJ}$) P

8) (تقع X على $\overline{HK}$) P

9) **طيور:** تقف أربعة طيور على سلك هاتف. ما احتمال أن يهبط طائر خامس عشوائيًّا على نقطة من نقاط السلك بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟



9) 33% تقريبًا، أو 0.33 تقريبًا، أو $\frac{1}{3}$

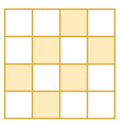
مثال 2 صفحة128

10) **تلفاز:** يُتابع عمّار برنامجًا تلفزيونيًّا مدته 30 min. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرّة كل فترة 3 h. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته لبرنامجه المفضّل الذي مدته 30 min في اليوم التالي؟ $\frac{1}{6}$،أو 0.17 تقريبًا، أو 17% تقريبًا

مثال 3 صفحة129

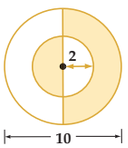
اختيرت نقطة عشوائيًّا في كل من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة.

11)



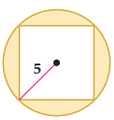
$\frac{3}{8}$، أو 0.375، أو 37.5%

12



$\frac{1}{2}$، أو 0.5، أو 50%

13)



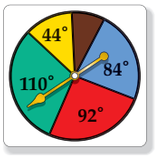
0.363 تقريبًا، أو 36.3% تقريبًا

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	20–6، 25، 39–27
ضمن ضمن المتوسط	19–7 فردي، 23–21 فردي، 25 ، 39–27
فوق فوق المتوسط	36–21، (اختياري: 39–37)

مثال 4
صفحة 129

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كل مما يأتي
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):



14 (استقرار المؤشر على اللون الأصفر)P انظر الهامش

15 (استقرار المؤشر على اللون الأزرق)P 23.3% تقريبًا

16 (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)P 69.4%

17 (عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر)P 62.2% تقريبًا

صف حدثًا يكون احتماله $\frac{1}{3}$ لكل من النماذج الآتية:

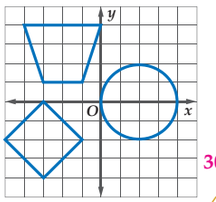
18

إجابة ممكنة: اختيار نقطة واقعة بين 10 و 20

19

إجابة ممكنة: استقرار المؤشر على اللون الأخضر

20 **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا في المستوى الإحداثي المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:

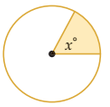


a (النقطة داخل الدائرة)P. $\frac{\pi}{25}$ أو 0.13 تقريبًا، أو 13% تقريبًا

b (النقطة داخل شبه المنحرف)P. $\frac{9}{100}$، أو 0.09، أو 9%

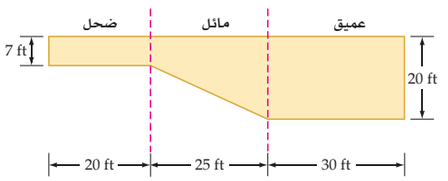
c (النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)P. $\frac{3}{10}$، أو 0.30 أو 30%

21 **جبر:** اختيرت نقطة عشوائيًّا في الدائرة.
أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$.



22 **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت عشوائيًّا نقطة (x, y) في منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$. فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟ انظر ملحق الإجابات

23 **حجم:** تحتوي المنطقة التي يعيش فيها الدب القطبي في حديقة للحيوانات على بركة يبيّن الشكل الآتي مقطعًا جانبيًّا منها. إذا كان عرض البركة 20 ft، فما احتمال أن يسبح الدب في المنطقة المائلة في البركة على فرض أن فرص سباحته في أي مكان في البركة متساوية؟ انظر ملحق الإجابات

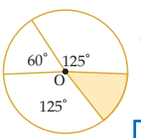


الربط مع واقع الحياة

تتواجد سلالات الدب القطبي في: الولايات المتحدة (ألاسكا)، وكندا، وروسيا، والدنمارك، والنرويج، ولا يقطن الدب القطبي الجزء الجنوبي من الكرة الأرضية.

مسائل مهارات التفكير العليا

24 **اكتشف الخطأ:** حسب عمر وسالم احتمال أن النقطة التي يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الدائرة O سوف تقع في المنطقة المظلّلة. أيهما حله صحيح؟ وضّح تبريرك.



انظر الهامش

عمر

$$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$$
$$= \frac{50}{360}$$
$$\approx 13.9\%$$

سالم

$$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$$
$$= \frac{60}{360}$$
$$\approx 16.7\%$$

21. إجابة ممكنة: احتمال أن تكون النقطة التي تم اختيارها عشوائيًّا واقعة في المنطقة المظللة يساوي نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة كاملة.

$$P(\text{وقوع النقطة المختارة في المنطقة المظللة}) = \frac{\text{مساحة سطح القطاع}}{\text{مساحة سطح الدائرة}}$$
$$= \frac{\frac{x}{360} \cdot \pi r^2}{\pi r^2}$$
$$= \frac{x}{360}$$

4 التقويم

بطاقة خروج ارسم خمسة أشكال هندسية مختلفة، وظلل منطقة في كل شكل بعدة نسخ. وأعط شكلًا لكل طالب؛ ليجد احتمال وقوع نقطة اختيرت عشوائيًّا في المنطقة المظللة. واطلب إلى الطلبة أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-3 بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 3.

تنبيه!

اكتشف الخطأ يجب أن يلاحظ الطلبة في السؤال 25، أن أنصاف الأقطار المتقابلة ليست على استقامة. وعليه، فإن زاوية القطاع المظلل والزاوية التي قياسها 60° غير متقابلتين بالرأس. لقد أخطأ سالم عندما اعتبرهما متقابلتين بالرأس، على حين كانت إجابة عمر صحيحة، حيث حسب زاوية القطاع المظلل بطرح مجموع الزوايا الثلاث المعلومة من 360°.

إجابات:

14 (استقرار المؤشر على اللون الأصفر)P
$= \frac{44}{360} \approx 12.2\%$

24) حل عمر صحيح. إجابة ممكنة: يجب أن تجمع قياسات الزوايا المركزية الثلاث، ثم تطرح المجموع من 360°؛ لتجد قياس الزاوية المركزية المظللة.
$360 - (60 + 125 + 125) = 50$،
لذا، فإن الاحتمال يساوي $\frac{50}{360}$، أو $\frac{5}{36}$.

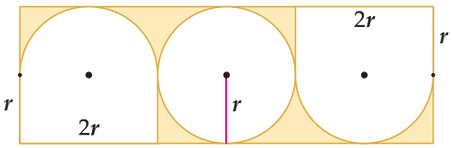
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكوّنوا لعبة تطبق مفاهيم الاحتمال باستعمال المساحات. ويتعين عليهم أن يكتبوا تعليمات واضحة للعب والفوز. وتتضمن أيضًا احتمال التسجيل لجميع الأحداث الممكنة في اللعبة. واسمح لهم بأن يلعبوا ألعابًا صمّمها آخرون للتحقق من أن الاحتمالات الرياضية تقابل الاحتمالات التجريبية. واطلب إليهم أن يصمّموا ألعابًا عادلة، يكون الفوز في بعضها صعبًا، وفي بعضها الآخر سهلًا.

26) $\frac{1}{7}$؛ إجابة ممكنة: باستعمال نظرية متباينة المثلث نجد أن هناك 7 مثلثات متطابقة الضلعين أطوال أضلاعها أعداد صحيحة ومحيطها 32cm. ومن بين هذه المثلثات يوجد مثلث واحد فقط أطوال أضلاعه 10cm, 10cm, 12cm، ومساحة سطحه $48cm^2$ بالضبط. لذا، فإن الاحتمال يساوي $\frac{1}{7}$.

25) تحدٍّ: أوجد احتمال أن النقطة التي يتم اختيارها عشوائيًّا تقع في المنطقة المظللة في الشكل الآتي مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر. **14.3% تقريبًا**

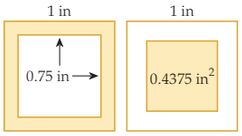


26) تبرير: محيط مثلث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلث أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحة سطحه $48\ cm^2$ بالضبط؟ وضّح تبريرك.

27) مسألة مفتوحة: مثّل حدثًا احتماله 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة. **انظر الهامش**

28) اكتب: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا في كل من المربعين الآتيين، فوضح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة في أي منهما.

انظر الهامش



تدريب على اختبار معياري

29) احتمال: رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات. واختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المربع، ما احتمال أن تقع أيضًا داخل الدائرة؟ **B**

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

B $\frac{\pi}{9}$ **D** $\frac{9}{\pi}$

30) احتمال: يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين لونهما أبيض و 3 كرات سوداء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون حمراء؟ **C**

A 0.11 **C** 0.33

B 0.17 **D** 0.39

31) سؤال ذو إجابة قصيرة: قُسّم القرص أدناه إلى 8 قطاعات متساوية.

a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يستقر عند العدد 3؟ $\frac{1}{8}$

b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يستقر عند عدد فردي؟ $\frac{1}{2}$

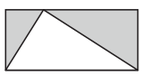
مراجعة تراكمية

32) حفلة: يجلس أربعة أصدقاء حول منضدة مربعة الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ (الدرس 2-3) $\frac{1}{4}$

مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، ومخطط الشجرة البيانية: (الدرس 1-3)

33) في كل من السنتين القادمتين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي أو النشاط العلمي. **انظر ملحق الإجابات**

34) يمكن أن تشتري أمينة زوج أحذية ذات كعب مرتفع أو ذات كعب منخفض، وبلون أسود أو بني. **انظر ملحق الإجابات**

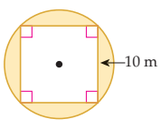


35) هندسة: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا في المستطيل المبين في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟ (الدرس 3-3) **انظر الهامش**

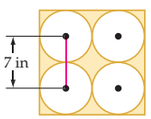
مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد مساحة المنطقة المظلّلة في كل مما يأتي:

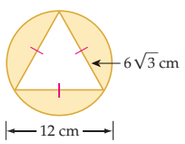
36) **$57.1\ m^2$ تقريبًا**



37) **$42.1\ in^2$ تقريبًا**



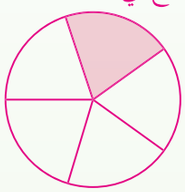
38) **$19.6\ cm^2$ تقريبًا**



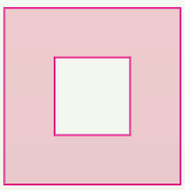
إجابات:

27) إجابة ممكنة: احتمال اختيار نقطة عشوائيًّا على $\overline{AC}$ تقع بين A, B يساوي 20%.

احتمال اختيار نقطة عشوائيًّا في الدائرة تقع في المنطقة المظللة يساوي 20%.



احتمال أن تقع نقطة عشوائيًّا في المنطقة غير المظللة يساوي 20%.



28) إجابة ممكنة: يحسب احتمال أن تقع نقطة عشوائيًّا في المنطقة المظللة في المربع إلى اليسار بإيجاد نسبة مساحة المنطقة المظللة إلى مساحة سطح المربع الكبير، ويتم حسابه بطرح مساحة سطح المربع غير المظلل من مساحة سطح المربع الأكبر، ثم إيجاد نسبة الفرق بين المساحتين إلى مساحة سطح المربع الأكبر.

ويكون الاحتمال $\frac{1^2 - 0.75^2}{1^2}$، أو 43.75%.

احتمال اختيار نقطة عشوائيًّا تقع في المنطقة المظللة في المربع إلى اليمين يساوي نسبة مساحة سطح المربع المظلل إلى مساحة سطح المربع الأكبر. والتي تساوي $\frac{0.4375}{1}$ أو 43.75%.

لذا، فإن احتمال أن تقع نقطة عشوائيًّا في المنطقة المظللة في كلا المربعين هو نفسه.

35) $\frac{1}{2}$، أو 0.5، أو 50%

اختبار منتصف الفصل

1) طعام: يتكون غداء ليلى من شطيرة وحساء، وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي: (الدرس 3-1)

شطائر	حساء	الحلوى	مشروبات
دجاج	دجاج	كعك	شاي
لحم	خضراوات	كنافة	قهوة
لبنة	عدس		عصير برتقال
جبنة			عصير تفاح
			حليب

a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن إعدادها من الأصناف المبينة في الجدول؟ 120

b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعين من الحلوى، فما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن إعدادها؟ 320

2) رايات: ما عدد الرايات المختلفة التي يمكن تشكيلها من 5 ألوان أُخذت من 8 قطع قماش مختلفة الألوان؟ (الدرس 3-1) 6720

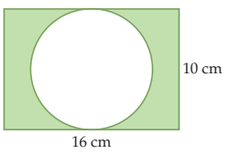
3) ملابس: لدى مريم ستة ألوان من القمصان. أحمر، أزرق، أصفر، أخضر، زهري، برتقالي، وعندها من كل لون قميصٌ بكمّ طويل وآخر بكمّ قصير. مثّل فضاء العيِّنة لخيارات القمصان لدى مريم باستعمال القائمة المنظمة والجدول ومخطط الشجرة البيانية. (الدرس 3-1) انظر ملحق الإجابات

4) كتابة: يحتوي كيس على بطاقات كُتب على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر ، ف ، س ، ة ، و ، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذه الحروف عشوائيًّا لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟ (الدرس 3-2) $\frac{1}{720}$

5) نقود: لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. كم طريقة يمكنه وضع نقوده في جيوبه؟ (الدرس 3-1) 81

6) نقود: إذا ألقيتْ قطعة نقد عشر مرات متتالية، فما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟ (الدرس 3-1) 2^9

7) إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟ (الدرس 3-3) 51% تقريبًا



8) سيرك: مُد حبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْع الحبل عند أي نقطة من نقاطه متساوية. (الدرس 3-3)

a) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل في أول 50 m منه. 16% تقريبًا

b) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من العمود. 13% تقريبًا

اختيرت نقطة A عشوائيًّا على $\overline{BE}$. أوجد كلًّا ممّا يأتي: (الدرس 3-3)

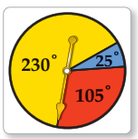
9) (تقع A على $\overline{CD}$) P $\frac{6}{13}$

10) (تقع A على $\overline{BD}$) P $\frac{17}{26}$

11) (تقع A على $\overline{CE}$) P $\frac{21}{26}$

12) (تقع A على $\overline{DE}$) P $\frac{9}{26}$

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل الآتي لإيجاد كل مما يأتي: (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره مرة أخرى). (الدرس 3-3)

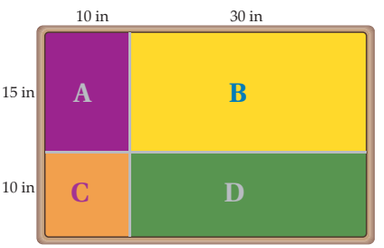


13) (استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء) P 64% تقريبًا

14) (استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء) P 7% تقريبًا

15) (استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء) P 29% تقريبًا

16) ألعاب: الهدف من لعبة رمي السهام أن يصيب السهم المنطقة مربعة الشكل C في اللوحة مستطيلة الشكل المبينة أدناه: (الدرس 3-3)



a) ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة A؟ 15%

b) ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة B؟ 45%

c) ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة C؟ 10%

d) ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة D؟ 30%

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار منتصف الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكِّل تحديًا للطلبة.

مطوياتك متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 3-1 إلى 3-3.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة ،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة ،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 3-1، 3-2، 3-3	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل ، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

استعمال القياسات الهندسية لحساب الاحتمالات.

الدرس 3-4

تصميم محاكاة لتقدير الاحتمالات تلخيص بيانات ناتجة عن محاكاة مواقف واقعية.

ما بعد الدرس 3-4

إيجاد احتمالات أحداث مستقلة وأحداث غير مستقلة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- إذا رمى ياسر 50 رمية حرة، فما عدد الرميات التي يسجل فيها أهدافًا؟ 35
- إذا توقع ياسر أن تتاح له فرصة رمي 60 رمية حرة في هذا الموسم، فما عدد الرميات التي يتوقع أن يسجل فيها أهدافًا؟ 42
- ما نوع التبرير الذي يستعمله ياسر للتنبؤ بعدد الرميات الحرة التي يسجل فيها؟ التبرير الاستقرائي.

محاكاة مواقف واقعية
Simulations

فيما سبق

درست إيجاد احتمالات باستعمال قياسات هندسية (الطول، المساحة).

والآن

الأفكار الرئيسة

- أصمم محاكاة لتقدير الاحتمالات.
- ألخص بيانات المحاكاة.

المفردات الأساسية

النموذج الاحتمالي probability model

المحاكاة simulation

المتغير العشوائي random variable

القيمة المتوقعة expected value

قانون الأعداد الكبيرة Law of Large Numbers

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

بناءً على التدريب يعلم ياسر أنه يسجل 70% من رمياته الحرة في لعبة كرة السلة. ويرغب في استعمال هذه المعلومة للتنبؤ بعدد الرميات الحرة التي سيسجلها في المباريات القادمة.

تصميم المحاكاة **النموذج الاحتمالي** هو نموذج رياضي يُستعمل لمقابلة ظاهرة عشوائية. **المحاكاة** هي استعمال نموذج احتمالي لتقليد موقف حياتي مرة تلو الأخرى، بحيث يمكن تقدير احتمالات النواتج. ولتصميم محاكاة استعمل الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي تصميم المحاكاة

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 حدّد كل ناتج ممكن وقيمة احتماله النظري.

الخطوة 2 اكتب الفرضيات الممكنة.

الخطوة 3 صف نموذجًا احتماليًا ملائمًا للموقف.

الخطوة 4 عرّف المحاولة اللازمة لهذا الموقف. ثم حدد عدد المحاولات الواجب إجراؤها.

ويكون للنموذج الاحتمالي الملائم، الاحتمالات نفسها التي للموقف الذي تحاول التنبؤ به، والنماذج الهندسية هي نماذج احتمالية مألوفة.

مثال 1 تصميم محاكاة باستعمال نموذج هندسي

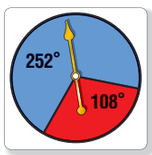
كرة السلة: سجّل ياسر 70% من رمياته الحرة في الموسم الماضي، صمّم محاكاة يمكن استعمالها لتقدير احتمال أن يسجل ياسر من رميته الحرّة التالية في هذا الموسم.

الخطوة 1 النواتج الممكنة — الاحتمال النظري

- يسجل ياسر في الرمية الحرّة. ← 70%
- يخطئ ياسر في الرمية الحرّة. ← 100 − 70)%)، أو 30%

الخطوة 2 سوف نفترض أن المحاكاة مكوَّنة من 40 محاولة.

الخطوة 3 يمكن استعمال القرص ذو المؤشر الدوّار بحيث يقسم إلى قطاعين، أحدهما يشمل 70% من مساحة القرص، والآخر على 30%. ولعمل ذلك، أوجد قياس الزاوية المركزية لكل قطاع.



يسجل في الرمية الحرّة	يخطئ في الرمية الحرّة
70% من 360° تساوي 252°	30% من 360° تساوي 108°

يسجل في الرمية الحرّة
يخطئ في الرمية الحرّة

الخطوة 4 نجاح المحاولة يعني تسجيل الرمية الحرة، وفشلها يعني عدم التسجيل. وتتكون المحاكاة من 40 محاولة تمثل كل منها تدوير المؤشر مرة واحدة لكل رمية حرة، وعند إجراء 40 محاولة في هذه المحاكاة، يمكن التنبؤ بعدد الرميات الحرة التي سيسجلها ياسر.

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (137)	• تنويع التعليم ، ص (137, 140)	• تنويع التعليم ، ص (140)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين ، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

تصميم المحاكاة

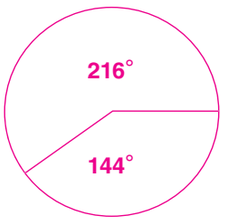
المثالان 2 ، 1 يبيّنان كيفية تكوين نموذج احتمالي واستعماله في التنبؤ بنتائج موقف واقعي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 **كرة السلة:** سجل طلال 40% من محاولات الرّمي الحرّ التي نفذها الموسم الماضي. صمّم محاكاة يمكن استعمالها لتقدير احتمال أن يسجل عندما يسدد على الهدف في المرة التالية.



2 **فطائر:** وجدت دراسة مسحية شملت طلاب مدرسة ثانوية أن 30% من الطلاب يفضلون فطائر البيض، و30% يفضلون فطائر الجبنة، و20% يفضلون فطائر السبانخ، و 20% يفضلون فطائر اللحم. صمّم محاكاة يمكن استعمالها لتقدير احتمال أن يفضل أحد طلاب هذه المدرسة كل واحد من هذه البدائل. إجابة ممكنة: استعمل مولد الأعداد العشوائية لتوليد الأعداد من 0 إلى 9 حيث تمثل الأعداد: 2–0 فطائر البيض، 5–3 فطائر الجبنة، 7, 6 فطائر السبانخ، 9, 8 فطائر اللحم. وتمثل المحاولة الواحدة اختيار أحد طلاب المدرسة عشوائيًا وتسجيل نوع الفطائر التي يفضلها. وستتكون المحاكاة من 20 محاولة.

إرشادات لحل المسألة

استعمال المحاكاة

غالبًا ما تقدم المحاكاة استراتيجية آمنة وفعّالة لحل المسألة في مواقف قد يكون تطبيقها مكلفًا أو خطرًا أو يستحيل حلها باستعمال أساليب نظرية. لذا؛ يجب أن تتضمن المحاكاة بيانات يسهل الحصول عليها أكثر من تلك البيانات الحقيقية التي تنمذجها.

إرشادات للدراسة

مولدات الأعداد العشوائية

لإيجاد أعداد عشوائية في الآلة الحاسبة البيانية اضغط MATH، واختر randInt (تحت قائمة PRB)، ثم أدخل أول الأعداد وآخرها إلى المدى الذي اخترته وعدد الأعداد الذي تريده في كل محاولة.

تأكد

1) مطاعم: يرفق مطعم قطع لعبة مع كؤوس العصير الكبيرة، ويمنح الشخص الذي يجمع قطع اللعبة الست جميعها جائزة. صمِّم محاكاة مستعملًا نموذجًا هندسيًّا يمكن استعماله لتقدير عدد كؤوس العصير الكبيرة التي يجب أن يشتريها شخص ليجمع قطع اللعبة جميعها. انظر ملحق الإجابات

إضافة إلى النماذج الهندسية ، يمكن أن تنفذ المحاكاة باستعمال قطع النقود، أو حجر النرد ، أو جداول الأعداد العشوائية، أو مولدات الأعداد العشوائية مثل تلك الموجودة في الآلة الحاسبة البيانية.

مثال 2

تصميم محاكاة باستعمال أعداد عشوائية

لون العيون: أظهرت نتائج مسح إحصائي أجري على طلاب مدرسة ثانوية أن 40% منهم عيونهم بنية، و30% عيونهم عسلية، و20% عيونهم خضراء، و10% عيونهم زرقاء. صمّم محاكاة تستعمل لتقدير احتمال أن يكون لون عيني طالب اختير عشوائيًّا من بين طلاب المدرسة هو أحد الألوان المذكورة.

الخطوة 1 النواتج الممكنة — الاحتمالات النظرية

عيون بنيّة	←	40%
عيون عسلية	←	30%
عيون خضراء	←	20%
عيون زرقاء	←	10%

الخطوة 2 نفرض أن لون عيني أي طالب هو أحد الألوان المذكورة أعلاه.

الخطوة 3 استعمل مولّد الأعداد العشوائية في حاسبتك البيانية. وعيّن الأرقام العشرة 9–0 لتمثل بيانات الاحتمالات بدقة. علمًا بأن اختيار الأرقام الفعلية التي تمثل النواتج ليس مهمًّا.

الناتج	تُمثّل بـ
العيون البنيّة	0, 1, 2, 3
العيون العسلية	4, 5, 6
العيون الخضراء	7, 8
العيون الزرقاء	9

الخطوة 4 تمثّل المحاولة اختيار طالب عشوائيًّا وتسجيل لون عينيه، ويمكن أن تتكون المحاكاة من 20 محاولة.

تأكد

2) كرة سلة: سجل إسماعيل في الموسم السابق 18% من رمياته الحرة. صمّم محاكاة تستعمل فيها مولّد الأعداد العشوائية في حاسبتك البيانية لتقدير احتمال أن يسجل إسماعيل هدفًا في رميته الحرة التالية. انظر الهامش

تلخيص البيانات من المحاكاة بعد تصميم عملية المحاكاة، يتعين عليك إجراء المحاكاة وتسجيل النتائج، ويتضمن ذلك كلًّا من الملخصات البيانية والعددية لبيانات المحاكاة، بالإضافة إلى تقدير احتمال الناتج المطلوب.

إجابة (تأكد):

2) إجابة ممكنة: الاحتمال النظري لتسجيل هدف من رمية حرة يساوي 18%.
سأستعمل مولد الأعداد العشوائية؛ لتوليد الأعداد من 1 إلى 50. حيث تمثل الأعداد 9–1 تسجيل هدف من رمية حرة، والأعداد 50–10 عدم تسجيل هدف، وستتكون المحاكاة من 50 محاولة.

التعليم باستعمال التقنيات

جهاز العرض الحاسوبي ابحث في الإنترنت عن موقع إلكتروني يحتوي على أداة تفاعلية لمحاكاة الاحتمال (استعمال قطع نقود وقرص ذي مؤشر دوّار وما إلى ذلك). وأوجد الاحتمال النظري لحدث ما، ثم استعمل أداة المحاكاة للحصول على بيانات تجربة حقيقية.

تلخيص البيانات من المحاكاة

مثال 3 يُبيّن كيفية عرض نتائج المحاكاة عدديًّا وبيانيًّا.

مثال إضافي

3 **كرة السلة:** نفّذ المحاكاة في المثال الإضافي 1، واعرض النتائج باستعمال الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

ستتنوع الإجابات، ولكن يجب أن تتضمن الإجابة جدولاً تكراريًّا من المحاكاة وتمثيله بالقطاعات الدائرية والأعمدة.

التركيز في المحتوى الرياضي

القيمة المتوقعة القيمة المتوقعة هي معدل القيمة النظرية المتوقعة للمتغير العشوائي بعد عدة محاولات عمليًّا. قد لا تختلف القيمة الحقيقية الناتجة من المحاكاة عن القيمة المتوقعة.

مثال 3 تنفيذ المحاكاة وتلخيص بياناتها

كرة السلة: نفذ المحاكاة في المثال 1، وسجّل النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

كوِّن جدولًا تكراريًّا، وسجل النتائج بعد تدوير القرص 40 مرة.

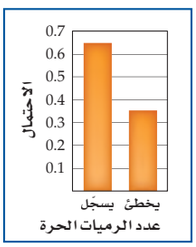
التكرار	الإشارات	النواتج
26	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	عدد الرميات التي سجل فيها
14	𝍸 𝍸 ||||	عدد الرميات التي أخطأ فيها
40		المجموع

بناءً على بيانات الجدول احسب احتمال أن يسجل ياسر في رميته الحرة التالية.

$$\frac{\text{عدد الرميات التي سجّل فيها}}{\text{عدد الرميات الحرة جميعها}} = \frac{26}{40} \text{ أو } 0.65$$ هذا احتمال تجريبي.

لذا فاحتمال تسجيل ياسر في رميته الحرة التالية يساوي 0.65 أو 65%. لاحظ أن هذه النتيجة قريبة من الاحتمال النظري 70%. لذا فالاحتمال التجريبي لعدم التسجيل في الرمية الحرة التالية يساوي $0.65 - 1$ أو 35%.

أنشئ أعمدة بيانية تمثل هذه النتائج.



تأكد

3) لون العيون: استعمل الآلة الحاسبة البيانية ونفذ المحاكاة في المثال 2. ثم سّجل النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية ملائمة. انظر الهامش

الربط مع واقع الحياة

أكبر نسبة من الرميات الحرة سجلها اللاعب (Mark price) خلال ممارسته اللعبة ضمن دوري كرة السلة الأمريكية للمحترفين (NBA) وكانت 90.4%

المتغير العشوائي هو المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة، فمثلًا في تجربة رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة يمكن أن يُمثّل المتغير العشوائي X مجموع العددين الظاهرين على حجري النرد، ويبين الجدول المجاور بعض قيم X المعيّنة لنواتج هذه التجربة.

مجموع نواتج رمي حجري النرد	
قيم X	النواتج
2	(1, 1)
3	(1, 2)
3	(2, 1)
9	(4, 5)
12	(6, 6)

مراجعة المفردات

الاحتمال التجريبي
هو ما يحدث فعلًا عند إجراء تجربة احتمالية.

والاحتمال النظري
هو ما يجب أن يحدث إذا أُجريت تجربة احتمالية.

القيمة المتوقعة، وتُعرف أيضًا بالتوقع الرياضي، وهي معدّل قيمة المتغير العشوائي المتوقعة بعد إعادة التجربة أو محاكاتها نظريًّا مرات عدة. لإيجاد القيمة المتوقعة $E(X)$ للمتغير العشوائي **X**، استعمل الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي حساب القيمة المتوقعة

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 اضرب قيمة X في احتمال حدوثها.

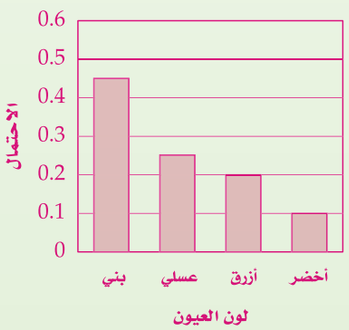
الخطوة 2 كرر الخطوة 1 لجميع قيم X الممكنة.

الخطوة 3 أوجد مجموع نواتج الضرب.

بما أن القيمة المتوقعة معدل، فليس ضروريًّا أن تساوي إحدى قيم X المعيّنة لنواتج التجربة.

إجابة (تأكد):

3) إجابة ممكنة: P(بنية) = 45%، P(عسلية) = 25%، P(زرقاء) = 20%، P(خضراء) = 10%



مثال 4 حساب القيمة المتوقعة

رمي السهام: افرض أنه قذف سهم نحو قرص دائري، نصف قطر دائرة مركزه يساوي 1 cm و يزيد نصف قطر كل دائرة من الدوائر التالية 4 cm على نصف قطر الدائرة السابقة لها، وعدد النقاط التي يكسبها الرامي مبيَّنة على كل منطقة كما في الشكل المجاور.

a) إذا كان المتغير العشوائي Y يمثل عدد النقاط المحددة للمنطقة على لوحة السهام، فاحسب القيمة المتوقعة $E(Y)$ لكل رمية.

أولاً: احسب الاحتمال الهندسي لإصابة السهم لكل منطقة.

$$P(\text{المنطقة } 1) = \frac{\pi(4+13)^2 - \pi(13)^2}{\pi(17)^2} = \frac{120}{289}$$

$$P(\text{المنطقة } 2) = \frac{\pi(4+9)^2 - \pi(9)^2}{\pi(17)^2} = \frac{88}{289}$$

$$P(\text{المنطقة } 3) = \frac{\pi(4+5)^2 - \pi(5)^2}{\pi(17)^2} = \frac{56}{289}$$

$$P(\text{المنطقة } 4) = \frac{\pi(4+1)^2 - \pi(1)^2}{\pi(17)^2} = \frac{24}{289}$$

$$P(\text{المنطقة } 5) = \frac{\pi(1)^2}{\pi(1+4+4+4+4)^2} = \frac{1}{289}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{120}{289} + 2 \cdot \frac{88}{289} + 3 \cdot \frac{56}{289} + 4 \cdot \frac{24}{289} + 5 \cdot \frac{1}{289}$$

$$E(Y) \approx 1.96$$

أو القيمة المتوقعة لكل رمية نحو 1.96.

b) صمّم محاكاة لتقدير معدل القيم أو معدل نتائج المحاكاة التي أعددتها للعبة. ثم قارن هذه القيمة بالقيمة المتوقعة التي وجدتها في الجزء **a**.

عيّن الأعداد الصحيحة من 1 إلى 289 لتمثل بيانات الاحتمالات بصورة دقيقة.

المنطقة 1 = الأعداد من 1 إلى 120

المنطقة 2 = الأعداد من 121 إلى 208

المنطقة 3 = الأعداد 209 إلى 264

المنطقة 4 = الأعداد من 265 إلى 288

المنطقة 5 = العدد 289

استعمل الآلة الحاسبة البيانية لإنتاج 50 محاولة عشوائية للأعداد من 1 إلى 289. وسجّل النتائج في جدول تكراري، ثم احسب معدل قيم النواتج.

النواتج	التكرارات
المنطقة 1	16
المنطقة 2	13
المنطقة 3	13
المنطقة 4	8
المنطقة 5	0

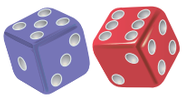
ويكون معدل القيم هو:

$$1 \cdot \frac{16}{50} + 2 \cdot \frac{13}{50} + 3 \cdot \frac{13}{50} + 4 \cdot \frac{8}{50} + 5 \cdot \frac{0}{50} = 2.26$$

معدل القيم 2.26 أكبر من القيمة المتوقعة 1.96.

تأكد

4) حجر نرد: افرض أن المتغير العشوائي X يمثّل مجموع العددين الظاهرين على حجري نرد متمايزين عند إلقائهما مرة واحدة.



A) أوجد القيمة المتوقعة $E(X)$. 7

B) صمّم محاكاة لتقدير معدل القيم لهذه التجربة ونفذها، ثم قارن هذه القيمة بالقيمة المتوقعة التي وجدتها في الجزء **A**؟ انظر ملحق الإجابات

الفرق بين معدل القيم الناتجة في المحاكاة والقيمة المتوقعة نظريًّا في مثال 4 يوضّح **قانون الأعداد الكبيرة** (Law of Large numbers)، فكلّما ازداد عدد المحاولات العشوائية اقتربت قيمة معدل القيم الناتجة عن المحاكاة من القيمة المتوقعة نظريًّا.

إرشادات للدراسة

الاحتمال الهندسي

تذكّر عند تعيين الاحتمالات الهندسية في لعبة رمي السهام أننا نفترض أن السهم يستقر داخل منطقة الهدف، وأن احتمالات استقراره في المنطقة الواحدة متساوية.

تاريخ الرياضيات

جاكوب بيرنولي
(Jakob Bernoulli)
(1654–1705)

اكتشف الرياضي السويسري بيرنولي أنه كلما زاد عدد المشاهدات لموقف ما ، كان توقع نتائج المستقبل أفضل.

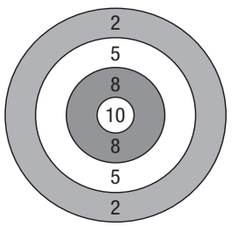
وقد قدّم برهانًا علميًّا لقانون الأعداد الكبيرة في كتابه «فن الحدس» (Art of conjecturing) المنشور سنة 1713.

تلخيص البيانات من المحاكاة

مثال 4 يُبيّن كيفية حساب القيمة المتوقعة ومقارنتها بالقيمة الناتجة عن المحاكاة.

مثال إضافي

4 رماية: افترض أن شخصًا رمى سهمًا نحو لوحة الهدف نصف قطر دائرتها الداخلية يساوي 3 in. ويزيد نصف قطر كل دائرة على نصف قطر الدائرة السابقة لها بـ 5 in، والنقاط المحددة لكل منطقة مبينة في الشكل أدناه:



a) إذا مثّل المتغير العشوائي Y عدد النقاط المحددة لكل منطقة، فاحسب القيمة المتوقعة $E(Y)$ لكل رمية سهم.

$\frac{455}{108}$، أو 4.21 تقريبًا.

b) صمم محاكاة لتقدير معدل القيم أو (معدل نتائج المحاكاة الذي أعددته للعبة)، ثم قارن هذه القيمة بالقيمة المتوقعة التي حسبتها في الفرع **a**؟

ستتنوع إجابات الطلبة.

تنبيه!

القيمة المتوقعة ذكّر الطلبة بأن يضربوا كل قيمة من قيم المتغير العشوائي في احتمال ظهورها، ثم يجمعوا القيم؛ لإيجاد القيمة المتوقعة أو التوقع.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة أداء لعبة بسيطة وهي رمي قطعة نقد؛ ليتبين لهم أنه قد لا تكون القيمة المتوقعة إحدى القيم الممكنة للمتغير العشوائي. واطلب إليهم اعتبار ظهور الصورة يساوي نقطة واحدة وظهور الكتابة يساوي 0. ثم اطلب إليهم أن يحسبوا القيمة المتوقعة للأعداد الفردية من المحاولات ويسجلوا نتائجهم من المحاكاة لكل مرة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 3-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

3b) إجابة ممكنة: استعمل مولد الأعداد العشوائية؛ لتوليد الأعداد من 1 إلى 25 حيث تمثل الأعداد 16-1 الحصول على 25 نقطة، وتمثل الأعداد 24-17 الحصول على 50 نقطة، ويمثل العدد 25 الحصول على 100 نقطة. ونفذ 50 محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري.

التكرار	الناتج
29	25
21	50
0	100

قيمة المُعدّل هي 35.5

9) $E(Y) = 41.4$

إجابة ممكنة:

التكرار	الناتج
7	أحمر
20	أزرق
23	أبيض
50	المجموع

قيمة المُعدّل = 47 قيمة المعدل أكبر من القيمة المتوقعة.

11) $E(Y) = 51$

إجابة ممكنة:

التكرار	الناتج
5	أحمر
16	أزرق
29	أبيض
50	المجموع

تأكد من فهمك

للتمرينين 2 ,1 انظر ملحق الإجابات

المثالان 3 ,1 الصفحات 136-134

1) درجات الطلاب: حصلت رباب على التقدير A في 80% من اختبارات الرياضيات للفصل الأول. صمّمْ محاكاة باستعمال نموذج هندسي لتقدير احتمال حصولها على التقدير A في اختبار الرياضيات في الفصل الثاني ونفذها. وسجل النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

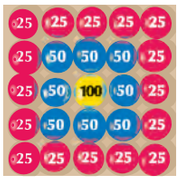
المثالان 3 ,2 الصفحتان 136 ,135

2) لياقة بدنية: يوضح الجدول المجاور النسبة المئوية للأعضاء المشاركين في أربعة أنواع من الرياضة في أحد النوادي. صمّم محاكاة لتقدير احتمال أن يمارس منتسب جديد للنادي كل نوع من أنواع الرياضة الأربعة، ونفذها، وسجّل النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

نوع الرياضة	النسبة المئوية
تايكوندو	45%
يوجا	30%
سباحة	15%
ملاكمة	10%

مثال 4 الصفحة 137

3) مهرجان ألعاب: تهدف اللعبة المجاورة إلى جمع نقاط باستعمال السهم لفرقة البالونات بافتراض أن كل سهم يصيب بالونًا.



a) احسب القيمة المتوقعة لكل رمية سهم. 36

b) صمّم محاكاة، ثم قدّر معدل القيم لهذه اللعبة. انظر الهامش

c) قارن بين معدل القيم والقيمة المتوقعة.

3c) إجابة ممكنة: القيمة المتوقعة قريبة جدًّا من المعدل

تدرب وحل المسائل

المثالان 3 ,1 الصفحتان 136 ,134

صمّم محاكاة باستعمال نموذج احتمال هندسي ونفذها، ثم سجّل النتائج مستعملًا ملخصات عددية وبيانية ملائمة: للتمارين 8-4 انظر ملحق الإجابات

4 ألعاب الفيديو: يعمل حمد في محل لبيع ألعاب الفيديو الحديثة، وقد باع منها في العام الماضي 95%.

5) تستمع منى إلى سور من القرآن الكريم مسجلة على شريط يحوي 10 سور تُختار عشوائيًّا.

المثالان 3 ,2 الصفحتان 136 ,135

صمّم محاكاة باستعمال مولّد الأعداد العشوائية في حاسبتك البيانية ونفذها، ثم سجل النتائج مستعملًا ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

6) كتب: راجع مدير مركز بيع كتب مبيعاته في السنة الماضية ليحدد أي الأنواع كانت الأكثر بيعًا، فكانت النتائج كما في الجدول المجاور.

النوع	نسبة البيع %
الروايات	40%
الخيال العلمي	30%
الفكاهة	25%
المغامرات	5%

7) إجازات بناءً على مسح قامت به وكالة سفريات فإن 45% من الزبائن قضوا إجازاتهم في أوروبا، و25% في آسيا، و 15% في أمريكا، و 10% في أفريقيا، و 5% في أستراليا.

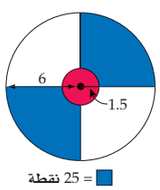
مثال 4 الصفحة 137

8) مواصلات: أشارت نتائج دراسة تحليلية لإحدى شركات بيع السيارات إلى أن 35% من الزبائن اشتروا سيارات زرقاء اللون، و 30% سيارات حمراء، و 15% سيارات بيضاء، و 5% اشتروا سيارات ذات ألوان أخرى.

لعبة السهام: أبعاد أقراص لعبة السهام الآتية معطاة بالبوصات. إذا رُميتْ رمية واحدة لكل منها، فاحسب القيمة المتوقعة لكل لعبة، ثم صمّم محاكاة لتقدير معدل القيم. وقارن بين معدل القيم للمحاكاة والقيمة المتوقعة لكل منها.

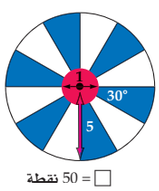
للتمرينين 11 ,9 انظر الهامش
للتمرين 10 انظر ملحق الإجابات

9)



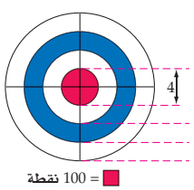
= 25 نقطة

10



= 50 نقطة

11)

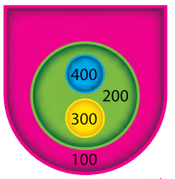


= 100 نقطة

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	12-4، 14، 15، 17-24
ضمن ضمن المتوسط	11-5 فردي، 13-15، 17-24
فوق فوق المتوسط	13-23، (اختياري: 24)

12) ألعاب: تهدف اللعبة المجاورة إلى تسجيل نقاط بدحرجة كرة لتستقر على مستوى مائل مقسم إلى مناطق ذات قيم مختلفة. واحتمال أن يحصل حسن على 100 نقطة في رمية واحدة 20%، وعلى 200 نقطة 55%، و 300 نقطة 20%، و 400 نقطة 5%.



a) احسب القيمة المتوقعة لكل رمية. 210

b) صمّمْ محاكاة، ثم قدّر معدل القيم الذي يحصل عليه حسن في هذه اللعبة. انظر الهامش

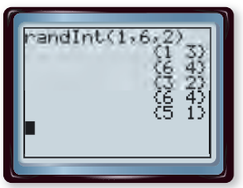
c) قارن بين القيم في الفرعين **a** و **b**. إجابة ممكنة: المعدل قريب من 210

13) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستستقصي القيمة المتوقعة. للفروع a–f انظر ملحق الإجابات

a) حسي: ارم حجري نرد متمايزين 20 مرة، وسجل مجموع العددين الظاهرين في كل رمية.

b) عددي: استعمل مولّد الأعداد العشوائية في الآلة الحاسبة البيانية لإيجاد 20 زوجًا من الأعداد من 1 إلى 6، وأوجد مجموع كل زوج.

c) جدولة: انقل الجدول الآتي وأكمله مدوّنًا نتائجك من الفرعين **a** و **b**.



التجربة	مجموع عددي كل رمية	مجموع النواتج من مولّد الأعداد العشوائية
1		
2		
...		
20		

d) تمثيل بياني: مثّل عدد مرات تكرار المجاميع الناتجة من الرميات الخمس الأولى بالأعمدة التكرارية، ثم كرر العملية لنواتج أول 10 رميات، ثم لِنواتج 20 رمية.

e) تعبير لفظي: كيف يتغير شكل الأعمدة التكرارية مع زيادة عدد المحاولات؟

f) تمثيل بياني: مثّل عدد مرات ظهور كل مجموع مع مولّد الأعداد العشوائية بالأعمدة التكرارية.

g) تعبير لفظي: قارن بين شكلي تجربة رمي المكعبين ومحاولات الأعداد العشوائية.

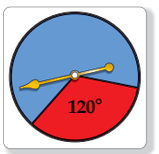
h) تحليل: ما القيمة المتوقعة لكل تجربة بناءً على التمثيلات البيانية؟ وضّح تبريرك.

الربط مع واقع الحياة

تفيد الأعداد العشوائية في الحاسوب في تطبيقات مختلفة مثل: برمجة ألعاب الفيديو المتحركة، أو نظام اختيار الأناشيد بشكل عشوائي، ... إلخ

مسائل مهارات التفكير العليا

14) تبرير: هل يمكن استعمال تجربة القرص ذا المؤشر الدوّار المجاور لتصميم محاكاة للتنبؤ باحتمال الناتج C في تجربة ذات ثلاثة نواتج متساوية الاحتمال A, B, C؟ وضح تبريرك. للتمارين 18-14 انظر ملحق الإجابات



تمثيلات متعددة في التمرين 13 يستعمل الطلبة التجربة والآلة الحاسبة البيانية والجداول والتمثيل البياني؛ لتقصي القيم المتوقعة.

إجابة:

12b) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية؛ لتوليد الأعداد من 1 إلى 20 حيث تمثل الأعداد 4–1 الحصول على 100 نقطة، والأعداد 15–5 الحصول على 200 نقطة. والأعداد 19–16 الحصول على 300 نقطة، والعدد 20 الحصول على 400. قيمة المعدل قريبة من 210.

الدرس 4-3 محاكاة مواقف واقعية 139

15) **تبرير:** هل يمكن استعمال تجربة رمي قطعة نقد أحيانًا أم دائمًا لمحاكاة تجربة ذات ناتجين ، أم أن ذلك غير ممكن أبدًا؟ وبرر إجابتك.

16) **تحدٍّ:** أُلقِيت في إحدى التجارب خمس قطع نقدية في وقت واحد.

a) صمّم محاكاة يمكن استعمالها للتنبؤ باحتمال ظهور كتابة على 3 قطع منها بالضبط.

b) هل يمكن استعمال المحاكاة نفسها للتنبؤ باحتمال ظهور كتابة على ثلاث قطع على الأقل؟ وضّح تبريرك.

c) نفّذ المحاكاة، ما الاحتمال التجريبي لظهور كتابة على ثلاث قطع بالضبط؟

17) **مسألة مفتوحة:** صف تجربة لا تكون فيها القيمة المتوقعة ناتجًا محتملًا. وبرر إجابتك.

18) **اكتب:** لخص عملية تصميم المحاكاة وتنفيذها.

تدريب على اختبار معياري

19) **احتمال:** رمت فائقة ثلاث قطع نقدية في الوقت نفسه، وكررت التجربة 9 مرات أخرى، وكانت النتائج كما هي مدوَّنة أدناه، حيث تمثل H ظهور الصورة، وتمثل T ظهور الكتابة. بناءً على هذه البيانات، ما احتمال ظهور الصورة على واحدة على الأقل من هذه القطع الثلاث؟ **D**

H H H	T T T
H H T	H T T
T T H	T T H
T H T	H T H
H H H	H H T

A 0.1 **B** 0.2 **C** 0.3 **D** 0.9

20) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** صمّم عبد المجيد محاكاة لتعيين عدد مرات ظهور عدد أكبر من 4 عند رمي حجر نرد 5 مرات متتالية، ويبيّن الجدول الآتي نتائج 50 محاولة. ما احتمال أن يحصل لاعب على عدد أكبر من 4 مرتين أو أكثر في 5 رميات وفق هذه المحاكاة؟

التكرار	عدد الرميات التي ظهر فيها عدد أكبر من 4
8	0
15	1
18	2
9	3
0	4
0	5

$\frac{27}{50}$

مراجعة تراكمية

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{QT}$ فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-3)

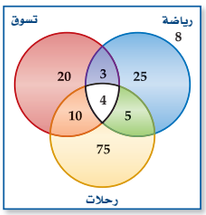
21) (تقع X على $\overline{QS}$) P **64% تقريبًا، أو 0.64 تقريبًا، أو** $\frac{9}{14}$

22) (تقع X على $\overline{RT}$) P **57% تقريبًا، أو 0.57 تقريبًا، أو** $\frac{4}{7}$

23) **كتب:** ما احتمال أن تختار فوزية 3 كتب علمية من مكتبة الصف، التي تحتوي على 7 كتب أدبية، و3 كتب علمية؟ (الدرس 2-3) $\frac{1}{120}$

مراجعة المتطلبات السابقة

24) **تسلية:** سئل 150 طالبًا عما يرغبون في عمله في أوقات فراغهم، ومثّلت النتائج بأشكال ڤن كما في الشكل المجاور.



a) ما عدد الطلاب الذين يرغبون في الرحلات أو التسوّق؟ **117**

b) ما النشاط الذي اختاره 37 طالبًا؟ **الرياضة أو التسوق**

c) ما عدد الطلاب الذين لم يختاروا الرحلات؟ **56**

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا فقرة توضح كيف ساعدهم ما تعلموه عن الاحتمالات الهندسية على تصميم المحاكاة وحساب القيمة المتوقعة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا فقرة توضح لماذا يتوقعون أن تزداد قيمة المُعدّل قربًا من القيمة المتوقعة كلما زاد عدد محاولات المحاكاة.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-5

إيجاد الاحتمالات البسيطة.

الدرس 3-5

إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة.

إيجاد احتمال وقوع حدث علمًا بأن حدثًا آخر قد وقع.

ما بعد الدرس 3-5

إيجاد احتمالات الأحداث المتنافية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما العوامل التي تؤثر في احتمال اختيار سعود أولاً وفيصل ثانيًا؟ إجابة ممكنة: عدد طلاب الصف.
- إذا اختير سعود أولاً، فما احتمال أن يكون فيصل ثانيًا؟ $\frac{1}{17}$
- كيف يؤثر اختيار الطالب الذي سيقدم عرضه أولاً في اختيار فيصل ثانيًا؟ ينقص عدد النواتج الممكنة للتجربة.

إجابات (تأكد):

1A) الحدثان مستقلان؛ لأن البطاقة الأولى أُعيدت إلى الكيس فلن يؤثر اختيارها على اختيار البطاقة الثانية.

1B) الحدثان مستقلان؛ لأن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة رمي حجر نرد.

احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة
Probabilites of Independent and Dependment Events

فيما سبق

درست حساب الاحتمالات البسيطة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد احتمالات الأحداث المستقلة و الأحداث غير المستقلة.
- أجد احتمالات أحداث إذا عُلم وقوع أحداث أخرى.

المفردات الأساسية

الحدث المركب compound event

الأحداث المستقلة independent events

الأحداث غير المستقلة dependent events

الاحتمال المشروط conditional probability

شجرة الاحتمال probability tree

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

الحدث البسيط

هو الحدث الذي يتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما، فمثلًا عند رمي حجر نرد مرة واحدة، فإن الحدث الذي يمثل ظهور العدد 5 مثلًا هو حدث بسيط.

لماذا؟

يسحب معلم الكيمياء عشوائيًّا بطاقات من صندوق أسماء طلاب صف فيه 18 طالبًا ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة

يتكون **الحدث المركب** من حدثين بسيطين أو أكثر. وفي الفقرة أعلاه فإن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولًا يُمثل حدثًا مركبًا؛ لأنه يتكون من حدث اختيار سعود وحدث اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الأحداث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- يكون A و B **حدثين مستقلين** إذا كان احتمال حدوث أحدهما لا يؤثر في احتمال حدوث الآخر.
- يكون A و B **حدثين غير مستقلين** إذا كان احتمال حدوث أيهما يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث الآخر.

افرض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي أحداث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي أحداث غير مستقلة.

مثال 1 تعيين الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة

حدّد ما إذا كان الحدثان مستقلين أو غير مستقلين في كل مما يأتي، ووضّح إجابتك.

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية، ولذا ؛ يكون الحدثان مستقلين.

b) في مثال تقديم عروض الطلبة في أعلى الصفحة، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًّا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. فهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العيِّنة قد نقص واحدًا. لذا؛ فإن الحدثين غير مستقلين.

c) سحب كرة واحدة عشوائيًّا من كل من صندوقين مختلفين.

احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني. لذا ؛يكون الحدثان مستقلين.

تأكد للتدريبين 1A, 1B انظر الهامش

حدّد إذا كان الحدثان مستقلين أو غير مستقلين في كل مما يأتي، ووضّح إجابتك.

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم رمي حجر نرد مرة واحدة أيضًا وتسجيل النواتج الممكنة.

مصادر الدرس 3-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (144)	• تنويع التعليم ، ص (144, 142)	• تنويع التعليم ، ص (146, 142)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة

مثال 1 يُبيّن كيفية تحديد إذا كان حدثان مستقلين أم غير مستقلين.

مثال 2 يُبيّن كيفية حساب احتمال حدثين مستقلين.

مثال 3 يُبيّن كيفية حساب احتمال حدثين غير مستقلين.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدد ما إذا كانت الأحداث الآتية مستقلة أو غير مستقلة. وبرر إجابتك.

a) أُلقي مكعب أرقام ثم أُلقي مكعب آخر. الحدثان مستقلان؛ لأن رمي المكعب الأول لا يؤثر في احتمال ناتج رمي المكعب الثاني.

b) سحب بطاقة من كيس يحتوي بطاقات مرقمة من 1 إلى 20 دون إرجاع، ثم سحب بطاقة ثانية. الحدثان غير مستقلين؛ لأن البطاقة الأولى لم تُعد إلى الكيس ولا يمكن اختيارها مرة أخرى ممّا يؤثر في احتمال سحب البطاقة الثانية، إذ إن عدد عناصر فضاء العينة نقص واحدًا.

2 **مطاعم:** ذهب سالم وجمال لتناول الطعام في أحد المطاعم. وقد وضعا 5 قصاصات ورقية خضراء و 6 حمراء في كيس، وقررا أن يسحب أحدهما قصاصة من الكيس، إذا كانت خضراء، فإنهما سيطلبان دجاجًا، وإذا كانت حمراء، فإنهما سيطلبان سمكًا. إذا سحب سالم قصاصة ولم يعجبه لونها، فأعادها وسحب قصاصة من الكيس مرة أخرى. فما احتمال أن يسحب قصاصة خضراء في المرتين؟ $\frac{25}{121}$

إذا ألقيت قطعة نقد وأدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العيّنة لهذه التجربة يساوي {(H, B), (H, R), (H, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.

باستعمال فضاء العيّنة، فإن احتمال الحدث المركب ظهور الصورة على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي $P(H \text{ و } G) = P(H \cap G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحدثين البسيطين.

$$P(H) = \frac{1}{2} \qquad P(G) = \frac{1}{3} \qquad P(H \text{ و } G) = P(H \cap G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

يوضّح هذا المثال القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

مفهوم أساسي — احتمال حدثين مستقلين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي احتمال وقوع حدثين مستقلين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحدثين.

بالرموز إذا كان الحدثان A و B مستقلين فإن $P(A \text{ و } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

يمكن تعميم هذا القانون لأي عدد من الأحداث المستقلة.

قراءة الرياضيات

(و) يدل على وقوع الحدثين معًا، ويشير إلى ضرب الاحتمالات ويرمز له برمز التقاطع ∩. $P(A \text{ و } B)$ تقرأ احتمال وقوع A ووقوع B.

مثال 2 من واقع الحياة — احتمالات الأحداث المستقلة

وسائل النقل: يرغب جاسم وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. إذا سحب شخص قصاصة صفراء، فسيركب في السيارة، وإذا سحب قصاصة زرقاء، فسيركب في الحافلة.

افرض أن جاسمًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هذه الأحداث مستقلة؛ لأن جاسمًا أعاد القصاصة التي سحبها أولًا. افرض أن B يمثّل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثّل سحب قصاصة صفراء.

السحب 1 — السحب 2

احتمال الحدثين المستقلين: $P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B)$

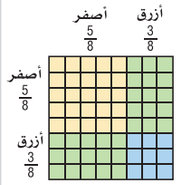
$P(B) = \frac{3}{8}$: $= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

لذا؛ فاحتمال أن يسحب جاسم قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

إرشادات للدراسة

استعمال نموذج المساحة

يمكنك استعمال نموذج المساحة المبين أدناه لحساب احتمال أن تكون القصاصتان زرقاوين. حيث تمثل المنطقة الزرقاء احتمال سحب قصاصتين زرقاوين على التوالي. ومساحة هذه المنطقة تساوي $\frac{9}{64}$ من مساحة النموذج الكلي.



تأكد

أوجد كل احتمال مما يأتي:

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي حجر نرد مرة واحدة. فما احتمال ظهور الصورة والعدد 6؟ $\frac{1}{12}$ أو 8% تقريبًا

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟ $\frac{1}{16}$ أو 6.25%

يحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال حدثين غير مستقلين.

مفهوم أساسي — احتمال حدثين غير مستقلين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي احتمال وقوع حدثين غير مستقلين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحدث الأول في احتمال وقوع الحدث الثاني بعد وقوع الأول فعلًا.

بالرموز إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يمكن تعميم هذا القانون لأي عدد من الأحداث غير المستقلة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يحسبوا احتمال أحداث بسيطة مستقلة، مثل رمي قطعة نقود باستعمال قانون الاحتمالات غير المستقلة، على أن يدركوا أن هذا القانون يعطي النتيجة نفسها التي يعطيها قانون احتمالات الأحداث المستقلة.

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحدث B شرط وقوع الحدث A أولًا، **وهذا يُسمى الاحتمال المشروط**.

مثال 3 احتمالات الأحداث غير المستقلّة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن جاسمًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة فما احتمال أن يسحب كل من الصديقين قصاصة صفراء؟

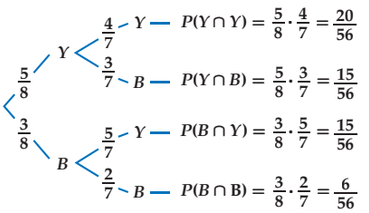
هذان الحدثان غير مستقلين؛ لأن جاسمًا لم يُرجع القصاصة التي سحبها من الكيس.

احتمال الحدثين غير المستقلين $P(Y \cap Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$

بعد سحب قصاصة صفراء، يبقى 7 قصاصات، أربع منها صفراء $= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

لذا، فاحتمال أن يسحب الصديقان قصاصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$، أو 36% تقريبًا.

تحقق يمكنك استعمال مخطط الشجرة البيانية مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**. ولتوضيح هذه النتيجة، احسب احتمال كل حدث بسيط في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب على طول كل فرع من الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج.



يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1.

$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1$ ✓

تأكد

3) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، فيها 13 بطاقة زرقاء مرقمة من 1 إلى 13. وبالمثل 13 بطاقة حمراء و 13 صفراء و13 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟ $\frac{11}{850}$ أو 1% تقريبًا

الاحتمال المشروط علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حدثين غير مستقلين أو أكثر، فإنه يمكن استعمالها أيضًا عند معرفة معلومات إضافية عن حدث.

إذا رُمي حجر نرد مرة واحدة و عُلم أن العدد الظاهر على وجه حجر النرد عدد فردي ، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5؟

هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه حجر النرد. لذا؛ سوف يختزل فضاء العيّنة من {1, 2, 3, 4, 5, 6} إلى {1, 3, 5}، وعليه، فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي

$P(5|\text{فردي}) = \frac{1}{3}$

تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط يجب ألّا يفسر الرمز " | " في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

إرشادات للدراسة

- لأي حدث X في تجربة عشوائية يكون: $0 \le P(X) \le 1$
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1.

مثال إضافي

3 **مطاعم:** ارجع إلى المثال الإضافي 2، افرض أن سالمًا سحب قصاصة ورق من الكيس ولم يعدها، ثم سحب جمال قصاصة أخرى. فما احتمال أن يسحب كل منها قصاصة خضراء؟ $\frac{2}{11}$

التركيز في المحتوى الرياضي

الأحداث غير المستقلة إن ترتيب وقوع الحدثين في الأحداث غير المستقلة أمر في غاية الأهمية. فعلى سبيل المثال، عند سحب بطاقات من كيس يحتوي بطاقات حمراء، وخضراء، وصفراء، وبيضاء، وبطاقات كل لون مرقمة من 1 إلى 13، فإن احتمال سحب بطاقة حمراء تحمل الرقم 3 إذا كان قد سُحب قبلها بطاقة حمراء يختلف عن احتمال سحب بطاقة حمراء إذا كان قد سحب قبلها بطاقة حمراء تحمل الرقم 3. وبالرموز $P(A|B) \neq P(B|A)$.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اختر اثنين من الطلبة ليحلوا مثالاً على السبورة أمام طلبة الفصل. واطلب إلى أحدهما أن يشرح كيفية حساب احتمال حدثين غير مستقلين، وأن يشرح الآخر كيفية حساب احتمال حدثين مستقلين.

الاحتمالات المشروطة

مثال 4 يُبيّن كيفية حساب الاحتمال المشروط.

مثال إضافي

4 **مثال على اختبار معياري:**

قسّم مُعلم التربية الرياضية طلاب صفه وعددهم عشرون إلى فريقين. حيث طلب إلى كل طالب سحب بطاقة عشوائيًّا من مجموعة بطاقات مرقمة بالأعداد المتتالية من 1 إلى 20.

- شكّل الطلبة الذين سحبوا بطاقات تحمل أعدادًا فردية الفريق الأحمر، على حين شكّل الطلبة الذين سحبوا بطاقات تحمل أعدادًا زوجية الفريق الأزرق.

إذا كان ماجد في الفريق الأزرق، فما احتمال أن يكون سحب البطاقة التي تحمل العدد 10؟ B

A $\frac{1}{20}$ C $\frac{9}{20}$

B $\frac{1}{10}$ D $\frac{1}{2}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-5؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) سيلعب فريق المدرسة في مباراة البطولة إذا ربح مباراته في الدور قبل النهائي، وعليه، فإن هذين الحدثين غير مستقلين.

2) لا تؤثر نتيجة عبدالعزيز في الاختبار الأول في احتمال نتائج الاختبار الثاني. وعليه، فإن هذين الحدثين مستقلان.

مثال 4 على اختبار معياري

تجري المعلمة سارة حوارًا بين طالباتها تشترك فيه 8 منهن. فطلبت إلى 8 طالبات عشوائيًّا سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية فريق الاقتراحات.
- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية فريق المعارضة.

إذا كانت ليلى من فريق المعارضة، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

قراءة الرياضيات

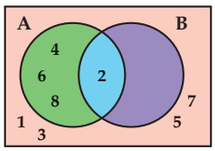
الاحتمال المشروط

$P(\text{فردي} \mid 5)$ يُقرأ احتمال العدد الناتج 5 إذا كان الناتج عددًا فرديًّا.

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلى من فريق المعارضة فإنها تكون قد سحبت عددًا زوجيًّا. لذا؛ فإنك بحاجة إلى إيجاد احتمال أن العدد المسحوب كان 2 إذا علمت أن العدد المسحوب زوجي. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار



افرض أن A حدث سحب عدد زوجي. وأن B حدث سحب العدد 2.

ارسم شكل فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العيّنة، وواحد منها هو 2.

لذا؛ فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي B.

تأكد

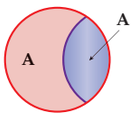
4) عند رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على إحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟ J

F $\frac{1}{6}$ G $\frac{1}{4}$ H $\frac{1}{3}$ J $\frac{1}{2}$

إرشادات للاختبارات

أشكال فن استعمل أشكال فن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حدثين.

بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيّنة، فيمكن تبسيط أشكال فن في مثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحدثين النواتج المشتركة في A و B.



وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

مفهوم أساسي الاحتمال المشروط

أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث $P(A) \neq 0$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 141

حدّد ما إذا كان الحدثان مستقلين أو غير مستقلين في كل مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1) وصل فريق مدرسة في كرة السلة إلى دور الأربعة، وإذا ربح فسيلعب في مباراة البطولة. انظر الهامش

2) تقدم عبد العزيز لامتحان الرياضيات يوم الأحد ونجح، وتقدم لامتحان الفيزياء يوم الخميس ونجح. انظر الهامش

مثال 2 صفحة 142

3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أعيدت إليه، وبعد ذلك سحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقتين إحداهما حمراء تحمل الرقم 5، والأخرى سوداء تحمل الرقم 4؟

3) $\frac{1}{1352} = 7.4 \times 10^{-4}$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون اللغويون اطلب إلى الطلبة أن يناقشوا الفرق بين إيجاد احتمالات أحداث مستقلة وأخرى غير مستقلة، وإيجاد الاحتمال المشروط. ويجب أن تتضمن هذه الفروق قوانين حساب احتمالات الأحداث المستقلة و الأحداث غير المستقلة حيث تستعمل لحساب احتمال وقوع حدثين أو أكثر، على حين أن قانون الاحتمال المشروط يُستعمل فقط لحساب احتمال وقوع حدثًا ما علمًا بأن حدثًا آخر قد وقع.

مثال 3
صفحة 143

4) وسائل النقل: يريد سالم شراء سلعة ثمنها 2 BD. إذا كان في جيبه 3 أوراق نقد من فئة 1 BD، و7 أوراق من فئة 5 BD، فأوجد احتمال أن يسحب عشوائيًّا ورقتين على التوالي دون إرجاع من فئة 1 BD على فرض أن فرص حصول الأحداث متساوية. $\frac{1}{15} \approx 0.07$

مثال 4
صفحة 144

5) أصدقاء: يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب عشوائيًّا بطاقات مرقمة من 1 إلى 10، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟ $\frac{1}{5} = 0.20$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3
الصفحات 143 - 141

حدّد إذا كان الحدثان في الأسئلة (9–6) مستقلين أو غير مستقلين، ثم أوجد الاحتمال:

6) إذا رميت مكعب مرقم في لعبة وكان الناتج عددًا زوجيًّا، فدوّر مؤشر القرص المقسم إلى قطاعات والمرقم من 1 إلى 5 لتحصل على عدد فردي. مستقلان، $\frac{3}{10}$ أو 30%

7) يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، وكل لون مرقم من 1 إلى 13. سُحبت بطاقة تحمل الرقم 1 من الصندوق دون إعادتها إلى الصندوق. ثم سحبت بطاقة ثانية تحمل الرقم 1. غير مستقلين، $\frac{1}{221}$ أو 0.5%

8) تحتوي حقيبة على 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء. سُحبت عشوائيًّا كرة زرقاء دون إعادتها، ثم سحبت عشوائيًّا كرة ثانية زرقاء. غير مستقلين، 0.29 تقريبًا أو $\frac{2}{7}$

9) إذا ألقيتَ حجري نرد متمايزين مرة واحدة وظهر العدد 5 على كل منهما. مستقلان، 3% تقريبًا أو $\frac{1}{36}$

10) ألعاب: أدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وألقيت قطعة نقد مرة واحدة. ما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟ $\frac{1}{4}$ أو 25%

11) شعارات: وزع معلم التربية الرياضية على طلابه شعارات ذات ألوان مختلفة حسب الجدول المجاور. إذا كان التوزيع عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الشعار الأول أحمر والثاني أحمر أيضًا؟ $\frac{20}{161}$ تقريبًا أو 12%

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

12) سُحبت كرة حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟ $\frac{36}{55}$ أو 0.65 تقريبًا

13) محيط مضلع رباعي 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة فردية، فما احتمال أن يكون معيّنًا؟ $\frac{1}{5}$ أو 20%

14) رُقمت قطاعات متطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا عُلم أن العدد الناتج عدد فردي؟ $\frac{1}{6}$ أو 17% تقريبًا

15) تقنيات: يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟ انظر الهامش

16) برهان: استعمل قانون احتمال حدثين غير مستقلين $P(A \cap B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$ انظر ملحق الإجابات

17) تنس أرضي: إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب تنس 40% ، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%.

a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبيّن احتمالات النواتج. انظر ملحق الإجابات

b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجًا؟ 18% أو 0.18

الربط مع واقع الحياة

تُعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأ مزدوجًا على اللاعب إذا لم يفلح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يطأ خط الرمي أو يتجاوزه في محاولتين.

مثال 4
صفحة 144

إجابة:

15) $p(\text{امتلاك جهاز حاسوب} \mid \text{امتلاك جهاز نقال})$

$= \frac{p(\text{امتلاك جهاز حاسوب وجهاز نقال})}{p(\text{امتلاك جهاز نقال})}$

$= \frac{0.28}{0.43}$

≈ 0.65

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا على ورقة الفرق بين الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة. واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 3-5 , 3-4 بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 3.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	14–6، 18، 32–20
ضمن ضمن المتوسط	13–7 فردي، 18–14، 32–20
فوق فوق المتوسط	29–15، (اختياري: 32–30)

مسائل مهارات التفكير العليا

للتمارين 22-18 انظر ملحق الإجابات

18) اكتشف الخطأ: أراد كل من جابر ومهند إيجاد احتمال A شرط وقوع B عندما $P(B) = 0.3$, $P(A) = 0.3$. والحدثان A و B مستقلان. أيهما حله صحيح؟ وبرر إجابتك.

مهند	جابر
بما أن A و B حدثان مستقلان، فإن: $P(A\|B) = P(A)$	بما أننا لا نعرف $P(A \cap B)$، فلا نستطيع إيجاد $P(A\|B)$.

19) تحد: يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 2.4%. فما قيمة n؟ وضح إجابتك.

20) تبرير: إذا كان A و B حدثان مستقلين، فهل العبارة $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ وبرر إجابتك.

21) مسألة مفتوحة: صِفْ حدثين مستقلين وحدثين غير مستقلين، وبرر إجابتك.

22) اكتب: وضحّ لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

تدريب على اختبار معياري

23) احتمال: يمكن أن يلعب بلال عشوائيًّا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟ **A**

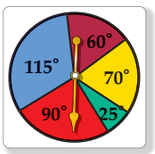
A $\frac{1}{18}$ **B** $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{1}{2}$

24) احتمال: يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ نور حبتي حلوى من الكيس دون إرجاع. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشر. **9.8% تقريبًا**

مراجعة تراكمية

25) سجّل أيمن 90% من الرميات الحرة في كرة السلة خلال الموسم الأخير. صممّ محاكاة لتقدير احتمال أن يسجل نقطة من الرمية التالية في هذا الموسم ونفذها. (الدرس 4-3) انظر الهامش

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خط فيه): (الدرس 3-3)



26) (استقرار المؤشر عند اللون الأحمر) P **0.25**

27) (استقرار المؤشر عند اللون الأزرق) P **0.32 تقريبًا**

28) (استقرار المؤشر عند اللون الأخضر) P **0.07 تقريبًا**

29) (استقرار المؤشر عند اللون الأصفر) P **0.19 تقريبًا**

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي:

30) تختار فاطمة من 5 مذاقات مختلفة من الآيس كريم و3 أنواع من الحلوى المختلفة. **15**

31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدها. **12**

32) رمي ثلاثة مكعبات مرقمة في آنٍ واحد. **216**

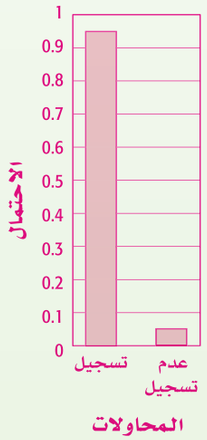
تنبيه!

اكتشف الخطأ في تمرين 18 كان مهند مصيبًا. على حين أن جابر لم يفهم أن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

إجابة:

25) إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشرٍ دوّارٍ مقسّمٍ إلى قطاعين يشكّل أحدهما 10% من القرص أو زاويته المركزية 36°، ويشكّل الآخر 90% من القرص أو زاويته المركزية 324°. ونفذ 20 محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري.

النواتج	التكرار
تسجيل	19
عدم تسجيل	1
المجموع	20



احتمال أن يسجل أيمن في ضربته التالية يساوي 0.95، واحتمال ألّا يسجل 0.05

تنويع التعليم

فوق

توسّع لقد أثار أحد برامج المسابقات التلفزيونية (جائزة خلف الباب) جدلًا واسعًا في دراسة الاحتمالات من خلال طرح السؤال الآتي: هل تبقى على اختيارك أم تُغير؟ حيث يطلب من المتسابق في هذا البرنامج أن يختار واحدًا من 3 أبواب. ثم يفتح له أحد البابين الآخرين الذي ليس وراءه جائزة. ثم يطرح عليه السؤال: هل تريد أن تبقى على اختيارك الأصلي أم تريد أن تنتقل إلى الباب الآخر المغلق؟ يمكن أن يستكشف الطلبة هذا السؤال بإجراء محاكاة أو باستعمال أداة تفاعلية عبر الإنترنت. لذا يتعين عليهم أن يكونوا قادرين على تفسير سبب اقتراب قيمة الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري كثيرًا عندما يتكرر إجراء التجربة عددًا كبيرًا من المرات.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-6

إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة.

الدرس 3-6

إيجاد احتمالات الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية.

إيجاد احتمال متمم حدث.

ما بعد الدرس 3-6

إيجاد احتمالات الأحداث المشروطة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- لماذا سيكون سلمان سعيدًا إذا فاز محمد من الأول الثانوي؟ لأنه من الصف الأول الثانوي ويبدأ اسمه بحرف م.
- هل يمكن أن يفوز برئاسة مجلس الطلبة طالب يرغب فيه كل من صالح وسلمان؟ نعم، إذا كان اسمه يبدأ بحرف م، وهو من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي.
- هل سيكون صالح و سلمان سعيدين إذا فاز برئاسة المجلس الطالب بندر من الصف الثالث المتوسط؟ لا، اسمه لا يبدأ بحرف م، وهو ليس من طلبة المرحلة الثانوية.

إجابات:

1A) غير متنافيين؛ إجابة ممكنة: العدد الذي يقبل القسمة على 10 يقبل القسمة على 5 أيضًا.

1B) غير متنافيين، إجابة ممكنة: بما أن البطاقة الحمراء التي تحمل الرقم 5 تمثل الحدثين معًا فإنهما غير متنافيين.

1C) متنافيين، إجابة ممكنة: لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة إذ لا يمكن إيجاد عددين مجموعهما 6 وَ 7 في آن واحد.

احتمالات الأحداث المتنافية
Probabilities of Mutually Exclusive Events

فيما سبق

درست إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد احتمالات الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية.
- أجد احتمال متمم حدث.

المفردات الأساسية

الأحداث المتنافية
mutually exclusive events

الحدث المتمم
complement event

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يمكن لأي طالب في الصفوف الأول والثاني والثالث الثانوي الترشح لمنصب رئيس مجلس الطلبة. ويرغب صالح أن يكون الرئيس من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان أن يكون الرئيس من الصف الأول الثانوي، أو طالبًا يبدأ اسمه بحرف م.

الأحداث المتنافية لقد اختبرت في الدرس 3-5 احتمالات تتضمن تقاطع حدثين أو أكثر، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حدثين أو أكثر.

$P(A \text{ أو } B)$ ← يدل على اتحاد مجموعتين

$P(A \text{ و } B)$ ← يدل على تقاطع مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حدث أو وقوع حدث آخر يجب أن تعرف العلاقة بين الحدثين. فإذا لم يكن وقوع الحدثين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيان**؛ أيّ أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

إرشادات للدراسة

الاتحاد

اتحاد مجموعتين هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو المجموعة الثانية ويرمز لها بالرمز ∪ .

مثال 1 من واقع الحياة

تحديد الأحداث المتنافية

حدد إذا كان الحدثان متنافيين أو غير متنافيين في كل مما يأتي، برر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في أعلى الصفحة.

a) الرئيس من الصف الثاني الثانوي أو الرئيس من الصف الثالث الثانوي

هذان الحدثان متنافيان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون الرئيس طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

b) الرئيس طالب من الصف الأول الثانوي أو الرئيس طالب يبدأ اسمه بحرف م.

هذان الحدثان غير متنافيين؛ لأنه يمكن أن يكون الرئيس من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ أسمه بحرف م.

c) سحبت بطاقة سوداء أو بطاقة تحمل الرقم 1 من مجموعة بطاقات عددها 52 ملونة بأربعة ألوان، الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق وكل لون مرقم من 1 إلى 13 .

بما أن البطاقة السوداء التي تحمل الرقم 1 تمثّل الحدثين معًا فإنهما غير متنافيين.

تأكد

حدِّد إذا كان الحدثان متنافيين أو غير متنافيين في كل مما يأتي، برر إجابتك:

1A) اختيار عدد عشوائيًّا من الأعداد من 1 إلى 100 والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 . انظر الهامش

1B) سحب بطاقة في الفرع c في مثال 1 أعلاه والحصول على بطاقة تحمل الرقم 5 أو حمراء. انظر الهامش

1C) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة انظر الهامش

مصادر الدرس 3-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (151)	• تنويع التعليم ص (151, 153)	• تنويع التعليم ص (151, 153)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الأحداث المتنافية

مثال 1 يُبيّن كيفية تحديد إذا كان حدثان متنافيين أم غير متنافيين.

مثال 2 يُبيّن كيفية حساب احتمال حدثين متنافيين.

مثال 3 يُبيّن كيفية حساب احتمال حدثين غير متنافيين.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 بطاقات: يوجد في كيس 13 بطاقة حمراء و13 زرقاء و 13 خضراء و 13 بيضاء، و بطاقات كل لون مرقمة من 1 إلى 13 . إذا سُحبت بطاقة واحدة من الكيس عشوائيًّا، فحدد هل الحدثان متنافيان أم غير متنافيين، وبرر إجابتك.

a) بطاقة تحمل الرقم 1 أو 9.

متنافيان. لا يوجد نواتج مشتركة. إذ لا يمكن أن تكون البطاقة الواحدة تحمل الرقم 1 والرقم 9 في وقت واحد.

b) بطاقة تحمل الرقم 10 أو حمراء.

غير متنافيين، هناك ناتج مشترك بينهما هو البطاقة الحمراء التي تحمل الرقم 10.

2 نقود: تحتوي حصالة على قطع نقود منها 30 قطعة من فئة 10 Fils، و 25 قطعة من فئة 50 Fils، و 40 قطعة من فئة 100 Fils، و 15 قطعة من فئة 500 Fils. إذا سحب سعد قطع نقود على التوالي، فما احتمال أن تكون أول قطعة يسحبها 10 Fils أو 500 Fils؟

$\frac{9}{22}$ أو 41% تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير بيّن للطلبة أن الدوائر في شكل ڤن الذي يمثل حدثين متنافيين ليست متداخلة. وبيّن لهم كذلك أن الشكل الذي يمثل حدثين غير متنافيين سيحتوي على دوائر متداخلة.

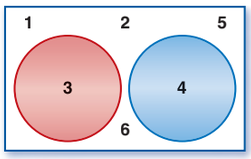
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية ارسم مخطط الشجرة البيانية على السبورة؛ لتوضح للطلبة كيفية حساب احتمالات الأحداث المتنافية. واحفظ هذا المخطط وأرسله إلى الطلبة ليكون مرجعًا لهم.

إحدى طرائق إيجاد احتمال وقوع حدثين متنافيين هو اختبار فضاء العيِّنة لهما.

ما احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقم؟ سترى من أشكال ڤن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن،

$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالي الحدثين البسيطين.

$$P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(4) = \frac{1}{6} \text{ و } P(3) = \frac{1}{6}$$

يوضّح هذا المثال القانون الأول من قانوني الجمع في الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

(أو) يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات. $P(A \text{ أو } B)$ يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B .

مفهوم أساسي — احتمالات الأحداث المتنافية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كان الحدثان A ، B متنافيين، فاحتمال وقوع الحدثين A أو B يساوي مجموع احتمال كل منهما.

بالرموز إذا كان الحدثان A ، B متنافيين، فإن

$$P(A \text{ أو } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الأحداث المتنافية.

إرشادات ثقافية

المكتبة الشخصية

المكتبة الشخصية ضرورة لا غنى عنها، تنمي لدى الأفراد حب القراءة والاطلاع، وتستحق الاهتمام والتنظيم، وقد أثرى بعضها الحياة الثقافية والفكرية لكثيرٍ من الأفراد.

مثال 2 من واقع الحياة — الأحداث المتنافية

كتب: اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة على رفوف مكتبته المبينة في الجدول المجاور عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون الكتاب من الرف 1 أو الرف 2؟

مكتبة موسى	
الرف	عدد الكتب
1	10
2	12
3	13

هذان الحدثان متنافيان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب على الرف رقم 1 والرف 2 في آنٍ واحدٍ.

افترض أن الحدث $A1$ يُمثّل اختيار كتاب من الرف 1.
وافترض أن الحدث $A2$ يُمثل اختيار كتاب من الرف 2.
مجموع الكتب هو $35 = 13 + 12 + 10$.

احتمال الأحداث المتنافية $P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$

$P(A1) = \frac{10}{35}$ و $P(A2) = \frac{12}{35}$

$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$

بالجمع $= \frac{22}{35}$

لذا، فإن احتمال اختيار كتاب من الرف 1 أو الرف 2 يساوي $\frac{22}{35}$ ، أو 63%.

تأكد

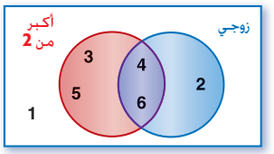
2A) رُمي حجرا نرد متمايزين مرة واحدة. ما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كل من وجهي حجري النرد الظاهرين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟ $\frac{5}{18}$ ، أو 28% تقريبًا

2B) ألعاب: إذا ربحت في رمي الحلقة في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فستُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائيًّا من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و 25 قلمًا و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟ $\frac{41}{80}$ ، أو 51% تقريبًا

148 الفصل 3 الاحتمال والقياس

ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة؟

يمكنك أن تلاحظ من أشكال ڤن أنه توجد 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5, 6 . لذا فإن،



$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من } 2) = \frac{5}{6}$.

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هذين الحدثين غير متنافيين، إذا اخذنا احتمال كل حدث على حدة لذا فإن:

$P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6}$ $\quad$ $P(\text{أكبر من } 2) = \frac{4}{6}$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6 ، 4 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2 ومرّة أخرى لكونهما عددين زوجيين. لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من } 2) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من } 2) - P(\text{عدد زوجي وأكبر من } 2)$

$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

مفهوم أساسي

احتمالات الأحداث غير المتنافية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كان الحدثان A ، B غير متنافيين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع B و A معًا.

بالرموز إذا كان A ، B حدثين غير متنافيين فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 3 من واقع الحياة

الأحداث غير المتنافية

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم وأصنافها. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًّا للمشاركة في مسابقة فنية، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظر طبيعي؟

بما أن بعض لوحات ابراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هذين الحدثين غير متنافيين.

لوحات إبراهيم

اللوحة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

$P(\text{لوحة زيتية} \cup \text{منظر طبيعي}) = P(\text{منظر طبيعي}) + P(\text{لوحة زيتية}) - P(\text{لوحة زيتية} \cap \text{منظر طبيعي})$

بالتعويض $= \frac{5+3+2+0}{30} + \frac{1+3+2}{30} - \frac{3}{30}$

بالتبسيط $= \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30}$

لذا؛ فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًّا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريبًا.

إرشادات ثقافية

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقدم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرائق تعبير فنية، تهذب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

تأكد

3) مجموعة بطاقات عددها 52، مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأزرق، والأصفر، ورُقّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. ما احتمال سحب بطاقة تحمل الرقم 7، أو بطاقة حمراء من هذه المجموعة؟ $\frac{4}{13}$ ، أو 31% تقريبًا

مثال إضافي

3 **فن:** استعمل الجدول الوارد في المثال 3؛ لإيجاد احتمال أن يختار إبراهيم لوحة مرسومة بالألوان المائية أو شكلًا هندسيًّا.

$\frac{2}{3}$ ، أو 66% تقريبًا

الدرس 3-6 احتمالات الأحداث المتنافية 149

احتمال الحدث المتمم عناصر **الحدث المتمم** A تتكون من جميع نواتج فضاء العيّنة غير الموجودة في الحدث A. إذا كان احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي حجر نرد مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$، فما احتمال عدم الحصول على العدد 4 ؟ يوجد 5 نواتج ممكنة لهذا الحدث هي: 1, 2, 3, 5, 6. لذا فإن $\frac{5}{6}$ =(عدم الحصول على العدد 4)P.

لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

مفهوم أساسي — احتمال الحدث المتمم

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي احتمال عدم وقوع حدث يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحدث.

بالرموز لأي حدث A، $P(\grave{A}) = 1 - P(A)$

مثال 4 الحدث المتمّم

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطلب إليها سحب بطاقة عشوائيًّا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب سميرة بطاقة رابحة؟

أفترض أن A تمثّل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متمم A.

احتمال المتمّم $P(\grave{A}) = 1 - P(A)$

بالتعويض $= 1 - \frac{20}{300}$

بالطرح والتبسيط $= \frac{280}{300} = \frac{14}{15}$

احتمال سحبها بطاقة رابحة $\frac{14}{15}$، أو 93% تقريبًا.

قراءة الرياضيات

الحدث المتمّم يرمز إلى الحدث المتمّم للحدث A بالرمز $(\grave{A})$.

تأكد

4) إذا كانت فرصة هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟ **30%**

ملخص المفاهيم — قوانين الاحتمال

أضف إلى مطويتك

نوع الحدث	التعبير اللفظي	قوانين الاحتمال
الحدثان المستقلان	احتمال وقوع الحدث الأول لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الثاني.	إذا كان A، B حدثين مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحدثان غير المستقلين	احتمال وقوع أحد الحدثين يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	إذا كان A، B حدثين غير مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$.
الاحتمال المشروط	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حدث ما .	يكون احتمال الحدث A شرط وقوع حدث B : $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
الأحداث المتنافية	أحداث لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كان A، B حدثين متنافيين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الأحداث غير المتنافية	أحداث توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كان A و B حدثين غير متنافيين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الأحداث المتمّمة	تتكون نواتج حدث من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحدث الآخر.	لأي حدث A ، $P(A`) = 1 - P(A)$

احتمال الحدث المتمم

مثال 4 يُبيّن كيفية حساب احتمال حدثين متتامين.

مثال إضافي

4 كرات: يوجد في وعاء 200 كرة صغيرة، منها كرة واحدة فقط حمراء. إذا سحب خليل 15 كرة عشوائيًّا من الوعاء، فما احتمال ألا يسحب الكرة الحمراء؟

$\frac{37}{40}$، أو 93% تقريبًا

التركيز في المحتوى الرياضي

الحدث المتمم هناك دائمًا فرصتان لأي حدث A هما وقوع الحدث A أو عدم وقوعه. ومجموع احتمالات جميع نواتج تجربة عشوائية يساوي 1 دائمًا. وهذا ما يمكن ملاحظته إذا أعيدت كتابة قانون احتمال متمم حدث على الصورة الآتية $P(A) + P(A`) = 1$.

احتمال الحدث المتمم

مثال 5 يُبيّن كيفية تحديد القانون المناسب واستعماله؛ لحساب الاحتمال.

مثال إضافي

5 **نشاطات:** تبيّن من مسح شمل طالبات مدرسة ثانوية للبنات أن 36% من الطالبات مشتركات في مسابقة حفظ القرآن الكريم أو مسابقة كتابة القصة القصيرة. إذا اختيرت طالبتان عشوائيًّا من بين 100 طالبة من هذه المدرسة، فما احتمال أن تكون واحدة منهن على الأقل غير مشتركة في أي من المسابقتين؟

$\frac{48}{55}$ ، أو 87% تقريبًا

مثال 5 من واقع الحياة — تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افترض أن 81% من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقَيْن عشوائيًّا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحدًا أو أكثر. لذا أنت بحاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعملان حزام الأمان.

أي إيجاد $P(A` \cup B`)$

خطط الحدث الموصوف أعلاه هو الحدث المتمم للحدث أن السائقين المختارين يستعملان حزام الأمان.

افترض أن الحدث A يمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.

افترض أن الحدث B يمثّل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تمّ اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P[(A \cap B)`]$.

هذان الحدثان غير مستقلين، لأن احتمال الحدث الأول يؤثر في احتمال الحدث الثاني.

حُلّ

احتمال الحدثين غير المستقلين: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

$P(A) = \frac{81}{100}$: $= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$

بالضرب: $= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$

احتمال الحدث المتمم: $P[(A \cap B)`] = 1 - P(A \cap B)$

بالتعويض: $= 1 - \frac{36}{55}$

بالطرح: $= \frac{19}{55}$

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريبًا.

تحقق استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولية إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\%(81 - 100)$، أو 19%.

واحتمال اختيار سائقين من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19%. وبما أن $19\% > 35\%$ ، فإن الإجابة معقولة.

تأكد

5) هواتف نقالة: أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير ثلاثة أشخاص عشوائيًّا من مجموعة 100 سائق فما احتمال أن:

A) يستعمل شخصان على الأقل الهاتف النقال في أثناء قيادة السيارة؟ 28% تقريبًا

B) يستعمل شخص واحد على الأكثر هاتفه النقال في أثناء قيادة السيارة؟ 72% تقريبًا

الحوادث المرورية خلال عام 2009

الشهر	عدد حالات الوفاة
يناير	6
فبراير	6
مارس	2
أبريل	8
مايو	9
يونيو	7
يوليو	8
أغسطس	7
سبتمبر	5
أكتوبر	4
نوفمبر	5
ديسمبر	2
المجموع	69

http://www.traffic.gov.bh/arabic/Accidentsstat.asp#year

الربط مع واقع الحياة

إن عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات يؤدي إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة الناتجة عن الحوادث المرورية خلال عام 2009 وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

إرشادات للدراسة

من المثال 5 لاحظ أن $P(A` \cup B`) = P[(A \cap B)`]$

وبالمثل $P(A` \cap B`) = P[(A \cup B)`]$

إرشادات للدراسة

كلمات مفتاحية

عندما تحدد نوع الاحتمالات التي تتعامل معها في موقف ما، انظر إلى الكلمات وفسر معانيها على نحو صحيح.

و	تدل على أحداث مستقلة أو غير مستقلة
أو	تدل على أحداث متنافية أو غير متنافية
ليس، عدم، ألا	تدل على أحداث متممة
إذا كان أو علمًا بأن	تدل على مشروط
على الأقل n	تدل على n أو أكثر
على الأكثر n	تدل على n أو أقل.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلبة أن يتأملوا ملخص المفاهيم في صفحة (150)، ثم اطلب إليهم أن يعبّروا بكلماتهم الخاصة عن حالات استعمال كل واحد من هذه القوانين، ويكتبوا مثالاً لكل واحدة منها.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 6-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 147

حدد إذا كان الحدثان متنافيين أو غير متنافيين في كل مما يأتي، برر إجابتك:

1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي حجر نرد مرة واحدة. غير متنافيين؛ لأن 5 عدد فردي وأكبر من 3

2) اختيار سيارة أو حصان. متنافيان؛ لأن السيارة لا تكون حصانًا ولا يكون الحصان سيارة.

مثال 2 صفحة 148

3) حصلت سامية على جائزة أفضل أداء لموظفي الشركة، وكانت جائزتها أن تختار عشوائيًّا واحدة من 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب ، و 7 نظارات. ما احتمال أن تربح بطاقة سفر، أو كتاب أو ساعة؟ $\frac{2}{3} \approx 67\%$

مثال 3 صفحة 149

4) بناءً على الجدول المجاور. اختير طالب في المدرسة، ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟ $\frac{11}{25}$ أو 44%

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضة	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

مثال 4 صفحة 150

5) إذا كانت فرصتك في إصابة الهدف عند رمي السهم تساوي 2 من 10 فما احتمال أن يخطئ السهم الهدف؟

5) احتمال أن يخطئ السهم الهدف يساوي $\frac{8}{10}$ ، أو 80%

مثال 5 صفحة 151

6) عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان عشوائيًّا من طلاب الصف كلهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟ 17.3%

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3-1 الصفحات 149-147

حدّد ما إذا كان الحدثان متنافيين أو غير متنافيين في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال، وقرّب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر كلما لزم ذلك:

7) رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة والحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين. انظر الهامش

غير متنافيين، $\frac{13}{20}$ أو 65%

8) اختيار عدد عشوائيًّا من 1 إلى 20 والحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3.

9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة والحصول على صورة أو كتابة. متنافيان، 100%

10) رياضة: يبين الجدول المجاور جميع البرامج التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 16-14. ما احتمال أن يلعب مشارك كرة السلة أو يكون عمره 14؟ 56%

مجمع النادي الرياضي			
كرة السلة	الكرة الطائرة	كرة القدم	العمر
42	36	28	14
33	26	30	15
29	41	35	16

11) هدايا: أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصًا، و 6 اختاروا هاتفًا نقالًا، و4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائيًّا فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟ $\frac{7}{16}$ أو 43.8% تقريبًا

مثال 4 صفحة 150

أوجد احتمال كل حدث مما يأتي:

12) عدم ظهور العدد 3 على أحد الوجهين الظاهرين، عند إلقاء حجري نرد متمايزين مرة واحدة. $\frac{25}{36}$ ، أو 69.4% تقريبًا

13) عدم ظهور الصورة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة. $\frac{1}{2}$، أو 50%

14) سحب خليل عشوائيًّا كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألا يسحب الكرة الحمراء؟ $\frac{24}{25}$ أو 96%

15) نسبة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و25 سنة، ويقبضون أجورهم بالساعة تساوي 71%. إذا اختير اثنان عشوائيًّا من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجرته بالساعة؟ انظر ملحق الإجابات

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	16-7، 19-27
ضمن ضمن المتوسط	15-7 فردي، 16 ، 17 ، 19-27
فوق فوق المتوسط	17-27

إجابة:

7) بما أن ظهور أربعتان ينتج عنه عددان متساويان ومجموعهما 8، لذلك فالحادثان ليسا متنافيين؛ إذن

P(العددان متساويان و المجموع يساوي 8) $= P$(العددان متساويان) $+ P$(المجموع يساوي 8) $-$ P(العددان متساويان أو المجموع يساوي 8)

$$= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{10}{36} \approx 27.8\%$$

مثال 5
صفحة 151

الربط مع واقع الحياة

إعادة تدوير المواد تحمي الإنسان، وتحافظ على الموارد وترشد الطاقة، وتقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، إذا اختير شخصان عشوائيًّا من مجموعة عددها 50، فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟ **91% تقريبًا**

17) أجرت مدرسة مسحًا على طلابها البالغ عددهم 265 لمعرفة أي النشاطات الرياضية يرغبون في المشاركة فيها، ومُثّلت النتائج بأشكال ڤن. إذا اختير طالب عشوائيًّا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة. **71.3%**

b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم وليس في كرة السلة. **36.2%**

c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث. **3.8%**

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **تحدّ:** إذا رميت ثلاثة أحجار نرد متمايزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على حجرين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟ **للتمارين 22-18 انظر الهامش**

تبرير: **حدد إذا كان الحدثان في كل مما يأتي متنافيين أو غير متنافيين:**

19) اختيار مثلث متطابق الأضلاع ومثلث متطابق الزوايا.

20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.

21) **مسألة مفتوحة:** صف حدثين يكونان متنافين وحدثين آخرين غير متنافيين.

22) **اكتب:** وضّح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حدثين متنافيين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار معياري

23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو الساعات؟ **D**

العدد	الهدية
10	أدوات مطبخ
6	أدوات كهربائية
3	ساعات
1	هاتف نقال

A 0.075 **B** 0.35 **C** 0.5 **D** 0.65

24) **احتمال:** رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟ **G**

F $\frac{1}{6}$ **G** $\frac{2}{3}$ **H** $\frac{5}{6}$ **J** 1

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كان الحدثان مستقلين أو غير مستقلين في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال: (الدرس 5-3)

25) رمي حجر نرد مرة واحدة وظهر العدد 2 على الوجه الظاهر، ثم رمي حجر النرد مرة ثانية وظهر العدد 3 على الوجه الظاهر. **مستقلين، 3% تقريبًا أو $\frac{1}{36}$**

26) يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. سحبت بطاقة تحمل الرقم 13 عشوائيًّا من الصندوق بدون إرجاع ثم سُحبت بطاقة تحمل الرقم 13.

27) **رياضة:** أظهرت نتائج عملية مسح إحصائي لطلاب مدرسة ثانوية أن 15% من الرياضيين في المدرسة يمارسون لعبة كرة الطائرة فقط، و20% يمارسون التنس فقط، و30% لعبة كرة السلّة فقط، وأن 35% يمارسون كرة القدم فقط، صمّم محاكاة يمكن استعمالها لتقدير احتمال أن يمارس لاعب إحدى هذه الألعاب. (الدرس 4-3) **انظر ملحق الإجابات**

26) غير مستقلين **0,45 تقريبًا أو $\frac{1}{22}$**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكوّنوا أشكال ڤن، ويمثلوا فيها كل نوع من أنواع الاحتمالات التي درسوها في هذا الفصل. واطلب إليهم أيضًا أن يفكروا في موقف يُعدّ مثالاً على ذلك النوع، ويرسموا شكل ڤن الذي يمثل الأحداث.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يذكروا الفرق بين الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية وقانون إيجاد احتمال كل منها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 6-3 بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

18) 0.74؛ إجابة ممكنة: يوجد ثلاثة نواتج يظهر على حجرين منها عدد أقل من أو يساوي 4، ويوجد ناتج رابع يظهر على كل الأحجار الثلاثة عدد أقل من أو يساوي 4، وعليك إيجاد احتمال كل ناتج من الأربعة ثم جمعها.

19) غير متنافيين، إجابة ممكنة: إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فهو متطابق الزوايا. لذا، فلا يمكن أن يكون هذين الحدثان متنافيين.

20) غير متنافيين، إجابة ممكنة: العدد الحقيقي هو عدد مركب في الوقت ذاته.

21) إجابة ممكنة: إذا سُحبت بطاقة من مجموعات بطاقات ملونة بأحد اللونين الأحمر، والأسود. ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 10 فقد تكون البطاقة تحمل الرقم 3 أو الرقم 5، فهذان الحدثان متنافيان. ويمكن أن تكون البطاقة تحمل الرقم 3 وحمراء في وقت واحد، فهذان الحدثان غير متنافيين.

22) إجابة ممكنة: عندما يكون الحدثان متنافيين فلا يمكن وقوعهما معًا. ولكن هذا لا يعني أنه يجب أن تقع إحداهما أو الأخرى بالضرورة. إن مجموع احتمالات نواتج فضاء العينة كافة يساوي 1. فعلى سبيل المثال، إذا كان الحدثان A، B متنافيين فإن فضاء العينة يشمل احتمال وقوع الحدث A، واحتمال وقوع الحدث B، واحتمال عدم وقوع أي منهما ومجموع هذه الاحتمالات الثلاثة يجب أن يساوي 1. وقد يكون مجموع احتمال وقوع A و احتمال وقوع B يساوي 1.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 10–1، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل.

أحاجي المفردات تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، أو البحث عن كلمة باستعمال التلميحات، ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العيّنة (الدرس 1-3)

- فضاء العيّنة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العيّنة باستعمال قائمة منظمة أو جدول أو مخطط الشجرة البيانية.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 2-3)

- الترتيب مهم في التباديل.

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-3)

- إذا احتوت المنطقة A المنطقة B واختيرت نقطة E عشوائيًا من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$

محاكاة مواقف واقعية (الدرس 4-3)

- تُستعمل المحاكاة نموذجًا احتماليًا لإنشاء موقف عدة مرات حتى يمكن توقع احتمالات النواتج المختلفة.

احتمالات الأحداث المركبة (الدرسان 5-3 و 6-3)

- إذا كان الحدث A لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث B، فإن الحدثين مستقلان ويكون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كانت الحدثين A و B غير مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- إذا لم يكن وقوع الحدثين A و B في الوقت نفسه ممكنًا فإنهما متنافيان وإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا لم يكن A و B متنافيين، فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مطويتك منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية قد دونت في مطويتك.

المفردات الأساسية

فضاء العيّنة	ص 114	المتغير العشوائي	ص 136
مخطط الشجرة البيانية	ص 114	المحاكاة	ص 134
تجارب متعددة المراحل	ص 115	القيمة المتوقعة	ص 136
تجربة ذات مرحلتين	ص 115	قانون الأعداد الكبيرة	ص 137
مبدأ العد الأساسي	ص 116	الأحداث المستقلة	ص 141
المضروب	ص 120	الأحداث غير المستقلة	ص 141
التباديل	ص 120	الأحداث المركبة	ص 141
التوافيق	ص 123	شجرة الاحتمال	ص 143
التباديل الدائرية	ص 122	الاحتمال المشروط	ص 143
الاحتمال الهندسي	ص 127	الأحداث المتنافية	ص 147
النموذج الاحتمالي	ص 134	الحدث المتمم	ص 150

اختبر مفرداتك

حدد هل كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح العبارة صحيحة:

1) تُستعمل في مخطط الشجرة البيانية قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة. صحيحة

2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر ترتيبها ليس مهمًّا. خاطئة، التوافيق

3) تعيين تنظيم مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية. صحيحة

4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا مثال على الأحداث غير المستقلة. خاطئة، المستقلة

5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة. صحيحة

6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$، مثال على المضروب. صحيحة

7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العيّنة. صحيحة

8) إلقاء قطعة نقد ورمي حجر نرد مرة واحدة يكوّنان حدثًا بسيطًا. خاطئة، مركبًا

9) ألقى يوسف قطعة نقد 200 مرة لتكوين شجرة احتمال للتجربة. خاطئة، محاكاة

10) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة الملابس دون إرجاع مثال على الأحداث المتنافية. خاطئة، غير المستقلة

مطويتك منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

3-1 تمثيل فضاء العيّنة (الصفحات 119-114)

11) فشار: يبيع محل تجاري أكياس الفشار ذات حجم صغير (S)، أو حجم متوسط (M)، أو حجم كبير (L)، دون زبدة (NB) أو مع زبدة (B)، أو زبدة إضافية (EB). مثّل فضاء العيّنة لتراتيب أنواع الفشار باستعمال القائمة المنظمة والجدول ومخطط الشجرة البيانية. انظر الهامش

12) أحذية: يبيع محل تجاري أحذية من بين المقاسات: 36، 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44 وبلونين بني أو أسود. كم زوجًا مختلفًا يمكن اختياره؟ 18

مثال 1

أُلقيت ثلاث قطع نقد متمايزة مرة واحدة. مثّل فضاء العيّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة.

أقرن كل ناتج ممكن من الرمية الأولى بالنواتج من الرميتين الثانية والثالثة.

HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الصفحات 126-120)

13) مطعم: ذهب ثلاثة طلاب من الصف الأول الثانوي وثلاثة طلاب من الصف الثالث الإعدادي إلى مطعم و جلسوا حول منضدة مستديرة، إذا اشترط حسين من الصف الأول الثانوي ألا يجلس بجانب طالب من الصف الثالث الإعدادي، واشترط الطالب جعفر من الصف الثالث الإعدادي ألا يجلس بجانب طالب من الأول الثانوي. فما عدد التراتيب الممكنة؟ 4

14) ترغب مجموعة من 10 طالبات في تشكيل لجنة من 3 منهن يتم اختيارهن عشوائيًّا من المجموعة. ما احتمال اختيار نوال ودانة وزهراء لهذه اللجنة؟ $\frac{1}{120}$

15) مسابقات: بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من 32 طالبًا لتشكيل فريق لمسابقة أكاديمية؟ 35960

مثال 2

بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا التبديل دائري.

قانون التباديل الدائرية $P_n = (n-1)!$

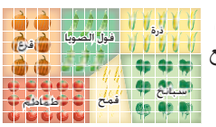
$n = 4$ $P_4 = (4-1)!$

بالتبسيط $= 3! = 6$

لذا، فهناك 6 طرائق لجلوس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة.

3-3 الاحتمال الهندسي (الصفحات 132-127)

16) زراعة: الشكل المجاور يمثل مخطط لمزرعة، إذا كان كل مربع صغير يمثل وحدة مساحة مربعة واحدة فأجب عن كل مما يأتي:



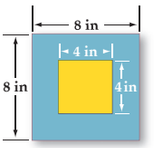
a) ما المساحة التقريبية لحقلي السبانخ والذرة معًا؟ 67

b) إذا اختير أحد المربعات عشوائيًّا، فأوجد احتمال أنه يُستعمل لزراعة فول الصويا. 16% أو 0.16

17) يجلس الطلاب هاني وعمر وراشد وعبد الكريم (على الترتيب) على حافة بركة بحيث يجلس هاني على بعد 2ft من عمر، ويجلس عمر على بعد 4ft من راشد، ويجلس راشد على بعد 3ft من عبد الكريم. إذا انضم إليهم محمد، فأوجد احتمال أن يجلس محمد بين هاني وعمر. $\frac{2}{9}$

مثال 3

لعبة رمي الكرة.



a) إذا ألقى حاتم 10 كرات على المنطقة المبينة في الشكل، فما احتمال أن تستقر الكرة على المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الصفراء $4 \cdot 4 = 16$

P(أن تستقر الكرة على المنطقة الصفراء) $= \frac{16}{64} = 25\%$

b) ما احتمال ألا تستقر الكرة على المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الزرقاء $(8 \cdot 8) - 16 = 64 - 16 = 48$

P(ألا تستقر الكرة على المنطقة الصفراء) $= \frac{48}{64} = 75\%$

مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

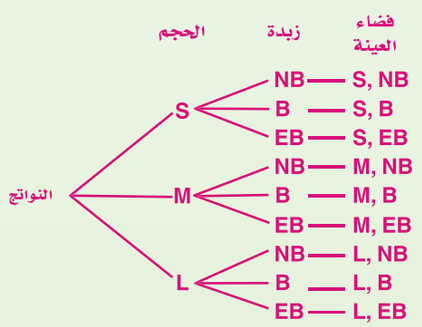
بناء الاختبارات
التقـــويم

إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل من (ص 156-154) يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات؛ لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا، أو على الجزء من الفصل الذي ما زال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

إجابة:

11) *S, NB; S, B; S, EB; M, NB; M, B; M, EB; L, NB; L, LB; L, EB*

النواتج	دون زبدة	مع زبدة	زبدة إضافية
S صغير	*S, NB*	*S, B*	*S, EB*
M متوسط	*M, NB*	*M, B*	*M, EB*
L كبير	*L, NB*	*L, B*	*L, EB*



مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حل المسألة فذكرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 3 ، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة مصادر الفصل 3.

إجابات:

18) إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشر دوّار مقسمًا إلى قطاعين يشكّل أحدهما 35% من مساحة القرص أو تكون زاويته المركزية 126° ، على حين يشكل الآخر 65% من القرص أو تكون زاويته المركزية 234°. ونفذ 50 محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري واستعملها؛ لتحديد احتمال أن يسجل حسن هدفًا في المباراة القادمة.

19) إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشر دوّار مقسمًا إلى 4 قطاعات قياسات زواياه المركزية 82.8°، 79.2°، 108°، 90°. ونفذ 50 محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري، و استعملها؛ لتحديد احتمال شراء كتاب في كل من الفترات الأربع المذكورة.

20) إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشر دوّار مقسمًا إلى 4 قطاعات قياسات زواياه المركزية 32°، 234°، 51.5°، 42.5°. ونفذ 50 محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري، واستعملها؛ لتحديد احتمال استهلاك كمية من النفط لغرض محدد.

3-4 محاكاة مواقف واقعية (الصفحات 140-134)

صف كيف يمكنك استعمال نماذج الاحتمالات الهندسية لتصمم محاكاة في كل مما يأتي: للتمارين 20–18 انظر الهامش

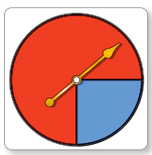
18) **كرة يد:** يحرز حسن 35% من الأهداف التي يسجلها فريقه في كل مباريات كرة اليد.

19) **كتب:** أظهرت نتيجة دراسة مسحية أن الناس يشترون 30% من كتبهم في الأشهر: أكتوبر ونوفمبر وديسمبر، 22% في يناير وفبراير ومارس، و 23% في أبريل ومايو ويونيو، و 25% في يوليو وأغسطس وسبتمبر.

20) **بترول:** تستهلك المملكة العربية السعودية 2.15 مليون برميل يوميًّا من النفط. ويُستعمل 65% منه للنقل، و 8.9% لتوليد الكهرباء وتحلية المياه، و 11.8% للتكييف، و 14.3% في الصناعات.

مثال 4

سجل سامي 75% من ضربات الجزاء في دوري كرة اليد في الموسم الماضي، صمّم محاكاة يمكن استعمالها لتقدير احتمال تسجيله ضربة الجزاء التالية في هذا الموسم.



استعمل تجربة تدوير المؤشر للقرص المبين في الشكل المجاور المقسّم إلى قطاعين على أن يمثل القطاع الأحمر 75% من مساحة القرص، والقطاع الأزرق يمثل 25% من مساحته.

ويتم تدوير المؤشر 50 مرة، تمثل كل دورة ضربة جزاء. وتعني المحاولة الناجحة تسجيل هدف، أما المحاولة الفاشلة فتعني عدم التسجيل.

3-5 احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة (الصفحات 146-141)

21) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. إذا سحبت 3 كرات على التوالي دون ارجاع، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية سوداء والثالثة بيضاء؟ $\frac{6}{35}$

22) مجموعة بطاقات عددها 52 مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: أحمر، وأزرق، وأسود، وأصفر، وكل لون يشمل 13 بطاقة مرقمة من 1 إلى 13. فإذا سُحبت بطاقتان من هذه المجموعة مع الإرجاع، فما احتمال سحب بطاقة تحمل الرقم 3 ، ثم بطاقة تحمل الرقم 9؟ $\frac{1}{169}$

23) أظهرت نتائج دراسة مسحية أن 72% من الناس يحبون المطالعة، فإذا اختير 3 أشخاص عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الثلاثة من الذين يحبون المطالعة؟ **37%**

مثال 5

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين لونها أبيض و 6 كرات زرقاء. فإذا سحبت 3 كرات على التوالي ودون إرجاع، فما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة زرقاء؟

بما أن الكرة المسحوبة لا تُعاد إلى الكيس، فإن الأحداث ليست مستقلة، بل هي على النحو الآتي:

$$P(\text{حمراء و حمراء و زرقاء}) = P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{زرقاء})$$
$$= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{9}$$
$$= \frac{2}{55} \approx 3.6\%$$

3-6 احتمالات الأحداث المتنافية (الصفحات 153-147)

24) رُمي مكعبان متمايزان مرة واحدة ومرقمان من 1 إلى 6. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 7 أو 11؟ $\frac{2}{9}$

25) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات عددها 52 (انظر السؤال 22)، ما احتمال سحب بطاقة تحمل الرقم 10 أو لونها أحمر؟ $\frac{4}{13}$

26) يحتوي صندوق على 40 بطاقة مرقمة من 1 إلى 40، سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًّا. $\frac{11}{20}$

a) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًّا أو أقل من 5؟

b) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟ $\frac{19}{40}$

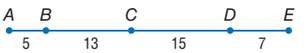
مثال 6

عند إلقاء مكعبين متمايزين مرة واحدة ومرقمين من 1 إلى 6، ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5، أو أن يكون العددان على الوجهين الظاهرين متساويين؟

هذان الحدثان متنافيان؛ لأن مجموع عددين متساويين لا يمكن أن يكون 5.

$$P(\text{المجموع 5 أو متساويان}) = P(\text{المجموع 5}) + P(\text{متساويان})$$
$$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$$
$$= \frac{5}{18} \approx 27.8\%$$

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AE}$. فأوجد كلًّا مما يأتي:
للتمرينين 2 و 1 انظر الهامش



1) P(تقع X على $\overline{AC}$)
2) P(تقع X على $\overline{CD}$)

3) **سباحة:** يتكون فريق سباحة من 9 طلاب. ما عدد الطرائق الممكنة لترتيبهم في 9 مسارات متجاورة في بركة السباحة؟ 362880

4) **سفر:** يحتاج مندوب مبيعات لزيارة أربع مدن. ما عدد خطط الرحلات المختلفة التي يمكن أن يعدها لزيارة كل مدينة مرة واحدة؟ 24

مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول ومخطط الشجرة البيانية.

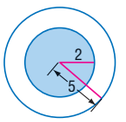
5) يحتوي صندوق على كرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة زرقاء. سُحبت منه كرتان واحدة تلو الأخرى دون إرجاع.
انظر ملحق الإجابات

6) أراد خليفة أن يأكل شطيرة، وعندما ذهب إلى المطعم وجد عنده شطيرة الجبن، وشطيرة اللحم، فقرر شراء شطيرتين.
انظر ملحق الإجابات

7) **درجات:** حصل محمد على تقدير A في 45% من المواد الدراسية. صمّم محاكاة باستعمال نموذج احتمال هندسي ونفذها، ثم سجل النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية. انظر الهامش

8) **كتابة:** بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف الكلمة "متمسمر"؟ 120

9) **تصويب:** يسدد صياد بندقيته نحو الهدف كما في الشكل المجاور. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظللة؟ 16%



10) **هواتف:** ما احتمال أن يكون 6222777 رقمًا لهاتف مكون من 7 أرقام هي 6, 2, 2, 2, 7, 7, 7؟ $\frac{1}{140}$

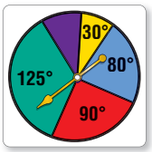
11) **مسابقات:** اشتركت خمس عشرة طالبة في مسابقة ذات ثلاث جوائز. ما احتمال أن تربح جنان وسارة وكوثر الجوائز الثلاث؟ $\frac{1}{455}$

حدّد إذا كان الحدثان مستقلين أو غير مستقلين في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال:

12) مجموعة من البطاقات تشتمل على 5 بطاقات صفراء و 5 حمراء و 5 برتقالية. سحب بطاقتان حمراوان الواحدة تلو الأخرى من المجموعة مع الإرجاع. مستقلين، $\frac{1}{9}$

13) يحتوي كيس على 6 كرات خضراء، وكرتين حمراوين، وكرتين بنيتين، و 4 كرات زرقاء، وكرتين بنفسجيتين. سحب عامر كرتين على التوالي من الكيس الأولى زرقاء والثانية غير بنفسجية دون إرجاع. غير مستقلين، $\frac{13}{60}$

استعمل تجربة القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل من الاحتمالات الآتية، (إذا استقر المؤشر على خط تُعاد التجربة).



14) (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P 9.7%

15) (استقرار المؤشر على اللون الأحمر) P 25%

16) (استقرار المؤشر على اللون الأصفر) P 91.7%

17) **كرة قدم:** تبين أن فريق كرة القدم يقضي 40% من زمن المباراة في الهجوم، 30% في الدفاع ، ويستغرق رجوع اللاعبين إلى مواقعهم 5%، على حين تستغرق رميات التماس 25% من الزمن. صمّم محاكاة باستعمال مولد الأعداد العشوائية، وسجل النتائج مستعملًا ملخصات عددية وبيانية. انظر ملحق الإجابات

حدد إذا كان الحدثان متنافيين أو غير متنافيين في كل مما يأتي، وبرّر إجابتك : للتمارين 20–18 انظر الهامش

18) يمتلك رجل سيارة و شاحنة.

19) رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة، والحصول على عددين مجموعهما 7، و ظهور العدد 6 على أحد وجهي حجري النرد.

20) سحب بطاقة حمراء أوبطاقة زرقاء من مجموعة بطاقات مكونة من 13 بطاقة حمراء، و 13 زرقاء، و 13 صفراء، و 13 خضراء.

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 3 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

المعالجة:
بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكّل تحديًا للطلبة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	كتاب الطالب الدروس 3-1، 3-2، 3-3، 3-4، 3-5، 3-6		مصادر الفصل دليل الدراسة والمعالجة
	مصادر الفصل تدريبات المهارات		
	دليل المعلم مشروع الفصل، ص (112)		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com		

إجابات:

1) $\frac{9}{20}$، أو 0.45 أو 45 % .

2) $\frac{3}{8}$، أو 0.375 أو 37.5 % .

7) إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشر دوّار مقسمًا إلى قطاعين، أحدهما يشكّل 45 % من مساحة القرص أو تكون زاويته المركزية 162°، والآخر يشكّل 55% من القرص أو تكون زاويته المركزية 198°. ونفذ 50 محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري.

التكرار	الناتج
التقدير A	23
التقدير ليس A	27
المجموع	50

18) غير متنافيين؛ فقد يملك شخص سيارة وشاحنة في آن معًا.

19) غير متنافيين؛ فقد يظهر الرقم 6 على أحد المكعبين، ويظهر الرقم 1 على المكعب الآخر.

20) متنافيان؛ لا يمكن أن تكون البطاقة حمراء و زرقاء في الوقت نفسه.

1 التركيز

الهدف تنظيم البيانات للمساعدة على تحليلها وحل الأسئلة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- ما هي بعض الطرق التي تُعطى بها البيانات التي تستوجب التنظيم؟
  إجابة ممكنة: نتائج إحصائية معينة.
- هل تعتقد أن هناك طرقًا أخرى مختلفة لتنظيم البيانات؟ نعم
- كيف يمكن أن تساعدك عملية تنظيم البيانات على حل المسألة في رأيك؟
  إجابة ممكنة: عملية تنظيم البيانات تسهل قراءتها وتحليلها وتحديد المطلوب.

تنظيم البيانات

تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات لتحليلها لكي تحل فقرات أسئلة في اختبار معياري. استعمل هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات وحل المسائل.

استراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

إذا أعطيت مسألة تحتوي على بيانات، فاعتمد واحدة مما يأتي:

- عمل قائمة البيانات.
- استعمال جدول لتنظيم البيانات.
- عرض البيانات (كالتمثيل بالأعمدة، أشكال ڤن، القطاعات الدائرية، التمثيل بالخطوط أو الصندوق والطرفين) لتنظيمها.

الخطوة 2

نظّم البيانات.

- كوّن جدولًا، أو قائمة، أو اعرض البيانات.
- اكتب القيم المجهولة التي يمكن إيجادها بحسابات بسيطة إذا كان ذلك ممكنًا.

الخطوة 3

حلّل البيانات لتتمكن من حل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحدد المطلوب.
- استعمل الخصائص الهندسية والجبرية الضرورية للتعامل مع البيانات المنظمة وحُلّ المسألة.
- إذا كان الزمن كافيًا فراجع الحل وتحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة، وحدّد المطلوب، ثم استعمل المعطيات لحلها:

يوجد في مركز للغات 18 طالبًا يتعلمون اللغة الإنجليزية، و 14 يتعلمون اللغة الفرنسية، و 16 يتعلمون اللغة الألمانية، ويوجد 8 طلاب يتعلمون الإنجليزية فقط و 7 يتعلمون الألمانية فقط و 3 يتعلمون الإنجليزية والفرنسية فقط، وطالبان يتعلمان الفرنسية والألمانية فقط و 4 طلاب يتعلمون اللغات الثلاث معًا. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فما احتمال أنه يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية؟

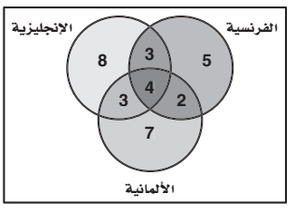
A $\frac{9}{16}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{5}{18}$ D $\frac{7}{12}$

الفصل 3 التهيئة للاختبارات المعيارية

اقرأ المسألة بإمعان تجد أنه من الصعب تحليلها من خلال النص، ولكن عند استعمالك لأشكال فن تستطيع تنظيم البيانات وعندئذٍ تتمكن من حلها.

الخطوة 1 ارسم ثلاث دوائر تمثل كل منها لغة.

الخطوة 2 ضع معطيات المسألة على الشكل.



الخطوة 3 املأ القيم المفقودة في بعض الأمكنة. فمثلًا تعلم أن 18 طالبًا يتعلمون الإنجليزية، و 14 طالبًا يتعلمون الفرنسية.
$5 = 2 - 4 - 3 - 16$ (يتعلمون الألمانية فقط)
$3 = 4 - 3 - 8 - 18$ (يتعلمون الإنجليزية والألمانية فقط)

الخطوة 4 حلّ المسألة، المطلوب إيجاد احتمال اختيار طالب عشوائيًّا يتعلم الانجليزية أوالألمانية ولا يتعلّم الفرنسية. يمكنك حسب أشكال فن ملاحظة أن مجموع الطلاب يساوي 32 طالبًا، منهم
$18 = 7 + 3 + 8$ يتعلمون الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلمون الفرنسية. الاحتمال يساوي $\frac{18}{32}$ أو $\frac{9}{16}$ لذا، فإن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة، حددّ المطلوب، ثم نظم البيانات لحل المسألة.

1) لدى رباب أربعة أحرف بلاستيكية: ا، ف، ح، ت. إذا اختارت تبديلًا لهذه الأحرف عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون الكلمة هي كلمة "فاتح"؟ B

A $\frac{3}{50}$ C $\frac{1}{12}$

B $\frac{1}{24}$ D $\frac{1}{4}$

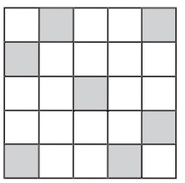
2) يبيّن الجدول الآتي عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من الصف الثاني الثانوي أو يلعب كرة الطائرة؟ J

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

F $\frac{4}{21}$ H $\frac{5}{17}$

G $\frac{2}{25}$ J $\frac{13}{25}$

3) اختيرت نقطة واحدة عشوائيًّا في الشكل الآتي. أوجد احتمال أن تقع هذه النقطة في المنطقة المظلّلة. C



A 0.22 C 0.28

B 0.25 D 0.32

4) تضم جماعات الأنشطة في إحدى المدارس الثانوية 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و 8 طلاب من الصف الثاني الثانوي، و 9 من الصف الثالث الثانوي، حيث يمارس كل طالب فيها نشاطًا معينًا في أثناء العام الدراسي على النحو الآتي:

يمارس 4 طلاب من الأول الثانوي النشاط العلمي، و6 النشاط الثقافي، ويمارس طالبان من الصف الثاني الثانوي النشاط العلمي و5 النشاط الرياضي. ويمارس طالبان من الصف الثالث الثانوي النشاط الثقافي، علمًا بأن كل نشاط يضم 9 طلاب. إذا اختير طالب واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من طلاب الصف الثاني الثانوي أو يمارس النشاط العلمي؟ H

F $\frac{1}{5}$ H $\frac{5}{9}$

G $\frac{4}{18}$ J $\frac{2}{3}$

مثال إضافي

مثال على اختبار معياري:

يوجد من بين طلاب صف عبد الله الذين يملكون طيورًا في منازلهم 13 طالبًا لديهم كناري و 9 لديهم ببغاء و7 لديهم بلبل. كما أن هناك 6 لديهم كناري وببغاء معًا و 5 لديهم كناري وبلبل و 3 لديهم ببغاء وبلبل، وطالبان اثنان لديهما الأنواع الثلاثة من هذه الطيور إذا اختير أحد هؤلاء الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون لديه ببغاء أو بلبل ولكنه ليس لديه كناري؟ B

A $\frac{1}{17}$

B $\frac{4}{17}$

C $\frac{6}{17}$

D $\frac{11}{17}$

3 التقويم

استعمل التمارين 1–4؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملاً لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

1) F اعتبر طول ضلع المربع الكبير 4 ، وحسب مساحة احدى المناطق المظللة.
G أوجدَ مساحة منطقتين مظللتين فقط.
H أوجدَ مساحة منطقة مظللة واحدة فقط.
J الإجابة الصحيحة.

2) A أوجدَ عدد الأرقام نفسها.
B الإجابة الصحيحة.
C أخطأ في عدد النواتج الممكنة.
D أوجدَ الأعداد المختلفة المكوّنة من رقمين أو من 3 أرقام.

3) A أوجد احتمال التقاطع بدلًا من الاتحاد.
B أوجدَ احتمال الاتحاد، وأخطأ في جمع الكسور.
C الإجابة الصحيحة.
D اعتبر حدثين مستقلين، وأوجد احتمال التقاطع.

4) F حسب عدد نواتج حدث ظهور رقمين متماثلين.
G خمّن.
H خمّن
J الإجابة الصحيحة.

5) A أخطأ في حساب عدد عناصر الحدث.
B الإجابة الصحيحة.
C أخطأ في حساب عدد عناصر الحدث، وعدد عناصر فضاء العينة.
D أخطأ في اعتبار 2 عدد عناصر الحدث، والبقية عدد عناصر فضاء العينة.

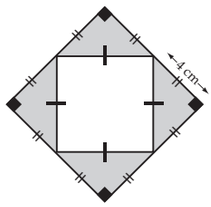
6) F اعتبر احتمال وقوع الحدث يساوي احتمال وقوع الحدث المتمم.
G الإجابة الصحيحة.
H اعتبر احتمال الحدث المتمم مساويًا لحاصل ضرب احتمال الحدث في احتمال متممه.
J استعمل القانون $P(A') = 1 - P(A)$ بشكل معكوس.

7) F أخطأ في تبسيط مقدار كسري.
G أخطأ في ايجاد عدد عناصر الحدث.
H الإجابة الصحيحة.
J أخطأ في حساب عدد عناصر الحدث، وعدد عناصر فضاء العينة.

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) اختيرت نقطة عشوائيًّا في الشكل المجاور، مااحتمال وقوعها في المنطقة المظللة ؟ **J**



F 0.0625
G 0.125
H 0.25
J 0.5

2) كم عددًا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة باستعمال أرقام العدد 261؟ **B**

A 3 B 6 C 4 D 12

3) إذا كان A ، B حدثين متنافيين في فضاء العيّنة لتجربة ما ، وكان $P(A)=\frac{1}{3}$ ، $P(B)=\frac{1}{2}$، فما قيمة $P(A \cup B)$؟ **C**

A 0
B $\frac{2}{5}$
C $\frac{5}{6}$
D $\frac{1}{6}$

إرشادات للاختبارات

السؤال 4، عند رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن تحصل على عددين متساويين على وجهي حجري النرد؟ لإيجاد عدد المرات المتوقعة في هذه التجربة اضرب الاحتمال الذي تحصل عليه في عدد المحاولات.

4) يلقي جلال حجري نرد متمايزين 90 مرة. ما عدد المرات المتوقعة لحصوله على عددين متساويين؟ **J**

F 6 G 9 H 10 J 15

5) تحتفظ وفاء بصورة لكل من أبنائها: عبد الله ، وعلي ، وسحر، ودعاء، وبثينة على حاسوبها وتريد ترقيمها من 1 إلى 5، ما احتمال أن تأخذ صورة عبد الله الرقم 3 وتأخذ صورة علي الرقم 4؟ **B**

A $\frac{1}{60}$
B $\frac{1}{20}$
C $\frac{2}{5}$
D $\frac{2}{3}$

6) إذا كان A حدثًا في فضاء العينة لتجربة ما، وكان $P(A)= 0.8$ ، فما احتمال عدم وقوع الحدث A؟ **G**

F 0.8
G 0.2
H 0.16
J − 0.2

7) سحبت عينتان معًا عشوائيًّا من صندوق يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة، إذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A ، و 3 عينات من فصيلة الدم B ، و 6 عينات من فصيلة الدم AB ، و5 عينات من فصيلة الدم O ، فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB؟ **H**

F $\frac{1}{51}$
G $\frac{2}{51}$
H $\frac{5}{51}$
J $\frac{1}{3}$

أسئلة مقالية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

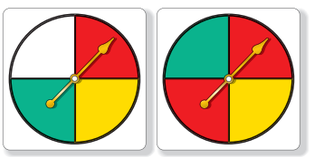
سجّل إجابتك على ورقة الإجابة المعدة لذلك.

8) التقت الصديقتان هدى ودلال بعد عدة سنوات من تخرجهما من الجامعة ودار بينهما الحوار الآتي:

هدى: مرحبًا يا دلال، بلغني أنك تزوجت، فهل رزقك الله أطفالًا؟
دلال: نعم، رزقني الله طفلين.
هدى: وهل رزقك الله بناتٍ؟
دلال: نعم.
اعتمادًا على هذا الحوار، ما احتمال أن يكون لدلال بنتان؟ $\frac{1}{3}$

9) إذا ألقيت أربع قطع من النقود المعدنية معًا مرة واحدة، فما احتمال ظهور أربع صور على أوجهها العلوية؟ $\frac{1}{16}$

10) إذا دار المؤشران في الشكل أدناه حول مركزي القرصين. فما احتمال أن يتوقف كلاهما على اللون الأحمر؟ علمًا بأن القرصين مقسمان إلى أقسام متساوية، وإذا توقف أي من المؤشرين على الخط الفاصل بين الأقسام يعاد تدويرهما. $\frac{1}{8}$



11) يتكون اختبار من 5 أسئلة من نوع الاختيار من متعدد، ولكل سؤال 4 بدائل واحدة منها صحيحة فقط. ما احتمال أن لا يجيب طالب عن أي من هذه الأسئلة إجابة صحيحة؟ $\left(\frac{3}{4}\right)^5$

سؤال ذو إجابة طويلة

سجل إجابتك على ورقة منفصلة، وبيّن خطوات الحل:

12) تحتوي حقيبة على 3 بطاقات حمراء و 5 بطاقات خضراء وبطاقتين صفراوين و 4 بطاقات بنّية و 6 بطاقات بنفسجية. سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا وسُجلّ اللون، ثم أُعيدت إلى الحقيبة.

a) افرض أنه أُجريت محاولتان لهذه التجربة. فهل الحدثان مستقلان أو غير مستقلين؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

b) ما احتمال أن تكون البطاقتان بنفسجيتان؟ 0.09

c) ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى خضراء والثانية بنيّة؟ 0.05

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟												
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
اذهب للدرس ...	3-3	3-1	3-6	3-4	3-5	3-5	3-2	3-5	3-5	3-3	3-6	3-5

التقويم التكويني

يمكن استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

إجابة:

12a) مستقلان؛ لا تؤثر نتيجة السحب الأول على السحب الثاني؛ لأن البطاقة المسحوبة تعاد إلى الحقيبة بعد كل عملية سحب.

بناء الاختبارات
التقـــويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات؛ لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل اختبارات TIMSS أو NAEP .

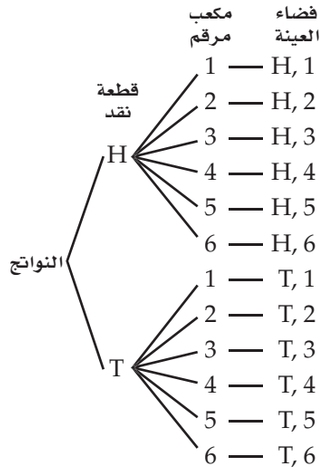
بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل الرابع تعطي الأسئلة الواردة في صفحة **163** واجبًا منزليًّا للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم المتطلبات السابقة للفصل **4**.

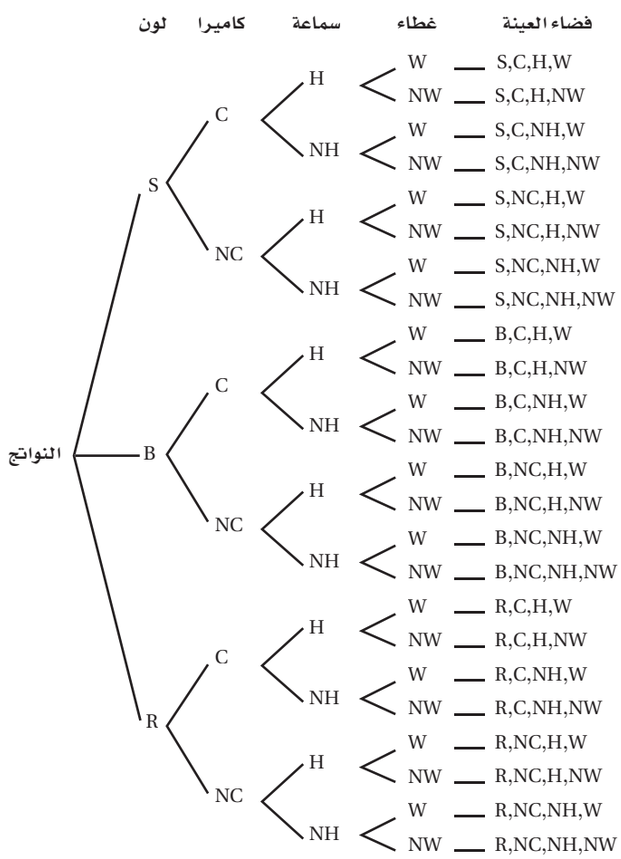
الدرس 1-3 (تأكد) ص 119–114

1) H, 1 ; H, 2 ; H, 3 ; H, 4 ; H, 5 ; H, 6 ;
T, 1 ; T, 2 ; T, 3 ; T, 4 ; T, 5 ; T, 6

النواتج	1	2	3	4	5	6
صورة (H)	H , 1	H , 2	H , 3	H , 4	H , 5	H , 6
كتابة (T)	T , 1	T , 2	T , 3	T , 4	T , 5	T , 6



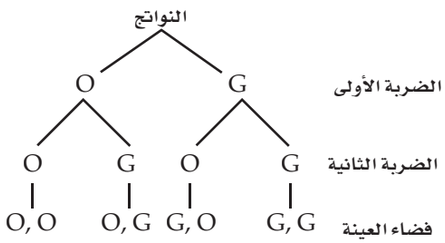
2)



الدرس 1-3 ص 119–114

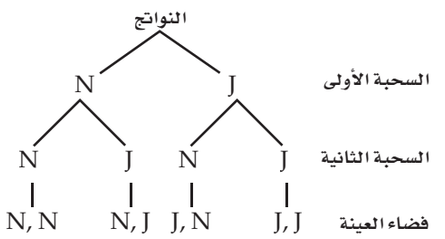
1) G , G O , G
G , O O , O

النواتج	تسجيل (G)	عدم تسجيل (O)
تسجيل (G)	G , G	G , O
عدم تسجيل (O)	O , G	O , O

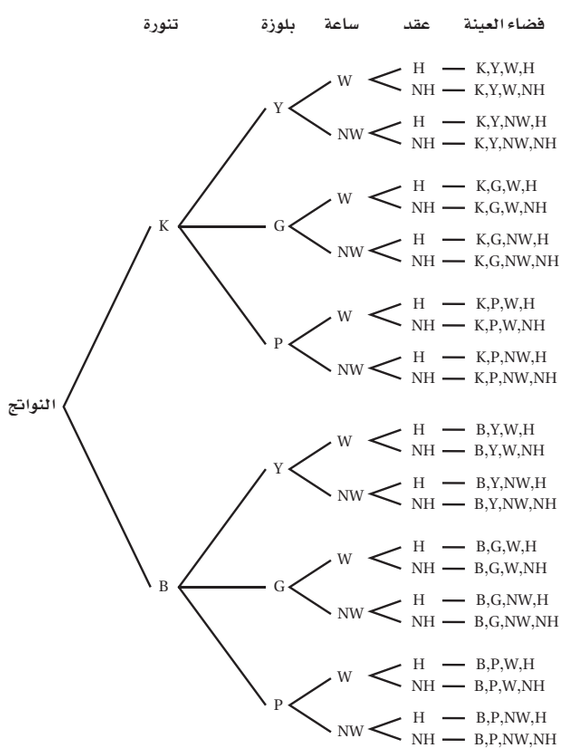


2) J , J N , N
J , N N , J

النواتج	عصير (J)	دفتر (N)
عصير (J)	J , J	N , J
دفتر (N)	J , N	N , N



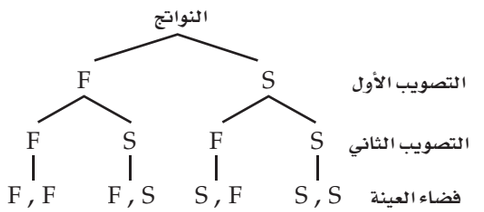
3)



5) S , S F , F

S , F F , S

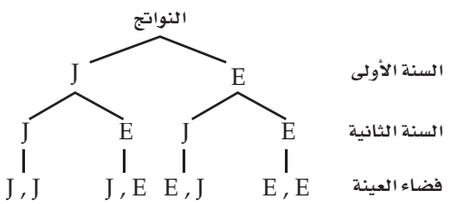
التصويب الأول (F)	التصويب الأول (S)	النواتج
F , S	S , S	التصويب الثاني (S)
F , F	S , F	التصويب الثاني (F)



6) E , J E , E

J , E J , J

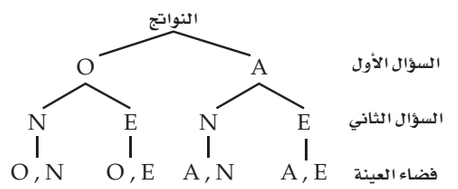
الأردن (J)	مصر (E)	النواتج
E , J	E , E	مصر (E)
J , J	J , E	الأردن (J)



7) E , A E , O

N , A N , O

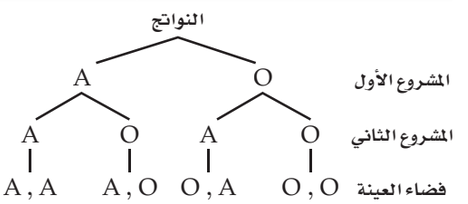
مختلف الأضلاع (N)	متطابق الضلعين (E)	النواتج
N, A	E, A	حاد الزوايا (A)
N, O	E, O	منفرج الزاوية (O)



8) O , O A , A

A , O O , A

زيتية (O)	مائية (A)	النواتج
O , O	A , O	زيتية (O)
O , A	A , A	مائية (A)



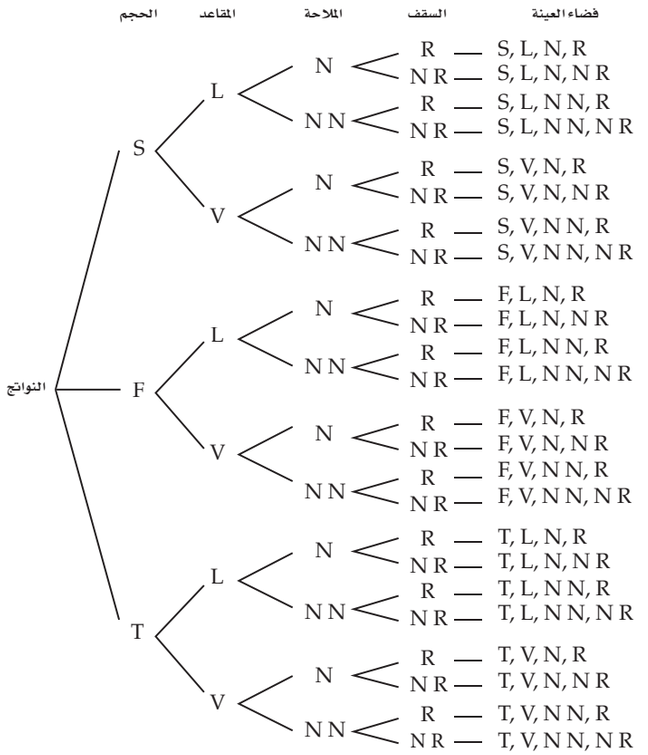
9)

S: صغيرة, F: عائلية, T: نقل,

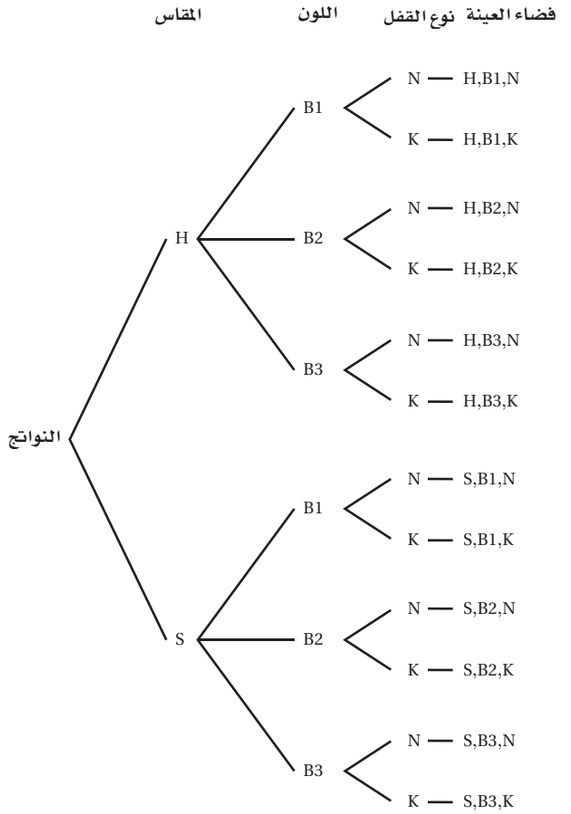
L: جلد, V: قماش,

N: شاشة ملاحة, NN: بدون شاشة ملاحة,

R: سقف متحرك, NR: بدون سقف متحرك,

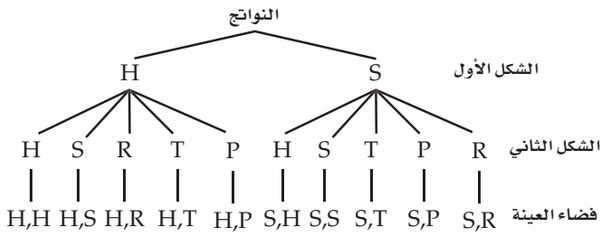


10) كبيرة (H) ، صغيرة (S)، أسود (B1)، بني (B2)، أزرق (B3)، قفل الأرقام (N)، مفتاح (K)

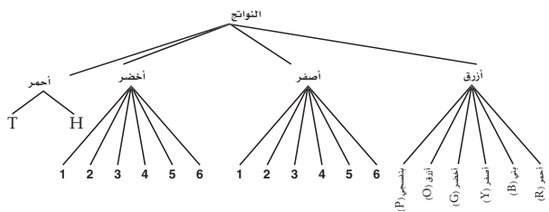


(12

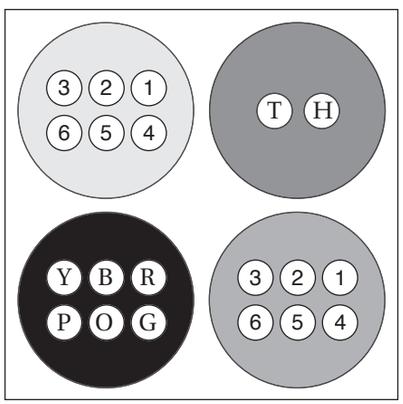
النواتج	معين (H)	مربع (S)
متوازي أضلاع (P)	P, H	P, S
مستطيل (R)	R, H	R, S
مربع (S)	S, H	S, S
شبه منحرف (T)	T, H	T, S
معين (H)	H, H	H, S



(15a



(15b



الدرس 3-2 ، ص 120-126

7 عدد النواتج الممكنة يساوي !50 ، وعدد نواتج الحدث يساوي !48 .

$$\text{احتمال الحدث} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{48!}{50!}$$

$$\text{بفك } 50! = \frac{48!}{50\times49\times48!}$$

$$\text{بالتبسيط} = \frac{1}{2450}$$

9 يوجد 7 حروف. من هذه الحروف ظهر الحرف أ مرتان، والحرف م مرّتان، والحرف ت مرة واحدة، والحرف ك مرة واحدة والحرف ل مرة واحدة. ويمكن حساب عدد التبديلات المختلفة لهذه الحروف كالآتي:

$$\text{باستعمال الحاسبة } \frac{7!}{2!\cdot2!\cdot1!\cdot1!\cdot1!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

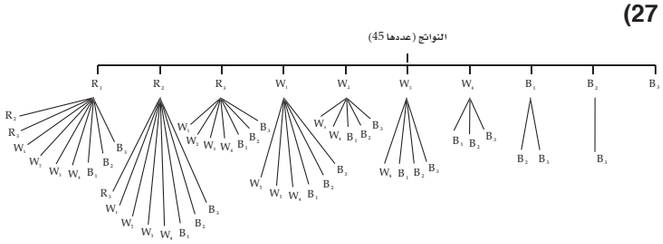
يوجد ترتيبه واحدة فقط لكلمة "مكالمات" ؛ لذا فاحتمال اختيار هذه التبديلة عشوائيًا يساوي $\frac{1}{1260}$.

16) دائمًا؛ إجابة ممكنة: عدد الخيارات المتاحة !(n-1) لوجود مرجع ثابت، وعدد النواتج الممكنة !n ، لذا فالاحتمال يساوي $\frac{1}{n}$.

18) إجابة ممكنة: يحتوي صندوق سبع كرات متماثلة ألوانها حمراء، وبرتقالية، وصفراء، وخضراء، وزرقاء، وسوداء، وبيضاء. إذا سحبت ثلاث كرات معًا عشوائيًا، فاحتمال ظهور الكرات الحمراء والبيضاء والسوداء يمكن حسابه باستعمال التوافيق.

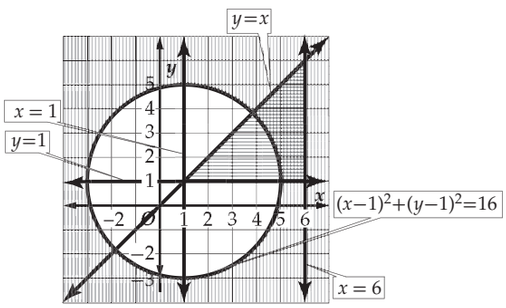
19) صحيحة أحيانًا؛ إجابة ممكنة: العبارة صحيحة عندما $r = 1$.

(27



الدرس 3-3 ، ص 127-132

22 مثِّل بيانيًا منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$ وظلل منطقة تقاطعها مع منطقة حل المتباينة $(x-1)^2+(y-1)^2 \ge 16$



احسب مساحة منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$. منطقة الحل مثلثة الشكل طول قاعدتها 5 وحدات وارتفاعها 5 وحدات.

$$A = \frac{1}{2}(5)(5) = 12.5$$

احسب مساحة تقاطع منطقة حل المتباينة $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$ مع المنطقة المثلثة، وهي على شكل قطاع دائري زاويته 45° .

$$A' = \frac{45}{360}\pi(4^2) \approx 6.28$$

إذن، فاحتمال أن تكون النقطة المختارة داخل منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$ بحيث تحقق المتباينة $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$ يساوي:

$$\frac{6.28}{12.5} \approx 0.5$$

أي أن مساحة منطقة تقاطعهما تساوي نصف مساحة المنطقة المثلثة.

23 حجم المنطقة الضّحلة : $Bh = (7 \cdot 20) \cdot 20 = 2800\, ft^3$

حجم المنطقة المائلة : $Bh = \frac{1}{2}(25)(7 + 20) \cdot 20 = 6750\, ft^3$

حجم المنطقة العميقة : $Bh = (20 \cdot 30) \cdot 20 = 12000\, ft^3$

احتمال أن يسبح الدّب في المنطقة المائلة $= \frac{\text{حجم المنطقة المائلة}}{\text{حجم البركة}}$

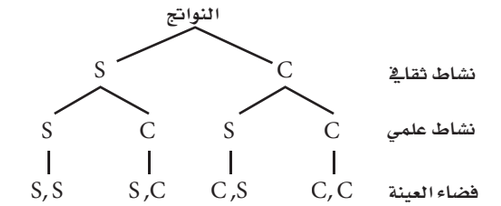
$$= \frac{6750}{2800 + 6750 + 12000}$$

$$\approx 0.31 \approx 31\%$$

34 S , S C , S

S , C C , C

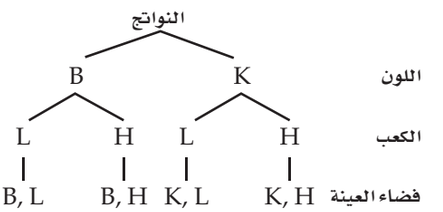
النواتج	نشاط ثقافي (C)	نشاط علمي (S)
نشاط ثقافي (C)	C , C	S , C
نشاط علمي (S)	C , S	S , S



35 K , H B , H

K , L B , L

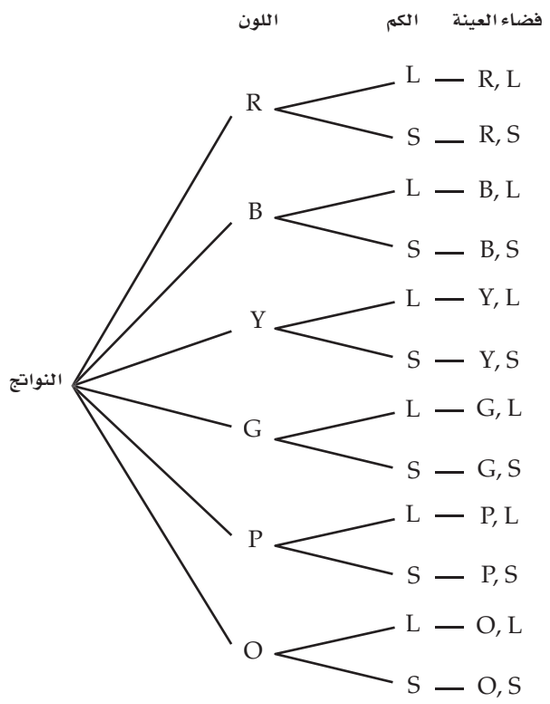
النواتج	كعب مرتفع (H)	كعب منخفض (L)
أسود (K)	K , H	K , L
بني (B)	B , H	B , L



اختبار منتصف الفصل ص 133

3 R, S ، R, L ، B, S ، B, L ، Y, S ، Y, L ، P, S ، P, L ، G, S ، G, L ، O, S ، O, L ،

النواتج	أحمر (R)	أزرق (B)	أصفر (Y)	أخضر (G)	زهري (P)	برتقالي (O)
كم طويل (L)	R, L	B, L	Y, L	G, L	P, L	O, L
كم قصير (S)	R, S	B, S	Y, S	G, S	P, S	O, S



الدرس 4-3 (تأكد) ص 140–134

1) إجابة ممكنة:

الخطوة 1	الاحتمال النظري	النواتج الممكنة
	$\frac{1}{6}$	القطعة رقم 1
	$\frac{1}{6}$	القطعة رقم 2
	$\frac{1}{6}$	القطعة رقم 3
	$\frac{1}{6}$	القطعة رقم 4
	$\frac{1}{6}$	القطعة رقم 5
	$\frac{1}{6}$	القطعة رقم 6

الخطوة 2 نفرض أن لجميع القطع فرصاً متساوية لوضعها على كأس العصير الكبير، وأن على كل كأس قطعة لعبة واحدة فقط.

الخطوة 3 كوّن قرصاً مقسماً إلى 6 قطاعات متساوية مرقمة من 1 إلى 6 و قياس الزاوية المركزية لكل قطاع $60°$.

الخطوة 4 ستتكون التجربة من تدوير المؤشر حتى يستقر على كل من القطاعات الستة، وهذا يمثل عدد كؤوس العصير الكبيرة التي يتعين على الشخص أن يشتريها حتى يجمع قطع اللعبة الست.

4B) إجابة ممكنة: سوف أستعمل مولّد الأعداد العشوائية؛ لتوليد أزواج من الأعداد من 6–1. سيمثل كل عدد في المولّد العدد الظاهر على أحد الحجرين، وسأجمع العددين الظاهرين على الحجرين، وستتكون التجربة من 20 محاولة.

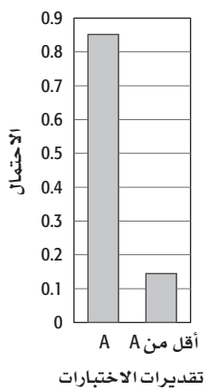
التكرار	الناتج
1	2
0	3
1	4
4	5
1	6
7	7
2	8
2	9
1	10
1	11
0	12

قيمة المُعدّل هي 6.8 ، المُعدّل و القيمة المتوقعة متقاربان، لكن المُعدّل أقل قليلًا من القيمة المتوقعة 7

الدرس 4-3 ص 140-134

1) إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشر دوّار مقسمًا إلى قطاعين يشكّل أحدهما 80% من القرص أو قياس زاويته المركزية °288 ، ويشكّل الآخر 20% من القرص أو قياس زاويته المركزية °72. ونفذ 20 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري.

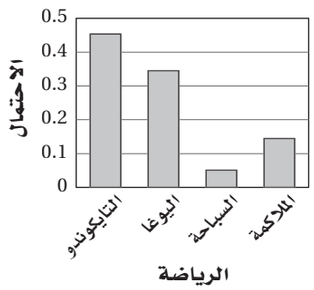
التكرار	الناتج
17	A
3	أقل من A
20	المجموع

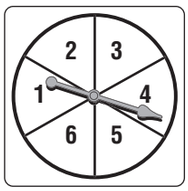


احتمال حصول رباب على A في الاختبار التالي يساوي 0.85 ، واحتمال حصولها على تقدير يقل عن A يساوي $1 - 0.85 = 0.15$

2) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية؛ لتوليد الأعداد من 1 إلى 20، حيث تمثل الأعداد 9–1 التايكوندو، و الأعداد 15–10 اليوغا. والأعداد 18–16 السباحة، والأعداد 20–19 الملاكمة. ونفذ 20 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري.

التكرار	الناتج
9	التايكوندو
7	اليوغا
1	السباحة
3	الملاكمة
20	المجموع

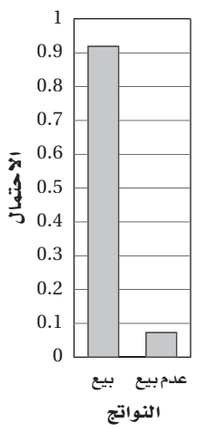




احتمال أن يمارس مشترك جديد رياضة التايكوندو يساوي 0.45، واليوغا يساوي 0.35، والسباحة يساوي 0.05 والملاكمة يساوي 0.15

4 إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشر دوّار مقسمًا إلى قطاعين يشكل أحدهما 95% من القرص أو قياس زاويته المركزية °342 ، ويشكّل الثاني 5% من القرص أو قياس زاويته المركزية °18. ونفذ 50 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري.

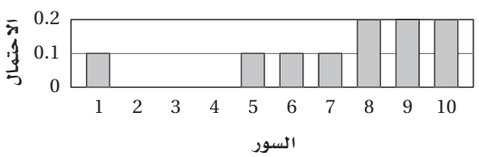
التكرار	الناتج
46	بيع
4	عدم بيع
50	المجموع



احتمال أن بيع حمد لعبة الفيديو يساوي 0.92 ، واحتمال عدم بيع اللعبة يساوي $1 - 0.92 = 0.08$

5) إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشر دوّار مقسمًا إلى 10 أجزاء متساوية قياس الزاوية المركزية لكل منها °36. ونفذ 10 محاولات، وسجل النتائج في جدول تكراري.

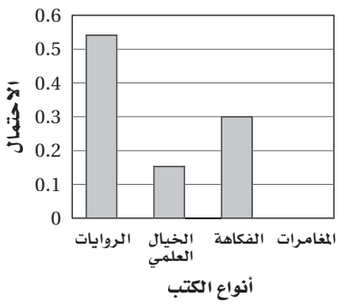
التكرار	الناتج
1	السورة 1
0	السورة 2
0	السورة 3
0	السورة 4
1	السورة 5
1	السورة 6
1	السورة 7
2	السورة 8
2	السورة 9
2	السورة 10
10	المجموع



احتمال الاستماع للسورة 1 يساوي 0.1 ، وللسور 4–2 يساوي 0، وللسور 7–5 يساوي 0.1، وللسور 10–8 يساوي 0.2

6) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية؛ لتوليد الأعداد من 1 إلى 20 حيث تمثل الأعداد 8–1 الروايات، و الأعداد 14–9 الخيال العلمي، والأعداد 19–15 الفكاهة، والعدد 20 المغامرات. ونفذ 20 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري.

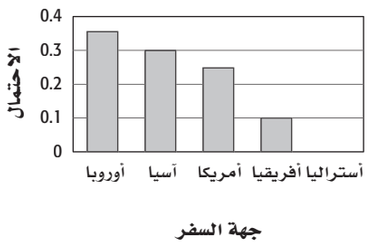
التكرار	الناتج
11	الروايات
3	الخيال العلمي
6	الفكاهة
0	المغامرات
20	المجموع



احتمال أن يختار الزبون رواية يساوي 0.55، والخيال العلمي يساوي 0.15، وأحد الفكاهة يساوي 0.3، والمغامرات يساوي 0

7) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية؛ لتوليد الأعداد من 1 إلى 20 حيث تمثل الأعداد 9-1 السفر إلى أوروبا، و الأعداد 14–10 السفر إلى آسيا، و الأعداد 17–15 السفر إلى أمريكا، والأعداد 19–18 السفر إلى إفريقيا، و العدد 20 السفر إلى أستراليا. ونفذ 20 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري.

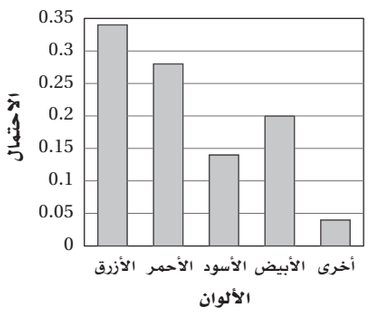
التكرار	الناتج
7	أوروبا
6	آسيا
5	أمريكا
2	إفريقيا
0	أستراليا
20	المجموع



احتمال أن يسافر الزبون إلى أوروبا يساوي 0.35، وإلى آسيا يساوي 0.3، وإلى أمريكا يساوي 0.25، وإلى إفريقيا يساوي 0.1، وإلى أستراليا يساوي 0

8) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية؛ لتوليد الأعداد من 1 إلى 20 حيث تمثل الأعداد 7–1 اللون الأزرق، والأعداد 13-8 اللون الأحمر، والأعداد 16–14 اللون الأبيض، والأعداد 19–17 اللون الأسود، والعدد 20 الألوان الأخرى المتبقية. ونفذ 50 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري.

التكرار	الناتج
17	الأزرق
14	الأحمر
7	الأسود
10	الأبيض
2	أخرى
50	المجموع



احتمال أن يشتري الزبون سيارة زرقاء يساوي 0.34، وسيارة حمراء يساوي 0.28، وسيارة سوداء يساوي 0.14 ، وسيارة بيضاء يساوي 0.2، وسيارة ذات لون آخر يساوي 0.04

10 احسب الاحتمال الهندسي للوقوف على كل لون.

$$P(\text{أحمر}) = \frac{\text{مساحة القطاع الأحمر}}{\text{مساحة الدائرة}}$$
$$= \frac{\pi(0.5)^2}{\pi(5)^2}$$
$$= 0.01$$

المنطقتان الزرقاء والبيضاء متساويتان. ومجموع مساحتيهما يساوي مساحة الدائرة الكبيرة ناقص مساحة القطاع الأحمر أو $\pi(5)^2 - \pi(0.5)^2$ أو 77.8 وحدة مربّعة تقريبًا؛ إذن مساحة كل من المنطقة الزرقاء والمنقطة البيضاء 38.9 وحدة مربّعة تقريبًا.

$$P(\text{أزرق}) = \frac{\text{مساحة القطاع الأزرق}}{\text{مساحة الدائرة}}$$
$$= \frac{38.9}{\pi(5)^2}$$
$$= 0.495$$

$$P(\text{أبيض}) = P(\text{أزرق}) = 0.495$$

$$E(Y) = 25 \cdot 0.495 + 50 \cdot 0.495 + 0.01 \cdot 100$$

$$E(Y) = 38.125$$

إجابة ممكنة:

قيمة المعدل تساوي 35.5؛ والقيمة المتوقعة أكبر من قيمة المعدل.

13 **a)** إجابة ممكنة:

9, 10, 6, 6, 7, 9, 5, 9, 5, 7, 6, 5, 7, 3, 9, 7, 6, 7, 8, 7

b) إجابة ممكنة:

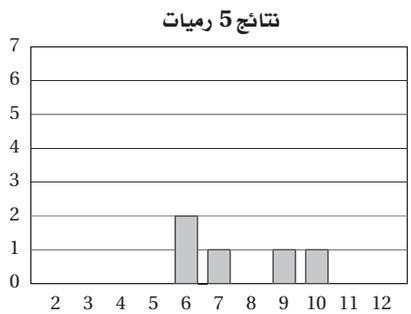
4, 10, 5, 10, 6, 7, 12, 3, 7, 4, 7, 9, 3, 6, 4, 11, 5, 7, 5, 3

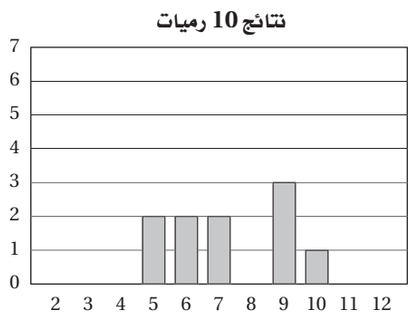
c) إجابة ممكنة:

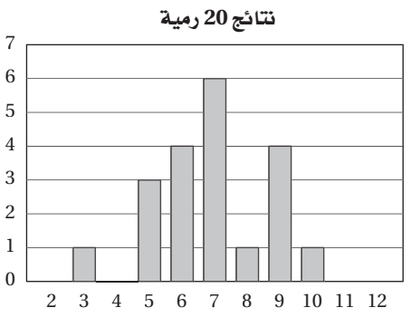
التجربة	مجموع الرقمين لكل رمية	مجموع النواتج من مولد الأعداد العشوائية
1	9	4
2	10	10
3	6	5
4	6	10
5	7	6
6	9	7
7	5	12
8	9	3
9	5	7
10	7	4
11	6	7
12	5	9
13	7	3
14	3	6
15	9	4
16	7	11
17	6	5
18	7	7
19	5	5
20	7	3

d) إجابة ممكنة:

النتيجة	التكرار
أحمر	7
أزرق	29
أبيض	21
المجموع	50

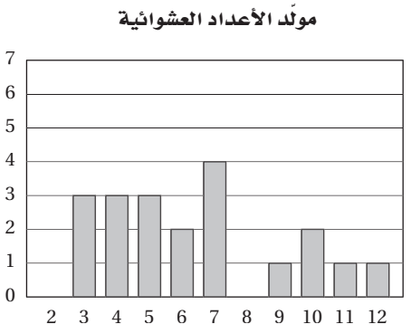






e) إجابة ممكنة: يزيد عدد القيم الواقعة في وسط المدرج التكراري كلما أضيفت نتائج محاولات جديدة.

f) إجابة ممكنة:



14) إجابة ممكنة: نعم، لو قسّم القرص إلى 3 قطاعات متساوية فسيكون قياس الزاوية المركزية لكل قطاع °120. وبما أن المطلوب هو معرفة احتمال الناتج C فيمكن اعتبار استقرار المؤشر على القطاع الأحمر نجاحًا أي ظهور الناتج C ، واعتبار استقرار المؤشر على القطاع الأزرق فشلاً أو ظهور الناتجين A أو B.

15) أحيانًا، إجابة ممكنة: يمكن استعمال تجربة رمي قطعة نقد لمحاكاة تجربة ذات ناتجين عندما يكون احتمالاهما متساويين. أما إذا كان احتمالا الناتجين مختلفين، فإن استعمال قطعة النقد غير مناسب.

16a) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية؛ لتوليد 20 مجموعة في كل منها 5 أعداد يكون كل منها 0 أو 1. افرض أن 0 تمثل الشعار و 1 تمثل الكتابة. ثم أوجد عدد المحاولات التي ظهرت فيها النتيجة واحد ثلاث مرات لحساب الاحتمال التجريبي للحصول على الكتابة في الرميات الثلاث.

16b) إجابة ممكنة: نعم؛ يمكن أن تعد المحاولات التي فيها النتيجة واحد ثلاث مرات أو أكثر لحساب الاحتمال التجريبي للحصول على كتابة في 3 رميات أو أكثر.

16c) إجابة ممكنة: تحتوي بيانات المحاكاة 6 محاولات ظهر في كل منها العدد 1 ثلاث مرات بالضبط، وعليه يكون الاحتمال التجريبي لظهور الكتابة 3 مرات بالضبط يساوي $\frac{6}{20}$ أو 0.3 أو 30%

المحاولة	النواتج				
1	1	1	1	0	0
2	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	1
4	1	0	1	1	0
5	1	0	0	1	1
6	0	0	1	1	1
7	0	1	1	0	1
8	0	1	1	1	1
9	1	0	1	0	0
10	0	0	0	1	1
11	0	0	0	0	1
12	1	0	1	0	0
13	1	0	0	0	1
14	1	0	0	1	0
15	1	1	0	0	0
16	1	0	1	1	0
17	0	0	1	0	0
18	0	0	1	0	1
19	1	0	0	0	0
20	0	1	1	1	1

17) إجابة ممكنة: القيمة المتوقعة عند إلقاء مكعب الأرقام لا تساوي أي واحد من النواتج. ولجميع أوجه المكعب الاحتمال نفسه.

فإن احتمال ظهور كل رقم يساوي $\frac{1}{6}$. وعليه فتكون القيمة المتوقعة:

$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=3.5$$

وبما أن 3.5 ليست من مجموعة النواتج الممكنة، فإن القيمة المتوقعة لا تساوي أي واحد من النواتج.

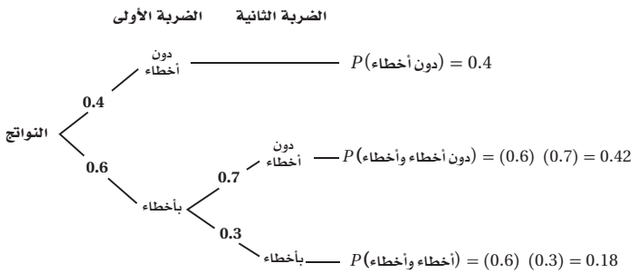
18) إجابة ممكنة: يتطلب تصميم محاكاة أولاً أن تحدد جميع النواتج الممكنة، والاحتمال النظري لكل ناتج. وعندما تعرف النواتج واحتمال كل واحد منها يجب أن تذكر أي افتراضات تضعها في المسألة. ثم اختر نموذجًا احتماليًّا ترغب في استعماله في المحاكاة، وعرّف كل ناتج بدلالة النموذج المستعمل، وحدد عدد المحاولات التي ستنفذها. وبعد الانتهاء من التخطيط للمحاكاة نفذ العدد المحدد من المحاولات الذي يضمن أن يعطي مجموعة بيانات مناسبة، وسجل هذه البيانات في كل محاولة. وأخيرًا حلّل بيانات المحاكاة لتحديد الاحتمال التجريبي لواحد من النواتج أو أكثر.

الدرس 3-5 ص 141-146

16) قانون إيجاد $P(A \cap B)$ $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

بقسمة الطرفين على $P(A)$ $\quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$

17a)



18) مهند؛ بما أن الحدثان مستقلان، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
وبالتعويض عن $P(A \cap B)$ في قانون الاحتمال المشروط:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

فإن $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

19) 7 ؛ إجابة ممكنة: احتمال سحب العنصر A يساوي $\frac{1}{n}$ ، واحتمال سحب العنصر B إذا لم يعد العنصر A يساوي $\frac{1}{n-1}$.
وبما أن احتمال الحدثين معًا يساوي 2.4%، فإن $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{2.4}{100} = 0.024$. وباستعمال استراتيجية التخمين والتحقق نجد أن $n = 7$.

20) صحيحة دائمًا؛ إجابة ممكنة: كل من $P(B \cap A), P(A \cap B)$، يساوي ناتج ضرب $P(A), P(B)$ ؛ لأنهما حدثان مستقلان، فاحتمال الحدث الثاني لا يتغير تبعًا لنتائج الحدث الأول.

21) إجابة ممكنة: رمي قطعة نقود مرتين تمثل حدث مستقل. بصرف النظر عن ناتج الرمية الأولى، فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة في الرمية الثانية لا يتغير عما كان عليه في الرمية الأولى، على حين أن سحب كرتين من وعاء يحتوي كرات ملونة دون إرجاع الكرة الأولى يمثل حدث غير مستقل، إذ يتغير احتمال أن تكون الكرة الثانية من لون معين تبعًا للون الكرة الأولى.

22) تُبيّن شجرة الاحتمال جميع النواتج الممكنة للحدث المركب التي تظهر في فضاء العينة. و احتمال كل ناتج هو نسبة هذا الناتج من فضاء العينة. وبما أن مجموع احتمالات هذه النواتج يساوي مجموع نسب هذه النواتج من فضاء العينة فهي تساوي فضاء العينة منسوبًا إلى فضاء العينة نفسه وهذا يساوي 1.

الدرس 3-6 ص 147-153

15 أوجد احتمال أن يكون العامل الأول يقبض أجرته بالساعة زائد احتمال أن يكون العامل الثاني يقبض أجرته بالساعة. واحتمال أن يكون العامل لا يقبض أجرته بالساعة يساوي $1 - 0.71 = 0.29$.

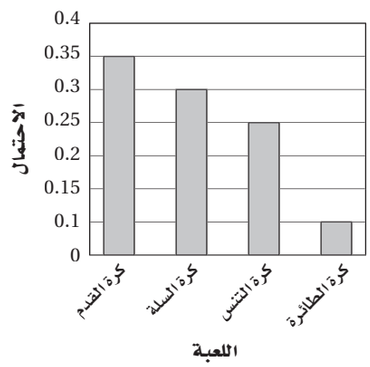
(الثاني يقبض أجرته بالساعة) P + (الأول يقبض أجرته بالساعة) P

= (الثاني لا يقبض أجرته بالساعة) P • (الأول يقبض أجرته بالساعة) P +
(الأول لا يقبض أجرته بالساعة) P • (الثاني يقبض أجرته بالساعة) P
$\approx 0.71(0.29) + 0.71(0.29)$
$\approx 0.21 + 0.21$ أو 0.42

فالاحتمال هو $0.42 \approx 42\%$

27) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية؛ لتوليد الأعداد من 1 إلى 20. حيث تمثل الأعداد 1–7 كرة القدم، و الأعداد 8–13 كرة السلة، والأعداد 14–17 كرة التنس، والأعداد 18-20 كرة الطائرة. ونفذ 20، محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري.

الناتج	التكرار
كرة القدم	7
كرة السلة	6
كرة التنس	5
كرة الطائرة	2
المجموع	20

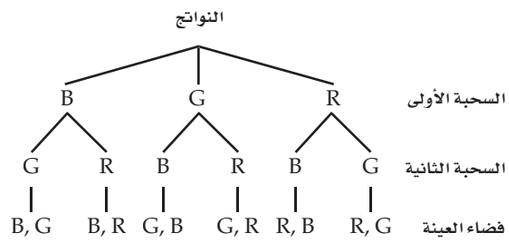


احتمال أن يلعب أحد رياضيي المدرسة كرة القدم فقط يساوي 0.35، وكرة السلة فقط يساوي 0.30، وكرة التنس فقط يساوي 0.25، وكرة الطائرة فقط يساوي 0.1

اختبار الفصل ص 157

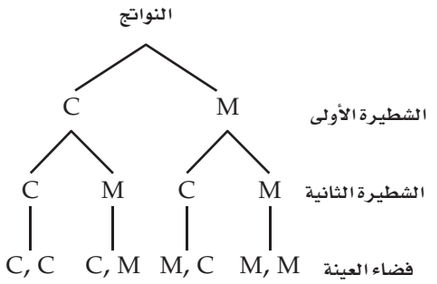
5) G,B ; R,B ; B,G ; R,G ; B,R ; G,R

النواتج	(R)	(G)	(B)
(R)		R , G	R , B
(G)	G , R		G , B
(B)	B , R	B , G	



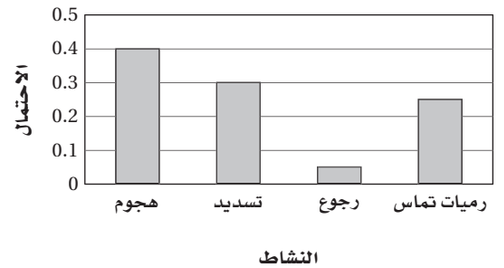
6) M, M ; M, C ; C, M ; C, C

النواتج	(M) لحم	(C) جبن
(M) لحم	M , M	M , C
(C) جبن	C , M	C , C



17) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية، لتوليد الأعداد من 1 إلى 20. حيث تمثل الأعداد 8–1 الهجوم، و الأعداد 14–9 التسديد، والعدد 15 رجوع اللاعبين، و الأعداد 20–16 رميات التماس. ونفذ 20 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري، واستعمل النتائج لإيجاد احتمال كل واحد من هذه النشاطات.

الناتج	التكرار
هجوم	8
تسديد	6
رجوع	1
رميات تماس	5
المجموع	20



احتمال أن يهاجم يساوي 40% و أن يسدد نحو المرمى يساوي 30%، وأن يتراجع 5% ، وأن ينفذ رمية تماس يساوي 25%

ملاحظات

الفصل 4

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (163)

	الدرس 4-1 3 حصص	الدرس 4-2 حصتان ونصف	الدرس 4-3 حصتان	الدرس 4-4 حصتان
العنوان	ضرب التعابير النسبية وقسمتها	جمع التعابير النسبية وطرحها	تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا	تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا
الأهداف	• تبسيط التعابير النسبية. • تبسيط الكسور المركبة.	• حساب المضاعف المشترك الأصغر (م.م.أ) لكثيرات الحدود. • جمع التعابير النسبية وطرحها.	• تحديد خصائص دوال المقلوب من التمثيل البياني. • تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانيًّا.	• تمثيل دوال نسبية بيانيًّا لها خطوط تقارب رأسية و أفقية. • تمثيل دوال نسبية بيانيًّا لها نقطة انفصال.
المفردات الأساسية	التعبير النسبي الكسر المركب		دالة المقلوب القطع الزائد، خطوط التقارب	الدالة النسبية خط التقارب الرأسي خط التقارب الأفقي نقطة الانفصال
تمثيلات متعددة	ص (171)		ص (183)	
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (23) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون • تدريس الجبر باليدويات ضمن دون	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (24) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 1 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (25) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 2 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (25) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية	آلات التصوير التوثيقية	السبورة التفاعلية	تصوير فيديو
تنويع التعليم	ص(165)	ص (175)	ص (181)	ص (187)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (185)

المفاتيح: دون : دون المتوسط ضمن : ضمن المتوسط فوق : فوق المتوسط

العلاقات والدوال النسبية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(15) حصة	(2) حصة	(17) حصة

توسع 4-4 نصف حصة	الدرس 4-5 حصتان	الدرس 4-6 حصتان ونصف	توسّع 4-6 نصف حصة
معمل الآلة الحاسبة البيانية: تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا	**التغيُّر**	**حل المعادلات النسبية**	**معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل المعادلات النسبية**
• استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل الدوال النسبية بيانيًّا.	• تمييز مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك وحلها. • تمييز مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركب وحلها.	• حل معادلات نسبية.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لحل المعادلات النسبية بيانيًّا أو باستعمال خاصية الجدول.
	التغيُّر الطردي ثابت التغيُّر أو ثابت التناسب، التغير المشترك، التغير العكسي، التغير المركب	معادلات نسبية الوسط الحسابي الموزون	
		ص (205)	
المواد اللازمة • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (27) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • نشاط الجداول الإلكترونية ضمن • اختبار قصير 3 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة ضمن دون • تدريبات المهارات ضمن دون • كتاب التمارين، ص (28) فوق ضمن دون • تدريبات المسائل اللفظية فوق ضمن دون • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 4 فوق ضمن دون **مصادر إضافية** • كراسة الطالب فوق ضمن دون	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية
الآلة الحاسبة البيانية	**تسجيل صوتي**	**آلات التصوير التوثيقية**	**الآلة الحاسبة البيانية**
	ص (196)	ص (204)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة و المراجعة ص (208-211)
- اختبار الفصل، ص (212)

التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 4	المرجع		المرجع
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الرابع ، ص (163)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة ، ص (163)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، وَالآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد، تأكد من فهمك	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	تنبيه!	دليل المعلم	دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	(الخطوة 4) التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (185)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة و المراجعة للفصل 4، ص (208-211)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم و المهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (212)		تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار معياري تراكمي ، ص (213-216)	كتاب الطالب	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 4**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة و المعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة	مصادر الفصل		
	تدريبات اختبار معياري	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل		

الفصل 4

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات فوق ضمن دون

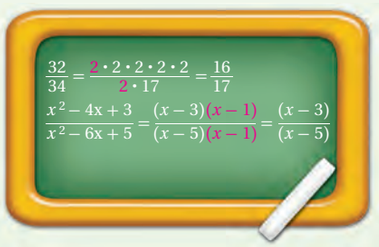
المتعلمون المتفاعلون: قسم الطلبة إلى مجموعات رباعية. بما أن هناك عددًا من المهام المتعلقة بتمثيل دالة المقلوب التي على الصورة $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ بيانيًّا. لذا، اطلب إلى كل مجموعة أن تختار المهام التي تناسب كل فرد فيها لتمثيل دالة معينة بيانيًّا، فعلى سبيل المثال يكون أحد الأعضاء مسؤولًا عن إيجاد قيمة a, h, k ، وآخر مسؤولًا عن تحديد خطوط التقارب، وعضو ثالث مسؤولًا عن تعويض قيم x في الدالة وتحديد النقاط على المستوى البياني.

المتعلمون المنطقيون: خلال شرحك وتوضيحك لأنواع دوال التغير المختلفة، اطلب إلى الطلبة أن يكملوا الجدول الآتي؛ ليساعدهم على تحديد الأنواع جميعها:

نوع التغير	المعادلة	التمثيل البياني
طردي		
مشترك		
عكسي		
مركب		

البديل 2 دون المتوسط دون

اكتب كلًّا من الكسر والتعبير النسبي أدناه على السبورة:



راجع مع الطلبة كيفية تبسيط الكسور، والتي تتم بقسمة البسط والمقام على العوامل المشتركة، مع ملاحظة أن تكرار رقم في عددين لايعني أن ذلك الرقم عامل مشترك لهما ، فمثلًا لايمكن اعتبار الرقم 3 عاملًا مشتركًا للعددين 32 , 34 ، ثم اشترك مع طلبة الصف في تبسيط التعبير النسبي، ووضح لهم أنه على الرغم من أن الحد x^2 يظهر في البسط و المقام إلا أنه ليس عاملاً مشتركًا بينهما؛ لأن x^2 هو حد في كل منهما وليس عاملاً مشتركًا. واستعمل الألوان لتوضيح العوامل المشتركة.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اكتب كسرًا وتعبيرًا نسبيًّا على السبورة. واطلب إلى الطلبة أن يجدوا كسرين يكون مجموعهما مساويًا للكسر الذي كتبته على السبورة. ثم اطلب إليهم أن يستعملوا طريقة التفكير نفسها؛ لإيجاد تعبيرين نسبيين يكون مجموعهما مساويًا للتعبير النسبي الذي كتبته أيضًا. وَحتى تكون المسألة أكثر صعوبة وتحديًا اطلب إليهم أن يكتبوا تعبيرين نسبيين مقاماهما مختلفان عن مقام التعبير الذي كتبته على السبورة ولكن مجموعهما يساوي التعبير النسبي.

الفصل 4

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 4

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال الخصائص: الإبدالية، التجميعية، التوزيعية؛ لتبسيط التعابير الجبرية.
- تحديد المجال والمدى رياضيًّا للتعبير الجبري، ثم تحديد المجال والمدى المناسبين وفقًا للموقف المعطى.
- حل مسائل تتضمن تناسبات.
- تمثيل الدوال الأم بيانيًّا بما فيها الدوال الخطية.
- إعادة صياغة المعادلات وحلها بطرق مختلفة بما فيها طريقة التحليل.

الفصل 4

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تحديد خصائص دوال المقلوب وتمثيل تحويلاتها الهندسية بيانيًّا.
- استعمال قسمة كثيرات الحدود؛ لوصف منحنيات الدوال النسبية، و وصف سلوك الدالة عند أطراف المجال، باستعمال خطوط التقارب.
- تحديد القيود على المجال والمدى للدالة النسبية ضمن ظروف معينة وإيجاد حلول المعادلات النسبية.
- تحليل المواقف التي يمكن تمثيلها بالدوال النسبية، وثم تحويلها لمعادلة خطية أو تربيعية وحلها.
- استعمال دوال التغيّر الطردي أو العكسي للتعبير عن مواقف معينة وتكوين تخمين مرتبط بهذه المواقف.

ما بعد الفصل 4

الإعداد لحساب التفاضل و التكامل

- تحديد مجال الدوال ومداها باستعمال التمثيل البياني، والجداول، والرموز.
- استقصاء مفاهيم الاتصال، سلوك طرفي الدالة وخطوط التقارب، وربطها بدالة ممثلة بيانيًّا وعدديًّا.

نظرة على الدروس

4-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

سيطبق الطلبة في هذا الدرس ما تعلموه عن الكسور على التعابير النسبية (النسبة بين كثيرتي حدود).

- إيجاد أصفار المقام للدوال النسبية لاستثناء تلك القيم؛ لأنها تجعل الكسر غير معرَّف.
- تبسيط التعابير النسبية وذلك بقسمة البسط والمقام على العوامل المشتركة لها حتى يصبح القاسم المشترك لهما مساويًا للواحد مع مراعاة أن خارج قسمة $(a - b)$ على $(b - a)$ هو -1.
- تُضرب التعابير النسبية كما في الكسور العادية، إذ نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.
- تُقسم التعابير النسبية كما في الكسور العادية، إذ يُضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.
- تُبَسَّط التعابير النسبية المركبة كما في الكسور المركبة، حيث نُعيد كتابتها على صورة حاصل قسمة تعبيرين نسبيين.

4-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

تشبه عملية جمع التعابير النسبية وطرحها جمع الكسور وطرحها، حيث نحتاج إيجاد المضاعف المشترك الأصغر (م.م.أ) لكثيرتي حدود أو أو أكثر، وذلك بتحليل كثيرات الحدود لعواملها الأولية وإيجاد حاصل ضرب العوامل المشتركة بالأس الأكبر والعوامل غير المشتركة.

جمع التعابير النسبية وطرحها :

- تأكد أن للتعبيرين المقام نفسه. وإذا لم يكن لهما المقام نفسه. فأوجد (م.م.أ) لمقامي التعبيرين النسبيين، وأعد كتابة كل تعبير على صورة تعبير مكافئ مقامه (م.م.أ).
- ناتج جمع تعبيرين نسبيين أو طرحهما لهما المقام نفسه هو تعبير نسبي مقامه المقام المشترك و بسطه هو حاصل جمع أو طرح بسطي التعبيرين.

العلاقات والدوال النسبية

4-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا

دالة المقلوب هي دالة قاعدتها على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x)$ دالة خطية ، $a(x) \neq 0$.

تحتوي دوال المقلوب على انفصال عند الأعداد المستثناة من المجال ، كما يوجد لبعضها خطوط تقارب وهي الخطوط التي يقترب منها منحنى الدالة ولا يقطعها.

- **يبيّن خط التقارب الرأسي النقاط التي تكون عندها الدالة غير معرفة، وهي النقاط التي تكون عندها $a(x) = 0$.**
- **يبيّن خط التقارب الأفقي سلوك الدالة عند الأطراف.**

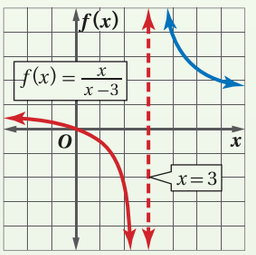
لتمثيل التحويلات الهندسية لدوال المقلوب بيانيًّا نطبق أساليب التحويلات الهندسية على الدالة الأم وهي $f(x) = \frac{1}{x}$.

4-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا

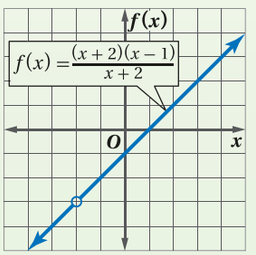
تكتب قاعدة الدالة النسبية على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$، $b(x)$ كثيرا حدود ، $b(x) \neq 0$.

يوجد لبعض التمثيلات البيانية للدوال النسبية انفصالات تظهر على صور مختلفة مثل:

- خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.



- **نقطة انفصال أو فجوة في التمثيل البياني، ويظهر هذا النوع عند $x = c$ عندما يكون $(x - c)$ عاملاً من عوامل البسط و المقام معًا.**



يوجد للدالة النسبية على الأكثر خط تقارب أفقي واحد و هو:

- **$y = 0$، عندما تكون درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$.**
- **المستقيم الذي معادلته:**

$y =$ **المعامل الرئيس في $a(x)$** / **المعامل الرئيس في $b(x)$**، عندما تكون درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$.

- **إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.**

ويمكن للطلبة استعمال خطوط التقارب مع جدول القيم لتمثيل الدالة بيانيًّا.

4-5 التغيُّر

- تكتب دالة التغيُّر الطردي على الصورة $y = k\,x$ والتي تكافئ $k = \frac{y}{x}$، حيث k عدد حقيقي. وتمثيلها البياني مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله يساوي k.
- تنتج دالة التغيُّر المشترك عندما تتغير y مع كل من x ، z و يوجد عدد غير صفري k بحيث أن $y = kxz$.
- تكتب دالة التغيُّر العكسي على الصورة $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$. ويكون منحنى هذه الدالة على صورة قطع زائد.
- تنتج دالة التغيّر المركب عندما تتغير كمية مع كميتين أخريين أو أكثر طرديًّا أو عكسيًّا.

4-6 حل المعادلات النسبية

تُسمى المعادلات التي تحوي تعبيرًا نسبيًّا أو أكثر معادلة نسبية، ويمكن استعمال المهارات نفسها التي استعملت في حل المعادلات الخطية؛ لحل المعادلات النسبية بعد ضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر للمقامات. ويجب التأكد من جميع الحلول التي نحصل عليها بتعويضها في المعادلة الأصلية؛ لتحديد الحلول المستثناة.

يمكن استعمال المعادلات النسبية؛ لحل المسائل المتعلقة بالوسط الحسابي الموزون، حيث إن الوسط الحسابي الموزون لمجموعة القيم يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات. وتحتوي هذه المسائل على مسائل تتعلق بالعمل، المحاليل، المسافات والأرباح.

مشروع الفصل

رحلة بالطائرة

سيستعمل الطلبة المفاهيم والمعلومات التي تعلموها عن الدوال النسبية و التناسب؛ لاستقصاء رحلة طائرة.

- اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية لحساب السرعة المتوسطة لطائرة خلال رحلتها من الرياض إلى مملكة البحرين باستعمال العلاقة $v = \frac{d}{t}$، حيث v السرعة المتوسطة للطائرة، d المسافة المقطوعة، t الزمن اللازم لقطع المسافة وهي 420 km تقريبًا.
- لحساب السرعة المتوسطة للطائرة يمكن الأخذ بعين الاعتبار زمن (الانتظار، التفتيش، ...). إذا قدّر هذا الزمن بساعتين، فإن المعادلة التي تستعمل لحساب السرعة المتوسطة المعدلة هي: $v = \frac{d}{t+2}$.

أوجد السرعة المتوسطة المعدلة للطائرة للرحلة نفسها التي قطعت خلالها الطائرة 420 km تقريبًا.

- ما السرعة المتوسطة التي يجب أن تسير بها الطائرة في أثناء تحليقها ليتساوى زمن الرحلة مع انتظار وزمنها دون انتظار؟

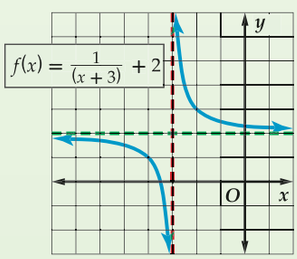
المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملاً الخطوات الآتية:

تعريف: خط التقارب هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

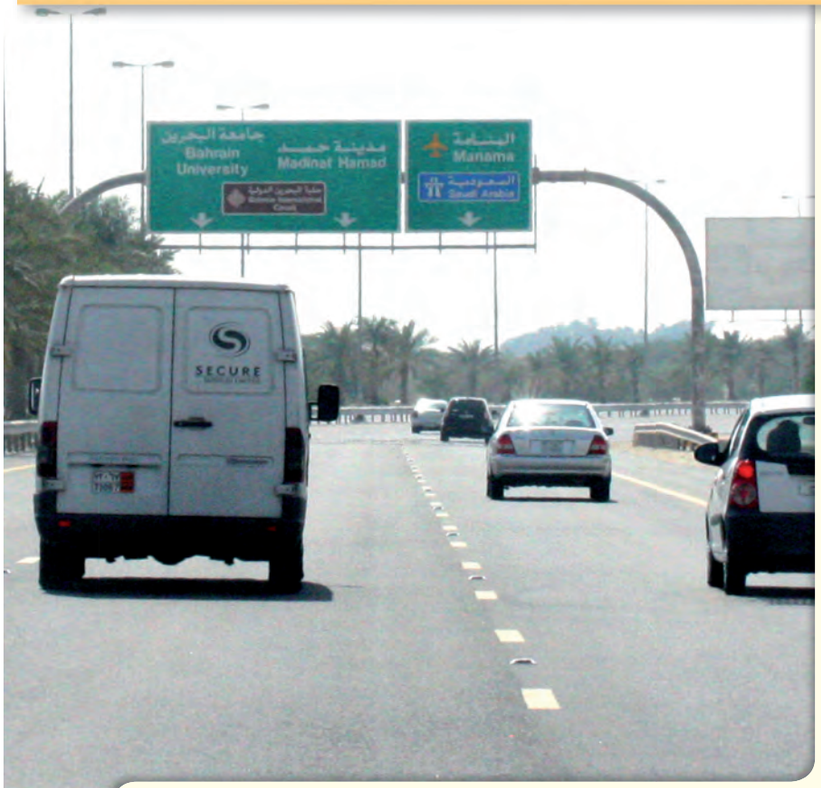
مثال: يوضح الشكل أدناه خطي التقارب عند $x = -3$، و عند $y = 2$.

سؤال: ما الذي يوضحه خط التقارب الرأسي؟

يوضح متى تكون الدالة غير معرفة.



الفصل 4 العلاقات والدوال النسبية
Rational Functions and Relations



فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية باستعمال التحليل إلى العوامل. وتمثيل المعادلات التربيعية بيانيًا.

والآن

الأفكار العامة

- أتعرّف التعابير النسبية.
- أبسّط تعابير نسبية.
- أمثّل دوال نسبية بيانيًا.
- أحل مسائل على التناسب الطردي والتناسب المشترك والتناسب العكسي.
- أحل معادلات نسبية.

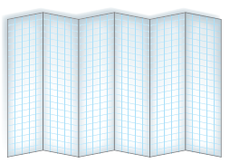
لماذا؟

سفر: يمكن استعمال الدوال النسبية عند السفر من مكان إلى آخر لإيجاد المسافة، والزمن، والسرعة، سواء أكان سفرك بالسيارة، أم بالطائرة، أم حتى بالدراجة الهوائية. فإذا أردت الوصول إلى نقطة معينة في زمن معين، يمكن أن تستعمل العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتصل إلى هدفك. وعند تمثيل الدوال النسبية بيانيًا ستلاحظ بوضوح كيف تؤثر السرعة التي تسير بها في الزمن اللازم لقطع مسافة معينة.

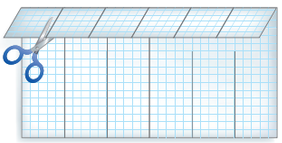
مطوياتك منظم أفكار

العلاقات والدوال النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك للفصل الرابع حول العلاقات والدوال النسبية. مبتدئًا بورقة مربعات.

1. **اطو** الورقة عرضيًا ست طيات متساوية الطول.



2. **اطو** الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، ثم قص على خط الطي العرضي حتى حافة الطي الطولية كما في الشكل.



3. **اكتب** عنوان كل درس على الجهة الخارجية للأشرطة الستة العلوية، واستعمل الجهة الداخلية في كتابة التعريفات والملاحظات.

مطوياتك منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلبة ملاحظاتهم حول العلاقات والدوال النسبية في هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة أن يعملوا مطوياتهم ويكتبوا العناوين المناسبة ويسجلوا فيها ملاحظاتهم وأمثلتهم حول مفاهيم كل درس.

وقت استعمالها شجع الطلبة في أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات في الصفحات المناسبة إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

CRM **مسرد مفردات الطالب، ص (1,2)** يقوم الطلبة بإكمال مسرد مفردات الطالب، بتقديم تعريف مناسب لكل مفردة ومثال عليها خلال دراسة الفصل. وتستعمل هذه الأداة أيضًا للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل الرابع

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

حُلّ كل معادلة مما يأتي، واكتب الناتج في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

1) $\frac{5}{14}=\frac{1}{3}x$ ، $x=\frac{15}{14}$ 2) $\frac{1}{8}m=\frac{7}{3}$ ، $m=\frac{56}{3}$

3) $\frac{8}{5}=\frac{1}{4}k$ ، $k=\frac{32}{5}$ 4) $\frac{10}{9}p=7$ ، $p=\frac{63}{10}$

5) **شاحنات:** استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ سعة خزان وقودها في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 18 gal من الوقود عند نهاية الرحلة، فما سعة خزان وقود الشاحنة؟ (مهارة سابقة) 27 gal

بسّط كل تعبير مما يأتي: (مهارة سابقة)

6) $\frac{3}{4}-\frac{7}{8}$ ، $-\frac{1}{8}$ 7) $\frac{8}{9}-\frac{7}{6}+\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{18}$

8) $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}+\frac{1}{3}$ ، $\frac{29}{30}$ 9) $\frac{10}{3}+\frac{5}{6}+3$ ، $\frac{43}{6}$

10) **دقيق:** تستعمل علياء $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $4\frac{1}{2}$ أكواب منه لعمل كعكة الفانيليا. كم كوبًا من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟ (مهارة سابقة) $5\frac{1}{6}$ كوب

حُلّ كل تناسب مما يأتي: (مهارة سابقة)

11) $\frac{9}{12}=\frac{p}{36}$ ، $p=27$

12) $\frac{9}{18}=\frac{6}{m}$ ، $m=12$

13) $\frac{2}{7}=\frac{5}{k}$ ، $k=17.5$

14) **تسوق:** تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشترى ملابس بقيمة BD 550، ودفع مبلغ BD 440 بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر نفسه بقيمة BD 350 خلال الموسم نفسه، فكم يدفع؟ (مهارة سابقة) BD 280

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ المعادلة $\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$ ، واكتب الناتج في أبسط صورة:

$\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$

$\frac{72}{11}=7r$ بضرب كلا الطرفين في العدد 8

$\frac{72}{77}=r$ بقسمة كلا الطرفين على العدد 7

بما أن ع.م.أ للعددين 77 , 72 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط التعبير $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$.

$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right)-\frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right)$ م.م.أ للمقامات 3, 4, 6 هو العدد 12

$=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}-\frac{10}{12}$ بالتبسيط

$=\frac{3}{12}$ بالجمع والطرح

$=\frac{3\div 3}{12\div 3}=\frac{1}{4}$ بالتبسيط

مثال 3

حُلّ التناسب $\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$.

$\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$ المعادلة الأصلية

$5(11)=8u$ بالضرب التبادلي

$55=8u$ بالتبسيط

$\frac{55}{8}=u$ بقسمة كلا الطرفين على 8

بما أن ع.م.أ للعددين 8 ,55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسبة. كما تساعدك العبارة "إذا ....فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة فيما لايزيد على 25% تقريبًا من التمارين
فاختر	أحد المصادر الآتية:
مصادر الفصل	بنك المفاهيم والمهارات
مصادر الفصل	تدريبات المهارات
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (162)
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

المستوى ٢	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من التمارين تقريبًا
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

4-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-1

تحليل كثيرات الحدود.

الدرس 4-1

تبسيط التعابير النسبية.

تبسيط الكسور المركبة.

ما بعد الدرس 4-1

حل المعادلات النسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- كيف تساعدك جملة "التعبير النسبي" على تحديد معناه؟

"نسبي" تحتوي على كلمة "نسبة".

- ما النسبة الموجودة في الدالة: $T(d)=\frac{1700}{d-33}$؟

$\frac{1700}{d-33}$

- ماذا يعني أن 6 هو ع.م.أ للعددين 12 و 30؟

6 هو أكبر عدد صحيح يقسم كلًّا من 12 و 30 دون باقٍ.

4-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها
Multiplying and Dividing Rational Expressions

فيما سبق

درست تحليل كثيرات الحدود.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أتعرف التعابير النسبية.
- أبسّط تعابير نسبية.
- أبسّط كسورًا مركّبة.

المفردات الأساسية

التعبير النسبي
rational expression

الكسر المركّب
complex fraction

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستطيع الغواصون الغوص إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالة النسبية $T(d)=\frac{1700}{d-33}$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاؤه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، d العمق بالأقدام.

تبسيط التعابير النسبية تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d-33}$ **تعبيرًا نسبيًّا**.

بما أن المتغيرات في الجبر تمثل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على التعابير النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط التعابير النسبية يتم قسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ).

$$\frac{8}{12}=\frac{2\cdot\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}}=\frac{2}{3}$$

1 — 1 — ع.م.أ = 4

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}=\frac{(x-3)(\cancel{x-1})}{(x-5)(\cancel{x-1})}=\frac{x-3}{x-5}$$

1 — 1 — ع.م.أ = $x-1$

مثال 1 تبسيط تعبير نسبي

a) بسّط التعبير $\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)}$

بتحليل البسط والمقام إلى العوامل

$$\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)}=\frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)}$$

باختصار العوامل المشتركة

$$=\frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}\cdot\frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}$$

(1 فوق $(x+3)$، 1 تحت $(x+3)$)

بالتبسيط

$$=\frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}$$

b) متى يكون التعبير في الفرع (a) غير معرف؟

تحليل مقام التعبير في الفرع **a** إلى العوامل هو: $(x-6)(x+3)(x-3)$،
حدّد قيم x التي تجعل المقام صفرًا.
هذه القيم هي $3, -3, 6$، و لذا يكون التعبير غير معرف عندما $x=6$ أو $x=-3$ أو $x=3$.

تأكد

بسّط كل تعبير مما يأتي، وحدد متى يكون التعبير غير معرف:

(1A) $\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)}$

$\frac{4(y+4)}{(y+2)}$، $y=0$ أو $y=-2$ أو $y=3$

(1B) $\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)}$

$\frac{2z(z+4)}{(z-1)}$، $z=1$، $z=2$، $z=-5$

مصادر الدرس 4-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (168)	• تنويع التعليم، ص (168.172)	• تنويع التعليم، ص (172)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات على المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات على المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات على المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب • تدريس الجبر باليدويات	• كراسة الطالب

مثال 2 على اختبار معياري

ما قيم x التي تجعل التعبير $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرّف؟

A $-2, -4$ C $0, -2, -4$

B $-2, 7$ D $0, -2, -4, 7$

اقرأ فقرة الاختبار:

تريد إيجاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا.

حل فقرة الاختبار:

إحدى القيم التي تجعل المقام $4x(x^2+6x+8)$ يساوي صفرًا هي $x=0$، لذا؛ يمكن حذف البديلين A و B.

والآن، حلّل المقام إلى العوامل.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$، إذن المقام يساوي $4x(x+2)(x+4)$.

وبما أن المقام يساوي صفرًا عندما $x=0$، أو $x=-2$ أو $x=-4$ فإن الإجابة الصحيحة هي C.

إرشادات الاختبار

يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم التعويض بالبدائل المتبقية للتوصل إلى الإجابة الصحيحة.

تأكد

2) ما قيم x التي تجعل التعبير $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرّف؟ G

F $5, 0, -2$ G $5, -2$ H $0, -2, -6$ J $5, -2, -6$

تحليل كثيرات الحدود تعلمت أنه يمكن تحليل التعابير التربيعية إلى عوامل أخرى من كثيرات حدود. وكذلك يمكن تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية ولكن بقواعد خاصة.

مفهوم أساسي

مجموع مكعبين والفرق بينهما

أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

مثال 3

مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا كانت لا تحلل فاكتب (أولية).

a) $16x^4+54xy^3$

إيجاد (ع.م.أ) $16x^4+54xy^3=2x(8x^3+27y^3)$

يمثّل كل من $8x^3$ و $27y^3$ مكعبًا كاملًا، لذا؛ يمكن التحليل بقاعدة مجموع مكعبين.

$8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$

بالتحليل إلى العوامل $=(2x+3y)[(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2]$

بالتبسيط $=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

$16x^4+54xy^3=2x(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

إرشادات للدراسة

كثيرة الحدود الأولية هي كثيرة الحدود التي لا يمكن كتابتها كحاصل ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة.

تبسيط التعابير النسبية

مثال 1 يُبيّن كيفية تبسيط تعبير جبري وتحديد القيم التي يكون التعبير غير معرف عندها

مثال 2 يُبيّن طريقة حذف البدائل لحل فقرة أو فقرات في امتحان

مثال 3 يُبيّن تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 **a)** بسّط التعبير $\frac{3y(y+7)}{(y+7)(y^2-9)}$. $\frac{3y}{y^2-9}$

b) ما قيم y التي تجعل التعبير غير معرّف عندما $y=3, y=-3, y=-7$ ؟

2 **مثال من اختبار معياري:**

ما قيم p التي تجعل التعبير: $\frac{p^2+2p-3}{p^2-2p-15}$ غير معرّف؟ B

A 5 C $3, -5$

B $-3, 5$ D $5, 1, -3$

3 $125y^4+yx^3$. $y(5y+x)(25y^2-5yx+x^2)$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة لا تحذف القيم التي تجعل التعبير غير معرف عند كتابة التعابير النسبية؛ لأنه من المعروف أن التعابير النسبية تشمل فقط القيم التي يكون عندها التعبير معرفًا.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل السبورة؛ لتوضيح كيفية حذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام. اشطب العوامل المشتركة عند تبسيط التعابير النسبية، ثم اسحب العوامل المتبقية للحصول على التعبير في أبسط صورة.

b) $64y^3 + 5x^3$

لاحظ أن الحد الثاني لا يمثل مكعبًا كاملًا، لذا؛ لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال قاعدة مجموع مكعبين. كذلك لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال تحليل العبارة التربيعية أو (ع.م.أ). لذا، فإن كثيرة الحدود أوليّة.

تأكد

حلِّل كل تعبير مما يأتي:

3A) $5y^4 - 320yz^3$ $5y(y - 4z)(y^2 + 4yz + 16z^2)$

3B) $-54w^4 - 250wz^3$ $-2w(3w + 5z)(9w^2 - 15wz + 25z^2)$

يمكنك إخراج 1− كعامل مشترك من البسط أو المقام للمساعدة على تبسيط التعبير النسبي.

مثال 4 تبسيط تعبير نسبي بإخراج 1− كعامل مشترك

بسّط كل تعبير مما يأتي:

a) $\frac{(4w^2 - 3wy)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$

بالتحليل إلى العوامل

$$\frac{(4w^2 - 3wy)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)} = \frac{w(4w - 3y)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$$

$4w - 3y = -1(3y - 4w)$

$$= \frac{w(-1)(\overset{1}{\cancel{3y - 4w}})(w + y)}{(\cancel{3y - 4w})(5w + y)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{(-w)(w + y)}{5w + y}$$

b) $\frac{x^3 - y^3}{y - x}$

بالتحليل إلى العوامل

$$\frac{x^3 - y^3}{y - x} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{y - x}$$

$x - y = -1(y - x)$

$$= \frac{(-1)(\overset{1}{\cancel{y - x}})(x^2 + xy + y^2)}{(\cancel{y - x})}$$

بالتبسيط

$$= -x^2 - xy - y^2$$

تأكد

بسّط كل تعبير مما يأتي:

4A) $-\frac{1}{z}\ \frac{(xz - 4z)}{z^2(4 - x)}$

4B) $\frac{8a^3 - b^3}{2b - 4a}$ $\frac{-4a^2 - 2ab - b^2}{2}$

يمكن استعمال طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب التعابير النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

الضرب	القسمة
$\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$	$\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{7}{2}$

التركيز في المحتوى الرياضي

تبسيط التعابير النسبية

إن المهارة الأساسية المطلوبة لضرب أو قسمة التعابير النسبية هي التبسيط. بعد تحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب في مقلوب المقسوم عليه، ثم يضرب البسط في البسط و المقام في المقام، وبعد ذلك يتم التبسيط بقسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر لهما

تبسيط التعابير النسبية

مثال 4 يُبيّن كيفية إخراج 1- عاملًا من عوامل البسط أو المقام

مثال إضافي

4 بسّط التعبير $-a\ \frac{a^4b - 2a^4}{2a^3 - a^3b}$

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على المعرفة السابقة وضح للطلبة أن القسمة هي عملية ضرب في مقلوب المقسوم عليه، من خلال مناقشة أمثلة بسيطة مثل: قسمة 18 كرة زجاجية على شخصين، تعني أن كل شخص يحصل على النصف أو على 9 كرات زجاجية.

التركيز في المحتوى الرياضي

القسمة على الصفر إذا اعتقد الطلبة أن $\frac{6}{0} = 0$، فاستعمل تعريف حاصل ضرب عددين (إذا كان $\frac{a}{b} = c$، فإن $a = bc$) لبيان أن العبارة خاطئة؛ لأن هذه العبارة ستتحقق إذا كان $6 = 0 \cdot 0$ وهذا خطأ.

يلخص الجدول الآتي قواعد ضرب التعابير النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب التعابير النسبية

التعبير اللفظي لضرب تعبيرين نسبيين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

بالرموز إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ تعبيرين نسبيين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإن $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

قسمة التعابير النسبية

التعبير اللفظي لقسمة تعبير نسبي على آخر اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

بالرموز إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ تعبيرين نسبيين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإن

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة
تأكد من اختصار العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

مثال 5 ضرب تعابير نسبية وقسمتها

بسّط كل تعبير مما يأتي:

a) $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

بالتحليل إلى العوامل
$$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

باختصار العوامل المشتركة
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{d}} \cdot d}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{d}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

بالتبسيط
$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$$

بالتبسيط
$$= \frac{9c^2d}{4a}$$

b) $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه
$$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$$

بالتحليل إلى العوامل
$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b}{7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}$$

باختصار العوامل المشتركة
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{y}} \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot \overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{1}{\cancel{a}} \cdot \underset{1}{\cancel{a}} \cdot \underset{1}{\cancel{b}} \cdot b \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot x \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{y}}}$$

بالتبسيط
$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot y \cdot y}{2 \cdot b \cdot x}$$

بالتبسيط
$$= \frac{15y^2}{2bx}$$

تأكد

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(5A) $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$ acd

(5B) $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$ $\frac{7a^2}{15b^2x^3}$

(5C) $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$ $\frac{2t^2}{9a^2bm^2}$

(5D) $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$ $\frac{4x^3}{5a^2b^4y^2}$

تبسيط التعابير النسبية

مثال 5 يُبيّن كيفية ضرب التعابير النسبية وقسمتها.

مثال إضافي

5 بسّط كلًّا من التعبيرين:

a) $\frac{1}{6x^2y} \quad \frac{8x}{21y^3} \cdot \frac{7y^2}{16x^3}$

b) $\frac{4dk^2}{m^4} \quad \frac{10mk^2}{3c^2d} \div \frac{5m^5}{6c^2d^2}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء اطلب إلى الطلبة أن يستبدلوا المتغيرات بأعداد كلية صغيرة، ثم يحسبوا قيمة التعبير قبل التبسيط وبعده، وتأكد من أن الإجابتين متساويتان.

الدرس 4-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها 167

عليك في بعض الأحيان أن تحلّل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب تعابير نسبية أو قسمتها.

مثال 6 تعابير نسبية بكثيرات حدود في البسط و المقام

بسّط كلًّا من التعبيرين الآتيين:

(a $\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64}\cdot\dfrac{x-8}{x^2+5x+6}$

بالتحليل إلى العوامل
$$\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64}\cdot\frac{x-8}{x^2+5x+6}=\frac{(x-8)(x+2)}{(x-8)(x-8)}\cdot\frac{x-8}{(x+3)(x+2)}$$

باختصار العوامل المشتركة
$$=\frac{\cancel{(x-8)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-8)}\cancel{(x-8)}}\cdot\frac{\cancel{x-8}}{(x+3)\cancel{(x+2)}}$$

بالتبسيط
$$=\frac{1}{x+3}$$

(b $\dfrac{x^2-16}{12y+36}\div\dfrac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18}$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه
$$\frac{x^2-16}{12y+36}\div\frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18}=\frac{x^2-16}{12y+36}\cdot\frac{y^2-3y-18}{x^2-12x+32}$$

بالتحليل إلى العوامل
$$=\frac{(x+4)(x-4)}{12(y+3)}\cdot\frac{(y-6)(y+3)}{(x-4)(x-8)}$$

باختصار العوامل المشتركة
$$=\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{12\cancel{(y+3)}}\cdot\frac{(y-6)\cancel{(y+3)}}{\cancel{(x-4)}(x-8)}$$

بالتبسيط
$$=\frac{(x+4)(y-6)}{12(x-8)}$$

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات الحدود

عند تبسيط تعابير نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ففي مثال 5a، يظهر العامل $x-8$ أربع مرات. لذا استعمل ذلك دليلًا عند تحليل كثيرات حدود صعبة.

تأكد

بسّط كلًّا من التعبيرين الآتيين:

(6A $\dfrac{8x-20}{x^2+2x-35}\cdot\dfrac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$ $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+7)}$

(6B $\dfrac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21}\div\dfrac{x^2-x-12}{6x+42}$ $\dfrac{6x-30}{(x+3)^2}$

تبسيط الكسور المركّبة **الكسر المركّب** تعبير نسبي بسطه ومقامه أو أحدهما تعبير نسبي أيضًا، والتعابير الآتية كسور مركبة:

$\dfrac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3}$ $\dfrac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}}$ $\dfrac{\frac{8}{x}}{x-2}$ $\dfrac{\frac{c}{6}}{5d}$

لتبسيط كسر مركب، اكتبه أولًا على صورة قسمة تعبيرين.

مثال 7 تبسيط الكسور المركبة

بسّط كلًّا من التعبيرين الآتيين:

(a $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

بكتابة التعبير في صورة قسمة تعبيرين
$$\frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}=\frac{a+b}{4}\div\frac{a^2+b^2}{4}$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه
$$=\frac{a+b}{4}\cdot\frac{4}{a^2+b^2}$$

بالتبسيط
$$=\frac{a+b}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a^2+b^2}$$

تبسيط التعابير النسبية

مثال 6 يُبيّن كيفية تبسيط التعابير النسبية التي تحتوي على كثيرات حدود.

تبسيط الكسور المركبة

مثال 7 يُبيّن كيفية تبسيط الكسر المركب بكتابته على صورة عبارة قسمة.

مثال إضافي

6 بسط كلًّا من التعبيرين:

(a $\dfrac{k-3}{k+1}\cdot\dfrac{1-k^2}{k^2-4k+3}$ -1

(b $\dfrac{2d+6}{d^2+d-2}\div\dfrac{d+3}{d^2+3d+2}$ $\dfrac{2(d+1)}{d-1}$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل هذه المسائل ،

فشجعهم على كتابة خطوات الحل متتالية مع الحفاظ على تكافئها. ونبّهم إلى أن يجروا تغييرًا واحدًا في الخطوة الواحدة.

b) $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$

بكتابة التعبير في صورة قسمة تعبيرين: $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \div \dfrac{4x}{y-x}$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه: $= \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{y-x}{4x}$

بالتحليل إلى العوامل: $= \dfrac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \dfrac{(-1)(x-y)}{4x}$

باختصار العوامل المشتركة: $= \dfrac{x \cdot \cancel{x}^{1}}{(x+y)\cancel{(x-y)}^{1}} \cdot \dfrac{(-1)\cancel{(x-y)}^{1}}{4x}$

بالتبسيط: $= \dfrac{-x}{4(x+y)}$

تأكد

بسّط كلًّا من التعبيرين الآتيين:

(7A) $\dfrac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$ $\dfrac{(2x-5)(x-2)}{(x+2)(x-4)(x-1)}$

(7B) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$ $\dfrac{-x-y}{y-7}$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 164

بسّط كلًّا من التعبيرين الآتيين:

(1) $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-64}$ $\dfrac{x+3}{x+8}$

(2) $\dfrac{c+d}{3c^2-3d^2}$ $\dfrac{1}{3(c-d)}$

مثال 2 صفحة 165

(3) **اختيار من متعدد:** حدد قيم x التي تجعل التعبير $\dfrac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرّف. **D**

A $-7, 4$ **B** $4, 7$ **C** $-7, 4, 7$ **D** $-4, 7$

الأمثلة 3–7 الصفحات 165 - 169

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(4) $\dfrac{y^2+3y-40}{25-y^2}$ $\dfrac{y+8}{5+y}$

(5) $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay}$ انظر الهامش

(6) $\dfrac{x^3+27}{3x+9}$ $\dfrac{x^2-3x+9}{3}$

(7) $\dfrac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \dfrac{8z}{9xy^3}$ $\dfrac{3x}{2z^2}$

(8) $\dfrac{12x^3y}{13ab^2} \div \dfrac{36xy^3}{26b}$ $\dfrac{2x^2}{3aby^2}$

(9) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \dfrac{x-4}{x^2-2x-35}$ $\dfrac{x+3}{(x-2)(x+5)}$

(10) $\dfrac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}}$ $\dfrac{ab^2x}{y^3}$

(11) $\dfrac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}}$ 4

(12) $\dfrac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \dfrac{4a+4b}{a^2-1}$ $\dfrac{(a-b)(a+1)}{12(a-1)}$

(13) يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3+11x^2+4x)$ لإيجاد حجم الصندوق المجاور الذي على شكل متوازي مستطيلات، حيث x ارتفاع الصندوق، والطول والعرض عاملان لكثيرة الحدود.

a) أوجد طول الصندوق وعرضه. **إجابة ممكنة:** $3x+4, 2x+1$

b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x=2$. **إجابة ممكنة:** $10:5:2$

c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكل قيم x ؟ **لا**

إجابة:

5 بالتحليل: $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay} = \dfrac{x(a^2-b^2)}{y(b-a)}$

بالتحليل: $= \dfrac{x(a-b)(a+b)}{y(b-a)}$

$a-b=-1(b-a)$: $= \dfrac{-x(b-a)(a+b)}{y(b-a)}$

باختصار العامل المشترك: $= \dfrac{-x\cancel{(b-a)}^{1}(a+b)}{y\cancel{(b-a)}_{1}}$

بالتبسيط: $= \dfrac{-x(a+b)}{y}$

مثال إضافي

7 بسط التعبير $\dfrac{\frac{x^2}{9x^2-4y^2}}{\frac{x^3}{2y-3x}}$.

$\dfrac{-1}{3x^2+2xy}$

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير ساعد الطلبة على إدراك أن حاصل قسمة $(y-x)$ على $(x-y)$ هو -1 بتوضيح أن هذين التعبيرين أحدهما هو النظير الجمعي للآخر تمامًا مثل 2 ، -2 .

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين **1–13** ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تدرب وحل المسائل

مثال 1
صفحة 164

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(14) $\frac{x(x+6)}{x+4} \quad \frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$

(15) $\frac{y(y+1)}{2(y-4)} \quad \frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$

(16) $\frac{(x+3)(x-z)}{4} \quad \frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

(17) $\frac{1}{x+8} \quad \frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$

مثال 2
صفحة 165

(18) **اختيار من متعدد:** حدد قيم x التي تجعل التعبير $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرّف. **J**

F $-6, 3$ **G** $4, 6$ **H** $-6, 6$ **J** $-6, 3, 4, 6$

المثالان 4 , 3
الصفحتان 166 , 165

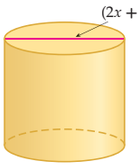
بسّط التعابير الآتية:

(19) $\frac{x+2}{-x-4} \quad \frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$

(20) $\frac{x^2}{x+6} \quad \frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

(21) $2a^2b^2-4ab+8 \quad \frac{2a^3b^3+16}{2+ab}$

(22) $\frac{-3}{y^2+y+1} \quad \frac{3-3y}{y^3-1}$



(23) **هندسة:** إذا كان حجم الأسطوانة المجاورة $(x+3)(x^2-3x-18)\pi \text{ cm}^3$، فأوجد ارتفاعها. $(x-6) \text{ cm}$

الأمثلة 7–5
الصفحات 169 - 167

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(24) $\frac{c}{4ab^2f^2} \quad \frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

(25) $\frac{7z^2}{18w^5y} \quad \frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

(26) $\frac{32b}{3ac^3f^2} \quad \frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

(27) $\frac{15y^3}{2xz} \quad \frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

(28) $\frac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \frac{y^2-9y+18}{y^2-9}$ انظر ملحق الإجابات

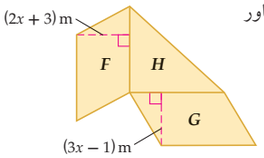
(29) $\frac{c+2}{c(c-d)} \quad \frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d}$

(30) $\frac{(x-3)(x+1)}{6(x+7)} \quad \frac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}}$

(31) $-\frac{6}{z} \quad \frac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}}$

(32) $\frac{-a^2(a+b)}{b^4} \quad \frac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}}$

(33) $\frac{b-a}{x+y} \quad \frac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}}$

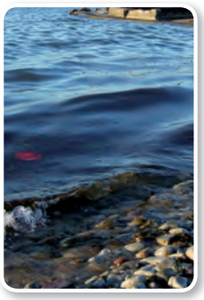


(34) **هندسة:** إذا كانت مساحة سطح متوازي الأضلاع F في الشكل المجاور $(8x^2+10x-3)\text{m}^2$، وارتفاعه $(2x+3)\text{m}$، ومساحة سطح متوازي الأضلاع G تساوي $(6x^2+13x-5)\text{m}^2$، وارتفاعه $(3x-1)\text{m}$، فأوجد مساحة سطح المثلث القائم الزاوية H. $\frac{1}{2}(8x^2+18x-5)\text{ m}^2$

(35) **تلوث:** تمثل $T(x)=\frac{0.4(x^2-2x)}{x^3+x^2-6x}$ سمك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط، حيث T سمك البقعة بالأمتار التي تبعد x m عن مكان التسرب.

a. اكتب الدالة في أبسط صورة. $T(x)=\frac{0.4}{x+3}$

b. ما سمك البقعة على بعد 100 m عن مكان التسرب؟ 3.9 mm تقريبًا



الربط مع واقع الحياة

تلوث البحار:
يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته وأثره الضار بالبيئة وصحة الإنسان.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	33–14، 49–48، 64–51
ضمن ضمن المتوسط	32–14 زوجي، 34، 45–35 فردي، 49–47، 64–51
فوق فوق المتوسط	58–34، (اختياري: 64–59)

بسّط كل تعبير مما يأتي:

36) $\frac{x^2-16}{3x^3+18x^2+24x} \cdot \frac{x^3-4x}{2x^2-7x-4}$ $\frac{x-2}{3(2x+1)}$

37) $\frac{3x^2-17x-6}{4x^2-20x-24} \div \frac{6x^2-7x-3}{2x^2-x-3}$ $\frac{1}{4}$

38) $\frac{9-x^2}{x^2-4x-21} \cdot \left(\frac{2x^2+7x+3}{2x^2-15x+7}\right)^{-1}$ $\frac{(3-x)(2x-1)}{(x+3)(2x+1)}$

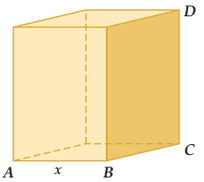
39) $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3}$ $\frac{18y^8}{5a^2cx^4}$

40) $\left(\frac{2xy^3}{3abc}\right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$ $\frac{3bc^2}{8y^2}$

41) $\frac{2x^2+7x-30}{-6x^2+13x+5} \cdot \frac{4x^2+12x-72}{3x^2-11x-4}$ $\frac{x-4}{-4(x-3)}$

42) $\frac{4x^2-1}{3x^3-6x^2-24x} \cdot \frac{12x^2+12x-9}{-2x^2+5x+12}$ $\frac{2x+1}{-9x(x+2)}$

43) هندسة: مساحة قاعدة متوازي المستطيلات المجاور تساوي 20cm^2.



a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x. $\frac{20}{x}$

b) إذا كان $DC = 3BC$، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x. $\frac{1200}{x^2}$

c) أوجد حجم متوازي المستطيلات بدلالة x. $\frac{1200}{x}$

بسّط كل تعبير مما يأتي:

44) $\frac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5} \cdot \frac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \div \frac{6x^2-18x-60}{x^3-4x}$ $\frac{x(x-2)(x+8)}{2(2x-1)(3x+1)}$

45) $\frac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36} \div \frac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \cdot \frac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24}$ $\frac{(4x-1)^2(3x+1)(x+1)}{12(x+2)(x-4)(x^2-10x+6)}$

46) $\frac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18} \div \frac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \frac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12}$ $\frac{-2(x-8)(x+4)(x-2)(x+1)}{(2x+1)^2(x^2+2x-6)}$

47) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين التمثيل البياني للدالة النسبية. **b,d) انظر الهامش**

a) جبريًّا: بسّط التعبير: $\frac{x^2-5x+4}{x-4}$. $x-1$

b) جدولة: إذا كانت $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$، فاستعمل التعبير الذي حصلت عليه في الفرع **a** لكتابة الدالة $g(x)$ المناظرة له، ثم استعمل الآلة الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلتا الدالتين، حيث $0 \le x \le 10$.

c) تحليل: أوجد قيمة كل من $f(4)$، و $g(4)$، ثم وضح الفرق بين القيمتين.

d) تمثيل بياني: مثّل كلاً من الدالتين بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، استعمل الدالة TRACE في الآلة الحاسبة البيانية لاستكشاف كل من التمثيلين البيانيين، واستعمل المفتاحين ▲ و ▼ للانتقال بين كل تمثيل بياني، ثم قارن بينهما.

e) تعبير لفظي: ماذا تستنتج بالنسبة للتعابير والدوال في هذا التمرين؟

مسائل مهارات التفكير العليا

48) تبرير: قارن بين كل من $\frac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.

49) اكتشف الخطأ: قام كل من علي و محمد بتبسيط التعبير $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$. أيهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

علي

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x} = \frac{-4}{x+y}$$

محمد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4} = -\frac{x+y}{4}$$

38) $\frac{(3-x)(2x-1)}{(x+3)(2x+1)}$

40) $\frac{3bc^2}{8y^2}$

41) $\frac{x-4}{-4(x-3)}$

42) $\frac{2x+1}{-9x(x+2)}$

47c) $f(4)$ لا يمكن إيجادها؛ لأن الدالة غير معرفة عندما $x = 4$، أما $g(4)$ فتساوي 3

47e) التعبير والدالة متكافئان عند جميع قيم x عدا 4.

48) إجابة ممكنة: التعبيران متكافئان إلا عندما $x = 3$ حيث يكون التعبير النسبي غير معرف.

49) إجابة ممكنة: محمد، أما علي فقد أخطأ عندما ضرب مقلوب المقسوم في المقسوم عليه عوضًا عن ضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

تنبيه لحل تمرين

الصيغة الجبرية يحتاج الطلبة لحل للتمرين 43 إلى قانون حساب حجم متوازي المستطيلات وهو $V = Lwh$، حيث L الطول، w العرض، h الارتفاع.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين **47** الآلة الحاسبة البيانية وجدول القيم والتحليل؛ لاستنتاج العلاقة بين التعابير النسبية والدوال النسبية.

إجابات:

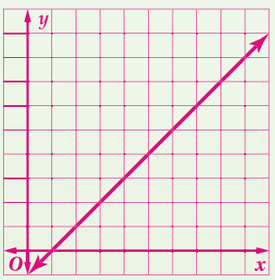
47b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	–1	0	1	2
$g(x)$	–1	0	1	2

x	4	5	6	7
$f(x)$	–	4	5	6
$g(x)$	3	4	5	6

x	8	9	10
$f(x)$	7	8	9
$g(x)$	7	8	9

47d)



يظهر الشكلان متطابقين على الآلة الحاسبة البيانية، إلّا أن $f(x)$ غير معرّفة عند $x = 4$، على حين أن $g(4) = 3$.

تنبيه!

اكتشف الخطأ في تمرين 49 اطلب إلى الطلبة أن ينسخوا المسألة التي حلها علي ومحمد ويضعوا دائرة حول المقسوم عليه، ثم يعيدوا كتابة المسألة على صورة مسألة ضرب.

50) **تحدٍّ:** ما المقدار الذي يجعل العبارة $\frac{x-6}{x+3} \cdot \frac{?}{x-6} = x-2$ صحيحة؟ x^2+x-6

51) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسر إجابتك. **انظر الهامش**
«الدالة النسبية التي يكون مقامهما متغيرًا تكون معرفة لجميع الأعداد الحقيقية».

52) **مسألة مفتوحة:** اكتب تعبيرًا نسبيًّا ناتج تبسيطه $\frac{x-1}{x+4}$. **إجابة ممكنة:** $\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

53) **اكتب:** يتم تبسيط التعبير $\frac{x^2+3x}{4x}$ ليصبح $\frac{x+3}{4}$. وضح لماذا لا يكون التعبير $\frac{x+3}{4}$ معرفًا لكل قيم x. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار معياري

54) **احتمال:** إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4؟ **C**

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{2}{3}$

55) ما أبسط صورة للتعبير النسبي $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$؟ **D**

A $\frac{4-c}{c-5}$ B $\frac{4-c}{c+5}$ C $\frac{c+4}{c+5}$ D $-\frac{c+4}{c+5}$

مراجعة تراكمية

56) إذا اخترت عشوائيًّا تبديلًا للأحرف أ، ن، م، أ، ة، ل، م. فما احتمال أن تتكون لديك كلمة "المنامة"؟ (الدرس 2-3) $\frac{1}{1260}$

57) إذا كان $P(A \cup B)=0.8$ ، $P(A \cap B)=0.25$ ، $P(B)=0.6$ ، فأوجد $P(\bar{A})$. (الدرس 3-6) 0.55

58) إذا كان A، B حدثين مستقلين، حيث $P(A \cap B)=0.18$ ، $P(A)=2P(B)$ ، أوجد $P(A)$. (الدرس 3-5) 0.6

مراجعة المتطلبات السابقة

بسّط كل تعبير مما يأتي:

59) $(2a+3b)+(8a-5b)$ $10a-2b$

60) $(x^2-4x+3)-(4x^2+3x-5)$ $-3x^2-7x+8$

61) $(5y+3y^2)+(-8y-6y^2)$ $-3y-3y^2$

62) $2x(3y+9)$ $6xy+18x$

63) $(x+6)(x+3)$ $x^2+9x+18$

64) $(x+1)(x^2-2x+3)$ x^3-x^2+x+3

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة أن يشرحوا كيف أن ضرب التعابير النسبية والتبسيط يساعدهم في جمعها وطرحها.

إجابات:

51) إجابة ممكنة: أحيانًا؛ فالمقام x^2+2 مثلًا ليس له صفرًا حقيقيًّا؛ لذا يكون أي تعبير نسبي مقامه x^2+2 معرفًا لكل الأعداد الحقيقية.

53) إجابة ممكنة: العامل المشترك بين البسط والمقام هو x مما يجعل التعبير غير معرّف عند $x=0$.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أعط الطلبة تعابير نسبية مثل $\frac{5x^2(x^2+3)}{5x(x+3)}$؛ لبناء قاعدة متينة لما سيتعلمونه عن هذه التعابير في الدروس اللاحقة. واطلب إليهم أن يوضحوا بصورة مفصلة لماذا يمكن اختصار 5 من البسط والمقام، على حين لا يمكن اختصار 3 من خلال أمثلة عددية. وكذلك اسألهم: لماذا يمكن قسمة x^2 و x الموجودتين خارج الأقواس على x، على حين لا يمكن قسمة الموجودتين داخل الأقواس. يجب أن تتضمن إجابات الطلبة أنه يمكن قسمة البسط والمقام على العوامل المشتركة بين البسط والمقام، ولا يمكن قسمة الحدود التي تكون أجزاءً من كثيرات حدود. و يمكنهم الوصول إلى هذه الاستنتاجات بتعويض عدد مثل 2 مكان x.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-2

جمع كثيرات الحدود وطرحها.

الدرس 4-2

حساب م.م.أ لكثيرات الحدود.

جمع التعابير النسبية وطرحها.

ما بعد الدرس 4-2

حل المعادلات النسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- هل يمكن تبسيط التعبير $\frac{s_o}{s_o - v}$ إلى $\left(\frac{1}{1 - v}\right)$ ؟ ، ووضّح إجابتك.

لا؛ لأن s_o ليست عاملًا مشتركًا.

- هل تحتاج إلى مقام مشترك عند ضرب P_o في $\frac{s_o}{s_o - v}$ ؟ لا

م.م.أ لكثيرات الحدود

مثال 1 يُبيّن كيفية حساب المضاعف المشترك الأصغر لمجموعة من كثيرات الحدود.

جمع التعابير النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

فيما سبق

درست جمع تعابير كثيرات حدود وطرحها.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجد م.م.أ لكثيرات الحدود.
- أجمع تعابير نسبية وأطرحها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عندما نكون في الشارع وتقترب منا سيارة إطفاء، نسمع صفارتها وهي تقترب اتجاهنا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حد ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا وتأخذ في الابتعاد عنا نسمع صوت صفارتها بتردد منخفض بسبب أن طول موجتها يزداد استطالة. ويعرف ذلك بظاهرة دوبلر أو تأثير دوبلر (Doppler) .

ولتمثيل هذه الظاهرة يستعمل التعبير النسبي $S_s\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$ ، حيث S_s تردد صوت صافرة سيارة الإطفاء، v سرعة الصوت في الهواء ، v_s سرعة صوت سيارة الإطفاء.

(م.م.أ) لكثيرات الحدود تمامًا كما في الأعداد النسبية على الصورة الكسرية فعند جمع تعبيرين نسبيين بمقامين مختلفين أو طرحهما يجب أن تجد أولًا المقام المشترك الأصغر للمقامين. وهو المضاعف المشترك الأصغر (م.م.أ) للمقامين.

ولإيجاد (م.م.أ) لعددين أو لكثيرتي حدود أو أكثر يجب أن تُحلل كلًّا منهم إلى عوامله أولًا، ثم تضرب العوامل التي لها الأس الأكبر.

كثيرات الحدود	الأعداد
$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$	$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$
م.م.أ لكثيرتي الحدود $x^2 - 3x + 2$ ، و $2x^2 - 2$	م.م.أ للعددين 6, 9
$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$	$6 = 2 \cdot 3$
$2x^2 - 2 = 2 \cdot (x - 1)(x + 1)$	$9 = 3 \cdot 3$
م.م.أ هو $2(x - 1)(x - 2)(x + 1)$	م.م.أ هو $2 \cdot 3 \cdot 3$ أو 18

مثال 1 م.م.أ لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد م.م.أ لكل مجموعة كثيرات الحدود مما يأتي:

(a $6xy, 15x^2, 9xy^4$

بالتحليل $6xy = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y$

بالتحليل $15x^2 = 3 \cdot 5 \cdot x^2$

بالتحليل $9xy^4 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y^4$

بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر م.م.أ هو $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^4$

بالتبسيط ويساوي $90x^2y^4$

(b $y^4 + 8y^3 + 15y^2 , y^2 - 3y - 40$

بالتحليل $y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$

بالتحليل $y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$

بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر م.م.أ هو $y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8)$

تأكد

أوجد م.م.أ لكل مجموعة كثيرات الحدود مما يأتي:

(1A $120a^2b^3c^4$ $12a^2b, 15abc, 8b^3c^4$

(1B $4a(a - 4)(a - 5)(a + 1)$ $4a^2 - 12a - 16, a^3 - 9a^2 + 20a$

مصادر الدرس 4-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (175)	• تنويع التعليم، ص (175)	• تنويع التعليم، ص (177)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (24) • تدريبات على المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (24) • تدريبات على المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص(24) • تدريبات على المسائل اللفظية • التدريبات الإثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد م.م.أ. لكل مجموعة كثيرات الحدود مما يأتي:

a $20a^3c^6$, $15a^2bc^3$, $16b^5c^2$, $240a^3b^5c^6$

b $x^2 - 4x + 4$ و $x^3 - x^2 - 2x$ $x(x+1)(x-2)^2$

جمع التعابير النسبية وطرحها

مثال 2 يُبيّن كيفية جمع تعبيرين نسبيين مقام كل منهما وحيدةحد.

مثال 3 يُبيّن كيفية طرح تعبيرين نسبيين مقام كل منهما كثيرة حدود.

مثالان إضافيان

2 بسّط التعبير $\frac{5a^2}{6b} + \frac{9}{14a^2b^2}$. $\frac{35a^4b + 27}{42a^2b^2}$

3 بسّط التعبير $\frac{x+10}{3x-15} - \frac{3x+15}{6x-30}$ $-\frac{1}{6}$

التعليم باستعمال التقنيات

آلات التصوير التوثيقية اختر عددًا من الطلبة لحل الأمثلة أمام زملائهم في غرفة الصف. وتأكد من أنهم يوضحون طريقة إيجاد م.م.أ جيدًا.

جمع التعابير النسبية وطرحها لجمع تعبيرين نسبيين أو طرحهما يجب أن يكون لهما المقام نفسه، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جمع التعابير النسبية

التعبير اللفظي لجمع التعابير النسبية، أوجد المضاعف المشترك الأصغر (م.م.أ) للمقامات، ثم أعد كتابة التعابير بحيث تكون مقاماتها هو م.م.أ ، ثم اجمع.

الرموز لأي تعبيرين نسبيين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، حيث $b \neq 0, d \neq 0$ ، فإن

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

طرح التعابير النسبية

التعبير اللفظي لطرح التعابير النسبية، أوجد المضاعف المشترك الأصغر (م.م.أ) للمقامات، ثم أعد كتابة التعابير بحيث تكون مقاماتها هو م.م.أ ، ثم اطرح.

الرموز لأي تعبيرين نسبيين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإن $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$

مثال 2 تبسيط تعابير مقاماتها وحيدات الحد

بسّط التعبير $\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2}$

م.م.أ هو $8x^3y^2$

$$\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2} = \frac{3y}{2x^3} \cdot \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{5z}{8xy^2} \cdot \frac{x^2}{x^2}$$

بضرب الكسور

$$= \frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$

بجمع البسطين

$$= \frac{12y^3 + 5x^2z}{8x^3y^2}$$

إرشادات للدراسة

تبسيط التعابير النسبية يمكن تبسيط التعبير الناتج عن جمع أو طرح تعبيرين نسبيين.

تأكد بسّط كل من التعبيرين الآتيين:

2A $\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$ $\frac{8 + 9a^2bc}{10a^3b^2}$

2B $\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$ $\frac{15a^5 - 128bx}{80a^3b^2}$

يستعمل م.م.أ أيضًا لجمع أو طرح تعابير نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3 تبسيط تعابير مقاماتها كثيرات حدود

بسّط التعبير $\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

بتحليل المقامات

$$\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6} = \frac{5}{6(x-3)} - \frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$$

بالضرب في العوامل المفقودة

$$= \frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)} - \frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$$

بطرح البسطين

$$= \frac{10x - 5 - 3x + 3}{6(x-3)(2x-1)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$$

تأكد بسّط كل من التعبيرين الآتيين:

3A $\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$ $\frac{x+7}{5(x+2)(x-3)}$

3B $\frac{x-8}{4x^2+21x+5} + \frac{6}{12x+3}$ $\frac{3x+2}{(4x+1)(x+5)}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء اطلب إلى الطلبة مناقشة الفرق بين جمع الكسور وضربها. ومن المهم أن يركزوا على أن إيجاد المقام المشترك مهم عند الجمع، وليس مهمًّا عند الضرب.

من طرائق تبسيط الكسور المركبة تحليل كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط التعبير الناتج.

مثال 4 تبسيط الكسور المركبة بتحليل كل من البسط والمقام على حدة

بسّط التعبير $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

م.م.أ للبسط هو x
م.م.أ للمقام هو y

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{y}{y}-\frac{x}{y}}$$

بتبسيط كلٍّ من البسط والمقام

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$$

بكتابة التعبير في صورة قسمة تعبيرين

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y}$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y}{y-x}$$

بالتبسيط

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

تأكد

بسّط كلًّا من التعبيرين الآتيين:

(4A) $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$ $\dfrac{xy-y^2}{x+y}$

(4B) $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$ $\dfrac{c^2-d^2}{d^2+2cd}$

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركّبة هي إيجاد م.م.أ للمقامات كلها، ثم اختصارها جميعًا بضرب التعبير كله في م.م.أ .

مثال 5 تبسيط الكسور المركبة بإيجاد (م.م.أ) للمقامات كلها

بسّط التعبير $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

م.م.أ للمقامات كلها هو xy ، بضرب التعبير في $\frac{xy}{xy}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{xy}{xy}$$

خاصية التوزيع

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

لاحظ أنه تم حل المسألة نفسها في المثالين 5 , 4 بطريقتين مختلفتين، وكانت النتيجة واحدة في الحالتين. لذا يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك لحل المسائل المشابهة.

تأكد

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(5A) $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$ $\dfrac{xy+2y}{3x-4y}$

(5B) $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$ $\dfrac{c-d^2}{d+6cd}$

(5C) $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$ $\dfrac{x+y}{x-y}$

(5D) $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$ $\dfrac{a(a+b)}{b(a-b)}$

جمع التعابير النسبية وطرحها

مثالان 4.5 يبينان كيفية تبسيط الكسور المركبة.

مثالان إضافيان

4 بسّط التعبير $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}-1}$.

$\dfrac{a+b}{a(1-b)}$ أو $\dfrac{a+b}{a-ab}$

5 بسّط التعبير $\dfrac{\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{y}-\frac{3}{x}}$.

$\dfrac{2y-xy}{x-3y}$

التركيز في المحتوى الرياضي

التعابير المتكافئة توحيد المقامات للتعابير النسبية استعدادًا لجمعها أو طرحها، لايغير من قيمها؛ وذلك لأننا نقوم بضرب هذه التعابير في إحدى صور العدد 1 مثل:

$\dfrac{6x}{6x}$ أو $\dfrac{y-3}{y-3}$.

إرشادات للدراسة

حدود غير معرفة
تذكّر أن هناك قيودًا على المتغيرات في المقام.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة صعوبات في جمع التعابير النسبية وطرحها،
فاطلب إليهم أن يعمل كل منهم مع زميله، على أن يمثّل أحدهما دور المدرب والآخر دور المتدرب، ويقوم المتدرب بحل مسألة معينة باتباع خطوات الحل موضحًا أسلوب التفكير، على حين يستمع المدرب ويلاحظ الأخطاء ويصححها إذا كان ذلك ضروريًّا، ثم يتبادل الطلبة الأدوار فيما بينهم.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 17–1؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 173

أوجد م.م.أ لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

1) $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$ $80x^3y^3$

2) $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$ $63a^2b^3c^4$

3) $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$ $3y(y-3)(y-5)$

4) $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$ $x(x+2)(x-2)(x-8)$

المثالان 3 , 2 صفحة 174

بسّط كل تعبير مما يأتي:

5) $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$ $\frac{48y^4 + 25x^2}{20xy^3}$

6) $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$ $\frac{35a^2 + 9b^3}{42a^3b}$

7) $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$ $\frac{21b^4 - 2}{36ab^3}$

8) $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$ $\frac{7c^2y^2 - 12dx}{56c^4d^2}$

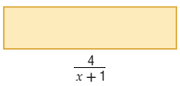
9) $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x+6}$ $\frac{9x+15}{(x+3)(x+6)}$

10) $\frac{8}{y-3} + \frac{2y-5}{y^2 - 12y + 27}$ $\frac{10y - 77}{(y-3)(y-9)}$

11) $\frac{4}{3x+6} - \frac{x+1}{x^2-4}$ $\frac{x-11}{3(x+2)(x-2)}$

12) $\frac{3a+2}{a^2-16} - \frac{7}{6a+24}$ $\frac{11a+40}{6(a+4)(a-4)}$

13) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.



$\frac{14x - 10}{(x+1)(x-2)}$

المثالان 5 , 4 صفحة 175

بسّط كل تعبير مما يأتي:

14) $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$ $\frac{4x+2}{3x-2}$

15) $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$ $\frac{3y+2}{y+3}$

16) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$ $\frac{3y+2x}{xy+4x}$

17) $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$ $\frac{2a+5b}{3b-8a}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 173

أوجد م.م.أ لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

18) $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$ $120a^2bc^3d^4$

19) $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$ $180x^2y^4z^2$

20) $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$ $(x-4)(x-5)(x+6)$

21) $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$ $6(x+4)(2x-1)(2x+3)$

المثالان 3 , 2 صفحة 174

بسّط كل تعبير مما يأتي:

22) $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$ $\frac{15abc^3 + 2af}{72bc^4f^4}$

23) $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$ $\frac{28by^2z - 9bx}{105x^3y^4z}$

24) $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$ $\frac{25ab^3 + 9b^3 + 60a}{30a^2b^2}$

25) $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$ $\frac{20x^2y + 120y + 6x^2}{15x^3y}$

26) $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$ $\frac{240y + 20y^2 - 27}{90y^2}$

27) $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$ $\frac{15b^3 + 100ab^2 - 216a}{240ab^3}$

28) $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$ $\frac{17x + 58}{(x-8)(x+2)(x+5)}$

29) $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$ انظر ملحق الإجابات

30) $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$ $\frac{3y - 30}{(3y+2)(y-4)(y-2)}$

31) $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$ $\frac{-10(x+1)}{(2x-1)(x+6)(x-3)}$

32) $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$ $\frac{4x^2 - 12x + 3}{2(x-6)(4x+1)(x+2)}$

33) $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$ $\frac{2x\,(x+16)}{3(x-2)(x+3)(2x+5)}$

34) أحياء: يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2 + 36} + 6.5$، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

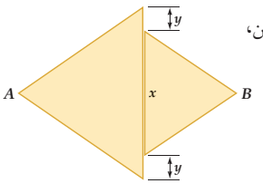
a) بسّط الصيغة السابقة. $A = \frac{6.5t^2 + 20.4t + 234}{t^2 + 36}$

b) أوجد درجة الحموضة بعد مضي 30 min على تناول الطعام. 7.2 تقريبًا

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	58-71, 18-39
ضمن ضمن المتوسط	19-39 فردي، 41-53 فردي، 55,56، 58-71
فوق فوق المتوسط	40-65، (اختياري: 66-71)

35) هندسة: إذا كان كل من المثلثين في الشكل المجاور متطابق الضلعين، وكانت مساحة سطح المثلث الأصغر $200\,cm^2$، ومساحة سطح المثلث الأكبر $300\,cm^2$، فأوجد أقصر مسافة من النقطة A إلى النقطة B بدلالة x , y في أبسط صورة. $\frac{1000x+800y}{x(x+2y)}$



المثالان 5 , 4
صفحة 175

بسّط كل تعبير مما يأتي:

36) $\frac{\frac{2}{x-3}+\frac{3x}{x^2-9}}{\frac{3}{x+3}-\frac{4x}{x^2-9}}$ $\frac{5x+6}{-x-9}$

37) $\frac{\frac{4}{x+5}+\frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6}-\frac{8}{x+5}}$ انظر ملحق الإجابات

38) $\frac{\frac{5}{x+6}-\frac{2x}{2x-1}}{\frac{x}{2x-1}+\frac{4}{x+6}}$ $\frac{-2x^2-2x-5}{x^2+14x-4}$

39) $\frac{\frac{8}{x-9}-\frac{x}{3x+2}}{\frac{3}{3x+2}+\frac{4x}{x-9}}$ $\frac{-x^2+33x+16}{12x^2+11x-27}$

40) إنتاج النفط: قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالة $R(x)=\frac{20}{x}+\frac{200x}{3x^2+20}$، حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنويًّا بعد x سنة من بدء الإنتاج.

a) بسّط الدالة $R(x)$. $R(x)=\frac{260x^2+400}{3x^3+20x}$

b) ما معدل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟ 1730 برميل/ سنة تقريبًا

الربط مع واقع الحياة

اكتشف حقل عوالي في البحرين عام 1932 م، وهو أول حقل نفطي يكتشف على الجانب العربي من الخليج، وينتج حوالي 35 ألف برميل يوميًّا.

أوجد م.م.أ لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

41) $12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3$ $420x^5y^4z^3$

42) $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$ $-360a^4b^3c^2$

43) $x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16$ $(x+4)(x-4)(2x+1)(x-7)$

44) $x^2-5x-24, x^2-9, 3x^2+8x-3$ $(x+3)(x-3)(x-8)(3x-1)$

بسّط كل تعبير مما يأتي:

45) $\frac{1}{12a}+6-\frac{3}{5a^2}$ $\frac{360a^2+5a-36}{60a^2}$

46) $\frac{5}{16y^2}-4-\frac{8}{3x^2y}$ $\frac{15x^2-192x^2y^2-128y}{48x^2y^2}$

47) $\frac{5}{6x^2+46x-16}+\frac{2}{6x^2+57x+72}$ $\frac{42x+41}{6(3x-1)(x+8)(2x+3)}$

48) $\frac{1}{8x^2-20x-12}+\frac{4}{6x^2+27x+12}$ $\frac{19x-36}{12(2x+1)(x-3)(x+4)}$

49) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x-y}$ 0

50) $\frac{x^2+x}{x^2-9x+8}+\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x-8}$ $\frac{x^2+2x-29}{x^2-9x+8}$

51) $\frac{\frac{2}{a-1}+\frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}}$ $\frac{5a-11}{6}$

52) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x+y)}$ $\frac{1}{y-x}$

53) هندسة: يُعطى طول مستطيل بالتعبير $\frac{x^2-9}{x-2}$، ويعطى طول مستطيل آخر مشابه بالتعبير $\frac{x+3}{x^2-4}$. أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة. $(x-3)(x+2):1$

54) زوارق: قطع علي مسافة 20 mi راكبًا زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار 2 mi/h.

a) إذا كانت x تعبر عن السرعة الأولى بالأميال لكل ساعة فاكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة. $\frac{10}{x}$

b) اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة. $\frac{10}{x-2}$

c) اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها. $\frac{20(x-1)}{x(x-2)}$

تنبيه لحل تمرين

قوانين يحتاج الطلبة إلى معرفة قانون مساحة المثلث $A=\frac{1}{2}bh$؛ لحل تمرين 35.

ورق الرسم البياني يحتاج الطلبة إلى ورق الرسم البياني؛ لحل التمارين 66-71.

إرشادات للمعلم الجديد

خطوات تستعمل مهارات تجميع التعابير النسبية وتبسيطها التي تعلمتها في هذا الدرس على نحوٍ مكثف في مواضيع الجبر. لذا، خذ الوقت اللازم لمعالجة أخطاء الطلبة والأخطاء المفاهيمية قبل الانتقال إلى الدرس التالي.

تنويع التعليم

فوق

توسّع كتابة التعابير النسبية باستعمال الكسور الجزئية هي مهارة جبرية مهمة تستعمل في كثير من مواضيع الرياضيات المتقدمة بما فيها حساب التفاضل والتكامل؛ لذا أعطِ الطلبة تعبيرًا مثل $\frac{5x+3}{x(x+1)}$، واسألهم ما نوع الكسور الأبسط التي يمكن جمعها للحصول على هذا التعبير، إذا استطاعوا تحديد x ، $x+1$ على أنهما مقامان للكسرين الجزئيين، فاطلب إليهم إيجاد قيمة كل من A ، B التي تجعل المعادلة $\frac{5x+3}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ صحيحة لأي قيمة لـ x. $A=3$ ، $B=2$.

4 التقويم

تعلم سابق اسأل الطلبة كيف ساعدهم الدرس السابق "ضرب التعابير النسبية وقسمتها" على جمع التعابير النسبية وطرحها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 4-2 , 4-1 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 4 .

الربط مع واقع الحياة

يوصف التصوير القريب عمومًا بأنه القدرة على تصوير جسم ما على أن تكون صورته بالحجم الطبيعي أو أكبر عند طباعة الصورة بالبعدين 4 cm × 6 cm.

55) تصوير: يحدد البعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بعد x mm من العدسة، وجب أن يكون الفيلم على بعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$.

a) اكتب y بدلالة المتغير x. $y=\frac{70x}{x-70}$

b) ما المسافة بين العدسة والفيلم عندما يكون الجسم المراد تصويره على بعد 70 mm من العدسة؟

59b) إجابة ممكنة: لايمكن أن يكون الجسم على بعد 70 mm من العدسة؛ لأن المعادلة في هذه الحالة تصبح $\frac{1}{y}=0$

56) أدوية: يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيز الدواء الأول يعطى بالدالة f، وتركيز الدواء الثاني يعطى بالدالة g:

$f(t)=\frac{2t}{3t^2+9t+6}$ و $g(t)=\frac{3t}{2t^2+6t+4}$، حيث t الزمن بالساعات بعد تناول الدواء.

a) اجمع الدالتين معًا لتحصل على دالة تمثل تركيز الدواءين معًا في دم المريض. $h(t)=\frac{13t}{6t^2+18t+12}$

b) ما تركيز الدواءين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟ 0.19 تقريبًا

مسائل مهارات التفكير العليا

57) تحدٍّ: بسّط التعبير $\frac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$. $\frac{-3x^3-2x^2+16x-5}{4x^3+18x^2-6x}$

58) إجابة ممكنة: خاطئة؛ فالعبارة صحيحة لجميع قيم x ما عدا -2 ، 3 .

58) تبرير: حدد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، وضّح إجابتك:

$\frac{6}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$ لكل قيم x .

59) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث وحيدات حد على أن يكون م.م.أ لها يساوي $180a^4b^6c$.

60) اكتب: اكتب كيفية جمع تعابير نسبية مختلفة المقامات بطريقة منظمة.

59) إجابة ممكنة: $20a^4b^2c,\ 15ab^6,\ 9abc$

تدريب على اختبار معياري

61) إذا كان $\frac{2a}{a}+\frac{1}{a}=4$، فما قيمة a؟ C

A) $-\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 2

مراجعة تراكمية

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 1-4)

62) $-\frac{4bc}{33a}$ $\frac{-4ab}{21c}\cdot\frac{14c^2}{22a^2}$ **63)** $6y(x-y)$ $\frac{x^2-y^2}{6y}\div\frac{x+y}{36y^2}$ **64)** $(n+x)(n-6)$ $\frac{n^2-n-12}{n+2}\div\frac{n-4}{n^2-4n-12}$

65) سيارات: تتكون لوحة سيارة في إحدى الدول من حرف واحد من حروف الهجاء العربية جهة اليمين متبوعًا بأربعة أرقام من مجموعة الأرقام $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$. كم لوحة مختلفة يمكن تكوينها علمًا بأن عدد حروف اللغة العربية 28 حرفًا؟ (الدرس 3-1)

a) إذا سمح بتكرار الأرقام. 114688 **b)** إذا لم يسمح بتكرار الأرقام 47040

مراجعة المتطلبات السابقة

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 71 - 66 انظر ملحق الإجابات

66) $y=4(x+3)^2+1$ **67)** $y=-(x-5)^2-3$ **68)** $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

69) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-5$ **70)** $y=x^2+6x+2$ **71)** $y=x^2-8x+18$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-3

تمثيل كثيرات الحدود بيانيًّا.

الدرس 4-3

تحديد خصائص دوال المقلوب.

تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانيًّا.

ما بعد الدرس 4-3

تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا باستعمال خطوط التقارب.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- علامَ يعتمد عدد الأيام التي يحتاج إليها الطلبة لجمع المبلغ؟ يعتمد على عدد الطلبة المشاركين في التبرع.
- ماذا يحدث لقيمة c كلما زادت قيمة n؟ تقل.
- ما أصغر عدد كلي يمكن أن يكون قيمة لـ n؟ 1
- ما أكبر عدد كلي يمكن أن يكون قيمة لـ n؟ عدد الطلبة جميعهم

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مثال 1 يُبيّن كيفية تحديد القيود على مجال الدالة النسبية.

4-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا
Graphing Reciprocal Functions

فيما سبق

درست تمثيل بعض الدوال بيانيًّا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحدد خصائص دوال المقلوب من تمثيلها البياني.
- أمثّل تحويلات دوال المقلوب بيانيًّا.

المفردات الأساسية

دالة المقلوب reciprocal function

القطع الزائد hyperbola

خط التقارب asymptote

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

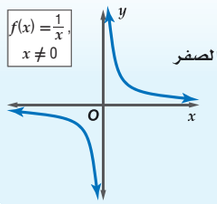
خطّط مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ BD 5000 للقيام بعمل خيري، فقرروا أن يتبرع كل منهم بدينار واحد يوميًّا، فإذا كان عدد الطلاب n طالب، فإن عدد الأيام اللازمة لجمع المبلغ c يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية تمثل الدالة $c = \frac{5000}{n}$ دالة مقلوب، **دالة المقلوب** هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي الدالة الأم لدوال المقلوب

أضف إلى مطويتك

الدالة الأم	$f(x) = \frac{1}{x}$
نوع التمثيل البياني	قطع زائد
المجال والمدى	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
خطا التقارب	$x = 0$ و $y = 0$
المقاطع	لا يوجد
تكون الدالة غير معرفة عندما	$x = 0$ و $f(x) = 0$



مجال دالة المقلوب هي مجموعة القيم التي تكون الدالة عندها معرفة.

الدوال: $f(x) = \frac{-3}{x+2}$ ، $g(x) = \frac{4}{x-5}$ ، $h(x) = \frac{3}{x}$

غير معرفة عندما: $x = -2$ ، $x = 5$ ، $x = 0$

مثال 1 القيم التي تجعل الدالة غير معرفة

حدد قيم x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرفة.

أوجد قيم x التي يساوي المقام عندها صفرًا.

$$2x + 5 = 0$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

الدالة غير معرّفة عندما $x = -\frac{5}{2}$.

تأكد

حدّد قيم x التي تجعل الدالة عندها غير معرّفة.

(1A) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ $x = 1$

(1B) $f(x) = \frac{7}{3x+2}$ $x = -\frac{2}{3}$

مصادر الدرس 4-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (182)	• تنويع التعليم، ص (182-180)	• تنويع التعليم، ص (180)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (25) • تدريبات على المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (25) • تدريبات على المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (25) • تدريبات على المسائل اللفظية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مثال 2 يُبيّن كيفية تحديد خصائص دالة المقلوب.

التقويم التكويني

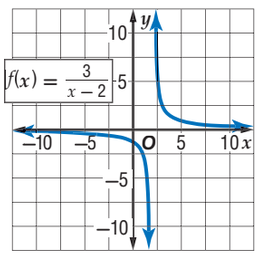
استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدد قيم x التي تكون $f(x)=\frac{2}{x^2+5x-24}$ عندها غير معرفة. $x=3$ ، $x=-8$

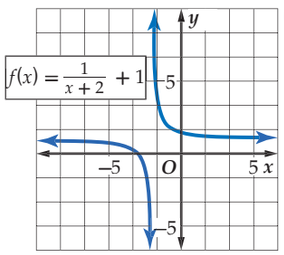
2 حدد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالتين الآتيتين:

(a)



خطوط التقارب: $y=0$ ، $x=2$
المجال: كل الأعداد الحقيقية عدا 2، المدى: كل الأعداد الحقيقية عدا 0.

(b)



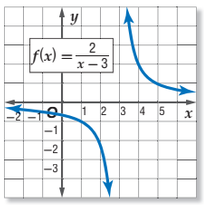
خطوط التقارب: $x=-2$ ، $y=1$، المجال: كل الأعداد الحقيقية عدا -2، المدى: كل الأعداد الحقيقية عدا 1.

ربما تكون التمثيلات البيانية لدوال المقلوب غير متصلة عند القيم المستثناة من المجال، وبعضها يكون له **خط تقارب**، وهو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة ولكن لا يتقاطع معه.

مثال 2 تحديد خصائص دوال المقلوب

حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى للدالتين الآتيتين:

(a)



حدد قيم x التي تكون الدالة عندها غير معرّفة.

$x-3=0$

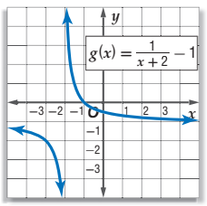
$x=3$

$f(x)$ غير معرّفة عند $x=3$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x=3$.

كلما زادت قيم x الأكبر من 3، فإن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر، وكلما قلت قيم x الأقل من 3 فإن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عندما $y=0$.

مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3. أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

(b)



حدد قيم x التي تكون الدالة $g(x)$ عندها غير معرفة.

$x+2=0$

$x=-2$

$g(x)$ غير معرفة عند $x=-2$، وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x=-2$.

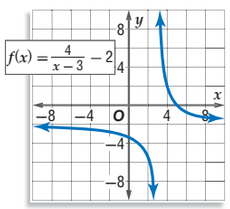
كلما زادت قيم x الأكبر من العدد -2. فإن قيم $g(x)$ تقترب من -1، وكلما قلت قيم x الأقل من -2 فإن قيم $g(x)$ تقترب أيضًا من -1، مما يعني وجود خط تقارب أفقي عند $g(x)=-1$.

مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2. أما مدى الدالة فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -1.

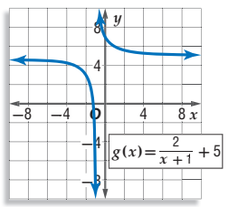
تأكد

حدد خطوط التقارب، و المجال، والمدى للدالتين الآتيتين:

(2A)



(2B)



2A) $x=3$, عند $f(x)=-2$
المجال = $\{x|x\neq 3\}$
المدى = $\{y\mid y\neq -2\}$

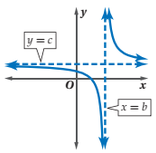
2B) $x=-1$, عند $g(x)=5$
المجال = $\{x|x\neq -1\}$
المدى = $\{y\mid y\neq 5\}$

إرشادات للدراسة

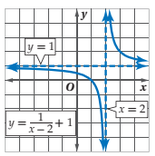
خطوط التقارب للدوال النسبية

الدالة النسبية التي على الصورة $y=\frac{a}{x-b}+c$ ، $a\neq 0$، لها خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تكون الدالة عندها غير معرفة (التي تجعل المقام يساوي صفرًا)، $x=b$. ولها خط تقارب أفقي عند $y=c$، وهو يبين سلوك طرفي التمثيل البياني.

نموذج:



مثال:



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع اشرح الأفكار الآتية:

- نقول إن $f(x)$ دالة **زوجية**، إذا كان $f(-x)=f(x)$ لكل x في المجال. ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلاً حول المحور y.
- نقول إن $f(x)$ دالة **فردية**، إذا كان $f(-x)=-f(x)$ لكل x في المجال. ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلاً حول نقطة الأصل.

وجه السؤال الآتي للطلبة: هل $f(x)=\frac{1}{x}$ فردية أم زوجية؟ فردية

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب يمكن استعمال طرائق الإزاحة السابقة نفسها، والتي استعملت في الدوال الأخرى لإزاحة دوال المقلوب. لاحظ امتداد خطوط التقارب في المثال (2) بمحاذاة التمثيل البياني للدالة.

مفهوم أساسي تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

أضف إلى مطويتك

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$$

h: إزاحة أفقية

إذا كانت h موجبة، إزاحة بمقدار $|h|$ وحدة إلى اليمين.

إذا كانت h سالبة، إزاحة بمقدار $|h|$ وحدة إلى اليسار.

خط تقارب رأسي عندما $x = h$.

k: إزاحة رأسية

إذا كانت k موجبة، إزاحة بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأعلى.

إذا كانت k سالبة، إزاحة بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأسفل.

خط تقارب أفقي عندما $y = k$.

a: الشكل والاتجاه

إذا كانت $a > 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x قبل إجراء الإزاحة الأفقية والرأسية، وإذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتوسع رأسيًا. وإذا كانت $0 < |a| < 1$، فإن المنحنى يضيق رأسيًا.

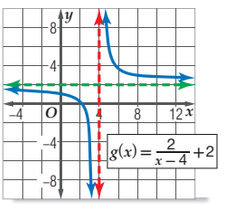
إرشادات للدراسة

خطوط التقارب تمتد خطوط التقارب لدالة المقلوب مع التمثيل البياني للدالة، وتتقاطع معه عند النقطة (h, k).

مثال 3 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدّد مجال ومدى كلٍّ منهما:

a $g(x) = \frac{2}{x-4} + 2$



التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \frac{1}{x}$.

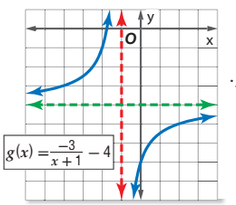
$a = 2$: توسع التمثيل البياني رأسيًّا.

$h = 4$: إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات إلى اليمين.
يوجد خط تقارب رأسي عندما $x = 4$.

$k = 2$: إزاحة التمثيل البياني وحدتين إلى أعلى.
يوجد خط تقارب أفقي عندما $f(x) = 2$.

المجال: $\{x \mid x \neq 4\}$ المدى: $\{y \mid y \neq 2\}$

b $g(x) = \frac{-3}{x+1} - 4$



التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \frac{1}{x}$.

$a = -3$: توسع التمثيل البياني رأسيًّا، وانعكاسه حول المحور x.

$h = -1$: إزاحة التمثيل البياني وحدة واحدة إلى اليسار.
يوجد خط تقارب رأسي عندما $x = -1$.

$k = -4$: إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات إلى أسفل.
يوجد خط تقارب أفقي عندما $y = -4$.

المجال: $\{x \mid x \neq -1\}$ المدى: $\{y \mid y \neq -4\}$

تأكد انظر ملحق الإجابات

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدّد مجال ومدى كلٍّ منهما:

3A $g(x) = \frac{-2}{x+4} + 1$ **3B** $g(x) = \frac{1}{3(x-1)} - 2$

يمكن استعمال دوال المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.

التركيز في المحتوى الرياضي

خطوط التقارب إن وجود خط تقارب لدالة معينة يعني أن هناك قيمة مفقودة لأحد المتغيرين. فخط التقارب الرأسي يعني أن هناك قيمة للمتغير x مستثناة من المجال، وكذلك خط التقارب الأفقي يعني أن هناك قيمة للمتغير y مستثناة من المدى.

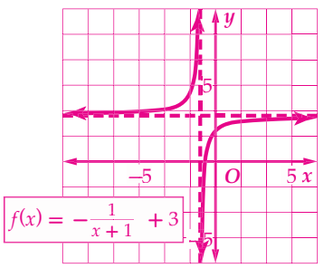
تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

مثال 3 يُبيّن عملية إزاحة التمثيل البياني للدالة.

مثال إضافي

3 مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كل منهما.

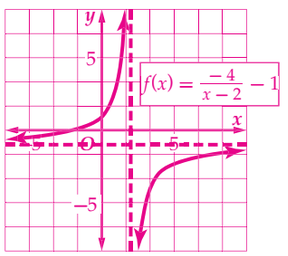
a $f(x) = -\frac{1}{x+1} + 3$



المجال $= \{x \mid x \neq -1\}$

المدى $= \{y \mid y \neq 3\}$

b $f(x) = \frac{-4}{x-2} - 1$



المجال $= \{x \mid x \neq 2\}$

المدى $= \{y \mid y \neq -1\}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء اقترح على الطلبة أن يختاروا ورقة رسم بياني ذات تقسيمات كبيرة وذلك لمساعدتهم في ترقيم الإحداثيات بالأعشار؛ لتحديد النقاط ذات الإحداثيات المقربة إلى أقرب عشر. وبيّن لهم أنهم قد لا يتمكنون من رؤية التمثيل البياني للدالة كاملًا إلّا عند استعمالهم للآلة الحاسبة البيانية أو لبرنامج حاسوبي.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل برنامج رسم معين؛ لعرض المستوى البياني، ثم مثّل $f(x)$ بيانيًّا. واطلب إلى مجموعة من الطلبة تمثيل الدالة $\frac{1}{f(x)}$ على السبورة كما يتخيلوها.

ثم استعمل برنامج الرسم؛ لتمثيل الدالة $\frac{1}{f(x)}$ بيانيًّا، واطلب إليهم أن يقارنوا إجاباتهم بالإجابة الصحيحة.

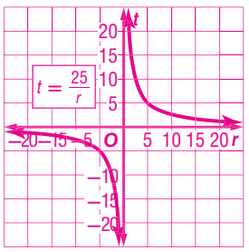
تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

مثال 4 يُبيّن أن المجال المعقول للدالة التي تمثل موقفًا من واقع الحياة هي جزء من مجال الدالة.

مثال إضافي

4 قطار: يقطع أحد القطارات المسافة بين مدينتين والبالغة 25 mi دون توقف.

a) اكتب دالة تمثل الوقت الذي يستغرقه القطار لقطع هذه المسافة بدلالة السرعة، ثم مثّل الدالة بيانيًّا. $t = \frac{25}{r}$



b) وضح أي قيود يمكن وضعها على المجال والمدى في هذه الحالة. المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن الأعداد السالبة هنا ليست ذات معنى. وهناك قيود إضافية على المجال تتعلق بسرعة القطار العظمى والصغرى.

3 التدريب

تقويم تكويني

استعمل التمارين 6–1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنويع التعليم

دون ضمن

الطلبة البصريون والمكانيون اطلب إلى الطلبة أن يمثلوا إحدى الدوال بيانيًّا على ورقة رسم بياني كبيرة الحجم؛ ليشاهدوا كيف يقترب تمثيل الدالة البياني من خط التقارب ولا يمسه. وشجعهم على استعمال أقلام تلوين مختلفة لتوضيح الفكرة.

إجابة:

1 $x - 1 = 0$

$x = 1$

$f(x)$ غير معرفة عندما $x = 1$. لذا، فإن للدالة خط تقارب رأسي معادلته $x = 1$. تقترب قيم $f(x)$ من الصفر مع تناقص قيم x ومع تزايد قيم x تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضًا. لذا، فإن للدالة خط تقارب أفقي معادلته $f(x) = 0$. المجال = $\{x \mid x \neq 1\}$. المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$.

الربط مع واقع الحياة

طيران الخليج
هي شركة الطيران الوطنية البحرينية، تتخذ من مطار البحرين الدولي مقرًّا لها، ومركزًا لعملياتها، وتقدم خدماتها لأكثر من 40 وجهة في آسيا، وإفريقيا، وأوربا، والشرق الأوسط. وقد أصبحت الناقل الرسمي والوطني لمملكة البحرين، وذلك في 6 مايو 2006 .

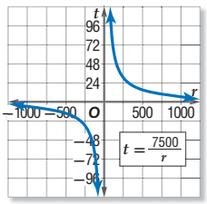
مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلات دوال المقلوب

سفريات: تقطع طائرة ركاب مسافة 7500 ميل في إحدى الرحلات.

a) اكتب دالة تبين الزمن t الذي تحتاج إليه الطائرة لتقطع هذه المسافة بوصفها دالة بالنسبة للسرعة r. ومثّل هذه الدالة بيانيًّا.

حل المعادلة $rt = d$ بالنسبة للمتغير t.

$rt = d$	المعادلة الأصلية
$t = \frac{d}{r}$	بقسمة كلا الطرفين على r
$t = \frac{7500}{r}$	$d = 7500$



مثل المعادلة $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًّا.

b) وضح أي قيود يمكن وضعها على المجال و المدى في هذه الحالة.

المجال والمدى في هذه الحالة هما جميع الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة غير منطقية في هذه الحالة. وهناك شرط أو قيد إضافي على المجال؛ لأن سرعة الطائرة لها قيمة صغرى وقيمة عظمى.

تأكد انظر ملحق الإجابات

4) رحلات: نظم طلبة الصف الثاني الثانوي رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 1 BD أجرة للحافلة التي أقلتهم، وتكفلت إدارة المدرسة بالنفقات الأخرى للرحلة وهي 20 BD. اكتب دالة تمثل متوسط تكلفة الرحلة للطالب الواحد ومثلها بيانيًّا. ووضح أي قيود يمكن وضعها على المجال و المدى.

تأكد من فهمك

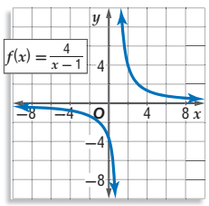
حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل دالة مما يأتي:

المثالان 2 , 1 الصفحتان 180 , 179

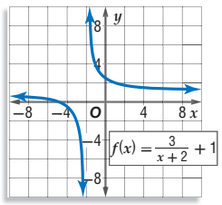
1) انظر الهامش

2) $x = -2, y = 1$
المجال = $\{x \mid x \neq -2\}$
المدى = $\{y \mid y \neq 1\}$

1



2)



مثال 3 صفحة 181

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: للتمارين 5–3 انظر الهامش

3) $g(x) = \frac{5}{x}$ 4) $g(x) = \frac{2}{x+3}$ 5) $g(x) = \frac{-1}{x-2} + 4$

مثال 4 صفحة 182

6) هندسة: مستطيل مساحة سطحه $18\,in^2$.

a) إذا كان l يمثل الطول، w يمثل العرض، فاكتب دالة تمثل الطول بدلالة العرض. $l = \frac{18}{w}$

b) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش

c) وضح أي قيود يمكن وضعها على المجال والمدى في هذه الحالة.

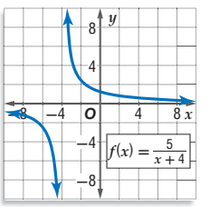
6c) في هذه الحالة كلٍ من المجال والمدى يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن الأعداد السالبة ليست منطقية.

تدرب وحل المسائل

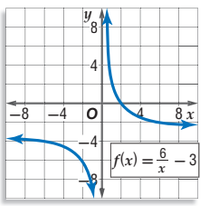
المثالان 2 , 1
الصفحتان 180 , 179

حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل دالة مما يأتي:

7)



8)



7) $x = -4, y = 0$
المجال= $\{x | x \neq -4\}$،
المدى= $\{y | y \neq 0\}$

8) $x = 0, y = -3$
المجال= $\{x | x \neq 0\}$،
المدى= $\{y | y \neq -3\}$

مثال 3
صفحة 181

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: **للتمارين 14–9 انظر ملحق الإجابات**

9) $g(x) = \frac{3}{x}$ **10)** $g(x) = \frac{-4}{x+2}$ **11)** $g(x) = \frac{2}{x-6}$

12) $g(x) = \frac{-2}{x-5}$ **13)** $g(x) = \frac{3}{x-7} - 8$ **14)** $g(x) = \frac{9}{x+3} + 6$

مثال 4
صفحة 182

15) كيمياء: لدى محمد 200 g من سائل مجهول. وتساعد معرفة كثافته على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة أي مادة بقسمة كتلة المادة على حجمها.

a) اكتب معادلة تمثل كثافة هذه المادة بدلالة حجمها. $d = \frac{200}{v}$

b) مثّل الدالة بيانيًّا. **انظر ملحق إجابات**

c) استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب، والمجال والمدى.

15c) $v = 0, d = 0$
المجال= $\{v | v \neq 0\}$،
المدى= $\{d | d \neq 0\}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: **للتمارين 18–16 انظر ملحق الإجابات**

16) $g(x) = \frac{5}{3x}$ **17)** $g(x) = \frac{2}{4x+1}$ **18)** $g(x) = \frac{1}{2x+3}$

19) تمثيلات متعددة: افترض أن $f(x) = \frac{1}{x}$، $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

a) جدولة: أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالتين. **للفروع a–d انظر ملحق الإجابات**

b) تمثيل بياني: استعمل القيم في الجدول لتمثيل كِلتا الدالتين بيانيًّا.

c) تعبير لفظي: قارن بين التمثيلين البيانيين وحدد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

d) تحليل: ضع تخمينًا حول الفرق بين التمثيل البياني للدوال التي في صورة $f(x) = \frac{1}{x^n}$، إذا كان n عددًا زوجيًّا، وإذا كان n عددًا فرديًّا.

21a) المنحنى الأول له خط تقارب رأسي عند $x = 0$، وخط تقارب أفقي عند $y = 0$. والمنحنى الثاني ناتج عن انسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى وله خط تقارب رأسي عند $x = 0$، وأفقي عند $y = 7$.

مسائل مهارات التفكير العليا

20) مسألة مفتوحة: اكتب دالة مقلوب يكون لتمثيلها البياني خط تقارب رأسي عندما $x = -4$، وخط تقارب أفقي عندما $f(x) = 6$. إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{1}{x+4} + 6$

21) تبرير: قارن بين التمثيل البياني لكل زوج من المعادلات مما يأتي موضحًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

a) $y = \frac{1}{x}$، و $y - 7 = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x}$، و $y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$ **c)** $y = \frac{1}{x}$، و $y = \frac{1}{x+5}$

d) استعمل ملاحظاتك في المسألة السابقة لتمثيل $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانيًّا دون استعمال جدول قيم. **انظر ملحق الإجابات**

21b) لكلا المنحنيين خط تقارب رأسي عند $x = 0$، وخط تقارب أفقي عند $y = 0$. المنحنى الثاني تمدد بعامل قدره 4.

21c) المنحنى الأول له خط تقارب رأسي عند $x = 0$، وأفقي عند $y = 0$. المنحنى الثاني ناتج عن انسحاب مقداره 5 وحدات باتجاه اليسار، وله خط تقارب رأسي عند $x = -5$، وأفقي عند $y = 0$.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	17 ، 20-22 ، 24-35
ضمن ضمن المتوسط	7-15 فردي، 19-22 ، 24-35
فوق فوق المتوسط	16-32، (اختياري: 33-35)

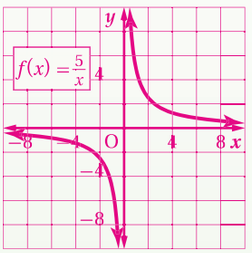
تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في التمرين 19 جدول للقيم، والتمثيل البياني، والتحليل؛ للمقارنة بين دالتي مقلوب.

تنبيه لحل تمارين

ورق الرسم البياني يحتاج الطلبة إلى ورق الرسم البياني؛ لحل التمارين 3-6 ، 1-19 ، 33-35 .

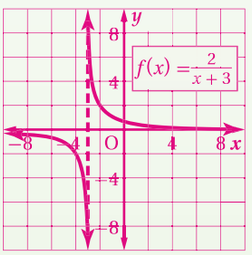
إجابات:

3)



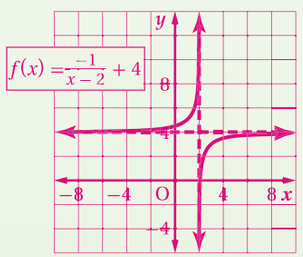
المجال = $\{x \mid x \neq 0\}$
المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

4)



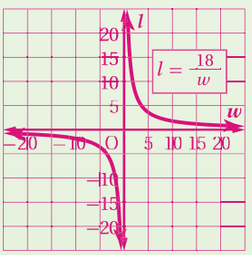
المجال = $\{x \mid x \neq -3\}$
المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

5)



المجال = $\{x \mid x \neq 2\}$
المدى = $\{y \mid y \neq 4\}$

6b)



22) **أيها لا ينتمي؟** حدد الدالة المختلفة عن الدوال الثلاث الأخرى، وفسر إجابتك. إجابة ممكنة: $g(x)$؛ لأن كل الدوال الأخرى فيها متغيرات في المقام فقط

$f(x) = \frac{3}{x+1}$ | $g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ | $h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$ | $j(x) = \frac{20}{x-7}$

23) **تحدٍّ:** اكتب دالتي مقلوب يكون للتمثيل البياني لكل منهما خطوط التقارب نفسها. انظر ملحق الإجابات

24) **اكتب:** ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية الدرس، ووضح كيف يمكن استعمال الدوال النسبية عند جمع التبرعات. و بين لماذا يكون جزء فقط من التمثيل البياني للدالة فقط ذا معنى في سياق المسألة. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

25) ما مجال الدالة $f(x) = \frac{8}{x+3}$؟ **D**

A مجموعة الأعداد الحقيقية

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا -3

26) ما الخطوط التقاربية للدالة $f(x) = \frac{-5}{x-2} + 3$؟ **A**

A $f(x) = 3,\ x = 2$ **B** $f(x) = 2,\ x = 3$

C $f(x) = -3,\ x = 2$ **D** $f(x) = 2,\ x = -3$

مراجعة تراكمية

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 4-1)

27) $\frac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}} = -2p$

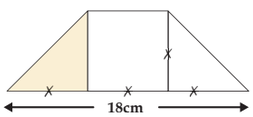
28) $\frac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}} = \frac{m+q}{m^2+q^2}$

29) $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}} = \frac{2x+y}{2x-y}$

30) إذا كان $P(A|B) = 0.03$، $P(A \cap B) = 0.02$، فأوجد $P(B)$؟ (الدرس 5-3) $\frac{2}{3}$

31) إذا كان $P(A) = 0.5$، $P(B) = x$، $P(A \cup B) = 0.7$ فأوجد قيمة x، إذا كان A، B حدثين متنافيين. (الدرس 6-3) 0.2

32) إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا في شبه المنحرف المبين في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة. (الدرس 3-3) $\frac{1}{4}$



مراجعة المتطلبات السابقة

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: للتمارين 33-35 انظر ملحق الإجابات

33) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

34) $f(x) = \frac{2}{x-2}$

35) $f(x) = x^2 - 4$

4 التقويم

تعلم لاحق اسأل الطلبة كيف يساعدهم التدريب على تمثيل دوال المقلوب في تمثيل الدوال النسبية؟

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-4 بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 4.

إجابة:

24) الدوال النسبية تساعد في معرفة عدد الأيام التي يحتاجها الطلبة لجمع مبلغ التبرع، أو لمعرفة عدد الطلبة المشتركين لجمع مبلغ التبرع خلال أيام محددة.

التمثيل البياني في الربع الأول في المستوى له معنى فقط؛ وذلك لأن كل من عدد الطلبة والمبالغ يجب أن تكون قيمًا موجبة وأكثر من ذلك، فإن عدد الطلبة يجب أن يكون عددًا صحيحًا.

اختبار منتصف الفصل

$\frac{(m+2)(m+5)}{3}$ (4

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 1-4)

(1) $\frac{2y^4z}{9x^4} \cdot \frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$ $\frac{2a^4b^2}{5}$ (2) $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$

(3) $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$ $\frac{2}{x+3}$ (4) $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$

(5) $r+3\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$ (6) $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$ $\frac{2y(y-2)}{3(y+2)}$

(7) **اختيار من متعدد:** إذا كانت $r \neq \pm 2$، فأي مما يأتي يكافئ التعبير $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$؟ (الدرس 1-4) B

A $\frac{r-2}{r+4}$ C $\frac{r+2}{r-4}$

B $\frac{r+4}{r-2}$ D $\frac{r+4}{r+2}$

(8) **اختيار من متعدد:** أي قيم x الآتية تجعل التعبير $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرّف؟ (الدرس 1-4) H

F $-3, -1$ H $-3, -1, 9$

G $-9, 1, 3$ J -1

(9) أوجد م.م.أ للتعبيرين x^2-3x و x^2-3. (الدرس 2-4)
$-3x(x-1)$

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 2-4)

(10) $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$ $\frac{3y^2+2x}{6xy^3}$

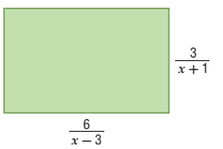
(11) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n}$ $\frac{9n^2+8-48mn}{12mn^2}$

(12) $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$ $\frac{5r-6}{(r-6)(r+3)(r-2)}$

(13) $\frac{3x}{x+y} \frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$

(14) $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$ $\frac{x^2+4x-7}{2(x-4)(x+1)}$

(15) أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه بدلالة x. (الدرس 2-4) $\frac{18x-6}{(x-3)(x+1)}$



(16) **سفر:** سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 mi عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 mi/h. (الدرس 2-4)

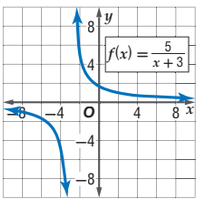
a) إذا كانت x تمثل السرعة الأولى فاكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة. $\frac{50}{x}$ h

b) اكتب تعبيرًا يمثّل الزمن الذي استغرقه قطع النصف الثاني من المسافة. $\frac{50}{x-15}$ h

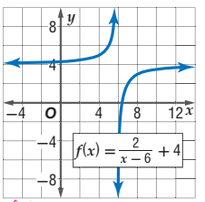
c) اكتب تعبيرًا يمثّل زمن قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة. $\frac{50(2x-15)}{x(x-15)}$

حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين: (الدرس 3-4)

(17) $x=-3, f(x)=0,$ المجال $=\{x \mid x \neq -3\}$، المدى $=\{y \mid y \neq 0\}$



(18) $x=6, f(x)=4;$ المجال $=\{x \mid x \neq 6\}$ المدى $=\{y \mid y \neq 4\}$



للأسئلة 22-19 انظر ملحق الإجابات

حدد خطوط التقارب، والمجال والمدى لكل دالة مما يأتي: (الدرس 3-4)

(19) $f(x)=\frac{6}{x-1}$ (20) $f(x)=\frac{-2}{x}+4$

(21) $f(x)=\frac{3}{x+2}-5$ (22) $f(x)=-\frac{1}{x-3}+2$

(23) **شطائر:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. (الدرس 3-4)

a) اكتب دالة تمثّل هذا الموقف. $f(x)=\frac{45}{x}$

b) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة.

للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات
التقويم

أنشئ نسخًا معدّله من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

المعالجة:

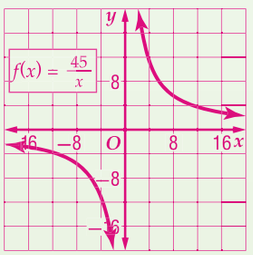
بناءً على نتائج اختبار منتصف الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكّل تحديًا للطلبة.

مطويتك متابعة المطويات

شجع الطلبة قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي في مطوياتهم عن الدروس من 1-4 إلى 3-4.

إجابة

(23b



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-4، 2-4، 3-4	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (162)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

4-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-4

تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا.

الدرس 4-4

تمثيل الدوال النسبية التي لها خطوط تقارب رأسية وأفقية بيانيًّا.

تمثيل الدوال النسبية التي لها نقطة انفصال بيانيًّا.

ما بعد الدرس 4-4

حل المعادلات النسبية بيانيًّا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبةقراءة فقرة "لماذا؟ ".

اسأل:

- علامَ تعتمد تكلفة طباعة الصور؟
  تعتمد على عدد الصور المطبوعة.
- ماذا يحصل لقيمة $C(p)$ عندما تزداد قيمة p؟
  تتناقص.
- هل يمكن أن تكون $p = 0$؟ لا
- هل يمكن أن تكون قيمة $C(p)$ صفرًا؟
  نعم، يوجد صفر للدالة عندما $p = \frac{-350}{0.47}$ أو -744.68 تقريبًا. ولكن القيمة السالبة غير منطقية بالنسبة لهذه المسألة.

4-4

تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

فيما سبق

درست تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أمثّل بيانيًّا دوال نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية.
- أمثّل بيانيًّا دوال نسبية لها نقاط انفصال.

المفردات الأساسية

الدالة النسبية
rational function

خط التقارب الرأسي
vertical asymptote

خط التقارب الأفقي
horizontal asymptote

نقطة الانفصال
point discontinuity

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره BD350، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة BD0.47.

يمكن استعمال الدالة النسبية $C(p) = \frac{0.47p + 350}{p}$ لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية **الدالة النسبية** هي دالة في الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

لتمثيل الدالة النسبية بيانيًّا يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. أصفار الدالة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

مفهوم أساسي **خطوط التقارب الرأسية والأفقية**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا حدود

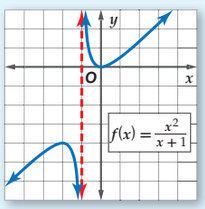
لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالة $f(x)$ **خط تقارب رأسي** على الأقل عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالة $f(x)$ **خط تقارب أفقي** واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{معامل } a(x) \text{ الرئيس}}{\text{معامل } b(x) \text{ الرئيس}}.$$

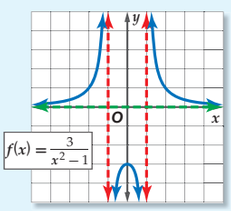
أمثلة

لا يوجد خطوط تقارب أفقية



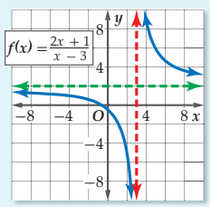
خط التقارب الرأسي:
$x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد



خطّا التقارب الرأسي:
$x = -1, x = 1$

خط التقارب الأفقي:
$y = 0$



خط التقارب الرأسي:
$x = 3$

خط التقارب الأفقي:
$y = 2$

مصادر الفصل 4-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص(190, 191)	• تنويع التعليم، ص (188, 191)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (26) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (28) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (26) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

يمكن استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالة النسبية بيانيًّا، كما يمكن استعمال خطوط التقارب لتقسيم التمثيل البياني للدالة النسبية إلى أجزاء لإيجاد أزواج مرتبة عليه.

مثال 1 التمثيل البياني لدالة نسبية ليس لها خطوط تقارب أفقية

مثّل الدالة $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ بيانيًّا.

خطوة 1 أوجد أصفار الدالة.

$a(x)=0$ $\quad x^2=0$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\quad x=0$

يوجد للدالة صفر عندما $x=0$.

خطوة 2 ارسم خطوط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

$b(x)=0$ $\quad x-1=0$

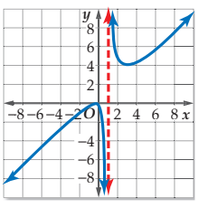
بإضافة العدد 1 لكلا الطرفين $\quad x=1$

يوجد خط تقارب رأسي للدالة معادلته $x=1$.

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالة.

خطوة 3 مثّل بيانيًّا.

أنشئ جدول قيم للدالة لتجد أزواجًا مرتبة تقع على التمثيل البياني، وصل بين تلك النقاط على المستوى الإحداثي.

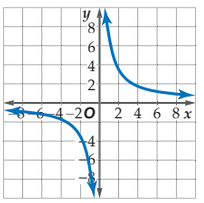


x	$f(x)$
-3	-2.25
-2	-1.33
-1	-0.5
0	0
0.5	-0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5

تأكد

مثّل الدالة $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x+1}$ بيانيًّا . انظر الهامش

قد لا تكون لبعض قيم الدالة معنى، وذلك في مسائل التطبيقات الحياتية. فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثل زمنًا، أو مسافة أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذا لا حاجة لأخذ الجزء الأيسر من المنحنى بعين الاعتبار.



إرشادات للدراسة

أصفار الدالة النسبية

أصفار الدالة النسبية التي على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث كل من $a(x)$ و $b(x)$ دالة كثيرة حدود، ولا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، $b(x)\neq 0$ هي قيم x التي تجعل البسط يساوي صفرًا (أي $a(x)=0$).

إرشادات للدراسة

الآلة الحاسبة البيانية

يمكن استعمال خاصية TABLE في الآلة الحاسبة البيانية لحساب قيم x و y في الصورة العشرية.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

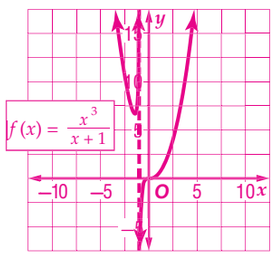
مثال 1 يُبيّن كيفية تمثيل دالة نسبية لا يوجد لها خط تقارب أفقي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

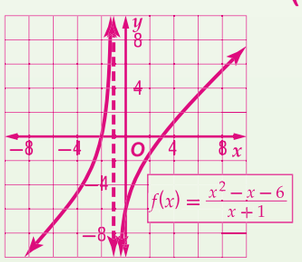
مثال إضافي

1 مثّل $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$ بيانيًّا.



إجابة (تأكد):

1)



التعليم باستعمال التقنيات

تصوير فيديو اطلب إلى الطلبة تصوير شريط فيديو يوضحون فيه كيفية تمثيل الدالة النسبية بيانيًّا، بعد أن يصفوا كيف يمكنهم إيجاد خطوط التقارب، واستعمال جدول القيم؛ لتمثيل الدالة.

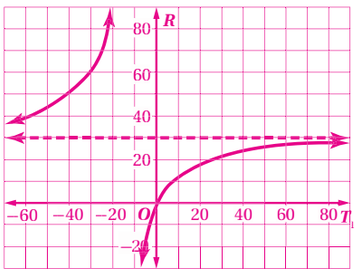
خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مثال 2 يُبيّن أن المجال المقبول للدالة التي تمثل موقفًا من واقع الحياة هو جزء من مجال الدالة.

مثال إضافي

2 **السرعة المتوسطة:** استعمل الموقف الحياتي ومعادلته في المثال 2 في:

a) تمثيل الدالة بيانيًّا عندما $r_2 = 15\,\text{mi}\,|\,\text{h}$.



b) ما المقطع من المحور R؟

المقطع من المحور R يساوي 0.

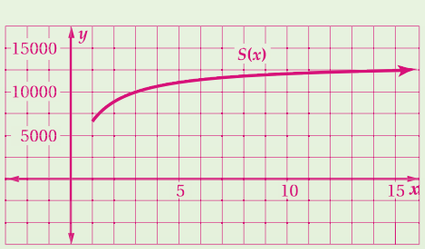
c) ما المجال المقبول للمسألة، وما مداها؟ قيم r_1 أكبر من أو تساوي صفرًا، أما قيم R فتتراوح بين 0 و30.

التركيز في المحتوى الرياضي

نقطة الانفصال بما أن الانفصال يمكن أن يكون عند نقطة، والنقطة ليس لها أبعاد، فإننا نضع دائرة مفرغة على المنحنى؛ لتمثيل نقطة الانفصال.

إجابة (تأكد):

2) يجب أن يكون عدد سنوات العمل أكبر من أو يساوي الواحد، ويتراوح الراتب بين 6875 و 13500. يدل خط التقارب الأفقي على أعلى راتب ممكن.



تنويع التعليم

فوق

توسّع حفّز الطلبة لكي يوضحوا قواعد إيجاد خطوط التقارب الأفقية؛ لأن الدرس يذكر هذه القواعد ويترك تفسيرها للطلبة ذوي القدرات العليا. ثم دعّم هذا الواجب بأن تطلب إليهم أن يختبروا أنواعًا مختلفة من التمثيلات البيانية لدوال نسبية تتغير فيها درجات كثيرات الحدود في كلٍ من البسط والمقام، ومن ثم البحث عن أنماط معينة لهذه الخطوط.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال التمثيل البياني للدوال النسبية

الربط مع واقع الحياة

تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

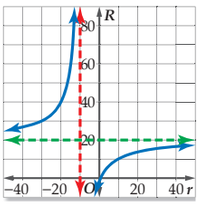
السرعة المتوسطة: يسير قارب خفر سواحل في عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_1 mi/h. و خلال عودته سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_2 mi/h. ويُعطى مقدار متوسط سرعة القارب خلال رحلة الذهاب والعودة بالقانون $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

a) إذا كان r_1 هو المتغير المستقل، و R هو المتغير التابع فمثّل القانون بيانيًّا عندما $r_2 = 10$ mi/h.

بتعويض قيمة r_2 تصبح الدالة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + (10)} = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$.

ويكون خط التقارب الرأسي هو $r_1 = -10$.

مثّل خطوط التقارب والدالة بيانيًّا. لاحظ أن خط التقارب الأفقي هو $R = 20$.



b) ما مقطع المحور R للتمثيل البياني؟

مقطع المحور R هو $(0, 0)$.

c) ما قيم المجال والمدى المقبولة في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، مقدار السرعة غير سالب، ولذا فإن قيم r_1 الأكبر من أو التي تساوي الصفر هي التي تكون واقعية ومقبولة، و قيم R المقبولة هي التي بين 0 و 20.

تأكد

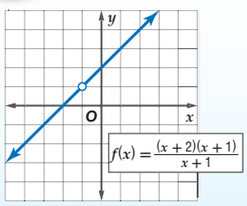
2) رواتب: تستعمل إحدى الشركات الدالة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف بعد x سنة من عمله لديها، مثّل الدالة بيانيًّا. وحدد القيم المنطقية لمجال الدالة ومداها في سياق المسألة، وماذا يعني خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟ انظر الهامش

نقطة الانفصال يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالة النسبية، وتظهر هذه النقط على شكل فجوات في تمثيل الدالة البياني؛ لأن الدالة تكون غير معرّفة عند تلك النقاط.

مفهوم أساسي — نقطة الانفصال

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $b(x) \neq 0$، و كان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$، فإنه توجد نقطة انفصال عند $x = c$.



مثال

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$
$$= x + 2, x \neq -1$$

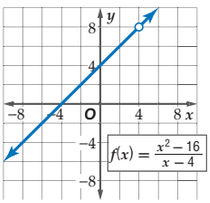
مثال 3 التمثيل البياني لدالة تحوي نقطة انفصال

مثّل الدالة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ بيانيًّا:

لاحظ أن مجال الدالة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=x+4$$

لذا، فإن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ هو نفسه التمثيل البياني للدالة $f(x)=x+4$، مع وجود فجوة في التمثيل البياني عندما $x=4$.



تنبيه!

فجوات التمثيل البياني تذكر أن وجود عامل مشترك بين البسط والمقام يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالة.

تأكد للتدريبين 3A, 3B انظر الهامش

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

3A $f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x+5}$

3B $f(x)=\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-9}$

تأكد من فهمك

مثال 1 صفحة 187

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا: للتمرينين 1, 2 أنظر ملحق الإجابات

1 $f(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$

2 $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

مثال 2 صفحة 188

3 **كرة قدم:** أحرز سعيد 7 أهداف في 11 مباراة لعبها مع فريق كرة القدم في مدرسته، ويرغب في تحسين نسبة الأهداف التي يحرزها والممثلة بالدالة $P(x)=\frac{7+x}{11+x}$، حيث x عدد الأهداف.

a) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

b) أي جزء من تمثيل الدالة البياني مقبول في سياق المسألة؟ الجزء الواقع في الربع الأول

c) وضح معنى نقطة التقاطع مع المحور الرأسي في سياق المسألة.

d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وماذا تعني بالنسبة للأهداف؟

3c) تمثل نسبة الأهداف الأصلية التي تبلغ 63.6% .

3d) $y=1$ وهذا يمثل نسبة 100% ولا يمكن الوصول إليها؛ لأنه أضاع 4 أهداف من البداية .

مثال 3 صفحة 189

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: للتمرينين 4, 5 انظر ملحق الإجابات

4 $f(x)=\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

5 $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 187

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: للتمرين 6 انظر الهامش، للتمارين 13–7 انظر ملحق إجابات

6 $f(x)=\frac{x^2}{6x+12}$

7 $f(x)=\frac{x^2-16}{x-1}$

مثال 2 صفحة 188

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

8 $f(x)=\frac{x}{x+2}$

9 $f(x)=\frac{5}{(x-1)(x+4)}$

10 $f(x)=\frac{1}{(x+4)^2}$

11 $f(x)=\frac{2}{(x+2)(x-5)}$

12 $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$

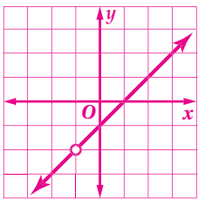
13 $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

نقط الانفصال

مثال 3 يوضح كيفية تمثيل الدالة بيانيًّا عند وجود نقطة انفصال.

مثال إضافي

3 مثّل $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ بيانيًّا.



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين **1–5**؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة.

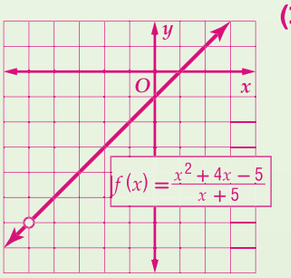
ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل تمارين

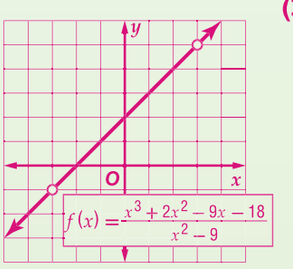
ورق الرسم البياني تحتاج التمارين **1–26** و **31-33** إلى ورق الرسم البياني؛ لتمثيلها بيانيًّا.

إجابات:

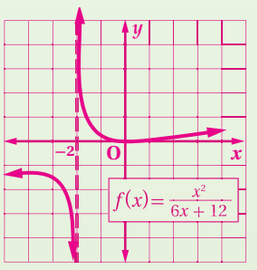
(3A



(3B



(6



14) كهرباء: دائرة كهربائية تحتوي 3 مقاومات موصولة على التوالي، تُعطى شدة التيار الكهربائي فيها بالمعادلة $I = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_3 ، R_2 ، R_1 المقاومات بالأوم.

a) إذا كان R_1 هو المتغير المستقل، و I هو المتغير التابع، فمثل المعادلة بيانيًّا عندما $V = 120\text{ v}, R_2 = 25\ \Omega, R_3 = 75\ \Omega$. انظر ملحق الإجابات

b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع $-R_1$، و مقطع $-I$. $R_1 = -100$، لا يوجد تقاطع مع محور R ، مقطع I هو 1.2

c) أوجد قيمة I عندما $R_1 = 140\ \Omega$. 0.5 Amp

d) حدد قيم المجال والمدى المقبولة في سياق المسألة. $R_1 \geq 0$ و $0 < I \leq 1.2$

مثال 3
صفحة 189

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 15–27 انظر ملحق الإجابات

15) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

16) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

17) $f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$

18) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

أوجد معادلة خط التقارب الرأسي ونقط الانفصال (إن أمكن) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

19) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$ معادلة خط التقارب الرأسي $x = -5$ ، ونقطة انفصال عند $x = -4$

20) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$ معادلة خط التقارب الرأسي $x = -3$ ، $x = 0$، لايوجد نقطة انفصال

21) $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$ لايوجد خط تقارب رأسي، نقطة انفصال عند $x = 5$

22) اتصالات: اشترى أحمد هاتفًا محمولًا بالتقسيط على مدى x شهر مع خط إنترنت، وكان سعر الهاتف BD150 ، والتكلفة الشهرية للاتصال بالهاتف BD30 ، بالإضافة إلى BD10 للإنترنت.

a) اكتب دالة نسبية تمثل معدل التكاليف الشهرية التي يدفعها أحمد بدلالة عدد الأشهر، ومثّلها بيانيًّا. للفروع a–d انظر ملحق الإجابات

b) ما خطوط تقارب التمثيل البياني للدالة؟

c) لماذا يكون الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المهم في الحل؟

d) بعد كم شهر يكون متوسط التكلفة الشهرية التي يدفعها أحمد BD45؟

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: للتمرينين 23, 24 انظر ملحق الإجابات

23) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$

24) $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$

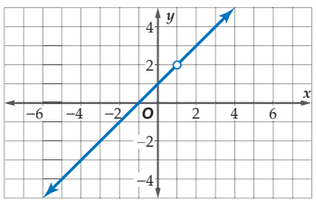
الربط مع واقع الحياة

تطورت تكنولوجيا الاتصالات بشكل مطرد في الآونة الأخيرة، حيث أصبح بالإمكان الاتصال بالإنترنت من أي مكان في العالم، عن طريق الهاتف المحمول. وفي المملكة أكثر من مزود لهذه الخدمة.

مسائل مهارات التفكير العليا

25) مسألة مفتوحة: مثّل بيانيًّا بشكل تقريبي دالة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$. انظر ملحق الإجابات

26) تحدٍّ: اكتب دالة نسبية لها التمثيل البياني المجاور. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$



27) تبرير: ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالتين: $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$؟ منحنى $g(x)$ فيه فجوة عند $x = -3$.

تنويع التعليم

ضمن

المتعلمون اللغويون أو اللفظون اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا قائمة من الإرشادات؛ لمساعدة أي شخص يريد أن يمثل دالة نسبية بيانيًّا.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	6-18 ، 25 ، 27-37
ضمن ضمن المتوسط	7–17 فردي، 22–25، 27–38
فوق فوق المتوسط	22–37 ، (اختياري: 38)

28) **برهان:** الدالة النسبية هي دالة في الصورة:

$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

أثبت أن $f(x) = \frac{x}{a-b} + c$ دالة نسبية.

$f(x) = \frac{x}{a-b} + c$ (28

$= \frac{x}{a-b} + \frac{c(a-b)}{(a-b)}$

$= \frac{x + ca - cb}{a-b}$

29) **اكتب:** وضح كيف يمكن استعمال تحليل البسط والمقام إلى العوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية ونقطة الانفصال لدالة نسبية. انظر الهامش

تدريب على اختبار معياري

30) **احتمال:** يريد علي أن يختار كتابين معًا من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك؟ **C**

A 48 **B** 18

C 15 **D** 12

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: (الدرس 3-4) للتمارين 33–31 انظر الهامش

31) $f(x) = \frac{-5}{x+2}$ **32)** $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$ **33)** $f(x) = \frac{1}{x+6} + 1$

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 2-4)

34) $\frac{5m-4}{3(m+2)(m-2)}$ $\frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{3m+6}$

35) $\frac{2(d^2-4d+6)}{(d-2)(d+4)(d-4)}$ $\frac{d-4}{d^2+2d-8} + \frac{d+2}{d^2-16}$

36) $\frac{y(y-9)}{(y-3)(y+3)}$ $\frac{y}{y+3} - \frac{6y}{y^2-9}$

37) $\frac{7x+38}{2(x+4)(x-7)}$ $\frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14}$

مراجعة المتطلبات السابقة

38) **سفر:** يبين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره من مدينته إلى مدينة مجاورة في زمن معين.

الزمن (h)	المسافة (mi)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعة الأولى والثالثة من الانطلاق. 55 mi / h

b) أوجد معدل تغير المسافة بين 0 و 5 ساعات من الانطلاق. 45 mi / h

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع ارسم مستقيمًا على السبورة، وارسم فجوة على المستقيم تقابل قيمة صحيحة للمتغير x، فمثلاً ارسم المستقيم $y = x - 2$، وارسم فجوة عليه تقابل النقطة $(1, -1)$. ثم اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا دالة نسبية تمثل هذا المستقيم. هناك العديد من الإجابات الممكنة التي تكون فيها $x=1$ قيمة مستثناة وتعطي $f(x)=x-2$ بعد تبسيطها.

مثال ممكن: $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$ أو $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

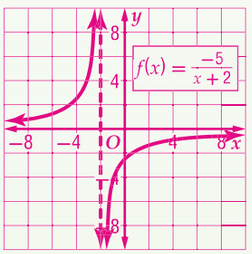
4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يذكروا أمثلة على الدوال النسبية، وناقش معهم خطوط التقارب ونقاط الانفصال.

إجابات:

29) إجابة ممكنة: يمكن تحديد خطوط التقارب الرأسية لدالة نسبية بتحليل المقام إلى عوامله ومساواة كل عامل بالصفر. وإذا وجد عامل مشترك بين البسط والمقام مثل $x - c$ فهذا يعني وجود نقطة انفصال عند $x = c$.

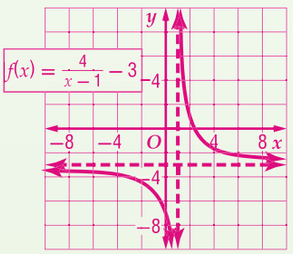
31)



المجال $= \{x \mid x \neq -2\}$

المدى $= \{y \mid y \neq 0\}$

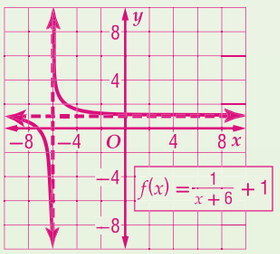
32)



المجال $= \{x \mid x \neq 1\}$

المدى $= \{y \mid y \neq -3\}$

33)



المجال $= \{x \mid x \neq -6\}$

المدى $= \{y \mid y \neq 1\}$

توسع
4-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لاستكشاف تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

من الممكن أن يجرب الطلبة نوع التمثيل البياني الموجود إلى يسار المعادلة في مُحدِّد الدالة ($Y =$ List). ويمكنهم أن يبدؤوا باستعمال طريقة المستقيم التي يُعبر عنها بمفتاح الإشارة المائلة التي تمنح الطلبة الوقت الكافي لتتبع مسار التمثيل.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية لإكمال النشاطين 2 , 1.

- قد يحتاج الطلبة إلى تتبع تمثيل الدالة خارج الإطار أو النافذة الظاهرة لتحديد خطوط التقارب بصورة دقيقة.
- عند استعمال الآلة الحاسبة البيانية في الصيغة المتصلة يمكن أن ترسم خط تقارب رأسيًّا على حين أنها تربط في الواقع بين نقطتين متتاليتين. ولذا فإن استعمال الآلة الحاسبة البيانية في الوضعية النقطية يلغي هذه المعضلة.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 1–6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمارين 3–1 ؛ لتقويم مدى قدرة الطلبة على استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل الدوال النسبية بيانيًّا.

من المحسوس إلى المجرّد

يتطلب التمرين 5 من الطلبة تطبيق استكشافاتهم على تمثيل الصورة العامة للدالة النسبية بيانيًّا.

التوسّع في المفهوم

اطلب إلى الطلبة عند التحضير؛ لدراسة التناسب العكسي تمثيل الدوال $y = \frac{1}{x}$، $y = \frac{2}{x}$، $y = \frac{3}{x}$، $y = \frac{4}{x}$ على الشاشة نفسها ووصف أوجه التشابه بين تمثيلاتها البيانية. محورا الإحداثيات هما خطا تقارب لكل من الدوال الأربع.

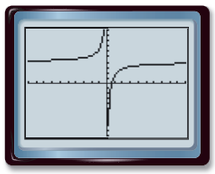
توسع
4-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

معمل الآلة الحاسبة البيانية

يمكن استعمال الآلة الحاسبة البيانية لاستكشاف تمثيلات الدوال النسبية البيانية.

نشاط 1 التمثيل البياني لدالة لها خطوط تقارب

مثّل الدالة $y = \frac{8x - 5}{2x}$ بيانيًّا في نافذة العرض القياسية، وأوجد معادلة خطوط التقارب:



خطوة 1 أدخل المعادلة في $Y =$ List، ثم مثلها بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

Y= (8 X,T,θ,n − 5) ÷

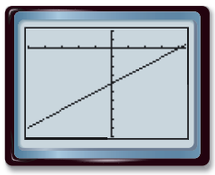
(2 X,T,θ,n) ZOOM 6

خطوة 2 اختبر التمثيل البياني.

بالنظر إلى المعادلة يمكننا معرفة أن الدالة غير معرفة عندما $x = 0$، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًّا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن القيم تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.

نشاط 2 التمثيل البياني لدالة تحوي نقطة انفصال

مثّل الدالة $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ بيانيًّا في النافذة $[-5, 4.4]$ في $[-10, 2]$ بعامل مقياس 1.



خطوة 1 بما أن الدالة غير متصلة فضع الآلة الحاسبة البيانية على نظام النقط وذلك بالضغط على المفاتيح:

MODE ▼ ▼ ▼ ▼ ▶ ENTER

خطوة 2 اختبر التمثيل البياني.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم منفصل عندما $x = -4$ ؛ لأن المقام يساوي صفرًا عندما $x = -4$، مما يعني أن الدالة غير معرّفة عندما $x = -4$.

إذا استعملت المفتاح TRACE لتتبع التمثيل البياني فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لـ y عندما $x = -4$.

تمارين:

استعمل الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، واكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال إن وجدت، وحدد خطوط التقارب:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ $x = 0, y = 0$

2) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$ $x = -2, y = 1$

3) $f(x) = \frac{2}{x - 4}$ $x = 4, y = 0$

4) $f(x) = \frac{2x}{3x - 6}$ $x = 2, y = \frac{2}{3}$

5) $f(x) = \frac{4x + 2}{x - 1}$ $x = 1, y = 4$

6) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ نقطة انفصال عند $x = -3$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-5

كتابة المعادلات الخطية وتمثيلها.

الدرس 4-5

تمييز مسائل التغيّرات الطردية والمشتركة وحلها.

تمييز مسائل التغيّرات العكسية والمركبة وحلها.

ما بعد الدرس 4-5

تمثيل دوال القطع الزائد.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- إذا زاد ارتفاع المنحدر، فماذا يحصل لطول المنصة؟ يزداد.
- إذا نقصت قيمة h ، فماذا يحصل لقيمة ℓ ؟ تنقص.
- ما القيمة التي تبقى ثابتة ولا تتغير؟ النسبة $\frac{\ell}{h}$ ، وتساوي 1.5

التغيُّر
Variation

فيما سبق

درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أميز مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك وأحلها.
- أميز مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركب وأحلها.

المفردات الأساسية

التغيُّر الطردي direct variation

ثابت التغيُّر أو ثابت التناسب constant of variation or constant of proportion

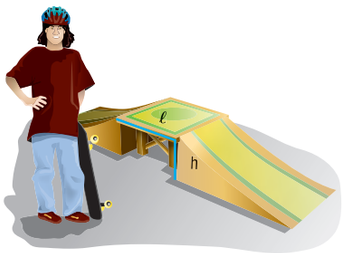
التغيُّر المشترك joint variation

التغيُّر العكسي inverse variation

التغيُّر المركب combined variation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



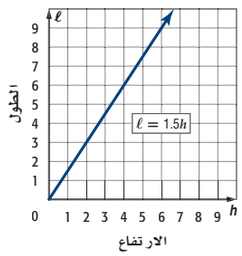
وجد عبدالله خلال قيامه ببناء منحدر للتزحلق أن أنسب المنحدرات هي تلك التي يكون فيها طول المنصة يساوي 1.5 مرة من ارتفاعها.

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصة يعتمد على الارتفاع، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى النسبة ثابتة.

المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $\ell = 1.5h$، وبهذا فإن الطول يتغيَّر طرديًّا مع الارتفاع.

النسبة $\left(\frac{\ell}{h}\right)$	الارتفاع (h)	الطول (ℓ)
1.5	2	3
1.5	4	6
1.5	6	9
1.5	8	12

التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك إن العلاقة المعطاة بالمعادلة $\ell = 1.5h$ مثال على التغيُّر الطردي، حيث يُعطى **التغيُّر الطردي** بمعادلة في الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k **ثابت التغيُّر** أو **ثابت التناسب**.



لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $\ell = 1.5h$ هو مستقيم يمر بنقطة الأصل، لذا فالتغيُّر الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة في الصورة $y = mx + b$ ، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيُّر الطردي هو ثابت التغيُّر.

للتعبير عن التغيُّر الطردي فإننا نقول إن y تتغيَّر طرديًّا مع x. وبمعنى آخر كلما زادت x فإن y تزداد أو تنقص بنسبة ثابتة.

مفهوم أساسي — التغيُّر الطردي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي تتغيَّر y طرديًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.

ويسمى العدد k ثابت التغيُّر (التناسب).

مثال إذا كان $x = 7$, $y = 3x$ ، فإن $y = 3(7) = 21$.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وعُلمت بعض القيم فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المقابلة لها.

$$y_1 = kx_1 \quad , \quad y_2 = kx_2$$
$$\frac{y_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (يسمّى هذا التناسب تناسبًا طرديًّا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x).

يمكن استعمال خصائص المساواة لإيجاد تغيُّرات أخرى تربط بين قيم x و قيم y.

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر الطردي والذي يمثّل علاقة خطية متناسبة ، هو مستقيم يمر بنقطة الأصل.

مصادر الدرس 4-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (198)	• تنويع التعليم، ص (198, 199)	• تنويع التعليم، ص (199)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (27) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (27) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • الجداول الإلكترونية	• كتاب التمارين ص (27) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك

مثال 1 يُبيّن كيفية استعمال تناسب لحل مسألة تغيّر طردي بسيط.

مثال 2 يُبيّن كيفية حل مسائل التغير المشترك.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1. إذا كانت y تتغير طرديًّا مع x، وكانت $y = -15$ عندما $x = 5$، فأوجد قيمة y عندما $x = 3$. -9
2. إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع كل من x و z، فأوجد قيمة y عندما تكون $x = 10$ و $z = 5$، علمًا بأن $y = 12$ عندما $x = 3$ و $z = 8$. 25

تنبيه!

تجنب الأخطاء ناقش الطلبة في كيفية كتابة معادلة تغيّر تحتوي على ثابت التغيّر.

التركيز في المحتوى الرياضي

التغيّر الطردي والتغيّر العكسي يمكن تحديد نوع التغيّر في بعض المسائل من خلال جدول يربط بين قيم x وقيم y. إذا كانت $\frac{y}{x}$ قيمة ثابتة، فإن التغيّر طردي. أما إذا كانت xy قيمة ثابتة، فإن التغيّر عكسي.

إرشادات للدراسة

ثابت التغيُّر الطردي
المستقيم الذي له ثابت تغيُّر موجب، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين، بينما المستقيم الذي له ثابت تغيُّر سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

مثال 1 التغيُّر الطردي

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y = 15$ عندما $x = -5$، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيمتين.

تناسب طردي	$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
$y_1 = 15, x_1 = -5, x_2 = 7$	$\frac{15}{-5} = \frac{y_2}{7}$
بالضرب التبادلي	$15(7) = -5(y_2)$
بالتبسيط	$105 = -5y_2$
بقسمة كلا الطرفين على -5	$-21 = y_2$

تأكد

1) إذا كانت r تتغيَّر طرديًّا مع t، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$. 30

هناك نوع آخر من التغيُّر يُسمى **التغيُّر المشترك**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

مفهوم أساسي التغيُّر المشترك

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي تتغيَّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$، بحيث $y = kxz$.

مثال إذا كان $x = 6, z = -2$، $y = 5xz$، فإن $y = 5(6)(-2) = -60$.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المشترك
يصنّف بعض الرياضيين التغيُّر المشترك بوصفه حالة خاصة من التغيُّر المركب الذي ستدرسه لاحقًا.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وعُلمت بعض القيم فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المناظرة لها.

$$y_1 = kx_1z_1 \quad , \quad y_2 = kx_2z_2$$
$$\frac{y_1}{x_1z_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2z_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع حاصل ضرب x، z).

مثال 2 التغيُّر المشترك

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع كل من x و z، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$، علمًا بأن $y = 20$ عندما $z = 3$ و $x = 5$.

استعمل تناسبًا يربط القيم بعضها ببعض.

التناسب المشترك	$\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$
$y_1 = 20, x_1 = 5, z_1 = 3, x_2 = 9, z_2 = 2$	$\frac{20}{5(3)} = \frac{y_2}{9(2)}$
بالضرب التبادلي	$20(9)(2) = 5(3)(y_2)$
بالتبسيط	$360 = 15y_2$
بقسمة كلا الطرفين على 15	$24 = y_2$

تأكد

2) إذا كانت r تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع v و t، وكانت $r = 70$ عندما $v = 10$ و $t = 4$، فأوجد قيمة r عندما $v = 2$، و $t = 8$. 28

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركب هناك نوع آخر من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي**، فإذا تغيَّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

نقول إن كميتين تتغيَّران عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة ما تغيُّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي التغيُّر العكسي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي تتغيَّر y عكسيًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$، بحيث

$$xy = k \text{ أو } y = \frac{k}{x} \text{ و } x \neq 0 \text{ و } y \neq 0$$

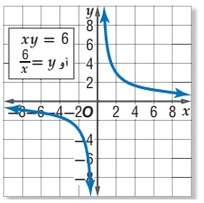
مثال إذا كانت $xy = 2$ و $x = 6$، فإن $y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

إذا كان y تتغيَّر عكسيًّا مع x، بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$،

فإن التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.

بما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x.

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر العكسي يشبه تمامًا التمثيل البياني لدالة المقلوب.



يمكن استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيُّرًا عكسيًّا معطى فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$x_1 y_1 = k$ و $x_2 y_2 = k$

بالتعويض عن قيمة k من إحدى المعادلتين في الأخرى $x_1 y_1 = x_2 y_2$

بقسمة كلا الطرفين على $y_1 y_2$ $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًّا، أي أن y تتناسب عكسيًّا مع x).

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي والتغيُّر العكسي

يمكن تحديد نوع التغيُّر من خلال جدول قيم للكميتين x و y. فإذا كان $\frac{y}{x}$ يساوي ثابتًا فالتغيُّر طردي. أما إذا كان xy يساوي ثابتًا فالتغيُّر عكسي.

مثال 3 التغيُّر العكسي

إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = -2$، فأوجد قيمة a عندما $b = -10$.

استعمل تناسبًا يربط القيم بعضها ببعض.

تناسب عكسي $\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_1}$

$a_1 = 28, b_1 = -2, b_2 = -10$ $\frac{28}{-10} = \frac{a_2}{-2}$

بالضرب التبادلي $28(-2) = -10(a_2)$

بالتبسيط $-56 = -10(a_2)$

بقسمة كلا الطرفين على -10 $5\frac{3}{5} = a_2$

تأكد

3) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y، وكانت $x = 24$ عندما $y = 4$، فأوجد قيمة x عندما $y = 12$. 8

يستعمل التغيُّر العكسي في كثير من التطبيقات الحياتية.

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركب

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال تناسب لحل مسألة تغيّر عكسي.

مثال إضافي

3 إذا كانت r تتغير عكسيًّا مع t، وكانت $r = -6$ عندما $t = 2$، فأوجد قيمة r عندما $t = -7$. $\frac{12}{7}$

إرشادات للمعلم الجديد

طريقة بديلة يمكن للطالب أن يحل المثال 3 باستعمال المعادلة $a_1 b_1 = a_2 b_2$.

إرشادات للمعلم الجديد

تطوير الحس الرياضي ساعد الطلبة على أن يفهموا الفرق بين نوعي التغيّر باستعمال مثال السرعة وَ المسافة والزمن، فعندما يقود الشخص سيارته بسرعة معينة، فإن المسافة تزداد بزيادة الزمن، ويُعدّ هذا تغيُّرًا طرديًّا، أما إذا أردنا قطع مسافة معينة، فإن الزمن اللازم يقل مع زيادة السرعة، ويُعد هذا تغيُّرًا عكسيًّا.

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركب

مثال 4 يُبيّن تطبيقًا حياتيًّا على التغيّر العكسي.

مثال 5 يُبيّن كيفية حل مسائل التغيّر المركب.

مثالان إضافيان

4 **فضاء:** استعمل المعلومات من فقرة "تأكد" وأن بعد كوكب الزهرة عن الشمس 67 مليون ميل تقريبًا، وحدد كم مرة يبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من كوكب الزهرة مقارنة مع طول قطرها عند النظر إليها من الأرض؟ 1.39 مرة تقريبًا

5 إذا كانت f تتغير تغيرًا طرديًّا مع g، وعكسيًّا مع h، فأوجد قيمة g عندما $f = 6$ و $h = -5$، علمًا بأن $g = 18$ عندما $h = 3$ و $f = 5$. -36

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل صوتي سجل بصوت واضح شريطًا صوتيًّا تناول فيه أمثلة مختلفة على التغيُّر وشغله؛ ليستمع الطلبة إليه أو حمّله على أجهزتهم الصوتية، واطلب إليهم كتابة هذه المسائل وحلها.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة مسائل التغيُّر العكسي وحلها

موجات الصوت: يتغيَّر طول الوتر أو السلك المشدود عكسيًّا مع التردد الناتج عن اهتزازه. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية فأوجد تردد سلك طوله 8 in.

افرض أن $v_1 = 10, f_1 = 512$, $v_2 = 8$. أوجد قيمة f_2.

التغيّر العكسي	$v_1 f_1 = v_2 f_2$
$v_1 = 10, f_1 = 512$ ،$v_2 = 8$	$10 \cdot 512 = 8 \cdot f_2$
بقسمة كلا الطرفين على 8	$\frac{5120}{8} = f_2$
بالتبسيط	$640 = f_2$

إذن تردد السلك يساوي 640 دورة في الثانية.

الربط مع واقع الحياة

عندما تحرك وترًا أو سلكًا مشدودًا يهتز محدثًا طاقة ميكانيكية تنتقل كموجات في الهواء. ويُسمى عدد مرات ملامسة الموجات لآذاننا في الثانية الواحدة التردد، وكلما زاد عدد الموجات في الثانية ازداد الصوت.

تأكد

4) يتغيَّر الطول الظاهري لجسم عكسيًّا مع بعد الناظر إلى الجسم. فإذا كان بعد الأرض عن الشمس تقريبًا 93 مليون ميل، وبعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، كم مرة أكبر سيبدو طول قطر الشمس عند النظر إليها من الأرض مقارنة مع طول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟ 5.2 مرة

هناك نوع آخر من التغيُّر هو **التغيُّر المركب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أو أكثر.

إذا كان معلومًا لديك أن y تتغيَّر طرديًّا مع x، وأن y تتغيَّر عكسيًّا مع z، وعلمت بعض القيم فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المناظرة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \quad , \quad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$
$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمّى هذا التناسب تناسبًا مركبًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

مثال 5 التغيُّر المركب

إذا كانت f تتغيَّر طرديًّا مع g وعكسيًّا مع h. وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

كوّن أولًا تناسبًا صحيحًا للمعلومات المعطاة.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المركب

تظهر الكميات التي تتغيَّر طرديًّا في البسط. أما التي تتغيَّر عكسيًّا فتظهر في المقام.

g تتغيَّر طرديًّا مع f، لذا فإن g تكون في البسط	$f_1 = \frac{kg_1}{h_1}$ و $f_2 = \frac{kg_2}{h_2}$
h تتغيَّر عكسيًّا مع f، لذا فإن h تكون في المقام	
بحل كل من المعادلتين بالنسبة لـ k	$k = \frac{f_1 h_1}{g_1}$ و $k = \frac{f_2 h_2}{g_2}$
بمساواة النسبتين	$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$
$f_1 = 6, g_1 = 24, h_1 = 2, f_2 = 18, h_2 = -3$	$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$
بالضرب التبادلي	$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$
بالتبسيط	$-1296 = 12g_2$
بقسمة كلا الطرفين على 12	$-108 = g_2$

عندما تكون $f = 18$، و $h = -3$، تكون قيمة g هي -108.

تأكد

5) إذا كانت p تتغيَّر طرديًّا مع r وعكسيًّا مع t، فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$، علمًا بأن $t = 20$ عندما $p = 4$، و $r = 2$. -80

تأكد من فهمك

الأمثلة 3–1
الصفحتان 195 , 194

1) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$. **21**

2) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$. **−27**

3) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد x عندما $y = 9$. **−32**

مثال 4 صفحة 196

4) **خرائط:** إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخرائط تعادل 15 mi على سطح الأرض. وإذا كانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما. **90 mi**

مثال 5 صفحة 196

5) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$. **−48**

6) إذا كانت d تتغيَّر طرديًّا مع f، وعكسيًّا مع g، وكانت $g = 12$ عندما $d = 9$ و $f = 3$، فأوجد قيمة g عندما $d = 6$ و $f = -7$. **−42**

تدرب وحل المسائل

مثال 1 صفحة 194

إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، فأوجد قيمة x عندما $y = 8$ في كل حالة مما يأتي:

7) إذا كانت $x = 6$، عندما $y = 32$. **1.5**

8) إذا كانت $x = 11$، عندما $y = -3$. $-\frac{88}{3}$

9) إذا كانت $x = 14$، عندما $y = -2$. **−56**

10) إذا كانت $x = -4$، عندما $y = 10$. **−3.2**

11) **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 Pounds ، ووزنه على سطح القمر 60 Pounds ، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر. $m = \frac{1}{6}w$

مثال 2 صفحة 194

إذا كانت a تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع b و c فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كل حالة مما يأتي:

12) إذا كانت $a = -96$، عندما $b = 3$ و $c = -8$. **−48**

13) إذا كانت $a = -60$، عندما $b = -5$ و $c = 4$. انظر الهامش

14) إذا كانت $a = -108$، عندما $b = 2$ و $c = 9$. **72**

15) إذا كانت $a = 24$، عندما $b = 8$ و $c = 12$. **−3**

مثال 3 صفحة 195

إذا كان f يتغيَّر عكسيًّا مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كل حالة مما يأتي:

16) إذا كانت $f = 15$، عندما $g = 9$. **−22.5**

17) إذا كانت $f = 4$، عندما $g = 28$. $-\frac{56}{3}$

18) إذا كانت $f = -12$، عندما $g = 19$. **38**

19) إذا كانت $f = 0.6$، عندما $g = -21$. **2.1**

20) **خدمة المجتمع:** تقوم جمعية خيرية في شهر رمضان من كل عام بجمع التبرعات العينية لتوزيعها على بعض العائلات الفقيرة على هيئة طرود. فإذا قام 12 متطوعًا منهم في العام الماضي بتوزيع 90 طردًا خلال أربع ساعات.

a) اكتب معادلة تربط بين عدد المتطوعين s والزمن الذي يتطلبه توزيع 90 طردًا. $s = \frac{48}{t}$

b) ما الزمن الذي يحتاج إليه 15 متطوعًا لتوزيع عدد الطرود نفسه؟ **3.2 h**

مثال 4 صفحة 196

21) **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام يقطع مسافة تتغيَّر طرديًّا مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.

a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h ، فاكتب معادلة تغيُّر طردي توضح هذا الموقف. $d = 50t$

b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته الموسمية، فقدّر عدد ساعات طيرانه. **60 h**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 6–1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنويع الواجب المنزلي

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	23–7، 44، 59–46
ضمن ضمن المتوسط	39–7 فردي، 44–41، 59–46
فوق فوق المتوسط	55–24، (اختياري: 59–56)

إجابة:

13) التناسب المشترك $\frac{a_1}{b_1c_1} = \frac{a_2}{b_2c_2}$

$a_1 = -60, b_1 = -5, c_1 = 4,$
$b_2 = 4, c_2 = -3$

$\frac{-60}{-5(4)} = \frac{a_2}{4(-3)}$ بالضرب التبادلي

$-60(4)(-3) = -5(4)(a_2)$

$720 = -20a_2$ بالتبسيط

$-36 = a_2$ بقسمة كلا الطرفين على −20

مثال 5
صفحة 196

22) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c. وكانت $b = 12$ عندما $c = 3$ و $a = 8$، فأوجد قيمة b عندما $a = 5$، و $c = -4$. **−10**

23) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y، وعكسيًّا مع z، وكانت $z = 20$، عندما $x = 6$ و $y = 14$، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$. **−6**

حدد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيُّرًا طرديًّا، أو تغيُّرًا عكسيًّا، أو غير ذلك:

24) طردي

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

25) عكسي

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

26) غير ذلك

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

27) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 6$ عندما $x = 19$ فأوجد قيمة y عندما $x = 2$. **57**

28) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$. **انظر ملحق الإجابات**

حدد إذا كانت كل معادلة مما يأتي تمثل تغيُّرًا طرديًّا، أو عكسيًّا، أو مشتركًا، أو مركبًا، وأوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كل منها:

29) $\frac{x}{y} = 2.75$ طردي، 2.75

30) $fg = -2$ عكسي، −2

31) $a = 3bc$ مشترك، 3

32) $10 = \frac{xy^2}{z}$ مركب، 10

33) $y = -11x$ طردي، −11

34) $\frac{n}{p} = 4$ طردي، 4

35) $9n = pr$ مركب، 9

36) $-2y = z$ طردي، −2

37) $a = 27b$ طردي، 27

38) $c = \frac{7}{d}$ عكسي، 7

39) $-10 = gh$ عكسي، −10

40) $m = 20cd$ مشترك، 20

41) كيمياء: يتغيَّر حجم غاز معين v طرديًّا مع درجة حرارته t، وعكسيًّا مع ضغطه p.

a) اكتب معادلة تمثل حجم الغاز بدلالة كل من ضغطه ودرجة حرارته. $v = \frac{kt}{p}$

b) هل تمثل المعادلة تغيُّرًا طرديًّا، أم عكسيًّا أم مشتركا أم مركبًا؟ مركب

c) عينة من الغاز حجمها 8 L، ودرجة حرارتها 275 K، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 L فارتفعت درجة حرارتها إلى 300 K. كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟ **1.82 ضغط جوي تقريبًا أو $\frac{20}{11}$ ضغط جوي**

42) سفر: يتغيَّر الزمن اللازم لقطع سيارة مسافة ما عكسيًّا مع متوسط سرعتها.

a) إذا كانت المسافة المقطوعة 800 mi فاكتب معادلة تربط بين زمن الرحلة ومتوسط السرعة، ثم مثّلها بيانيًّا. **انظر الهامش**

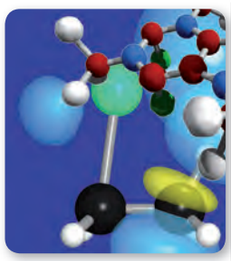
b) إذا أراد سلمان أن يقطع هذه المسافة في 18 h على الأكثر فما أقل متوسط سرعة ممكن؟ **44.4 mi/h**

43) جاذبية: ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بين أي جسمين تتغيَّر طرديًّا مع حاصل ضرب كتلتيهما m_1 و m_2، و عكسيًّا مع مربع المسافة بينهما d بالأمتار. وتبين المعادلة $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، ويساوي $6.67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$. علمًا بأن قوة الجذب تقاس بالنيوتن، والكتلة بالكيلوجرام. **للفروع a–c انظر ملحق الإجابات**

a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر 3.84×10^8 m، وكتلة القمر 7.36×10^{22} kg تقريبًا. وكتلة الأرض 5.97×10^{24} kg فما مقدار قوة الجذب بين الأرض والقمر؟

b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس 1.5×10^{11} m تقريبًا، وكتلة الشمس 1.99×10^{30} kg تقريبًا فما قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟

c) أوجد مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كرتان من الحديد كتلة كل منهما 1000 kg، وتبعد إحداهما عن الأخرى مسافة 0.1 m.



الربط مع واقع الحياة

قانون أفوجادرو ينص على أن الأحجام المتساوية من غازات مختلفة عند درجة حرارة وضغط متساويين تحتوي عددًا متساويًا من الجزيئات.

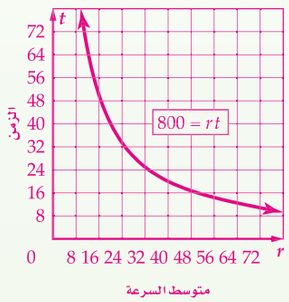
تنبيه!

تجنب الأخطاء المفاهيمية

تحقق من أن الطلبة يفهمون الفرق الأساسي بين نوعي التغيُّر الطردي والعكسي، من خلال طرح أسئلة مثل: هل دخْل الشخص يتغيَّر طرديًّا أم عكسيًّا مع عدد أيام العمل؟ هل زمن إنجاز عمل محدد يتغيَّر طرديًّا أم عكسيًّا مع عدد الأشخاص؟

إجابة:

42a)



تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حفظ معادلات التغيّر المختلفة،

فاطلب إليهم أن يكتبوا المعادلات مستعملين لونًا مختلفًا لكل متغير ولونًا آخر للثابت k. فمثلًا: يكون التغيّر الطردي $y = kx$، والتغير المشترك $y = kxz$، والتغيّر العكسي $y = \frac{k}{x}$.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) اكتشف الخطأ: يحل كل من يوسف وتركي مسألة عن التغيُّر المركب، حيث تتغيَّر فيها z طرديًّا مع x وعكسيًّا مع y. أيهما استعمل تناسبًا صحيحًا؟ فسر إجابتك. انظر الهامش

يوسف

$$z_1=\frac{kx_1}{y_1},\ z_2=\frac{kx_2}{y_2}$$
$$k=\frac{z_1y_1}{x_1},\ k=\frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1}=\frac{z_2y_2}{x_2}$$

تركي

$$z_1=\frac{kx_1}{y_1},\ z_2=\frac{kx_2}{y_2}$$
$$k=\frac{z_1x_1}{y_1},\ k=\frac{z_2x_2}{y_2}$$
$$\frac{z_1x_1}{y_1}=\frac{z_2x_2}{y_2}$$

45) تحدٍّ: إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b، و c تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع b و f. وكانت f تتغيَّر طرديًّا مع g، فكيف يمكنك وصف العلاقة بين a و g؟ إن وجد تغير بين g، a سيكون طرديًّا.

46) تبرير: وضح لماذا يعد بعض المختصين في الرياضيات التغيُّر المشترك تغيُّرًا مركبًا، ولكنهم لا يعدون التغيُّر المركب مشتركًا.

47) مسألة مفتوحة: صف ثلاث كميات من واقع الحياة تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا فيما بينها. للتمارين 48 – 46 انظر الهامش

48) اكتب: حدد أنواع التغيُّرات التي لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها. فسر إجابتك.

تدريب على اختبار معياري

49) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b، و a تتغيَّر عكسيًّا مع c، إذا كان $b=15$ عندما $c=2$، $a=4$ فما قيمة b عندما $a=7$، $c=-8$؟ **B**

A $\frac{-1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$

B -105 **D** 105

50) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضحة بالجدول المجاور؟ **A**

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

A طردي
B عكسي
C مشترك
D مركب

مراجعة تراكمية

51) خطوط التقارب: $x=-2,\ x=-3$

حدد خطوط التقارب الرأسية والفجوات في التمثيل البياني لكل دالة نسبية مما يأتي: (الدرس 4-4)

51) $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$ **52)** $f(x)=\frac{x+2}{x^2+3x-4}$ خطوط التقارب: $x=-4,\ x=1$ **53)** $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+3}$ نقطة الانفصال عند: $x=-3$

54) سيارات: ينتج مصنع نوعًا من السيارات بثلاثة ألوان هي الأسود والأبيض والأحمر، ويصنع السيارة بفتحة في السقف أو دون فتحة. مثِّل فضاء العينة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، ومخطط الشجرة البيانية. (الدرس 1-3) انظر ملحق الإجابات

55) تصوير: يمكن استعمال الصيغة $\frac{1}{q}=\frac{1}{f}-\frac{1}{p}$، لتحديد البعد اللازم بين الفيلم والعدسات للحصول على صورة مميزة. حيث تمثل q بعد العدسات عن الفيلم، وتمثل f البعد البؤري للعدسات، كما تمثل p البعد بين الجسم والعدسات. (الدرس 4-3)

a) اكتب الصيغة بالنسبة لـ $\frac{1}{p}$. $\frac{1}{p}=\frac{1}{f}-\frac{1}{q}$

b) اكتب التعبير متضمنًا f و q بصورة تعبير نسبي واحد. $\frac{1}{p}=\frac{q-f}{fq}$

c) إذا كان البعد البؤري لعدسات الكاميرا 8 cm، وبعد العدسات عن الفيلم 10 cm، فكم يجب أن يكون بعد الجسم عن العدسات لتكون الصورة في المركز؟ 40 cm

مراجعة المتطلبات السابقة

أوجد م.م.أ لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

56) $a,\ 2a,\ a+1$ $2a(a+1)$ **57)** $8,\ 24x,\ 12$ $24x$

58) $x^4,\ 3x^2,\ 2xy$ $6x^4y$ **59)** $x+2,\ x-3,\ x^2-x-6$ x^2-x-6

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع اكتب المعادلة $y=kx^3$ على السبورة، واسأل الطلبة عن نوع التغيّر الذي تمثله هذه المعادلة. واطلب إليهم أن يعطوا وصفًا لما يحصل لقيمة y عندما تتضاعف قيمة x مرتين، ثلاث مرات، أو عندما تصل إلى النصف. تمثل المعادلة تغيُّرًا طرديًّا بين y و مكعب x. فعندما تتضاعف قيمة x مرتين، فإن قيمة y تضرب في العدد 8، وعندما تتضاعف قيمة x ثلاث مرات، فإن قيمة y تضرب في العدد 27، وعندما تنصف قيمة x، فإن y تقسم على 8.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة أن يكتب كل واحد منهم تغيّرًا من واقع حياته على ورقة صغيرة (مثل زمن الدراسة، ساعات النوم،... إلخ)، ويُبيّن نوعه وأن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من استيعاب الطلبة لمفاهيم الدرسين 4-5 , 4-4 بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 4.

تنبيه!

اكتشف الخطأ اقترح على الطلبة لحل التمرين 44 أن يكتبوا المسألة على الصورة

$$\frac{z_1}{1}=\frac{kx_1}{y_1}\ ،\ \frac{z_2}{1}=\frac{kx_2}{y_2}$$

وبالضرب التبادلي سيحصلون على الصورة $z_1y_1=kx_1$ ، $z_2y_2=kx_2$. حيث يمكن تبسيطها للحصول على صيغة لـ k.

44) يوسف؛ لأن تركي قام بعملية الضرب في الوقت الذي كان يجب عليه أن يقوم بعملية القسمة.

46) إجابة ممكنة: كل تغيُّر مشترك هو تغيُّر مركب بسبب وجود تغيُّرين طرديين في الوقت الذي يمكن أن يحتوي فيه التغيُّر المركب على تغيُّر طردي وآخر عكسي. مما لا يجعله تغيُّرًا مشتركًا.

47) إجابة ممكنة: القوة المؤثرة على جسم تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع كتلة الجسم وتسارعه.

48) إجابة ممكنة: التغيُّر العكسي، وبعض أنواع التغيُّر المركب لا يمكن أن يكون الصفر ضمن مجالها؛ لأن القسمة على الصفر غير معرفة.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-6

تبسيط تعابير نسبية.

الدرس 4-6

حل المعادلات النسبية.

ما بعد الدرس 4-6

حل معادلات تحتوي على أسس نسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- إذا زار أحد الأعضاء النادي 10 مرات في أحد الأشهر، فما تكلفة الزيارة الواحدة؟ BD 3
- إذا زار أحد الأعضاء النادي 10 مرات في أحد الأشهر، فما مقدار الزيادة على تكلفة الزيارة الواحدة من الرسم الشهري؟ يؤدي القسط الشهري إلى زيادة BD 2 للزيارة الواحدة.
- إذا كان عدد الزيارات في أحد الأشهر x زيارة، فكم يزيد الرسم الشهري تكلفة الزيارة الواحدة؟ الزيادة $\frac{20}{x}$ BD لكل زيارة.

حل المعادلات النسبية
Solving Rational Equations

فيما سبق

درست تبسيط تعابير نسبية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل معادلات نسبية.

المفردات الأساسية

المعادلة النسبية
rational equation

الوسط الحسابي الموزون
weighted average

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية BD 20 شهريًّا بالإضافة إلى BD 1 عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهريًّا، فإنه سيدفع للنادي مبلغ $(20 + x)$ BD شهريًّا. ويمكن حساب المبلغ الذي يدفعه العضو في المرة الواحدة باستعمال التعبير: $\frac{20 + x}{x}$، حيث x عدد مرات زيارة النادي.

ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت تكلفة الزيارة الواحدة BD 3، عليك أن تحل المعادلة $\frac{20 + x}{x} = 3$.

حل المعادلات النسبية تُسمى المعادلات التي تحتوي على تعبير نسبي أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلات أسهل عادةً عندما تتخلص من الكسور، وذلك بضرب طرفي المعادلة في م.م.أ للمقامات.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة النسبية $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$، وتحقق من صحة حلك.

م.م.أ للمقامات هو $18(x + 3)$

المعادلة الأصلية	$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$
بالضرب في م.م.أ للمقامات	$18(x+3)\left(\frac{4}{x+3}\right) + 18(x+3)\left(\frac{5}{6}\right) = 18(x+3)\left(\frac{23}{18}\right)$
باختصار العوامل المشتركة	$18(x+3)\left(\frac{4}{x+3}\right) + 18(x+3)\left(\frac{5}{6}\right) = 18(x+3)\left(\frac{23}{18}\right)$
	$1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1$
بالضرب	$72 + 15x + 45 = 23x + 69$
بالتبسيط	$15x + 117 = 23x + 69$
بطرح $15x$ ثم 69 من كلا الطرفين	$48 = 8x$
بالقسمة	$x = 6$

تحقق:

المعادلة الأصلية	$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$
$x = 6$	$\frac{4}{6+3} + \frac{5}{6} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$
بالتعويض	$\frac{4}{9} + \frac{5}{6} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$
بالتبسيط	$\frac{8}{18} + \frac{15}{18} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$
بالجمع	$\frac{23}{18} = \frac{23}{18}$ ✓

إرشادات للدراسة

حل مختصر

يمكن اختصار الحل في مثال 1 كالآتي:

$\frac{4}{x+3} = \frac{23}{18} - \frac{5}{6}$

$\frac{4}{x+3} = \frac{8}{18}$

$\frac{4}{x+3} = \frac{4}{9}$

$4(x + 3) = 36$

$x + 3 = 9$

$x = 6$

تأكد

حُلّ المعادلتين النسبيتين الآتيتين وتحقق من صحة حلك:

1A $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{10}$ 2 **1B** $\frac{7}{12} + \frac{9}{x-4} = \frac{55}{48}$ 20

من الممكن الحصول على حلول مرفوضة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في م.م.أ للمقامات.

مصادر الدرس 4-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (206, 204)	• تنويع التعليم، ص (206, 204)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (28) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (28) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (28) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

حل المعادلات النسبية

مثال 1 يُبيّن كيفية حل معادلة نسبية.

مثال 2 يُبيّن كيفية حل معادلة نسبية مع استبعاد الحلول المرفوضة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1. حُلّ المعادلة $\frac{5}{24}+\frac{2}{3-x}=\frac{1}{4}$، وتحقق من حلك. $x=-45$

2. حُلّ المعادلة: $\frac{p^2-p-5}{p+1}=\frac{p^2-7}{p-1}+p$، وتحقق من حلك. $p=-3,-2,2$

التركيز في المحتوى الرياضي

حل المعادلات النسبية تتحول المعادلة النسبية إلى نوع آخر من المعادلات (خطية، تربيعية أو غيرهما) خلال خطوات حلها. لذا، فإن حل المعادلة النسبية يتطلب حل صورة المعادلة الجديدة.

تنبيه!

تجنب الأخطاء المفاهيمية ذكّر الطلبة بالتحقق دائمًا من الحلول، وذلك بتعويضها في المعادلة الأصلية وليس في المعادلات الناتجة في أي خطوة من خطوات الحل. ولاحظ أنه لا يمكن التعويض في المتغير أولاً ثم ضرب الطرفين في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات؛ لأننا نقوم بالتحقق من صحة المعادلة.

مثال 2 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{2x}{x+5}-\frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15}=\frac{3}{x+3}$، وتحقق من صحة حلك.

م.م.أ للمقامات هو $(x+5)(x+3)$.

المعادلة الأصلية
$$\frac{2x}{x+5}-\frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15}=\frac{3}{x+3}$$

بضرب المعادلة في م.م.أ للمقامات
$$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5}-\frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15}=\frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$$

باختصار العوامل المشتركة
$$\frac{(x+3)(\cancel{x+5})(2x)}{\cancel{x+5}_{1}}-\frac{\cancel{(x+3)}^{1}\cancel{(x+5)}^{1}(x^2-x-10)}{\cancel{x^2+8x+15}_{1}}=\frac{(x+5)(\cancel{x+3})3}{\cancel{x+3}_{1}}$$

بالتبسيط
$$(x+3)(2x)-(x^2-x-10)=3(x+5)$$

خاصية التوزيع
$$2x^2+6x-x^2+x+10=3x+15$$

بالتبسيط
$$x^2+7x+10=3x+15$$

بطرح $3x+15$ من كلا الطرفين
$$x^2+4x-5=0$$

بالتحليل
$$(x+5)(x-1)=0$$

خاصية الضرب الصفري
$$x+5=0 \quad \text{أو} \quad x-1=0$$
$$x=-5 \quad \text{أو} \quad x=1$$

تحقق اختبر $x=-5$
$$\frac{2x}{x+5}-\frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15}=\frac{3}{x+3}$$
$$\frac{2(-5)}{-5+5}-\frac{(-5)^2-(-5)-10}{(-5)^2+8(-5)+15}\stackrel{?}{=}\frac{3}{-5+3}$$
$$\frac{-10}{0}-\frac{25+5-10}{25-40+15}\neq-\frac{3}{2}\ \times$$

اختبر $x=1$
$$\frac{2x}{x+5}-\frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15}=\frac{3}{x+3}$$
$$\frac{2(1)}{1+5}-\frac{1^2-1-10}{1^2+8(1)+15}\stackrel{?}{=}\frac{3}{1+3}$$
$$\frac{2}{6}-\frac{-10}{24}\stackrel{?}{=}\frac{3}{4}$$
$$\frac{8}{24}+\frac{10}{24}\stackrel{?}{=}\frac{3}{4}$$
$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\ \checkmark$$

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة، وجب استثناء هذا الحل من مجموعة الحلول. وبما أن $x=-5$ ينتج عن تعويضها في المعادلة صفر في المقام فإنها تُستثنى من الحلول. لذا يكون الحل هو $x=1$.

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك:

(2A) $\frac{5}{y-2}+2=\frac{17}{6}$ 8

(2B) $\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z-1}=\frac{-2}{z^2-1}$ ليس لها حل

(2C) $\frac{7n}{3n+3}-\frac{5}{4n-4}=\frac{3n}{2n+2}$ $-\frac{1}{2}, 3$

(2D) $\frac{1}{p-2}=\frac{2p+1}{p^2+2p-8}+\frac{2}{p+4}$ $\frac{7}{3}$

الوسط الحسابي الموزون هو طريقة لإيجاد الوسط لمجموعة من البيانات يكون لبعضها أهمية أو وزن أكثر من غيرها. ويعرّف بأنه مجموع حاصل ضرب عدد الوحدات، وقيمة أو وزن كل وحدة مقسومًا على مجموع عدد الوحدات، وهناك الكثير من التطبيقات والمسائل الحياتية على الوسط الموزون التي يمكن حلها باستعمال المعادلات النسبية.

تاريخ الرياضيات

أبو الوفاء البوزجاني
(338 هـ)
من أبرع علماء العرب، وكان لبحوثه الأثر الكبير في تقدم العلوم، ولا سيما الفلك والرياضيات؛ فقد كان ممن مهّدوا لإيجاد الهندسة التحليلية . ومن مؤلفاته "منازل في الحساب" .

مراجعة المفردات

الحل المرفوض
هو حل للمعادلة ولكنه لا يحققها.

حل المعادلات النسبية

الأمثلة 5–3 تُبيّن كيفية استعمال المعادلات النسبية؛ لحل مسائل عن تركيز المخلوط والمسافات والأعمال وخدمة المجتمع.

مثال إضافي

3 **محلول مالح:** تضيف كوثر محلولًا نسبة تركيز الملح فيه 80% إلى 16 أونصة من محلول نسبة تركيز الملح فيه 10%. كم أونصة من المحلول الذي تركيز الملح فيه 80% يجب إضافته للحصول على محلول تركيز الملح فيه 50% ؟

$21\frac{1}{3}$ أونصة

مثال 3 من واقع الحياة — مسألة كيمياء

كيمياء: أجرى حمد تجربة في معمل الكيمياء، فقام بإضافة محلول يحتوي على حمض بنسبة 70% إلى 12 ml من محلول آخر نسبة الحمض فيه 15%. كم مليلترًا من المحلول الذي تركيز الحمض فيه 70% يجب إضافته للحصول على محلول تركيز الحمض فيه 60%؟

افهم: يجب على حمد معرفة كمية المحلول الواجب إضافتها إلى المحلول الأصلي للحصول على المحلول الجديد.

خطط: يحتوي كل من المحلولين على حمض بتركيز معين. ونسبة الحمض في المحلول الناتج يجب أن تساوي كمية الحمض مقسومة على الحجم الكلي للمحلول.

	المحلول المضاف	المحلول الأصلي	المحلول الناتج
كمية الحمض	$0.7(x)$	$0.15(12)$	$0.15(12) + 0.7x$
الحجم الكلي للمحلول	x	12	$12 + x$

$$\text{النسبة المئوية للحمض في المحلول} = \frac{\text{كمية الحمض}}{\text{الحجم الكلي للمحلول}}$$

حُل:

بكتابة التناسب: $\frac{60}{100} = \frac{\text{كمية الحمض}}{\text{حجم المحلول}}$

بالتعويض: $\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$

بتبسيط البسط: $\frac{60}{100} = \frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$

م.م.أ للمقامات هو $100(12 + x)$ بضرب كلا الطرفين في م.م.أ للمقامات:
$100(12 + x)\frac{60}{100} = 100(12 + x)\frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$

باختصار العوامل المشتركة:
$\frac{100}{1}(12 + x)\frac{60}{\cancel{100}_{1}} = 100(\cancel{12 + x}_{1})\frac{1.8 + 0.7x}{\cancel{12 + x}_{1}}$

بالتبسيط: $(12 + x)60 = 100(1.8 + 0.7x)$

خاصية التوزيع: $720 + 60x = 180 + 70x$

بطرح $60x$ ثم 180 من كلا الطرفين: $540 = 10x$

بالقسمة على 10: $54 = x$

تحقق:

المعادلة الأصلية: $\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$

$x = 54$: $\frac{60}{100} \stackrel{?}{=} \frac{0.15(12) + 0.7(54)}{12 + 54}$

بالتبسيط: $\frac{60}{100} \stackrel{?}{=} \frac{37.8}{66}$

بالتبسيط: $0.6 = 0.6$ ✓

يحتاج حمد إلى إضافة 54 ml من الحمض ذي التركيز 70% للحصول على المحلول المطلوب.

تأكد

3) لدى علياء 150 ml عصير بتركيز 10%، وتريد الحصول على عصير بتركيز 35%، وذلك بإضافة عصير تركيزه 65%، كم مليلترًا يجب أن تضيف للحصول على العصير ذي التركيز المطلوب؟ **125 ml**

يمكن استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة والسرعة والزمن لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعًا لهذه المعادلة هو $d = rt$. وكذلك يمكن استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $t = \frac{d}{r}$, $r = \frac{d}{t}$.

إرشادات للدراسة

جداول تكون الجداول – كما في المثال 3 – مفيدة في تنظيم وحل مسائل الخليط ومسائل الوسط الموزون.

الربط مع واقع الحياة

لا يزال مستوى تمويل البحث العلمي في الوطن العربي متدنيًا، حيث يبلغ 0.12% تقريبًا من إجمالي الناتج المحلي، على حين يبلغ 2.73% من إجمالي الناتج المحلي في بعض البلدان.

مثال 4 من واقع الحياة — مسألة مسافة

تجديف: ركب سعيد في قارب وجدّف في المياه الراكدة بسرعة ثابتة قدرها 6 mi/h مسافة 10 mi نصفها في اتجاه الموج ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمنًا قدره 3 h، أوجد سرعة الموج.

افهم: معطيات المسألة هي: سرعة القارب في المياه الراكدة، وكذلك المسافة ذهابًا وإيابًا والزمن المقرر لقطعها. والمطلوب إيجاد سرعة الموج.

خطط: المسافة التي قطعها سعيد هي 5 mi في اتجاه الموج، و 5 mi في عكس اتجاه الموج.
والمعادلة التي تُستعمل للحل هي:
$d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$ ، حيث r سرعة الموج.

الزمن مع اتجاه الموج	الزمن عكس اتجاه الموج	الزمن الكلي
$\frac{5}{6+r}$	$\frac{5}{6-r}$	3h

حل:

كتابة المعادلة: $\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$

م.م.أ للمقامات هو $(6+r)(6-r)$ بضرب كلا الطرفين في م.م.أ للمقامات: $(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$

باختصار العوامل المشتركة: $(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$

بالتبسيط: $(6-r)5 + (6+r)5 = (36-r^2)3$

خاصية التوزيع: $30 - 5r + 30 + 5r = 108 - 3r^2$

بالتبسيط: $60 = 108 - 3r^2$

بطرح $10r$ من كلا الطرفين: $0 = -3r^2 + 48$

بالتحليل: $0 = -3(r+4)(r-4)$

بقسمة كلا الطرفين على -3: $0 = (r+4)(r-4)$

خاصية الضرب الصفري: $r = -4$ (مرفوض) أو $r = 4$

تحقق:

المعادلة الأصلية: $\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$

$r = 4$: $\frac{5}{6+4} + \frac{5}{6-4} \stackrel{?}{=} 3$

بالتبسيط: $\frac{5}{10} + \frac{5}{2} \stackrel{?}{=} 3$

بالتبسيط: $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2}$ ✓

وبما أن السرعة لا يمكن أن تكون سالبة فإن سرعة الموج هي 4 mi/h.

تأكد

4) طيران: إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة في 7 h، وكانت سرعة الريح 20 mi/h ، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟ **339.5 mi/h**

يمكن حل المسائل الحياتية التي تتعلق عادةً بالأعمال باستعمال معادلات نسبية.

مثال 5 من واقع الحياة — مسألة تتعلق بالعمل

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الأول والثاني الثانوي في مدرسة ببعض الخدمات الاجتماعية، ومنها حملة توعية بخطر النفايات البلاستيكية وجمعها من بعض المرافق العامة. إذا كان هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصف الثاني فقط، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معًا، فكم ساعةً يحتاج طلاب الصف الأول للقيام بالعمل وحدهم؟

إرشادات للدراسة

مسائل المسافات
عندما تحتوي مسائل المسافة على الذهاب والعودة فإن المسافة في الذهاب تساوي عادةً المسافة في العودة.

الربط مع واقع الحياة

تنظم بعض المدارس برامج للعمل التطوعي، تتضمن أنشطة داخلية، ومنها تنظيف حديقة المدرسة، وتزيين مرافقها وممراتها وإقامة حملات توعية.
وأخرى خارجية لزيارة مراكز رعاية المسنين والأيتام وذوي الاحتياجات الخاصة، وخدمة المجتمع المحلي.

مثال إضافي

4 سباحة: يسبح أحمد في بركة سرعة التيار فيها 1 mi/h. إذا قطع خلال سباحته مسافة 2 mi مع اتجاه التيار ثم عاد 2 mi عكس اتجاه التيار، في 5 h، فأوجد سرعته في المياه الراكدة.
1.5 mi/h تقريبًا

تنبيه!

تجنب الأخطاء المفاهيمية يجب أن ينتبه الطلبة في المثال 4 إلى الفرق بين حل المعادلة التربيعية التي لها حلان، وحل المسألة التي لها حل واحد فقط.

تجنب الأخطاء عند حل المعادلات النسبية، ينسى الطلبة في أغلب الأحيان أن يضربوا كل حدود المعادلة في م.م.أ للحصول على معادلة مكافئة. لذا، ذكّرهم بذلك.

الدرس 6-4 حل المعادلات النسبية 203

افهم: المعطيات هي: الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني الثانوي فقط لإتمام العمل، والزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصفين معًا. والمطلوب إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الأول الثانوي فقط لإتمام العمل.

خطط: يستطيع طلاب الصف الثاني إتمام العمل في 24h؛ ولذا فإن معدل عملهم يساوي $\frac{1}{24}$ من العمل في الساعة.

في حين يبلغ معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي $\frac{1}{j}$ من العمل في الساعة، أما معدل عمل طلاب الصفين معًا فهو $\frac{1}{18}$ من العمل في الساعة.

معدل عمل طلاب الصفين معًا	معدل عمل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{j}$

حُل:

المعادلة $\frac{1}{24}+\frac{1}{j}=\frac{1}{18}$

بضرب كلا الطرفين في م.م.أ للمقامات وهو $72j$ $72j\frac{1}{24}+72j\frac{1}{j}=72j\frac{1}{18}$

باختصار العوامل المشتركة $\frac{3}{72j}\frac{1}{\frac{24}{1}}+72j\frac{1}{\frac{j}{1}}=\frac{4}{72j}\frac{1}{\frac{18}{1}}$

بالتبسيط $3j+72=4j$

بطرح $3j$ من كلا الطرفين $72=j$

تحقق: هناك طريقتان للتحقق:

الطريقة 1: تعويض القيم

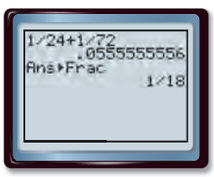
المعادلة الأصلية $\frac{1}{24}+\frac{1}{j}=\frac{1}{18}$

$j=72$ $\frac{1}{24}+\frac{1}{72}\stackrel{?}{=}\frac{1}{18}$

م.م.أ للمقامات هو 72 $\frac{3}{72}+\frac{1}{72}\stackrel{?}{=}\frac{4}{72}$

بالتبسيط $\frac{4}{72}=\frac{4}{72}$ ✓

الطريقة 2: استعمال الآلة الحاسبة



يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي إلى 72h لإتمام العمل وحدهم.

تأكد

5A) يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملا معًا، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. كم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟ 15h

5B) يقوم أحمد وعلي بأعمال البلاط معًا، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه، فكم يومًا يحتاجان إذا قاما بالعمل معًا؟ $2\frac{8}{11}$ يوم

تأكد من فهمك

المثالان 2 , 1 الصفحتان 201 , 200

حُل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

1) $\frac{4}{7}+\frac{3}{x-3}=\frac{53}{56}$ 11

2) $\frac{7}{3}-\frac{3}{x-5}=\frac{19}{12}$ 9

3) $\frac{3}{x+5}=\frac{2}{x}$ انظر الهامش

4) $\frac{11}{4}-\frac{5}{y+3}=\frac{23}{12}$ 3

5) انظر ملحق الإجابات $\frac{8}{x-5}-\frac{9}{x-4}=\frac{5}{x^2-9x+20}$

6) $\frac{14}{x+3}+\frac{10}{x-2}=\frac{122}{x^2+x-6}$ 5

7) $\frac{14}{x-8}-\frac{5}{x-6}=\frac{82}{x^2-14x+48}$ 14

8) $\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{12}{x^2-4}$ 14

تنبيه!

تجنب الأخطاء عند حل مسائل تتطلب عملاً جماعيًا مشتركًا، اقترح على الطلبة أن يفكروا في الجزء من العمل الذي يجب ان ينتهي في وحدة الزمن.

مثال إضافي

5 بناء: يحتاج علي إلى 4.5 أيام لبناء جدار حديقته، ويحتاج محمد إلى 3.7 أيام لإنجاز العمل نفسه. إذا عمل الاثنان معًا، فكم يومًا يحتاجان لبناء الجدار؟ يومين تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

طريقة بديلة يمكن حل المعادلة في المثال 5 بطريقة أخرى، وذلك بطرح $\frac{1}{24}$ أولاً من الطرفين، ثم إيجاد حاصل الضرب التبادلي، وأخيرًا الحل.

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقمية **حل معادلات نسبية** **اختر طالبًا؛ ليشرح خطوات حل معادلة نسبية، مؤكدًا عليه ضرورة شرح خطوة التحقق بعد الحل ويوثق ذلك باستعمال آلة التصوير.**

إجابة:

3) المعادلة الأصلية $\frac{3}{x+5}=\frac{2}{x}$

بالضرب التبادلي $2(x+5)=3x$

خاصية التوزيع $2x+10=3x$

بالتبسيط $10=x$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة أن يفكروا في الفرق بين الرياضيات البحتة مثل حل المعادلات، والرياضيات التطبيقية مثل حل مسائل من واقع الحياة، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا أوجه الشبه والاختلاف بين النوعين.

مثال 3
صفحة 202

9) **كيمياء:** تجري سارة تجربة في معمل الكيمياء، فتقوم بإضافة محلول يحتوي على حمض بنسبة 80% إلى 5 ml من محلول آخر نسبة الحمض فيه 20% . ويعبّر عن نسبة الحمض في المحلول الناتج بالدالة $f(x)=\frac{5(0.20)+x(0.80)}{5+x}$، حيث x تعبر عن كمية المحلول الذي تركيز الحمض فيه 80% . كم مليلترًا من المحلول الذي تركيز الحمض فيه 80% يجب إضافته للحصول على محلول تركيز الحمض فيه 50% ؟ **5 ml**

مثال 4
صفحة 203

10) **مسافات:** قطع وليد مسافة 40 mi ذهابًا وعودة مستعملًا دراجته وبسرعة متوسطة 11.5 mi/h ، إذا استغرق زمنًا قدره 1 h و 20 min في اتجاه الريح، و 2.5 h في عكس اتجاه الريح.

a) اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي استغرقه في اتجاه الريح. $\frac{20}{11.5+x}$

b) اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي استغرقه في عكس اتجاه الريح. $\frac{20}{11.5-x}$

c) ما الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كاملة؟ **3 h وَ 50 min**

d) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الريح. $\frac{20}{11.5+x}+\frac{20}{11.5-x}=\frac{23}{6}$, **3.5 mi | h**

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1
الصفحتان 201 , 200

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك.

11) $\frac{9}{x-7}-\frac{7}{x-6}=\frac{13}{x^2-13x+42}$ **9**

12) $\frac{13}{y+3}-\frac{12}{y+4}=\frac{18}{y^2+7y+12}$ **2**

13) $\frac{14}{x-2}-\frac{18}{x+1}=\frac{22}{x^2-x-2}$ **7**

14) $\frac{2}{y-5}+\frac{y-1}{2y+1}=\frac{2}{2y^2-9y-5}$ **Ø**

مثال 3
صفحة 202

15) **كيمياء:** كم مليلترًا من محلول حمضي تركيزه 20% يجب إضافته إلى 40 ml من محلول حمضي آخر تركيزه 75% للحصول على محلول حمضي تركيزه 30% ؟ **180 ml**

16) **بناء:** تحتاج مجموعة من العمال إلى 12 h لبناء مرآب سيارات، في حين تحتاج مجموعة أخرى إلى 16 h لإتمام العمل نفسه، كم تحتاج المجموعتان معًا لبناء المرآب نفسه؟ **6.86 h تقريبًا**

مثال 4
صفحة 203

17) **رحلة جوية:** قطعت طائرة مسافة معينة في عكس اتجاه الريح في 20 h ، واحتاجت إلى 16 h لقطع المسافة نفسها في رحلة العودة، ولكن في اتجاه الريح. إذا كانت سرعة الطائرة في الريح الساكنة 500 mi/h ، فما سرعة الريح خلال الرحلة؟ **55.56 mi|h**

18) **تمثيلات متعددة:** افرض أن $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x-3}$.

18d) مثل طرفي المعادلة بيانيًّا، نقاط التقاطع تشير إلى الحل، أما إذا لم تتقاطع المنحنيات فإن الحل يكون مرفوضًا.

a) **جبر:** حُلّ المعادلة لإيجاد قيمة x. هل يوجد حل مرفوض؟ **1، نعم، 3**

b) **تمثيل بياني:** مثّل: $y_1=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}$، $y_2=\frac{x-1}{x-3}$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0<x<5$. **انظر الهامش**

c) **تحليل:** ما قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان؟ وهل يتقاطعان عند الحل المرفوض للمعادلة الأصلية؟ **1، لا**

d) **تعبير لفظي:** استعمل المعلومات التي حصلت عليها في c لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد إذا كان أحد الحلول مرفوضًا.

حُلّ المعادلتين الآتيتين:

19) $\frac{2}{y+3}-\frac{3}{4-y}=\frac{2y-2}{y^2-y-12}$ **−1**

20) $\frac{2}{y+2}-\frac{y}{2-y}=\frac{y^2+4}{y^2-4}$ **Ø**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 10-1 ؛ للتأكد من مدى فهم الطلبة.

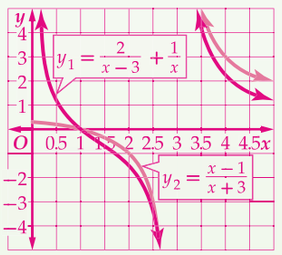
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل تمارين

استعمل ورق الرسم البياني؛ لحل التمارين 18 ، 30 ، 31.

إجابة :

18b)



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	16-11، 21، 35-23
ضمن ضمن المتوسط	15-11، 21-17، 35-23
فوق فوق المتوسط	35-17

الدرس 4-6 حل المعادلات النسبية 205

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالاً على معادلة نسبية يمكن حلها بضرب طرفي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$. إجابة ممكنة: $\frac{4}{x+3}=\frac{x}{x-4}+\frac{7}{4}$

22) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة $\frac{1+\frac{9}{x}+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{x+4}{x-5}$ كل الأعداد الحقيقية ما عدا $5, -5, 0$

23) **اكتب:** عند استعمال خاصية TABLE في الآلة الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالة: $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$ فإن الآلة الحاسبة البيانية تعطي ERROR عند القيمتين $x=2$ و $x=3$. وضح ماذا يعني ذلك؟ إجابة ممكنة: قيم الدالة تكون غير معرفة عند العددين 2 وَ 3 ويكون عندهما خطا تقارب رأسيان.

24) **تبرير:** وضح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية؟ إجابة ممكنة: ضرب طرفي معادلة نسبية بعبارة جبرية قد ينتج حلًّا مرفوضًا

تدريب على اختبار معياري

25) ما حل المعادلة الآتية: $\frac{11}{a+2}-\frac{10}{a+5}=\frac{36}{a^2+7a+10}$ ؟ **D**

A -1 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 1

26) ما قيمة x في المعادلة $(\frac{1}{x})(\frac{x-1}{2})=4$ ؟ **C**

A -7 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{1}{7}$ **D** 7

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت كل علاقة مما يأتي تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو عكسيًّا، أو غير ذلك: (الدرس 5-4)

27) تغيّر عكسي

x	y
14	3
28	1.5
56	0.75
112	0.375

28) تغيّر طردي

x	y
0.2	24
0.6	72
1.8	216
5.4	648

29) غير ذلك

x	y
12	18
24	36
36	18
72	9

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-4) للتمرينين 30, 31 انظر الهامش

30) $f(x)=\frac{x+4}{x^2+7x+12}$

31) $f(x)=\frac{x^2-5x-14}{x-7}$

ألقي حجر نرد ثلاث مرات متتالية. أوجد احتمال كل مما يأتي: (الدرس 5-3)

32) ظهور العدد 1 في الرمية الأولى، والعدد 2 في الرمية الثانية، والعدد 3 في الرمية الثالثة. $\frac{1}{216}$

33) ألا يظهر العدد 4 في الرميات الثلاث. $\frac{215}{216}$

34) ظهور عدد زوجي في الرميات الثلاث. $\frac{1}{8}$

35) ظهور العدد 5 في الرميات الثلاث. $\frac{1}{216}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع تُسمى المعادلة $\frac{1}{f}=\frac{1}{d}+\frac{1}{i}$ بمعادلة العدسات أحيانًا. إذ توضح العلاقة بين البُعد البؤري للعدسة f والمسافتين d، i بين كل من الجسم وصورته عن العدسة على الترتيب. اطلب إلى الطلبة أن يحسبوا البُعد البؤري إذا كانت $d=20\,\text{cm}$، $i=12\,\text{cm}$. وذلك بأن يجدوا f بدلالة d، i. $f=\frac{di}{d+i}$, $7.5\,\text{cm}$

4 التقويم

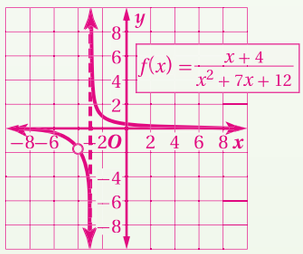
بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا مسائل من واقع الحياة شبيهة بما هو موجود في هذا الدرس مستعملين بياناتهم الخاصة، ويحلوها. وأن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

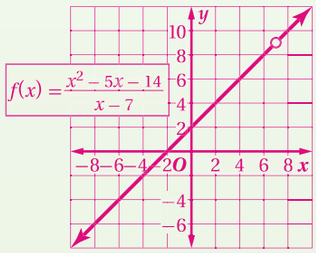
تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 4-6 بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 4.

إجابات:

30)



31)



4-6 حل المعادلات النسبية
Solving Rational Equations

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات نسبية بيانيًّا أو باستعمال خاصية table.
مثّل طرفي المعادلة النسبية بيانيًّا، ثم حدد نقاط التقاطع.

نشاط معادلة نسبية

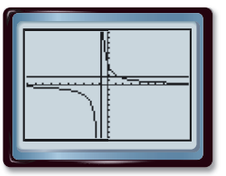
حُلّ المعادلة: $\frac{4}{x+1}=\frac{3}{2}$.

خطوة 1 مثّل طرفي المعادلة

مثّل طرفي المعادلة بيانيًّا كدالتين مستقلتين، وأدخل $\frac{4}{x+1}$ في Y1، $\frac{3}{2}$ في Y2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا وذلك بالضغط على المفاتيح.

Y= 4 ÷ (X,T,θ,n + 1)

ENTER 3 ÷ 2 ZOOM 6

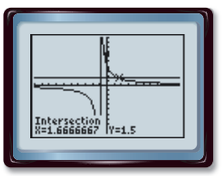


بما أن الآلة الحاسبة تعمل بالنظام المتصل، لذا من الممكن أن يظهر مستقيم رأسي يصل بين فرعي القطع الزائد. وهذا المستقيم ليس جزءًا من منحنى الدالة.

خطوة 2 استعمال خاصية intersect.

تمكنك خاصية intersect في قائمة CALC من تقدير الزوج المرتب الذي يمثل نقطة التقاطع.

اضغط على المفاتيح: 2nd [CALC] 5 ، ثم اختر أحد التمثيلين البيانيين، واضغط ENTER، ثم اختر التمثيل البياني الآخر واضغط ENTER، ثم اضغط ENTER مرة أخرى.



الحل هو $1\frac{2}{3}$.

خطوة 3 استعمال خاصية table

تحقق من صحة حلك باستعمال خاصية table. واعمل جدولًا يبين قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ كل مرة، ثم اضغط على المفاتيح:

2nd [TABLE] 3 ENTER 2nd [TblSet] 0 ENTER 1 ÷

يبين الجدول قيم x وقيم y المقابلة لكل تمثيل بياني. فعندما $x=1\frac{2}{3}$، يكون للدالتين القيمة نفسها، وهي 1.5، وهذا يعني أن الحل هو $1\frac{2}{3}$.

تمارين:
حُلّ كل معادلة مما يأتي: 4) كل الأعداد الحقيقية عدا 1 5) لا يوجد حل في الأعداد الحقيقية

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{2}{x}$ 2
2) $\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x-2}$ 6
3) $\frac{4}{x}=\frac{6}{x^2}$ 1.5
4) $\frac{1}{1-x}=1-\frac{x}{x-1}$
5) $\frac{1}{x+4}=\frac{2}{x^2+3x-4}-\frac{1}{1-x}$

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة حل المعادلة $\frac{x}{2}=\frac{8}{x}$.
وسيلاحظون أن المنحنيين $y=\frac{x}{2}$، و $y=\frac{8}{x}$ يتقاطعان في نقطتين. ومن المهم جدًّا في مثل هذه الحالة أن يستعمل الطلبة خاصية intersect بصورة صحيحة. ويتعين على الطالب أن يختار إحدى نقطتي التقاطع أولاً عند الاستجابة لتعليمه Guess، ثم يقوم بإعادة استعمال خاصية intersect، واختيار نقطة التقاطع الثانية.
الحلان هما $x=4$، $x=-4$.

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية؛ لحل المعادلات النسبية بيانيًّا أو باستعمال خاصية الجدول (table).

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

عندما يُدخل الطالب الدالة في محرر الدالة (Y = List) عليه أن يستعمل الأقواس حول البسط أو حول المقام إذا تكوّنا من أكثر من حد.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلبة إلى مجموعات ثنائية؛ ليساعد كل واحد زميله على إدخال القيم باستعمال المفاتيح بصورة صحيحة. واطلب إلى كل مجموعة حل النشاط والتمرين 1.

نشاط

- يجب على الطلبة الضغط على مفتاح ENTER عند استعمال ميزة التقاطع (intesect) في الخطوة 2؛ لاختبار التمثيل البياني للدالة، وعندما يظهر على الشاشة كلمة Guess؟ يجب إزاحة المؤشر إلى نقطة تقديرية قريبة من الحل قبل الضغط على المفتاح ENTER للمرة الثالثة.
- يمكن للطلبة التحقق من حل كل دالة مباشرة على الشاشة الأصلية بوصفها بديلاً لاستعمال ميزة (table) في الخطوة 3. إن إدخال $Y_1=(5/3)$ و $Y_2=(5/3)$ يؤدي إلى النتيجة نفسها وهي 1.5.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 2–5.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 2؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة كيفية إيجاد نقطة تقاطع الدوال الممثلة لطرفي المعادلة النسبية.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، مصادر الفصل.

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

التعابير النسبية والعمليات عليها (الدرسان 2-4 , 1-4)

- ضرب التعابير النسبية وقسمتها يشبه ضرب الكسور وقسمتها.
- لتبسيط كسر مركب بسّط البسط والمقام كل على حدة، ثم بسّط التعبير الناتج.
- جمع التعابير النسبية وطرحها يشبه جمع الكسور وطرحها.

دوال المقلوب والدوال النسبية (الدرسان 4-4 , 3-4)

- دالة المقلوب هي دالة في الصورة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.
- الدالة النسبية هي دالة في الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ ، $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود، و $b(x) \neq 0$.
- يستثنى من مجال دوال المقلوب والدوال النسبية القيم التي تجعلها غير معرفة، وتظهر على شكل فجوات في التمثيل البياني للدوال النسبية، وتسمى نقط الانفصال.
- يوجد لبعض دوال المقلوب والدوال النسبية مستقيمات تقرب منها التمثيل البياني للدوال، تسمى خطوط التقارب.
- أصفار الدالة النسبية هي القيم التي تجعل $a(x) = 0$.

التغيُّر الطردي، والتغيُّر المشترك، والتغيُّر العكسي (الدرس 5-4)

- التغيُّر الطردي: تتغيّر y طرديًّا مع x، إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ ، حيث $y = kx$.
- التغيُّر المشترك: تتغيّر y مع x و z ، إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ ، حيث $y = kxz$.
- التغيُّر العكسي: تتغيّر y عكسيًّا مع x، إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ ، حيث $xy = k$ ، أو $y = \frac{k}{x}$.

حل المعادلات النسبية (الدرس 6-4)

- لحل المعادلات النسبية تخلص من الكسور وذلك بضرب طرفي المعادلة في م.م.أ للمقامات.
- يُستثنى من مجموعة حلول المعادلة النسبية القيم التي تجعل المقام صفرًا.

مطويتك منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

التعبير النسبي	ص 164	نقطة الانفصال	ص 188
الكسر المركب	ص 168	التغيُّر الطردي	ص 193
دالة المقلوب	ص 179	ثابت التغيُّر (التناسب)	ص 193
القطع الزائد	ص 179	التغيُّر المشترك	ص 194
خط التقارب	ص 180	التغيُّر العكسي	ص 195
الدالة النسبية	ص 186	التغيُّر المركب	ص 196
خط التقارب الرأسي	ص 186	المعادلة النسبية	ص 200
خط التقارب الأفقي	ص 186	الوسط الحسابي الموزون	ص 201

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) الكسر المركب هو تعبير نسبي بسطه ومقامه أو أحدهما تعبير نسبي.

2) إذا تغيَّرت كميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي عددًا ثابتًا k.

3) يُعطى التغيُّر الطردي بمعادلة في الصورة $y = kx$.

4) تُسمى المعادلات التي تحتوي تعبيرًا نسبيًّا أو أكثر معادلات نسبية.

5) التمثيل البياني للمعادلة $y = \frac{x}{x+2}$ له خط تقارب عند $x = -2$.

6) يحدث التناسب المشترك عندما تتغيّر كمية طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين.

7) تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود بـ التعبير النسبي.

8) تظهر نقطة الانفصال على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالة لأن الدالة غير معرفة عندها.

9) يحدث التناسب المركب عندما تتغيّر كمية طرديًّا أو عكسيًّا مع كميتين أو أكثر.

مطويتك منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلةً لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة. وبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

4-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها (الصفحات 172–164)

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(10) $-\frac{10yz^2}{9x}$ $\frac{-16xy}{27z} \cdot \frac{15z^3}{8x^2}$

(11) $\frac{x-4}{x+4}$ $\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

(12) $\frac{x-1}{x-2}$ $\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

(13) $\frac{x}{5(x-y)}$ $\frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

(14) $\frac{x-3}{x+1}$ $\frac{\frac{x^2+3x-18}{x+4}}{\frac{x^2+7x+6}{x+4}}$

(15) **هندسة:** مثلث مساحة سطحه $(3x^2+9x-54)\text{cm}^2$، وارتفاعه $(x+6)\text{cm}$. أوجد طول قاعدته. $(6x-18)\text{ cm}$

مثال 1

بسّط التعبير $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2}$

$$\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot 3 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b}{3 \cdot b \cdot 2 \cdot a \cdot a} = \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

بسّط التعبير $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12}$

$$\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12} = \frac{r^2+5r}{2r} \cdot \frac{6r-12}{r^2-25} = \frac{r(r+5)}{2r} \cdot \frac{6(r-2)}{(r+5)(r-5)} = \frac{3(r-2)}{r-5}$$

4-2 جمع التعابير النسبية وطرحها (الصفحات 178–173)

بسّط كل تعبير مما يأتي:

(16) $\frac{27b+10a^2}{12ab^2}$ $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

(17) $\frac{-x+10}{4(x-2)(x+2)}$ $\frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

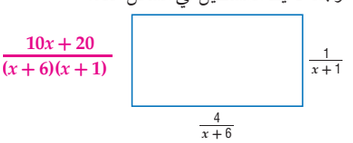
(18) $\frac{3xy^3+8y^3-5x}{6x^2y^2}$ $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

(19) $\frac{-4x-18}{(x-5)(x+2)(x-3)}$ $\frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

(20) $\frac{12x^2-10x+6}{2(x+2)(3x-4)(x+1)}$ $\frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

(21) $\frac{-2x^2+3}{4x^2+11x+5}$ $\frac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

(22) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه.



مثال 3

بسّط التعبير $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$

$$\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$$

$$= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

بطرح البسطين $= \frac{3a-2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

خاصية التوزيع $= \frac{3a-2a-4}{(a-2)(a+2)}$

بالتبسيط $= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$

مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

بناء الاختبارات
التقـــويم

إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل من (ص 211-208) يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات؛ لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا ، أو على الجزء من الفصل الذي ما زال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

4-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا (الصفحات 184–179)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: للتمارين 28 – 23 انظر الهامش

(23) $f(x)=\frac{10}{x}$ **(24)** $f(x)=-\frac{12}{x}+2$

(25) $f(x)=\frac{3}{x+5}$ **(26)** $f(x)=\frac{6}{x-9}$

(27) $f(x)=\frac{7}{x-2}+3$ **(28)** $f(x)=-\frac{4}{x+4}-8$

(29) أشجار: يقوم طلاب الصف الأول الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

a) اكتب دالة تمثل هذا الموقف. $f(x)=\frac{28}{x}$

b) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش

مثال 4

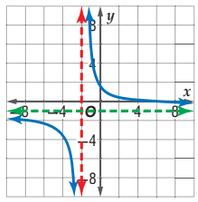
مثّل الدالة $f(x)=\frac{3}{x+2}-1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.

$a=3$: توسع التمثيل البياني رأسيًّا.

$h=-2$: إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار وحدتين.

يوجد خط تقارب رأسي عندما $x=-2$.

$k=-1$: إزاحة التمثيل البياني إلى الأسفل بمقدار وحدة، يوجد خط تقارب أفقي عندما $f(x)=-1$.



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

4-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا (الصفحات 191–186)

أوجد معادلة خط التقارب الرأسي ونقاط الانفصال للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

(30) $f(x)=\frac{3}{x^2+4x}$ $x=-4, x=0$

(31) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+6x+8}$ $x=-4$، نقطة انفصال عند $x=-2$

(32) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-5x-24}$ $x=8$، نقطة انفصال عند $x=-3$

مثّل كل دالة نسبية مما يأتي بيانيًّا: للتمارين 36–33 انظر الهامش ص (211)

(33) $f(x)=\frac{x+2}{(x+5)^2}$ **(34)** $f(x)=\frac{x}{x+1}$

(35) $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$ **(36)** $f(x)=\frac{x-1}{x^2+5x+6}$

(37) مبيعات: يبيع علي اشتراكات في إحدى الصحف إلى سكان أحد الأحياء. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 بيتًا قام بزيارتها، ثم زار x بيتًا إضافي وباع كلًّا منها اشتراكًا. يمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد البيوت التي زارها باستعمال الدالة $P(x)=\frac{10+x}{15+x}$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش ص (211)

b) ما قيم المجال والمدى، ذات المعنى في سياق المسألة؟

المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$، المدى = $\{y \mid 0.6667 \leq y < 1\}$

مثال 5

أوجد معادلة خط التقارب الرأسي ونقاط الانفصال للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

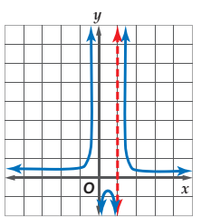
$\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$

الدالة غير معرفة عندما $x=1$، وعندما $x=-3$.

وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x+1}{x+3}$، فإن $x=-3$ هو خط تقارب رأسي وتوجد نقطة انفصال عندما $x=1$.

مثال 6

مثّل الدالة $f(x)=\frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًّا.

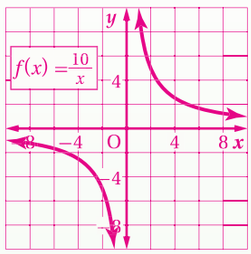


الدالة غير معرفة عندما $x=0$، و عندما $x=1$.

وبما أن الدالة في أبسط صورة، فإن $x=0$، و $x=1$ خطا تقارب رأسيان. ارسم الخطين والدالة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه.

إجابات:

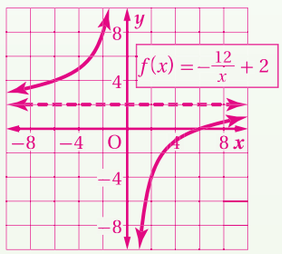
(23)



المجال $=\{x \mid x \neq 0\}$

المدى $=\{y \mid y \neq 0\}$

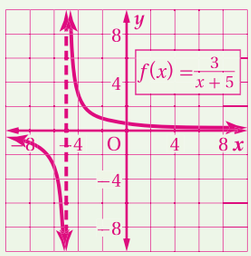
(24)



المجال $=\{x \mid x \neq 0\}$

المدى $=\{y \mid y \neq 2\}$

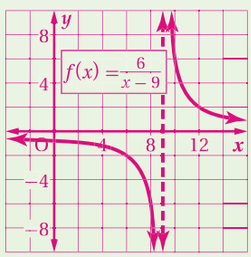
(25)



المجال $=\{x \mid x \neq -5\}$

المدى $=\{y \mid y \neq 0\}$

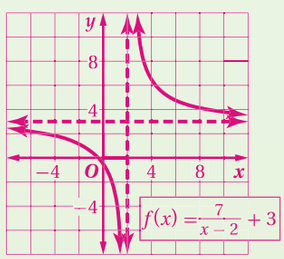
(26)



المجال $=\{x \mid x \neq 9\}$

المدى $=\{y \mid y \neq 0\}$

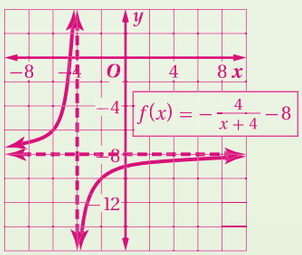
(27)



المجال $=\{x \mid x \neq 2\}$

المدى $=\{y \mid y \neq 3\}$

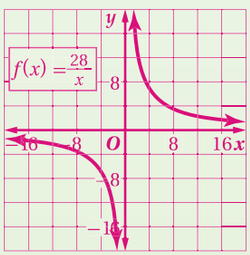
(28)



المجال $=\{x \mid x \neq -4\}$

المدى $=\{y \mid y \neq -8\}$

(29b)



4-5 التغيُّر (الصفحات 193–199)

38) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b، وكانت $b = 18$ عندما $a = 27$ فأوجد a عندما $b = 10$. $a = 15$

39) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$ فأوجد y عندما $x = -5$. $y = -10.5$

40) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$. $y = -\frac{1}{3}$

41) إذا كانت y تتغيّر تغيُّرًا مشتركًا مع كل من x و z، وكانت $x = 8$، و $z = 3$ عندما $y = 72$ فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$. $y = 30$

42) إذا كانت y تتغيّر تغيُّرًا مشتركًا مع كل من x و z، وكانت $y = 18$، عندما $x = 6$، و $z = 15$، فأوجد قيمة y عندما $x = 12$ و $z = 4$. $y = \frac{48}{5}$

43) مهن: يتغيّر أجر أحد العمال طرديًّا مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى BD68 مقابل 8 h عمل، كم دينارًا يتقاضى إذا عمل 5 h؟ BD 42.50

مثال 7

إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

التناسب العكسي $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$

$x_1 = 24$ ، $y_1 = -8$ ، $y_2 = 15$ $\frac{24}{15} = \frac{x_2}{-8}$

بالضرب التبادلي $24(-8) = 15(x_2)$

بالتبسيط $-192 = 15x_2$

بقسمة كلا الطرفين على 15 $-12\frac{4}{5} = x_2$

عندما تكون $y = 15$، فإن قيمة x هي $-12\frac{4}{5}$.

4-6 حل المعادلات النسبية (الصفحات 200–206)

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

44) $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$ $x = \frac{46}{17}$

45) $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$ $x = 13$

46) $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$ $x = -7$

47) $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$ $x = -4$ ، $x = -\frac{1}{2}$

48) $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$ $x = 8$

49) عمل: يستطيع سعيد زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع علي زراعتها في 4 h. كم ساعة يحتاجان إذا زرعا الحديقة معًا؟ $1\frac{5}{7}$ h

مثال 8

حُلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$ وتحقق من صحة حلك.

م.م.أ للمقامات هو $x(x+2)$

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$3(x) + 1(x+2) = 0$$
$$3x + x + 2 = 0$$
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

تحقق:
$$\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2 - 2 = 0 \checkmark$$

الحل هو $x = -\frac{1}{2}$

مراجعة حل المسائل

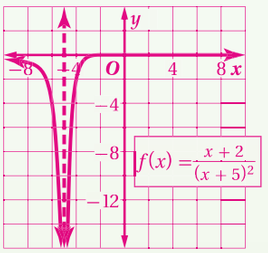
إذا احتاج الطلبة تدريبات إضافية على حل المسألة فذكّرهم بخطوات حل المسألة، وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقع

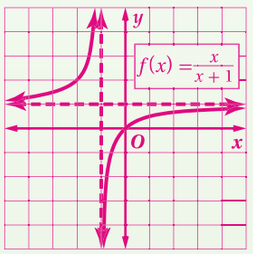
اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 4، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجابتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 4.

إجابات:

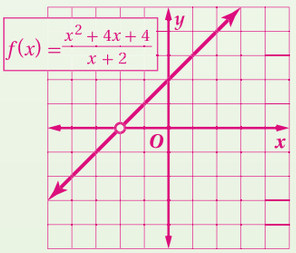
(33)



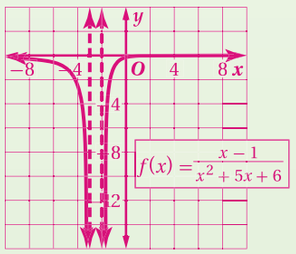
(34)



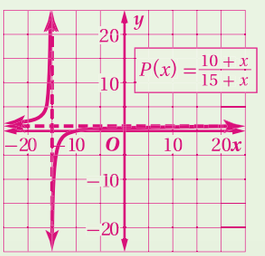
(35)



(36)



(37a)



بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أن جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 4 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكّل تحديًا للطلبة.

مطويتك متابعة المطويات

إجابات:

5) $\frac{x+7}{3(2x+1)}$

6) $\frac{-x+3}{2(x-1)(x+1)}$

7) $\frac{4y^2+14y-21}{14y^2}$

9) $x=-2$ ، $f(x)=-5$
المجال $=\{x \mid x \neq -2\}$
المدى $=\{y \mid y \neq -5\}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 4-1، 4-2، 4-3، 4-4، 4-5، 4-6	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (162)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

بسّط كل تعبير مما يأتي: 3) $\frac{m+3}{n-3}$ للأسئلة 7-5 انظر الهامش

1) $8r^2 \quad \frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$

2) $-\frac{2(m+2)}{m} \quad \frac{m^2-4}{3m^2} \cdot \frac{6m}{2-m}$

3) $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3}$

4) $\frac{x+4}{x-1} \quad \frac{\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}}{\frac{x^2-1}{x^2-x-20}}$

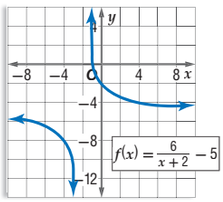
5) $\frac{x+4}{6x+3}+\frac{1}{2x+1}$

6) $\frac{x}{x^2-1}-\frac{3}{2x+2}$

7) $\frac{1}{y}+\frac{2}{7}-\frac{3}{2y^2}$

8) $\frac{2x+1}{5x-1} \quad \frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

9) أوجد خطوط التقارب، و المجال والمدى للدالة الممثلة بيانيًّا أدناه. انظر الهامش



10) **اختيار من متعدد:** أوجد معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية

$f(x)=\frac{x+1}{x^2+3x+2}$

A $x=-2$ A $x=-1$ B
C $x=1$ C $x=2$ D

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: للأسئلة 16-11 انظر ملحق الإجابات

11) $f(x)=-\frac{8}{x}-9$

12) $f(x)=\frac{2}{x+4}$

13) $f(x)=\frac{3}{x-1}+8$

14) $f(x)=\frac{5x}{x+1}$

15) $f(x)=\frac{x}{x-5}$

16) $f(x)=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$

أوجد خط التقارب الرأسي، ونقط الانفصال (إن أمكن) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

17) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-2x-35}$. خط تقارب رأسي عند $x=7$، نقطة انفصال عند $x=-5$

18) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+3}$. نقطة انفصال عند $x=-3$

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

19) $\frac{-1}{x+4}=6-\frac{x}{x+4}$ $x=-5$

20) $\frac{1}{3}=\frac{5}{m+3}+\frac{8}{21}$ $m=-108$

21) $7+\frac{2}{x}=-\frac{5}{x}$ $x=-1$

22) $r+\frac{6}{r}-5=0$ $r=2,3$

23) $\frac{6}{7}-\frac{3m}{2m-1}=\frac{11}{7}$ $m=\frac{5}{31}$

24) $\frac{r+2}{3r}=\frac{r+4}{r-2}-\frac{2}{3}$ $r=-\frac{1}{4}$

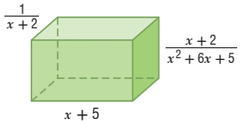
25) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y=18$ عندما $x=-\frac{1}{2}$، فأوجد قيمة x عندما $y=-10$. $\frac{9}{10}$

26) إذا كانت m تتغيّر طرديًّا مع n، و كانت $m=24$ عندما $n=-3$، فأوجد قيمة n عندما $m=30$. $-\frac{15}{4}$

27) إذا كانت r تتغيّر تغيُّرًا مشتركًا مع s و t. و إذا كانت $s=20$ عندما $r=140$، و $t=-5$، فأوجد قيمة s عندما $r=7$، و $t=2.5$. -2

28) **دراجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية فإن المسافة التي يقطعها تتناسب طرديًّا مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h، فكم ساعة يحتاج ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟ 4 h تقريبًا

29) ما حجم متوازي المستطيلات في الشكل أدناه؟



$\frac{1}{x+1}$ وحدة مكعبة

التخمين والتحقق

من المهم جدًّا أن تأخذ الوقت المتبقي بعين الاعتبار في أثناء تقديم الاختبار المعياري. فإذا لاحظت أن الوقت سيدركك ولن تتمكن من إكمال الاختبار، أو أنك لا تعرف طريقة حل مسألة معينة في الاختبار، فإن استراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على اختيار الإجابة بسرعة.

استراتيجيات التخمين والتحقق

الخطوة 1

انظر بإمعان إلى الإجابات المحتملة، وقوّم معقولية كل منها، ثم احذف الإجابات غير المعقولة.

واسأل نفسك:

- هل هناك بدائل تبدو غير صحيحة بصورة واضحة؟
- هل هناك بدائل غير مناسبة؟
- هل هناك بدائل لا تحتوي على الوحدات المناسبة للمسألة؟

الخطوة 2

استعمل استراتيجية التخمين والتحقق للخيارات المتبقية.

- **معادلات:** إذا كانت المسألة تتعلق بحل معادلة معينة فعوِّض قيم البدائل في المعادلة، ولاحظ صحة الإجابة من خطئها.
- **أنظمة المعادلات:** عوّض كل قيم المتغيرات المعطاة في البدائل بالنسبة لنظام من المعادلات، وتأكد من تحقيقها لجميع المعادلات.

الخطوة 3

اختر أحد البدائل، وتأكد مما إذا كان يحقق جميع شروط المسألة، ثمّ حدد الإجابة الصحيحة.

- إذا لم يحقق البديل الذي اخترته شروط المسألة فانتقل إلى البديل المعقول التالي، ثم خمّن وتحقق.
- توقف عندما تجد الإجابة الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

ما حل المعادلة $\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{8}{x^2-9}$؟

A -1 B 1 C 5 D 7

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية التخمين والتحقق؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- لماذا تعد استراتيجية التخمين والتحقق مناسبة للاستعمال في الاختبارات المعيارية؟

إجابة ممكنة: من المعروف أن الإجابة الصحيحة موجودة في البدائل، وعندئذٍ يمكنك التحقق من خلال معطيات السؤال، وإلا فعليك اختيار إجابة أخرى. وبهذه الطريقة تكون متأكدًا من إجابتك.

- متى تستعمل استراتيجية التخمين والتحقق؟

إجابة ممكنة: يمكن استعمال هذه الاستراتيجية في أي اختبار معياري وخاصة عندما تكون البدائل عبارة عن أعداد؛ إذ يمكنك عندئذٍ تعويض الأعداد بدلاً من المتغيرات في المعادلة المعطاة.

حل المعادلة النسبية هو عدد حقيقي. وبما أن البدائل الأربعة هي أعداد حقيقية فإن كلاً منها إجابة صحيحة ممكنة، ويجب التحقق من كل منها. ابدأ بالبديل الأول، وتأكد مما إذا كان يحقق المعادلة النسبية أم لا، ثم انتقل إلى البديل التالي حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

خمن: -1	تحقق:
	$\frac{2}{(-1)-3}-\frac{4}{(-1)+3}=\frac{8}{(-1)^2-9}$
	$-\frac{5}{2}\neq -1$ ✗

خمن: 1	تحقق:
	$\frac{2}{1-3}-\frac{4}{1+3}=\frac{8}{(1)^2-9}$
	$-2\neq -1$ ✗

خمن: 5	تحقق:
	$\frac{2}{5-3}-\frac{4}{5+3}=\frac{8}{(5)^2-9}$
	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ✓

يكون الناتج جملة عددية صحيحة عندما $x=5$ ، لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

1) ما حل المعادلة $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$ ؟ B

A $\frac{1}{10}$ B $\frac{1}{5}$
C $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{2}$

2) مجموع أعمار علي ومحمد ومحمود يساوي 40 سنة. إذا كان عُمر محمد يزيد على مثلي عُمر محمود بسنة واحدة، و عُمر علي أكبر من عُمر محمد بثلاث سنوات، فما عُمر محمد؟ H

F 7 G 14
H 15 J 18

3) ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{x+4}{3}$ ؟ D

A -5 B 4
C 3 أو 2 D 2 أو -5

4) تُباع النسخة الواحدة من إحدى المجلات الثقافية بسعر BD 10. وقد بيع من المجلة 400 نسخة بهذا السعر . فإذا زاد سعر النسخة الواحدة فإن عدد النسخ المبيعة ينقص بمقدار 40 نسخة مقابل كل BD 2 زيادة. ما سعر النسخة الواحدة الذي يحقق أكبر دخل؟ H

F BD 10 G BD 13
H BD 15 J BD 20

مثال إضافي

تدريب اختبار معياري:

إذا كانت y تتناسب تناسبًا مشتركًا مع x ، z. وأن $y=40$ عندما $x=28$ و $z=15$ ، فأوجد قيمة y عندما $z=7$ ، $x=12$. A

A 8
B 20
C 80
D 200

3 التقويم

استعمل التمارين 4–1 ؛ لتقويم مدى فهم الطلبة.

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

1) يتغيّر سعر استئجار غرفة في أحد الفنادق طرديًّا مع عدد الأيام كما هو موضح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	الأجرة (BD)
1	40
2	80
3	120
4	160

أي المعادلات الآتية تمثل ذلك التغيُّر الطردي؟ **G**

F $y = x + 40$ H $y = \frac{40}{x}$

G $y = 40x$ J $y = 160x$

2) في أي اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$، للحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟ **A**

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

3) أي مما يأتي ليس خط تقارب للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$؟ **J**

F $f(x) = 0$ H $x = 7$

G $x = -7$ J $f(x) = 1$

4) ما أبسط صورة للكسر المركب $\frac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$ ؟ **C**

A $\frac{x+3}{x+4}$ C $\frac{x+3}{x-4}$

B $\frac{1}{x-4}$ D $\frac{x-4}{x+3}$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

5) أوجد عدد الطرائق الممكنة لرسم مستطيل محيطه 12 وأطوال أضلاعه أعداد صحيحة . **3**

6) حدّد إذا كان الحدثان الآتيان متنافيين أم لا، ثم أوجد الاحتمال إلى أقرب جزء من مائة.

" رمي مكعب مرقم والحصول على عدد زوجي على الوجه الظاهر أو عدد أولي ".

غير متنافيين، 0.8

7) حدّد إذا كان الحدثان الآتيان مستقلين أم لا، ثم أوجد الاحتمال إلى أقرب جزء من مائة.

"نجاح كل من حمد وسالم في اختبار قيادة السيارة علمًا بأن احتمال نجاح حمد $\frac{1}{2}$، وسالم $\frac{1}{3}$ ". **مستقلين، 0.17**

الفصل 4
اختبار معياري تراكمي
للفصلين 4 , 3

تشخيص أخطاء الطلبة

أجر مسحًا شاملًا لإجابات الطلبة عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية شائعة.

(1

F تم إيجاد ثابت التغيَّر بصورة صحيحة، ولكن تمت إضافته بدلاً من الضرب فيه.

G الإجابة الصحيحة.

H تمت القسمة على الفرق بدلاً من الضرب فيه.

J استعملت عملية الضرب، ولكن كان ثابت التغيَّر خطأ.

(2

A الإجابة الصحيحة.

B مثّل العدد 2 على أنه المقطع من المحور x ، وهذا خطأ.

C لم تُستعمل إشارة + للدلالة على اتجاه الإزاحة.

D مثّل العدد 2 على أنه المقطع x ، وهذا خطأ.

(3

F تمّ تجاهل النفي في المسألة.

G تمّ تجاهل النفي في المسألة.

H تمّ تجاهل النفي في المسألة.

J الإجابة الصحيحة.

(4

A لم يحلل المقدار $x^2 - 16$ بصورة صحيحة.

B تم تبسيط الكسر بصورة غير صحيحة.

C الإجابة الصحيحة.

D تم عكس الكسر بعد تبسيطه.

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين دليلًا على مدى تقدم الطلبة.

بناء الاختبارات التقويم

استعمل برنامج بناء الاختبارات؛ لوضع أسئلة اختبارات معيارية مثل اختبارات TIMSS أو NAEP.

إجابات:

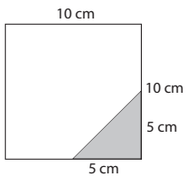
13a) إجابة ممكنة: يوجد خط تقارب رأسي عندما $x = -4$ ، $x = 4$، وخط تقارب أفقي عندما $y = 0$

13b) $y = \frac{1}{x^2 - 16}$

أسئلة مقالية

8) ما عدد النواتج الممكنة عند إلقاء حجري نرد متمايزين مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقود؟ 72

9) إذا اخترت نقطة عشوائيًّا فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟ 0.125

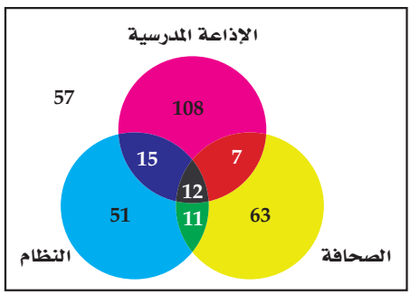


10) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y وعكسيًّا مع z ، فأوجد قيمة z عندما $x=8$ و $y=-6$. إذا كانت $z=26$ عندما $x=8$ و $y=13$. -12

11) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 4$ عندما $x = 12$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 5$ ، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. 9.6

أسئلة ذات إجابات مطولة

12) استعمل شكل فن أدناه الذي يمثل 324 طالبًا بالصف الأول الثانوي والمشاركين في اللجان المدرسية في إحدى المدارس الثانوية، لإيجاد احتمال اختيار طالب عشوائيًّا في كل مما يأتي:

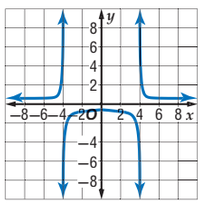


a) أن يكون الطالب المختار من لجنة النظام أو لجنة الصحافة. $\frac{53}{108}$

b) أن يكون الطالب المختار من لجنة النظام أو لجنة الإذاعة المدرسية. $\frac{17}{27}$

c) أن يكون الطالب المختار من لجنة الإذاعة المدرسية ولجنة النظام أو لجنة الصحافة ولجنة الإذاعة المدرسية. $\frac{17}{162}$

13) استعمل التمثيل البياني للدالة النسبية المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:



a) صف خطوط التقارب الرأسية والأفقية للتمثيل البياني.

b) اكتب قاعدة الدالة النسبية موضحًا خطوات الحل.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
اذهب إلى الدرس ...	4-4	4-3	4-3	4-1	3-1	3-6	3-5	3-1	3-3	4-5	4-5	3-6	4-4

الدرس 1-4، ص 170

28

$$\frac{y^2+8y+15}{y-6}\cdot\frac{y^2-9y+18}{y^2-9}$$

بالتحليل

$$=\frac{(y+3)(y+5)}{y-6}\cdot\frac{(y-3)(y-6)}{(y-3)(y+3)}$$

باختصار العامل المشترك

$$=\frac{\cancel{(y+3)}(y+5)}{\cancel{y-6}}\cdot\frac{\cancel{(y-3)}\cancel{(y-6)}}{\cancel{(y-3)}\cancel{(y+3)}}$$

بالتبسيط

$$=y+5$$

الدرس 2-4، ص 173-178

29

$$\frac{6}{y^2-2y-35}+\frac{4}{y^2+9y+20}$$

بتحليل المقامات

$$=\frac{6}{(y-7)(y+5)}+\frac{4}{(y+4)(y+5)}$$

$$=\frac{6(y+4)}{(y-7)(y+5)(y+4)}+\frac{4(y-7)}{(y+4)(y+5)(y-7)}$$

بالضرب في العوامل المفقودة

بجمع البسطين

$$=\frac{6y+24+4y-28}{(y-7)(y+5)(y+4)}$$

بالتبسيط

$$=\frac{10y-4}{(y-7)(y+5)(y+4)}$$

37

$$\frac{\frac{4}{x+5}+\frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6}-\frac{8}{x+5}}=\frac{\frac{4(x-6)}{(x+5)(x-6)}+\frac{9(x+5)}{(x+5)(x-6)}}{\frac{5(x+5)}{(x+5)(x-6)}-\frac{8(x-6)}{(x+5)(x-6)}}$$

بتبسيط كل من البسط و المقام

$$=\frac{\frac{4x-24+9x+45}{(x+5)(x-6)}}{\frac{5x+25-8x+48}{(x+5)(x-6)}}$$

بدمج الحدود المتشابهة

$$=\frac{\frac{13x+21}{(x+5)(x-6)}}{\frac{-3x+73}{(x+5)(x-6)}}$$

بكتابة التعبير في صورة قسمة تعبيرين

$$=\frac{13x+21}{(x+5)(x-6)}\div\frac{-3x+73}{(x+5)(x-6)}$$

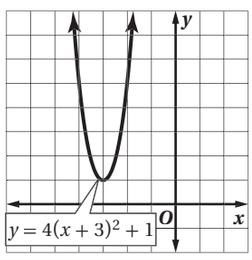
بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$=\frac{13x+21}{(x+5)(x-6)}\cdot\frac{(x+5)(x-6)}{-3x+73}$$

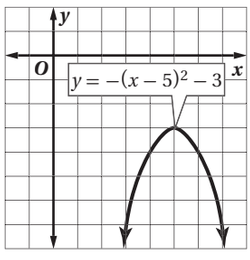
بالتبسيط

$$=\frac{13x+21}{-3x+73}$$

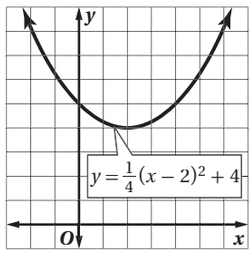
(66



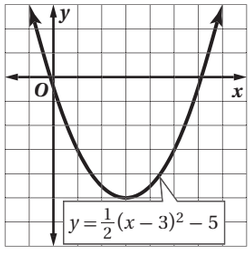
(67



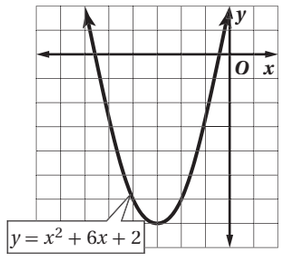
(68



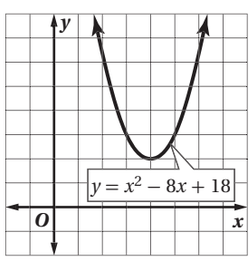
(69



(70

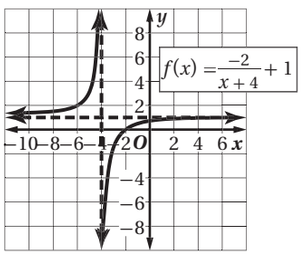


(71



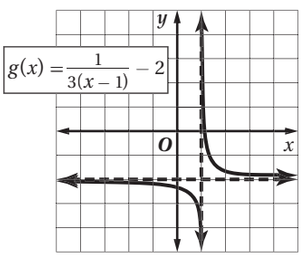
الدرس 3-4 (تأكد)، ص 184-179

(3A



المجال $=\{x \mid x \neq -4\}$، المدى $=\{y \mid y \neq 1\}$

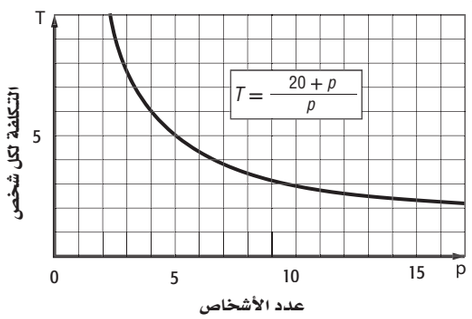
(3B



المجال $=\{x \mid x \neq 1\}$، المدى $=\{y \mid y \neq -2\}$

(4

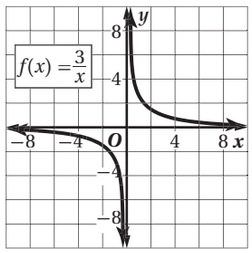
$$T=\frac{20+p}{p}$$



لا يمكن للصفر أن ينتمي إلى المجال؛ لأن عدد الأشخاص لا يمكن أن يساوي صفرًا. وكذلك لا ينتمي الصفر إلى المدى؛ لأن التكلفة لا يمكن أن تكون صفرًا. ولا يمكن لأي من المجال أو المدى أن يحوي قيماً سالبة؛ لأنه لا يمكن وجود تكلفة سالبة لعدد سالب من الأشخاص.

الدرس 3-4، ص 179-184

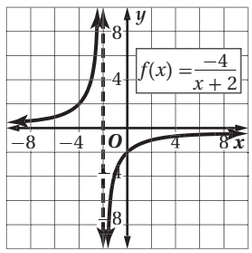
9)



المجال = $\{x \mid x \neq 0\}$

المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

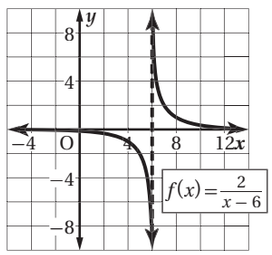
10)



المجال = $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

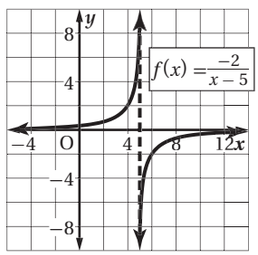
11)



المجال = $\{x \mid x \neq 6\}$

المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

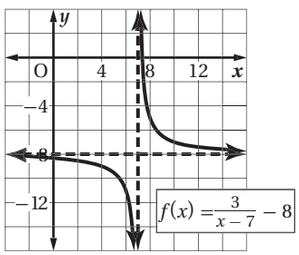
12)



المجال = $\{x \mid x \neq 5\}$

المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

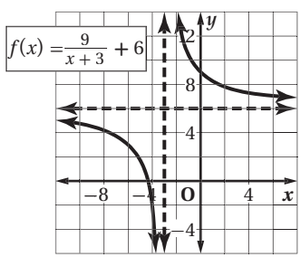
13)



المجال = $\{x \mid x \neq 7\}$

المدى = $\{y \mid y \neq -8\}$

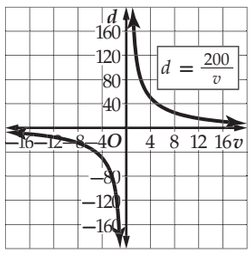
14)



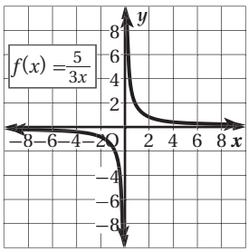
المجال = $\{x \mid x \neq -3\}$

المدى = $\{y \mid y \neq 6\}$

15b)



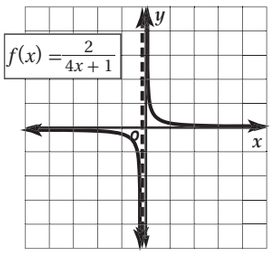
16)



المجال = $\{x \mid x \neq 0\}$;

المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

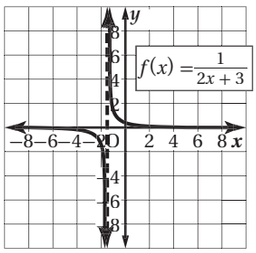
17)



المجال = $\{x \mid x \neq -\frac{1}{4}\}$

المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

18)



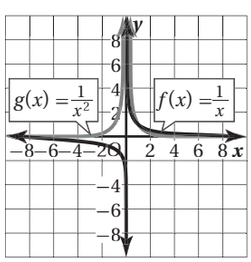
المجال = $\{x \mid x \neq -\frac{3}{2}\}$

المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

19a)

$f(x) = \frac{1}{x}$		$g(x) = \frac{1}{x^2}$	
x	$f(x)$	x	$g(x)$
–3	$-\frac{1}{3}$	–3	$\frac{1}{9}$
–2	$-\frac{1}{2}$	–2	$\frac{1}{4}$
–1	–1	–1	1
0	غير معرفة	0	غير معرفة
1	1	1	1
2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{9}$

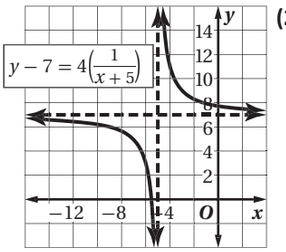
19b)



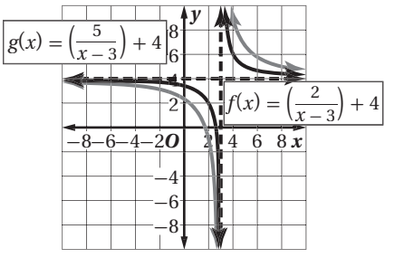
19c) الجزء الموجب من التمثيل البياني لِـ $g(x) = \frac{1}{x^2}$ يشبه التمثيل البياني لِـ $f(x) = \frac{1}{x}$. بحيث تعطي قيم x الموجبة قيمًا موجبة لِـ $f(x)$. و الجزء السالب من التمثيل البياني لِـ $g(x) = \frac{1}{x^2}$ يشبه الانعكاس للتمثيل البياني لِـ $f(x) = \frac{1}{x}$ حول محور x. بحيث تعطي قيم x السالبة قيمًا موجبة للدالة g.

19d) إجابة ممكنة: يكون التمثيل البياني متماثلًا حول المحور y عندما تكون n عددًا زوجيًّا، ومتماثلًا حول نقطة الأصل عندما تكون n عددًا فرديًّا.

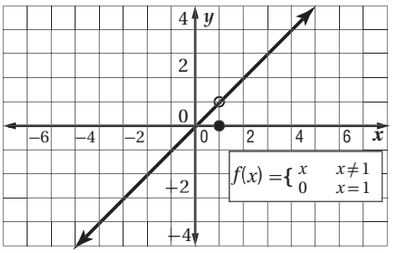
21d)



23) إجابة ممكنة: $f(x)=\frac{2}{x-3}+4, g(x)=\frac{5}{x-3}+4$



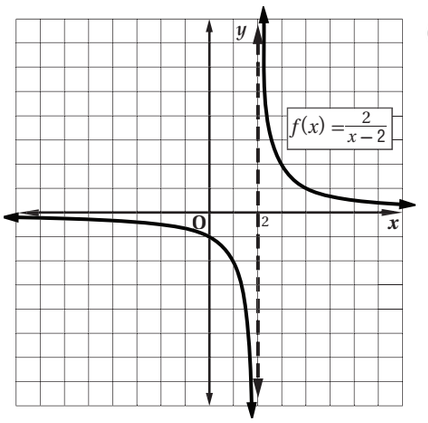
33)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \neq 1\}$

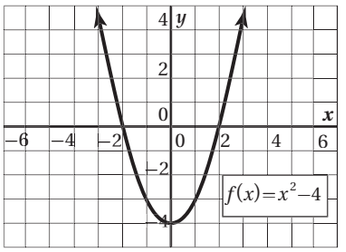
34)



المجال = $\{x \mid x \neq 2\}$

المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

35)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y \geq -4\}$

اختبار منتصف الفصل، ص 185

19) $x=1$

$y=0$

المجال = $\{x \mid x \neq 1\}$، المدى = $\{y \mid y \neq 0\}$

20) $x=0$

$y=4$

المجال = $\{x \mid x \neq 0\}$، المدى = $\{y \mid y \neq 4\}$

21) $x=-2$

$y=-5$

المجال = $\{x \mid x \neq -2\}$، المدى = $\{y \mid y \neq -5\}$

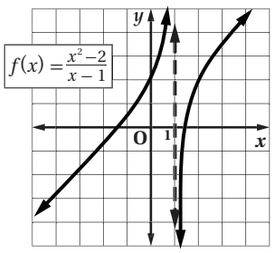
22) $x=3$

$y=2$

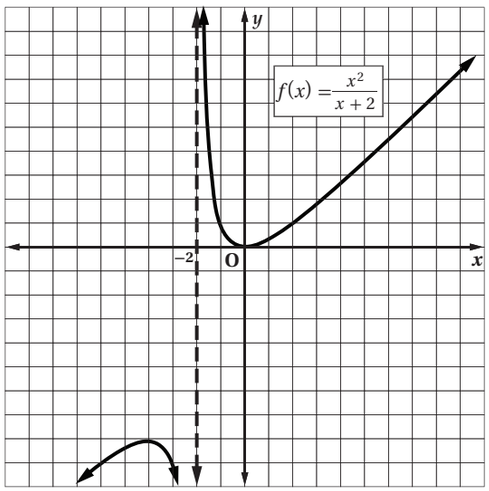
المجال = $\{x \mid x \neq 3\}$، المدى = $\{y \mid y \neq 2\}$

الدرس 4-4، ص 186-191

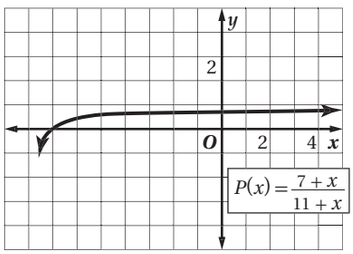
1)



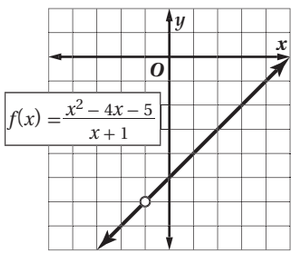
(2



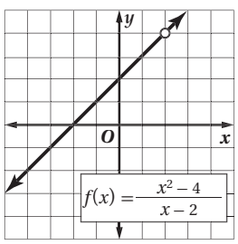
(3a



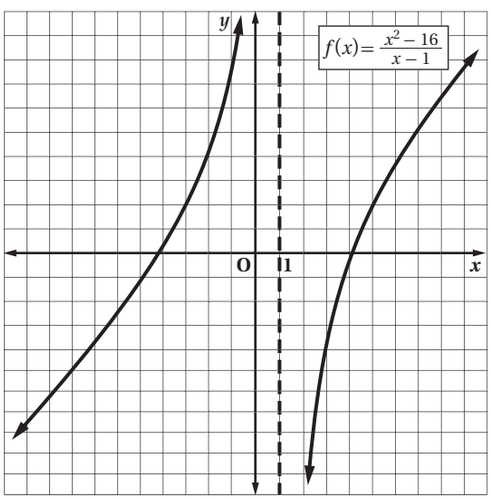
(4



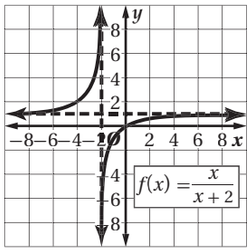
(5



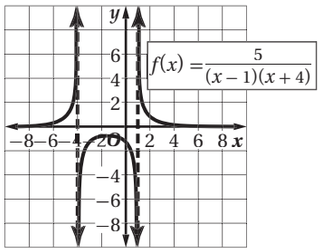
(7



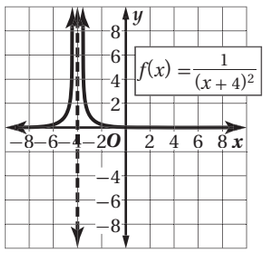
(8



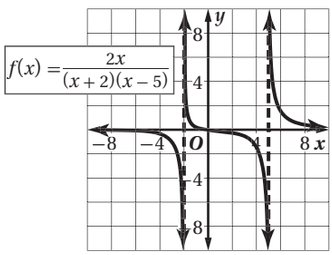
(9



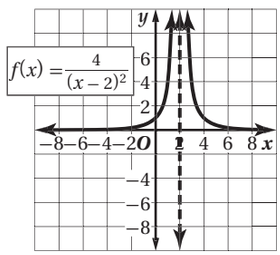
(10



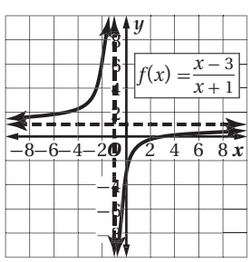
(11



12 بما أن $a(x) = 4$، فلا يوجد أصفار للدالة. والدالة غير معرَّفة عند $x = 2$. لذا، فإن للدالة خط تقارب رأسي معادلته $x = 2$. وبما أن درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن للدالة خط تقارب أفقي معادلته $f(x) = 0$.



(13

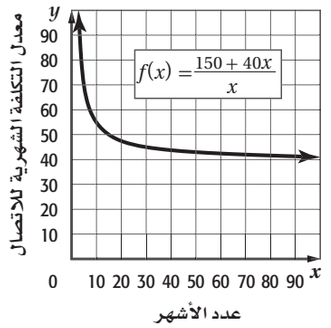


22 **a)** التكلفة الكلية = سعره الهاتف + تكلفة الإستعمال الشهري

$= 150 + 40x$

$$\text{مُعدّل التكلفة الشهرية} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد الأشهر}}$$

$$f(x) = \frac{150 + 40x}{x}$$



b) معادلة خط التقارب الرأسي هي $x = 0$. وبما أن درجة البسط تساوي درجة المقام، فإن معادلة خط التقارب الأفقي هي $f(x) = \frac{40}{1}$ أو $f(x) = 40$.

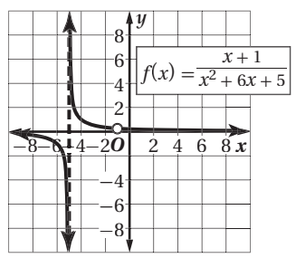
c) إجابة ممكنة: عدد الأشهر ومعدل التكلفة لا يمكن أن يكونا سالبين.

d)

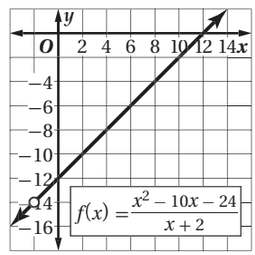
بكتابة المعادلة	$f(x) = \frac{150 + 40x}{x}$
	$45 = \frac{150 + 40x}{x}$
بضرب كلا الطرفين في x	$45x = 150 + 40x$
بطرح $40x$ من كلا الطرفين	$5x = 150$
بقسمة كلا الطرفين على 5	$x = 30$

يكون مُعدّل التكاليف الشهرية التي يدفعها BD 45 بعد 30 شهرًا.

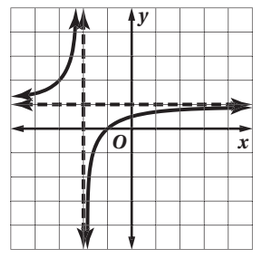
23



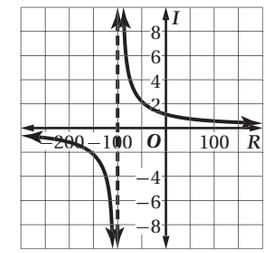
24



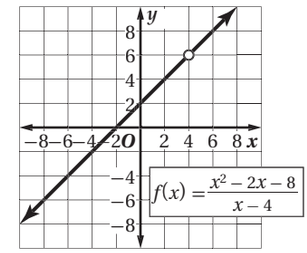
25 إجابة ممكنة:



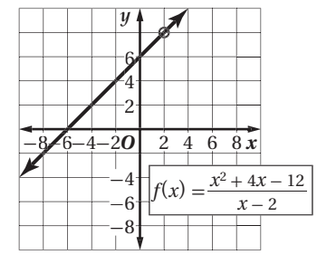
14



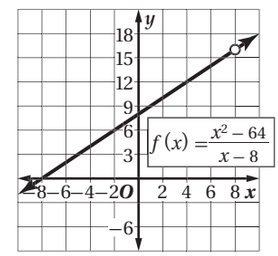
15



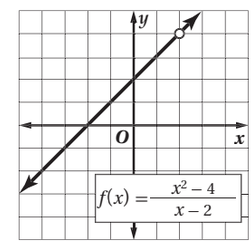
16



17



18 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$



الدرس 5-4، ص 193-199

28

التناسب العكسي $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$

$x_1 = 16, y_1 = 5, y_2 = 20$ $\frac{16}{20} = \frac{x_2}{5}$

بالضرب التبادلي $16(5) = 20(x_2)$

بالتبسيط $80 = 20x_2$

بقسمة كلا الطرفين على 20. $4 = x_2$

43

(a قانون الجاذبية العام $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$

$= (6.67 \times 10^{-11}) \frac{(7.36 \times 10^{22})(5.97 \times 10^{24})}{(3.84 \times 10^{8})^2}$

$\approx 2 \times 10^{20} N$

(b قانون الجاذبية العام $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$

$= (6.67 \times 10^{-11}) \frac{(1.99 \times 10^{30})(5.97 \times 10^{24})}{(1.5 \times 10^{11})^2}$

$\approx 3.5 \times 10^{22} N$

(c قانون الجاذبية العام $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$

$= (6.67 \times 10^{-11}) \frac{(1000)(1000)}{(0.1)^2}$

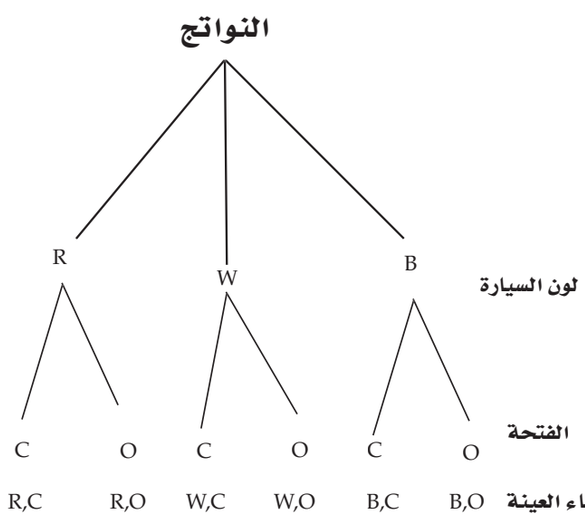
$= 6.67 \times 10^{-3} N$

54) أسود B، أبيض W ، أحمر R ، بفتحة في السقف O ، دون فتحة في السقف C

القائمة المنظمة

O,B	C,B
O,W	C,W
O,R	C,R

النواتج	بفتحة (O)	دون فتحة (C)
أسود (B)	O,B	C,B
أبيض(W)	O,W	C,W
أحمر (R)	O,R	C,R



الدرس 6-4، ص 204

5 م.م.أ للمقامات هو $(x-4)(x-5)$.

المعادلة الأصلية $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$

$\frac{(x-5)(x-4)(8)}{x-5} - \frac{(x-5)(x-4)(9)}{x-4} = \frac{(x-5)(x-4)(5)}{x^2-9x+20}$

بالضرب في م.م.أ.

$\frac{\cancel{(x-5)}^{1}(x-4)(8)}{\cancel{x-5}_{1}} - \frac{(x-5)\cancel{(x-4)}^{1}(9)}{\cancel{x-4}_{1}} = \frac{\cancel{(x-5)}^{1}\cancel{(x-4)}^{1}(5)}{\cancel{x^2-9x+20}_{1}}$

بالقسمة على العامل المشترك

بالتبسيط $(x-4)(8) - (x-5)(9) = 5$

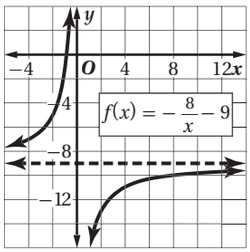
خاصية التوزيع $8x - 32 - 9x + 45 = 5$

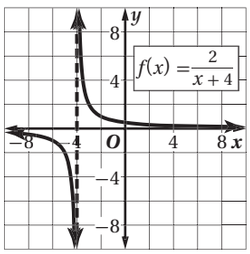
بالتبسيط $-x + 13 = 5$

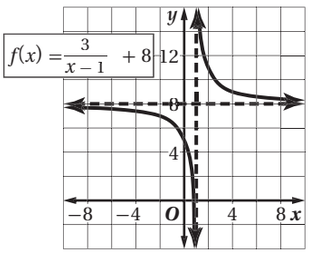
بطرح 13 من كلا الطرفين $-x = -8$

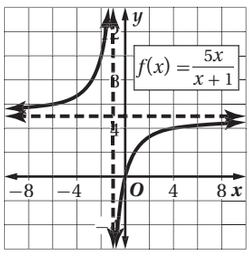
بقسمة كلا الطرفين على -1 $x = 8$

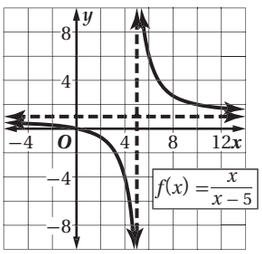
اختبار الفصل، ص 212

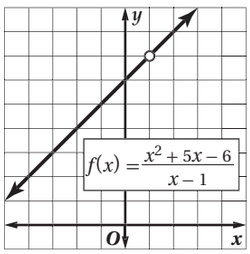
11) 

12) 

13) 

14) 

15) 

16) 

ملحق إجابات كتاب التمارين

1-1 العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي :

1) $f(x)=2x+1$, $g(x)=x-3$ — $3x-2$ ، $x+4$ ، $2x^2-5x-3$ ، $\frac{2x+1}{x-3}$, $x\neq 3$

2) $f(x)=8x^2$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$ — $\frac{8x^4+1}{x^2}$, $x\neq 0$ ، $\frac{8x^4-1}{x^2}$, $x\neq 0$ ، 8, $x\neq 0$ ، $8x^4$, $x\neq 0$

3) $f(x)=x^2+6x-2$, $g(x)=x-6$ — $2x^2+7x+3$ ، $7x+21$ ، $x^4+7x^3+3x^2-63x-108$ ، $\frac{x^2+6x-2}{x-6}$, $x\neq 6$

أوجد $(f\circ g)(0)$ ، $(g\circ f)(-1)$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا :

4) $f=\{(-9,-1),(-1,0),(3,4)\}$, $g=\{(0,-9),(-1,3),(4,-1)\}$ — $(f\circ g)(0)=-1$ ، $(g\circ f)(-1)=-9$

5) $f=\{(-4,3),(0,-2),(-1,-2)\}$, $g=\{(0,-2),(3,1)\}$ — $(f\circ g)(0)$ غير معرّفة ، $(g\circ f)(-1)$ غير معرّفة

6) $f=\{(-4,-5),(0,3),(-1,6)\}$, $g=\{(6,1),(0,-4),(3,-4)\}$ — $(f\circ g)(0)=-5$ ، $(g\circ f)(-1)=1$

أوجد $(g\circ h)(x)$, $(h\circ g)(x)$، إذا كان ذلك ممكنًا :

7) $g(x)=3x$, $h(x)=x-4$ — $3x-12$, $3x-4$

8) $g(x)=-8x$, $h(x)=2x+3$ — $-16x-24$, $-16x+3$

9) $g(x)=x+6$, $h(x)=3x^2$ — $3x^2+6$, $3x^2+36x+108$

10) $g(x)=x+3$, $h(x)=2x^2$ — $2x^2+3$, $2x^2+12x+18$

11) $g(x)=-2x$, $h(x)=x^2+3x+2$ — $-2x^2-6x-4$, $4x^2-6x+2$

12) $g(x)=x-2$, $h(x)=3x^2+1$ — $3x^2-1$, $3x^2-12x+13$

إذا كان $f(x)=x^2, g(x)=5x, h(x)=x+4$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي :

13) $f[g(1)]$ — 25

14) $g[h(-2)]$ — 10

15) $h[f(4)]$ — 20

16) $f[h(-9)]$ — 25

17) $h[g(-3)]$ — -11

18) $g[f(8)]$ — 320

19) **تجارة،** إذا استعملت الدالة $f(x)=1000-0.01x^2$ لإيجاد تكلفة القطعة الواحدة من المنتج، عند إنتاج x قطعة، والدالة $g(x)=150-0.001x^2$ لإيجاد أجرة النقل لكل قطعة، فاكتب الدالة $C(x)$ لتمثل تكلفة إنتاج ونقل كل قطعة. $C(x)=1150-0.011x^2$

20) **قياس،** تستعمل الصيغة $f=\frac{n}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدام f، والصيغة $m=\frac{f}{5280}$ لتحويل الأقدام f إلى أميال m. اكتب تركيب الدالتين لتحويل البوصات إلى أميال. $[m\circ f](n)=\frac{n}{63360}$

1-2 العلاقات والدوال العكسية

أوجد معكوس العلاقات الآتية:

1) $\{(0,3),(4,2),(5,-6)\}$ — $\{(3,0),(2,4),(-6,5)\}$

2) $\{(-5,1),(-5,-1),(-5,8)\}$ — $\{(1,-5),(-1,-5),(8,-5)\}$

3) $\{(-3,-7),(0,-1),(5,9),(7,13)\}$ — $\{(-7,-3),(-1,0),(9,5),(13,7)\}$

4) $\{(8,-2),(10,5),(12,6),(14,7)\}$ — $\{(-2,8),(5,10),(6,12),(7,14)\}$

5) $\{(-5,-4),(1,2),(3,4),(7,8)\}$ — $\{(-4,-5),(2,1),(4,3),(8,7)\}$

6) $\{(-3,9),(-2,4),(0,0),(1,1)\}$ — $\{(9,-3),(4,-2),(0,0),(1,1)\}$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي:

7) $f(x)=\frac{3}{4}x$ — $f^{-1}(x)=\frac{4}{3}x$

8) $g(x)=3+x$ — $g^{-1}(x)=x-3$

9) $h(x)=3x-2$ — $h^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$

حدّد إذا كانت كل دالتين مما يأتي معكوسًا للأخرى مجيبًا بِـ"نعم" أو "لا"، مبررًا إجابتك:

10) $f(x)=x+6$, $g(x)=x-6$ — نعم؛ لأن $[f\circ g](x)=[g\circ f](x)=x$

11) $f(x)=-4x+1$, $g(x)=\frac{1}{4}(1-x)$ — نعم؛ لأن $[f\circ g](x)=[g\circ f](x)=x$

12) $g(x)=13x-13$, $h(x)=\frac{1}{13}x-1$ — لا؛ لأن $[g\circ h](x)=x-26$

13) $f(x)=2x$, $g(x)=2x-8$

14) $f(x)=\frac{6}{7}x$, $g(x)=\frac{7}{6}x$ — نعم؛ لأن $[f\circ g](x)=[g\circ f](x)=x$

15) $g(x)=-2x$, $h(x)=\frac{1}{2}x+4$ — لا؛ لأن $[g\circ h](x)=[h\circ g](x)=x$

16) **قياس،** تمثل النقاط (72, 165), (65, 108), (67, 140), (71, 180), (63, 121) الوزن بالرطل كدالة بدلالة الطول بالبوصة لخمسة طلبة في فصل ما. أوجد خمس نقاط لهؤلاء الطلبة تمثل طولهم كدالة بدلالة وزنهم. (121, 63), (180, 71), (140, 67), (108, 65), (165, 72)

17) **تجديد البناء،** يستبدل خالد أرضية مطبخ بيته الذي بُعداه 15 ft, 18 ft. إذا تكلفت الياردة المربعة من الأرضية الجديدة 4 BD، وكانت الصيغة $f(x)=9x$ تُستعمل لتحويل الياردات المربعة إلى أقدام مربعة:

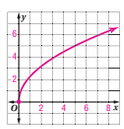
a) فأوجد $f^{-1}(x)$، وما أهمية $f^{-1}(x)$ لخالد؟ $f^{-1}(x)=\frac{x}{9}$؛ يمكن لخالد تحويل مساحة مطبخ بيته بالأقدام المربعة إلى الياردات المربعة، باستعمال $f^{-1}(x)$، مما يسهّل عليه حساب تكلفة الأرضية الجديدة للمطبخ.

b) فما تكلفة الأرضية الجديدة؟ 120 BD

1-3 دوال الجذر التربيعي

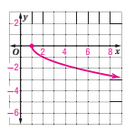
مثّل بيانيًا كل دالة مما يأتي، وحدّد مجالها ومداها :

1) $g(x)=\sqrt{5x}$



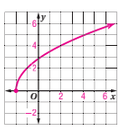
المجال = $\{x|x\geq 0\}$ ، المدى = $\{y|y\geq 0\}$

2) $g(x)=-\sqrt{x-1}$



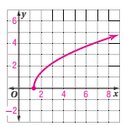
المجال = $\{x|x\geq 1\}$ ، المدى = $\{y|y\leq 0\}$

3) $g(x)=2\sqrt{x+2}$



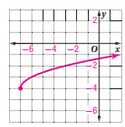
المجال = $\{x|x\geq -2\}$، المدى = $\{y|y\geq 0\}$

4) $g(x)=\sqrt{3x-4}$



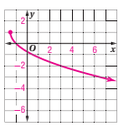
المجال = $\{x|x\geq \frac{4}{3}\}$ ، المدى = $\{y|y\geq 0\}$

5) $g(x)=\sqrt{x+7}-4$



المجال = $\{x|x\geq -7\}$ ، المدى = $\{y|y\geq -4\}$

6) $g(x)=1-\sqrt{2x+3}$



المجال = $\{x|x\geq -\frac{3}{2}\}$، المدى = $\{y|y\leq 1\}$

7) **ألعاب،** إذا كانت سرعة لعبة ما في مدينة الألعاب في أثناء هبوطها من المرتفع تُعطى بالصيغة $v=\sqrt{v_0^2+64h}$ حيث v_0 السرعة الابتدائية، h الارتفاع الرأسي بالأقدام، وكانت $v_0=8$ ft/sec , $v=70$ ft/sec، فأوجد h. 75.6 ft تقريبًا

8) **وزن،** الصيغة $d=\sqrt{\frac{3960^2\,W_e}{W_e}}-3960$ تربط بين المسافة d من الأرض بالأميال والوزن بالرطل. إذا كان وزن رائد فضاء على سطح الأرض W_e يساوي 148 pounds وفي الفضاء W_s يساوي 115 pounds، فكم يبعد رائد الفضاء عن سطح الأرض؟ 532 mi تقريبًا

1-4 الجذر النوني

بسّط كلًّا مما يأتي :

1) $\sqrt{0.81}$ — 0.9

2) $-\sqrt{324}$ — -18

3) $-\sqrt[4]{256}$ — -4

4) $\sqrt[6]{64}$ — 2

5) $\sqrt[3]{-64}$ — -4

6) $\sqrt[3]{0.512}$ — 0.8

7) $\sqrt[5]{-243}$ — -3

8) $-\sqrt[4]{1296}$ — -6

9) $\sqrt[5]{\frac{-1024}{243}}$ — $-\frac{4}{3}$

10) $\sqrt[5]{243x^{10}}$ — $3x^2$

11) $\sqrt{(14a)^2}$ — $14|a|$

12) $\sqrt{-(14a)^2}$ — ليس عددًا حقيقيًّا

13) $\sqrt{49m^2t^8}$ — $7|m|t^4$

14) $\sqrt{\frac{16m^2}{25}}$ — $\frac{4|m|}{5}$

15) $\sqrt[3]{-64r^6w^{15}}$ — $-4r^2w^5$

16) $\sqrt{(2x)^8}$ — $16x^4$

17) $-\sqrt[4]{625s^8}$ — $-5s^2$

18) $\sqrt[3]{216p^3q^9}$ — $6pq^3$

19) $\sqrt{676x^4y^6}$ — $26x^2|y^3|$

20) $\sqrt[3]{-27x^9y^{12}}$ — $-3x^3y^4$

21) $-\sqrt{144m^8n^6}$ — $-12m^4|n^3|$

22) $\sqrt[5]{-32x^5y^{10}}$ — $-2xy^2$

23) $\sqrt[6]{(m+4)^6}$ — $|m+4|$

24) $\sqrt[3]{(2x+1)^3}$ — $2x+1$

25) $-\sqrt{49a^{10}b^{16}}$ — $-7|a^5|b^8$

26) $\sqrt[4]{(x-5)^8}$ — $(x-5)^2$

27) $\sqrt[3]{343d^6}$ — $7d^2$

28) $\sqrt{x^2+10x+25}$ — $|x+5|$

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كل ممّا يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية :

29) $\sqrt{7.8}$ — 2.793

30) $-\sqrt{89}$ — -9.434

31) $\sqrt[3]{25}$ — 2.924

32) $\sqrt[3]{-4}$ — -1.587

33) $\sqrt[4]{1.1}$ — 1.024

34) $\sqrt[5]{-0.1}$ — -0.631

35) $\sqrt[6]{5555}$ — 4.208

36) $\sqrt[3]{(0.94)^2}$ — 0.970

37) **حرارة إشعاعية،** تسمى كمية الطاقة المشعة من الجسم "الحرارة الإشعاعية" . وتسمى درجة الحرارة الداخلية للجسم "الحرارة الحركية". وترتبط الصيغة $T_r=T_k\sqrt[4]{e}$ بين الحرارة الإشعاعية للجسم T_r، وحرارته الحركية T_k، حيث المتغير e في الصيغة هو مقياس قدرة الجسم على إطلاق الطاقة. إذا كانت الحرارة الحركية لجسم 30°C وكان $e=0.94$، فأوجد الحرارة الإشعاعية للجسم مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة. 29.5°C

38) **قانون هيرون (Hero's Formula)،** لدى حمود حديقة مثلثة الشكل أطوال أضلاعها 15ft, 17ft, 20ft. ويريد إيجاد مساحة سطحها باستعمال قانون هيرون، الذي ينص على أن "مساحة سطح المثلث تساوي $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث a, b, c أطوال أضلاع المثلث، s نصف محيط المثلث". استعمل قانون هيرون لإيجاد مساحة سطح الحديقة مقربةً إلى أقرب عدد كلي. 124 ft²

ملحق إجابات كتاب التمارين

1-5 العمليات على التعابير الجذرية

بسّط كلًّا مما يأتي :

1) $6\sqrt{15}$ $\sqrt{540}$
2) $-6\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{-432}$
3) $4\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{128}$
4) $-3\sqrt[4]{5}$ $-\sqrt[4]{405}$
5) $-10\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[3]{-5000}$
6) $-3\sqrt[5]{5}$ $\sqrt[5]{-1215}$
7) $5t^2\sqrt[3]{w^2}$ $\sqrt[3]{125t^6tw^2}$
8) $2v^2z^3\sqrt[3]{3z}$ $\sqrt[4]{48v^8z^{13}}$
9) $2gk^2\sqrt[3]{k^2}$ $\sqrt[3]{8g^3k^8}$
10) $3xy^4\sqrt{5x}$ $\sqrt{45x^3y^8}$
11) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ $\sqrt{\frac{11}{9}}$
12) $\sqrt[3]{9}$ $\sqrt[3]{\frac{216}{24}}$
13) $\frac{1}{16}c^2d^3\sqrt{2d}$ $\sqrt{\frac{1}{128}c^4d^7}$
14) $\frac{3a^2\sqrt{a}}{8b^2}$ $\sqrt{\frac{9a^5}{64b^4}}$
15) $\frac{\sqrt[4]{72a}}{3a}$ $\sqrt[4]{\frac{8}{9a^2}}$
16) $-180\sqrt{3}(3\sqrt{15})(-4\sqrt{45})$
17) $168\sqrt{3}$ $(2\sqrt{24})(7\sqrt{18})$
18) $4\sqrt{10}+4\sqrt{15}$ $\sqrt{810}+\sqrt{240}-\sqrt{250}$
19) $6\sqrt{20}+8\sqrt{5}-5\sqrt{45}$ — $5\sqrt{5}$
20) $8\sqrt{48}-6\sqrt{75}+7\sqrt{80}$ — $2\sqrt{3}+28\sqrt{5}$
21) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$ — $30+12\sqrt{6}$
22) $(3-\sqrt{7})^2$ — $16-6\sqrt{7}$
23) $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ — $5+\sqrt{10}-\sqrt{30}-2\sqrt{3}$
24) $(\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{10})$ — -8
25) $(1+\sqrt{6})(5-\sqrt{7})$ — $5-\sqrt{7}+5\sqrt{6}-\sqrt{42}$
26) $(\sqrt{3}+4\sqrt{7})^2$ — $115+8\sqrt{21}$
27) $(\sqrt{108}-6\sqrt{3})^2$ — 0
28) $\sqrt{15}+2\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$
29) $6\sqrt{2}+6$ $\frac{6}{\sqrt{2}-1}$
30) $\frac{17-\sqrt{3}}{13}$ $\frac{5+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$
31) $\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$
32) $27+11\sqrt{6}$ $\frac{3+\sqrt{6}}{5-\sqrt{24}}$
33) $\frac{6+5\sqrt{x}+x}{4-x}$ $\frac{3+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

34) **مكابح،** تُستعمل الصيغة $v=2\sqrt{5\ell}$ لتقدير سرعة سيارة v بالميل لكل ساعة لحظة الضغط على المكابح، حيث ℓ طول أثر احتكاك عجلاتها بالطريق مقيسًا بالأقدام. استعمل الصيغة للتعبير عن السرعة v في أبسط صورة، إذا كان $\ell=85$ ft، ثم أوجد قيمة v مقربةً إلى أقرب ميل في الساعة. $10\sqrt{17}$, 41 mi/h

35) **نظرية فيثاغورس،** يعطى طولا ضلعي مثلث قائم الزاوية بالتعبيرين $6x^2y$ و $9x^2y$. استعمل هذه النظرية لإيجاد تعبير في أبسط صورة لطول الوتر. $3x^2|y|\sqrt{13}$

1-6 الأسس النسبية

اكتب التعبير الأسي على الصورة الجذرية، والتعبير الجذري على الصورة الأسّية فيما يأتي :

1) $5^{\frac{1}{3}}$ — $\sqrt[3]{5}$
2) $6^{\frac{2}{3}}$ — $\sqrt[3]{6^2}$
3) $m^{\frac{4}{3}}$ — $\sqrt[3]{m^4}$
4) $(n^3)^{\frac{2}{5}}$ — $n\sqrt[5]{n}$
5) $\sqrt{79}$ — $79^{\frac{1}{2}}$
6) $\sqrt[4]{153}$ — $153^{\frac{1}{4}}$
7) $\sqrt[3]{27m^6n^4}$ — $3m^2n^{\frac{4}{3}}$
8) $\sqrt[5]{2a^{10}b}$ — $2^{\frac{1}{5}}a^2b^{\frac{1}{5}}$

أوجد قيمة كل تعبير فيما يأتي :

9) $81^{\frac{1}{4}}$ — 3
10) $1024^{\frac{1}{5}}$ — 4
11) $8^{\frac{5}{3}}$ — 32
12) $-256^{\frac{3}{4}}$ — -64
13) $(-64)^{\frac{2}{3}}$ — 16
14) $27^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{4}{3}}$ — 243
15) $\left(\frac{125}{216}\right)^{\frac{2}{3}}$ — $\frac{25}{36}$
16) $\frac{64^{\frac{2}{3}}}{343^{\frac{2}{3}}}$ — $\frac{16}{49}$
17) $\left(25^{\frac{1}{2}}\right)\left(-64^{-\frac{1}{3}}\right)$ — $-\frac{5}{4}$

بسّط كل تعبير فيما يأتي :

18) $g\cdot g^{\frac{4}{7}}\cdot g^{\frac{3}{7}}$ — g
19) $s^4\cdot s^{\frac{3}{4}}\cdot s^{\frac{13}{4}}$ — s^4
20) $\left(u^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{4}{5}}$ — $u^{\frac{12}{25}}$
21) $y^{-\frac{1}{2}}$ — $\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$ أو $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{y}$
22) $b^{\frac{3}{5}}$ — $\frac{1}{b^{\frac{2}{5}}}$ أو $\frac{b^{\frac{3}{5}}}{b}$
23) $q^{\frac{3}{5}}\cdot\frac{q^3}{q^{\frac{3}{5}}}$ — $q^{\frac{1}{5}}$
24) $\frac{t^{\frac{2}{5}}}{5t^{\frac{1}{2}}\cdot t^{-\frac{3}{4}}}$ — $\frac{t^{\frac{11}{10}}}{5}$
25) $\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-1}$ — $\frac{2z+2z^{\frac{1}{2}}}{z-1}$
26) $\sqrt[10]{8^5}$ — $2\sqrt{2}$
27) $\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{12^3}$ — $12\sqrt[3]{12}$
28) $\sqrt[4]{6}\cdot 3\sqrt[4]{6}$ — $3\sqrt{6}$
29) $\frac{a}{\sqrt{3b}}$ — $\frac{a\sqrt{3b}}{3b}$

30) **كهرباء،** تُستعمل الصيغة $I=\left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$ لإيجاد شدة التيار I بالأمبير المارّ في جهاز ما، حيث P قدرته بالواط، R مقاومته بالأوم. أوجد شدة التيار المارّ في الجهاز إذا كانت قدرته 500 W ومقاومته 10Ω، مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة. 7.1 Amp

31) **صناعة،** يستعمل مراقب التكاليف في أحد المصانع الصيغة $C=88n^{\frac{1}{3}}+330$ لتقدير التكلفة C بالدينار لإنتاج n قطعة من المنتج. ما تكلفة إنتاج 150 قطعة مقربةً إلى أقرب دينار؟ BD 798 تقريبًا

1-7 حل المعادلات الجذرية

حُلّ كل معادلة مما يأتي :

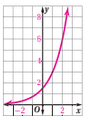
1) $\sqrt{x}=8$ — 64
2) $4-\sqrt{x}=3$ — 1
3) $\sqrt{2p}+3=10$ — $\frac{49}{2}$
4) $4\sqrt{3h}-2=0$ — $\frac{1}{12}$
5) $9c^{\frac{1}{2}}+6=9$ — 9
6) $18+7h^{\frac{1}{3}}=12$ — لا يوجد حل حقيقي
7) $\sqrt[3]{d+2}=7$ — 341
8) $\sqrt[5]{w-7}=1$ — 8
9) $6+\sqrt[3]{q-4}=9$ — 31
10) $\sqrt[4]{y-9}+4=0$ — لا يوجد حل حقيقي
11) $\sqrt{2m-6}-16=0$ — 131
12) $\sqrt[4]{4m+1}-2=2$ — $\frac{63}{4}$
13) $\sqrt{8n-5}-1=2$ — $\frac{7}{4}$
14) $\sqrt{1-4t}-8=-6$ — $-\frac{3}{4}$
15) $\sqrt{2t-5}-3=3$ — $\frac{41}{2}$
16) $(7v-2)^{\frac{1}{4}}+12=7$ — لا يوجد حل حقيقي
17) $(3g+1)^{\frac{1}{2}}-6=4$ — 33
18) $(6u-5)^{\frac{1}{3}}+2=-3$ — -20
19) $\sqrt{2d-5}=\sqrt{d-1}$ — 4
20) $\sqrt{4r-6}=\sqrt{r}$ — 2
21) $\sqrt{6x-4}=\sqrt{2x+10}$ — $\frac{7}{2}$
22) $\sqrt{2x+5}=\sqrt{2x+1}$ — لا يوجد حل حقيقي

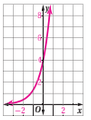
23) **إحصاء،** يستعمل الإحصائيون القانون $\sigma=\sqrt{v}$ لحساب الانحراف المعياري σ، حيث v التباين لمجموعة البيانات. أوجد التباين لمجموعة بيانات انحرافها المعياري 15. 225

24) **جاذبية أرضية،** أسقطت سلمى كرة من ارتفاع 25 ft عن سطح الأرض. ويمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالأقدام عن سطح الأرض h بعد t ثانية بالصيغة $t=\frac{1}{4}\sqrt{25-h}$. كم يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بعد 1 sec من إسقاطها؟ 9 ft

2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا

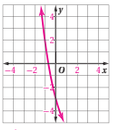
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها :

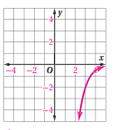
1) $g(x)=1.5(2)^x$

المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى= $\{y\mid y>0\}$

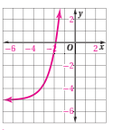
2) $g(x)=4(3)^x$

المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى= $\{y\mid y>0\}$

3) $g(x)=3(0.5)^x$

المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى= $\{y\mid y>0\}$

4) $g(x)=5\left(\frac{1}{2}\right)^x-8$

المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى= $\{y\mid y>-8\}$

5) $g(x)=-2\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$

المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى= $\{y\mid y<0\}$

6) $g(x)=\frac{1}{2}(3)^{x+4}-5$

المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى= $\{y\mid y>-5\}$

7) **أحياء،** تحوي عينة مخبرية 12000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها يوميًّا.

a. اكتب معادلة أسيّة تمثّل عدد الخلايا البكتيرية بعد x يوم. $y=12000(2)^x$

b. ما عدد الخلايا البكتيرية بعد 6 أيام؟ 768000 خلية

8) **جامعات،** بلغ عدد طلبة السنة الرابعة في إحدى الجامعات 4000 طالب عام 1429 هـ – 2008م، ويتوقع زيادة العدد بنسبة 5% سنويًّا. اكتب معادلة أسية تمثل عدد طلبة السنة الرابعة في الجامعة y بعد t سنة من عام 2008م. $y=4000(1.05)^t$

ملحق إجابات كتاب التمارين

2-2 حل المعادلات الأسية

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي:

1) $x = 22$ $4^{x+35} = 64^{x-3}$

2) $x = \frac{4}{5}$ $\left(\frac{1}{64}\right)^{0.5x-3} = 8^{8x-2}$

3) $x = -60$ $3^{x-4} = 9^{x+28}$

4) $x = \frac{1}{5}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1}$

5) $x = -\frac{1}{13}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1}$

6) $x = 0$ $3^{6x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$

7) $x = -\frac{10}{7}$ $400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8}$

8) $x = 7$ $10^{2x+7} = 1000^{x}$

اكتب دالة أسية للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط مما يأتي:

9) $y = 5(5)^x$ $(0, 5), (4, 3125)$

10) $y = 8(4)^x$ $(0, 8), (4, 2048)$

11) $y = 0.75(7)^x$ $(0, \frac{3}{4}), (2, 36.75)$

12) $y = -0.2(0.4)^x$ $(0, -0.2), (-3, -3.125)$

13) $y = 15\left(\frac{1}{4}\right)^x$ $(0, 15), \left(2, \frac{15}{16}\right)$

14) $y = 0.7(25)^x$ $(0, 0.7), \left(\frac{1}{2}, 3.5\right)$

15) إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2t+8} خلية عند الزمن t، وعددها في عينة B يساوي 216^{t+18} عند الزمن نفسه. فمتى يصبح عدد الخلايا متساويًا في العينتين؟ $t = 38$

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسيّة :

1) $6^3 = 216$ $\log_6 216 = 3$

2) $2^6 = 64$ $\log_2 64 = 6$

3) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

4) $10^{-5} = 0.00001$ $\log_{10} 0.00001 = -5$

5) $25^{\frac{1}{2}} = 5$ $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

6) $32^{\frac{3}{5}} = 8$ $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية :

7) $\log_5 125 = 3$ $5^3 = 125$

8) $\log_7 1 = 0$ $7^0 = 1$

9) $\log_3 81 = 4$ $3^4 = 81$

10) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ $3^{-4} = \frac{1}{81}$

11) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3$ $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

12) $\log_{7776} 6 = \frac{1}{5}$ $7776^{\frac{1}{5}} = 6$

أوجد قيمة كل تعبير مما يأتي :

13) 4 $\log_3 81$

14) -4 $\log_{10} 0.0001$

15) -4 $\log_2 \frac{1}{16}$

16) -3 $\log_{\frac{1}{3}} 27$

17) 0 $\log_9 1$

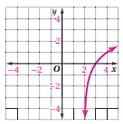
18) $\frac{2}{3}$ $\log_8 4$

19) -2 $\log_7 \frac{1}{49}$

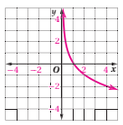
20) 4 $\log_6 6^4$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

21) $g(x) = \log_2 (x - 2)$



22) $g(x) = -2 \log_4 x$



23) **صوت،** تستعمل المعادلة $L = 10 \log_{10} R$ لإيجاد شدة الصوت بالديسيبل، حيث R الشدة النسبية للصوت. والأصوات التي تزيد شدتها على 120 dB ذات أثر سلبي على الإنسان. ما الشدة النسبية لصوتٍ شدته 120 dB؟ 10^{12}

24) **استثمار،** استثمر ماجد 10000 BD في مشروع معدل ربحه المركب 4% سنويًّا، وتضاف الأرباح سنويًّا إلى رأس المال، إذا كان المبلغ الكلي A بعد 5 سنوات من الاستثمار دون أي سحب أو إضافة يُعطى بالمعادلة $\log_{10} A = \log_{10} [10000(1 + 0.04)^5]$. فاكتب المعادلة على الصورة الأسّية. $A = 10000(1 + 0.04)^5$

2-4 حل المعادلات اللوغاريتمية

حُلّ كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي :

1) $x = -1$ $x + 5 = \log_4 256$

2) $x = 5$ $3x - 5 = \log_2 1024$

3) $x = 65$ $\log_3 (4x - 17) = 5$

4) $x = -3122$ $\log_5 (3 - x) = 5$

5) $x = 4$ $\log_{13} (x^2 - 4) = \log_{13} 3x$

6) $x = 10$ $\log_3 (x - 5) = \log_3 (3x - 25)$

7) $x = -\frac{4}{3}$ $\log_8 (-6x) = 1$

8) $x = 11$ $\log_2 (x + 6) = \log_2 17$

9) $x = 2$ $\log_9 (2x - 1) = 0.5$

10) لا يوجد حل $\log_{10} (x - 5) = \log_{10} 2x$

11) **بيئة،** اكتشف عالم بيئة فصيلة من الطيور المهددة بالانقراض، وقدّر أن عدد طيورها يتضاعف كل 12 سنة. وعندما يصل العدد إلى 20 مرة ما هو عليه الآن، لن تعد مهددة بالانقراض. اكتب تعبيرًا لوغاريتميًّا لعدد السنوات اللازمة ليبلغ عدد طيور هذه الفصيلة 20 مرة ما هو عليه الآن. $12 \log_2 20$

2-5 خصائص اللوغاريتمات

استعمل $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ و $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ لتقريب قيمة كل مما يأتي :

1) 1.5441 $\log_{10} 35$

2) 1.3980 $\log_{10} 25$

3) 0.1461 $\log_{10} \frac{7}{5}$

4) -0.1461 $\log_{10} \frac{5}{7}$

5) 2.3892 $\log_{10} 245$

6) 2.2431 $\log_{10} 175$

7) -0.6990 $\log_{10} 0.2$

8) 0.5529 $\log_{10} \frac{25}{7}$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

9) 4 $\log_7 n = \frac{2}{3} \log_7 8$

10) 8 $\log_{10} u = \frac{3}{2} \log_{10} 4$

11) 6 $\log_6 x + \log_6 9 = \log_6 54$

12) 12 $\log_8 48 - \log_8 w = \log_8 4$

13) 2 $\log_9 (3u + 14) - \log_9 5 = \log_9 2u$

14) 3 $4 \log_2 x + \log_2 5 = \log_2 405$

15) $\frac{1}{4}$ $\log_3 y = -\log_3 16 + \frac{1}{3} \log_3 64$

16) 4 $\log_2 d = 5 \log_2 2 - \log_2 8$

17) 2 $\log_{10} (3m - 5) + \log_{10} m = \log_{10} 2$

18) 1 $\log_{10} (b + 3) + \log_{10} b = \log_{10} 4$

19) 2 $\log_8 (t + 10) - \log_8 (t - 1) = \log_8 12$

20) 0 $\log_3 (a + 3) + \log_3 (a + 2) = \log_3 6$

21) 2 $\log_{10} (r + 4) - \log_{10} r = \log_{10} (r + 1)$

22) 3 $\log_4 (x^2 - 4) - \log_4 (x + 2) = \log_4 1$

23) 25 $\log_{10} 4 + \log_{10} w = 2$

24) 4 $\log_8 (n - 3) + \log_8 (n + 4) = 1$

25) ± 4 $3 \log_5 (x^2 + 9) - 6 = 0$

26) 3 $\log_{16} (9x + 5) - \log_{16} (x^2 - 1) = \frac{1}{2}$

27) 8 $\log_6 (2x - 5) + 1 = \log_6 (7x + 10)$

28) 0 $\log_2 (5y + 2) - 1 = \log_2 (1 - 2y)$

29) 101 $\log_{10} (c^2 - 1) - 2 = \log_{10} (c + 1)$

30) 6 $\log_7 x + 2 \log_7 x - \log_7 3 = \log_7 72$

31) **صوت،** تذكر أن شدة الصوت L بالديسيبل تعطى بالعلاقة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R شدة الصوت النسبية. إذا أصبحت الشدة النسبية لصوت ما 3 أمثال ما كانت عليه، فكم ديسيبل تزيد شدة الصوت؟ 4.8 dB تقريبًا

32) **هزات أرضية،** يشعر العديد من الناس بهزة أرضية قوتها 3.5 درجات على مقياس ريختر، في حين تسبب هزة أرضية قوتها 4.5 درجات على المقياس نفسه دمارًا محدودًا. فالدرجة m على مقياس ريختر تعطى من خلال الصيغة $m = \log_{10} x$، حيث x سعة الموجة الزلزالية المسببة لحركة الأرض. كم مرة تساوي سعة الموجة الزلزالية لهزة أرضية بقوة 4.5 درجات على مقياس ريختر، من سعةِ الموجة الزلزالية لهزة أرضية بقوة 3.5 على المقياس نفسه؟ 10 مرات

ملحق إجابات كتاب التمارين

2-6 اللوغاريتمات الاعتيادية

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $\log 101$ **2.0043** 2) $\log 2.2$ **0.3424** 3) $\log 0.05$ **−1.3010**

استعمل الصيغة $\mathbf{pH} = -\log[H+]$ لإيجاد pH لكل مادة مما يأتي، إذا كان تركيز أيون الهيدروجين فيها على النحو المعطى:

4) **الحليب،** $[H+] = 2.51 \times 10^{-7}\ \text{mol/L}$ **6.6 تقريبًا**

5) **المطر الحمضي،** $[H+] = 2.51 \times 10^{-6}\ \text{mol/L}$ **5.6 تقريبًا**

6) **القهوة،** $[H+] = 1.0 \times 10^{-5}\ \text{mol/L}$ **5.0**

7) **الحليب الغني بالماغنيسيوم،** $[H+] = 3.16 \times 10^{-11}\ \text{mol/L}$ **10.5 تقريبًا**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

8) $5^x = 120$ **2.9746** 9) $6^z = 45.6$ **2.1319** 10) $3.5^x = 47.9$ **3.0885**

11) $8.2^y = 64.5$ **1.9802** 12) $4^{2x} = 27$ **1.1887** 13) $2^{x-4} = 82.1$ **10.3593**

14) $5^{w+3} = 17$ **−1.2396** 15) $30^{z^2} = 50$ **±1.0725** 16) $5^{x^2-3} = 72$ **±2.3785**

17) $4^{2x} = 9^{x+1}$ **3.8188** 18) $2^{n+1} = 5^{2n-1}$ **0.9117**

اكتب كل لوغاريتم مما يأتي في صورة لوغاريتم اعتيادي، ثم أوجد قيمته إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

19) $\log_5 12$ $\frac{\log 12}{\log 5}$, **1.5440** 20) $\log_8 32$ $\frac{\log 32}{\log 8}$, **1.6667** 21) $\log_{11} 9$ $\frac{\log 9}{\log 11}$, **0.9163**

22) $\log_2 18$ $\frac{\log 18}{\log 2}$, **4.1699** 23) $\log_9 6$ $\frac{\log 6}{\log 9}$, **0.8155** 24) $\log_7 \sqrt{8}$ $\frac{\log 8}{2 \log 7}$, **0.5343**

25) **درجة الحموضة،** إذا كانت درجة حموضة الخل (pH) 2.9، والحليب 6.6، فكم مرة تقريبًا (يساوي) تركيز أيون الهيدروجين في الخل تركيزَه في الحليب؟ **5000 مرة تقريبًا**

26) **أحياء،** تحتوي عينة مخبرية على 1000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها كل ساعة، ويعطي عددها N بعد t ساعة بالصيغة $N = 1000(2)^t$. كم الزمن اللازم ليصل عدد الخلايا البكتيرية إلى 50000 خلية؟ **5.6 h تقريبًا**

27) **صوت،** تعطى شدة الصوت L بالديسيبل بالمعادلة $L = 10 \log R$، حيث R شدة الصوت النسبية، إذا كانت شدة صوت صفارة إنذار 150 dB، وشدة صوت محرك الطائرة الحربية 120 dB، فكم مرة تساوي شدة الصوت النسبية لصفارة الإنذار من شدةِ الصوت النسبية لمحرك الطائرة الحربية؟ **1000 مرة**

3-1 تمثيل فضاء العينة

مثّل فضاء العينة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، ومخطط الشجرة البيانية :

1) يمكن أن يمضي راشد العطلة الصيفية مع أبناء عمه، أو مع جدّيه في البستان، أو على الشاطئ.

النتائج	البستان (L)	الشاطئ (B)
أبناء عمه (C)	C,L	C,B
جدّيه (G)	G,L	G,B

CL, CB, GL, GB

2) يمكن أن يكتب هشام مقالته الأخيرة في الصف، أو في البيت، حول موضوع علمي أو تاريخي.

النتائج	مكتبة (L)	بيت (H)
علمي (S)	S, L	S, H
تاريخي (T)	T, L	T, H

SC, SH, TC, TH

3) يمكن أن يلتحق فراس بسلاح الطيران، أو الجيش، قبل التخرج في الكلية أو بعد ذلك.

النتائج	قبل التخرج (C)	بعد التخرج (S)
سلاح الطيران (A)	A,C	A,S
سلاح البحرية (B)	B,C	B,S

AC, AS, BC, BS

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف مما يأتي :

4) ينتج أحد المصانع لُحفًا للأطفال على النحو الآتي:

عدد الخيارات	خيارات اللحاف
10	نوع القماش
3	نوع الحشوة
5	لون القماش
3	مقاس اللحاف
20	التنجيد

9000

5) أرادت فاطمة أن تشتري كوبًا من الآيس كريم باختيار واحد من كل مما يأتي :

عدد الاختيارات	الآيس كريم
3	شكل الكوب
20	المذاق
4	إضافة المكسرات
8	إضافة الفواكه المجففة

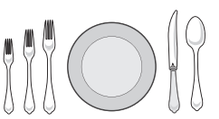
1920

6) توزع مؤسسة هدايا للأطفال مكوّنة من نوع واحد من كل مما يأتي:
4 مذاقات من رقائق البطاطا، 4 أنواع من البسكويت، 4 أنواع من العصير، 8 أنواع من الحلوى . **512**

7) **تدريب،** يختار مروان برنامجًا تدريبيًّا مدته شهر من بين 4 برامج في تخصصه، تنظمها 3 مؤسسات تدريبية 3 مرات في العام. ولا يمكنه بدء التدريب إلّا في شهر يوليو، فما عدد النواتج المتاحة له؟ **36**

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

1) **عشاء رسمي،** يوضح الشكل المجاور المكان الصحيح للملعقة والسكين والشوك على مائدة الطعام. فإذا وضعت هذه الأدوات الخمس عشوائيًّا على المائدة، فما احتمال أن يكون كلّ من السكين والملعقة في المكان الصحيح؟ علمًا بأنه توضع قطعتين على يمين الصحن وثلاث قطع على يسار الصحن. $\frac{1}{20}$



2) **رقم الهاتف،** إذا استعملت الأرقام 2, 2, 4, 5, 5, 6, 2 لتكوين رقم هاتف، فما احتمال أن يكون رقم الهاتف 6545222؟ $\frac{1}{420}$

3) **حروف،** اشترت ميساء بعض أحرف الزينة لتزيين كتابها بحيث ترص هذه الحروف بجوار بعضها لتشكيل كلمات منها مجتمعه. فإذا اختارت تبديلًا من الأحرف المبينة في الشكل المجاور، فما احتمال أن تشكّل هذه الأحرف كلمة "المستقيمين"؟ $\frac{1}{4989600}$

4) **استراحة،** يلتقي 6 أصدقاء من أعمار مختلفة في استراحة سياحية ويجلسون في شكل دائري على 6 مقاعد. فما احتمال أن يجلس أصغرهم سنًّا على المقعد الوحيد الأقرب إلى الباب؟ $\frac{1}{6}$

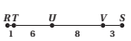
5) عُلّقت على حلقة دائرية 5 بطاقات كُتب على كل منها إحدى الكلمات: الوفاء، الصدق، الأمانة، الإيمان، العلم. فما احتمال أن تكون البطاقات بالترتيب الآتي : الإيمان، الوفاء، العلم، الصدق، الأمانة؟ $\frac{1}{24}$

6) **مبيعات،** يفكر مندوب مبيعات في زيارة 10 مجمعات سكنية في ثلاثة أيام للترويج لشركته خمسة منها في المحرق، وثلاثة في المنامة، واثنان في مدينة حمد، وسيختار 3 من هذه المجمعات، ما احتمال أن تكون في المحرق؟ $\frac{1}{12}$

7) **خدمات،** وزّع سمير إعلانات تتعلق بخدمة الإنترنت على 20 بيتًا في الحي، إذا اتصل به مشتركون في 6 بيوت منها. فما احتمال أن يكونوا : نواف، أيمن، حمد، عبد الملك، منصور، عبدالله، القاطنين في الحي؟ $\frac{1}{38760}$

3-3 الاحتمال الهندسي

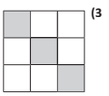
إذا اختيرت النقطة L عشوائيًّا على $\overline{RS}$، فأوجد احتمال كل من الحدثين الآتيين:



1) أن تقع L على $\overline{TV}$ $\frac{7}{9}$ أو $0.\overline{7}$ أو **78% تقريبًا**

2) أن تقع L على $\overline{US}$ $\frac{11}{18}$ أو $0.6\overline{1}$ أو **61% تقريبًا**

إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة في كل مما يأتي ؟

3) 
$\frac{1}{3}$ أو $0.\overline{3}$ أو **33% تقريبًا**

4)

$\frac{4-\pi}{4}$، أو **0.21 تقريبًا أو 21% تقريبًا**

5)

$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$، أو **0.28 تقريبًا أو 28% تقريبًا**

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد احتمال كل من الحدثين الآتيين:
(إذا استقر المؤشر على خط يعاد تدويره) :

6) استقرار المؤشر على المنطقة البنفسجية. $\frac{1}{3}$، $0.\overline{3}$، أو **33% تقريبًا**

7) استقرار المؤشر على المنطقة الحمراء. $\frac{1}{18}$، $0.0\overline{5}$، أو **6% تقريبًا**

8) **محاضرات،** يسجل طالب جامعي فقرات من الأدب العربي على شريط مدته ساعتان. إذا شغّل الشريط بصورة عشوائية، فما احتمال أن يفتح المسجل خلال فقرة الشعر التي مدتها 6 min و 31 sec؟ **0.054 تقريبًا أو 5% تقريبًا**

ملحق إجابات كتاب التمارين

3-4 محاكاة مواقف واقعية

صمّم محاكاة باستعمال نموذج احتمال هندسي ونفذها، ثم سجّل النتائج مستعملًا ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

1) سباق، سلّم سامي العصا بنجاح في 95% من مشاركاته في سباق التتابع 4×4 خلال الموسم الماضي.

النواتج	التكرار
نجاح	18
فشل	2
المجموع	20

إجابة ممكنة: استعمل مؤشرًا دوّارًا وقرصًا مقسمًا إلى قطاعين، قياس زواياهما: 342° و 18°، ونفذ 20 محاولة. فيكون احتمال تسليم العصا بنجاح 0.9 واحتمال الفشل في تسليمها 0.1. انظر التمثيلات البيانية التي أعدها الطلبة.

2) لوحة اللعب، تتكون لعبة من لوحة و50 بطاقة مرقمة من 1 إلى 5، بحيث يظهر كل رقم على 10 بطاقات، ويتعين على اللاعب حتى يتحرك من نقطة البداية أن يسحب بطاقة تحمل أحد الرقمين 2 أو 3.

النواتج	التكرار
1	2
2	3
3	5
4	5
5	5
المجموع	20

إجابة ممكنة: استعمل مؤشرًا دوّارًا وقرصًا مقسّمًا إلى 5 قطاعات متساوية مرقمة من 1 إلى 5، ونفذ 20 محاولة. فيكون احتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 1 يساوي 0.1، واحتمال سحب الرقم 2 يساوي 0.15، واحتمال سحب الرقم 3 أو 4 أو 5 يساوي 0.25 لكل منها. انظر التمثيلات البيانية التي أعدّها الطلبة.

صمّم محاكاة باستعمال مولّد الأعداد العشوائية ونفذها، ثم سجّل النتائج مستعملًا ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

3) عقارات، راجعت شركة عقارات مبيعاتها في العام الماضي لتحديد الاتجاه العام لمساحات البيوت المبيعة. وكانت النتائج كما في الجدولين المجاورين.

البيوت	نسبة البيع المئوية
غرفتا نوم	10%
3 غرف نوم	35%
4 غرف نوم	30%
5 غرف نوم	15%
6 غرف نوم	10%

النواتج	التكرار
غرفتا نوم	1
3 غرف نوم	8
4 غرف نوم	7
5 غرف نوم	3
6 غرف نوم	1
المجموع	20

إجابة ممكنة: تخصص الأعداد من 20–1: بحيث يمثّل العددان 2 , 1 غرفتي نوم، والأعداد من 9–3 ثلاث غرف نوم، والأعداد من 15–10 أربع غرف نوم، والأعداد من 18–16 خمس غرف نوم، والعددان 20 , 19 ست غرف نوم. ثمّ نفذ 20 محاولة. فيكون بذلك احتمال بيع بيت فيه غرفتا نوم يساوي 0.05 ، وثلاث غرف نوم 0.4 ، وأربع غرف نوم 0.35 ، وخمس غرف نوم 0.15 ، وست غرف نوم 0.05. انظر التمثيلات البيانية التي أعدّها الطلبة.

4) درجات، حصل عمر على تقدير A في 80% من اختبارات الرياضيات في الفصل الدراسي الأول وحصل على تقدير B في 15% منها، وعلى تقدير C في 5% منها.

النواتج	التكرار
A	16
B	3
C	1
المجموع	20

إجابة ممكنة: تخصص الأعداد من 20–1: بحيث تمثل الأعداد من 16–1 التقدير A ، 19–17 التقدير B، و 20 التقدير C. ثم نفذ 20 محاولة. فيكون بذلك احتمال الحصول على تقدير A يساوي 0.8، والحصول على B يساوي 0.15، والحصول على C يساوي 0.05. انظر التمثيلات البيانية التي أعدّها الطلبة.

3-5 احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة

حدّد إذا كان الحدثان في السؤالين (1,2) مستقلين أو غير مستقلين. ثم أوجد الاحتمال:

1) يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 6 كرات خضراء. سُحبتْ كرة حمراء دون إرجاع، ثم سُحبت كرة خضراء.
غير مستقلين، $\frac{3}{11}$

2) أُلقي حجر نردٍ مرة واحدة فظهر عدد فردي، ثم أُدير مؤشر قرص مقسم إلى 6 قطاعات متساوية مرقّمة من 1 إلى 6 فاستقر عند عدد زوجي.
مستقلان، $\frac{1}{4}$

3) يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات، لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. سحبت بطاقة ثم أعيدت إلى الصندوق، ثم سحبت بطاقة ثانية. ما احتمال أن تكون الأولى حمراء تحمل الرقم 1، والثانية سوداء تحمل الرقم 1 أيضًا؟
$\frac{1}{2704}$

4) إذا رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال أن يكون الرقم الظاهر 3 إذا كان الرقم الظاهر على الوجه العلوي للمكعب أكبر من 2؟
$\frac{1}{4}$

5) اختير حذاء أسود عشوائيًّا دون إرجاع من سلة فيها 6 أحذية سوداء و 4 أحذية بنية. ما احتمال اختيار حذاء ثانٍ أسود اللون؟
$\frac{5}{9}$

6) يتكون قرص دائري من 12 قطاعًا متساويًا ومرقمًا من 1 إلى 12. إذا أُدير مؤشر القرص واستقر عند عدد زوجي، ما احتمال أن يستقر عند العدد 12؟
$\frac{1}{6}$

7) ألعاب، أُدير مؤشر قرص مقسم إلى 8 قطاعات متساوية ومرقمة من 1 إلى 8، وأُلقي مكعب مرقم من 1 إلى 6. ما احتمال أن يستقر المؤشر عند عدد فردي وأن يظهر على الوجه العلوي للمكعب عدد زوجي؟
$\frac{1}{4}$

8) مسح إحصائي، أُجري مسح إحصائي فوُجد أن 8 من كل 10 آباء راضون عن أداء مدير المدرسة الجديد. إذا اختيرت عشوائيًّا أسماء 4 من الآباء مع الإرجاع، فما احتمال أن يكونوا جميعًا راضين عن أداء المدير؟
$\frac{256}{625}$ أو 41% تقريبًا

3-6 احتمالات الأحداث المتنافية

حدّد إذا كان الحدثان في الأسئلة (4–1) متنافيين أو غير متنافيين، ثم أوجد الاحتمال مقربًا إلى أقرب جزء من مئة:

1) سحب بطاقة من مجموعة بطاقات عددها 20 مرقمة من 1 إلى 20 والحصول على العدد 7 أو العدد 10 .
متنافيان، 0.10

2) رمي مكعبين مرقمين متمايزين، كلاهما مرقم من 1 إلى 6 والحصول على عددين مجموعهما يساوي 6 أو 8 على الوجهين الظاهرين.
متنافيان، 0.28

3) اختيار أحد الأعداد الصحيحة من 1 إلى 20، والحصول على عدد أولي أو عدد زوجي.
غير متنافيين، 0.85

4) سحب بطاقة من مجموعة بطاقات ملونة بالألوان الآتية : الأحمر، والأبيض، والأخضر، والأصفر، وبطاقات كل لون مرقمة من 1 إلى 13، والحصول على العدد 2 أو بطاقة حمراء.
غير متنافيين، 0.31

5) ما احتمال سحب بطاقة لا تحمل الرقم 1 من صندوق يحتوي على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات، لكل منها أحد الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13؟
0.92

6) ما احتمال عدم ظهور عددين متساويين عند رمي حجري نردٍ متمايزين مرة واحدة؟
0.83

7) إذا كانت فرصة اختيار شخص لمنصب المدير تساوي 3 من 20، فما احتمال عدم اختياره؟
0.85

8) قُسّم قرص إلى 12 قطاعًا متساويًا ومرقمًا من 1 إلى 12. إذا أُدير مؤشر القرص فما احتمال عدم استقراره على العدد 6؟
0.92

9) تنظيم حركة السير، إذا كانت فرصة الوصول إلى إشارة ضوئية على تقاطع طرق وهي خضراء تساوي 35%، فما احتمال الوصول إلى التقاطع عندما يكون الضوء أصفر أو أحمر؟
0.65

10) مسابقات، سحب خليل بطاقة من صندوق فيه 1000 بطاقة من بينها 50 بطاقة تفوز بجائزة. ما احتمال ألّا يربح خليل جائزة؟
0.95

4-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

بسّط كل تعبير مما يأتي:

1) $\frac{1}{3a^2b^2c} \cdot \frac{9a^2b^3}{27a^2b^2c}$

2) $-\frac{4m^4n^2}{9} \div \frac{(2m^3n^2)^3}{-18m^5n^4}$

3) $\frac{2y+3}{7y-1} \cdot \frac{10y^2+15y}{35y^2-5y}$

4) $\frac{2k+5}{k+3} \cdot \frac{2k^2-k-15}{k^2-9}$

5) $-\frac{v+5}{3v+2} \cdot \frac{25-v^2}{3v^2-13v-10}$

6) $\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x^4+x^3-2x^2}{x^4-x^3}$

7) $-\frac{5ux^2}{21yz^5} \cdot \frac{-2u^3y}{15xz^3} \cdot \frac{25x^3}{14u^2y^2}$

8) $\frac{2}{3} \cdot \frac{a+y}{6} \cdot \frac{4}{y+a}$

9) $\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^3}{n-6} \cdot \frac{n^2-6n}{n^8}$

10) $n-w \cdot \frac{a-y}{w+n} \cdot \frac{w^2-n^2}{y-a}$

11) $-\frac{5x}{2} \cdot \frac{x^2-5x-24}{6x+2x^2} \cdot \frac{5x^2}{8-x}$

12) $\frac{5x+1}{2(x-5)} \cdot \frac{x-5}{10x-2} \div \frac{25x^2-1}{x^2-10x+25}$

13) $\frac{a^2w^2}{y^2} \cdot \frac{a^2y^3}{wy^7} \div \frac{a^3w^2}{w^3y^2}$

14) $\frac{xy^3}{3w} \cdot \left(\frac{2xy}{w^2}\right)^3 \div \frac{24x^2}{w^3}$

15) $\frac{1}{2(x-y)} \cdot \frac{x+y}{6} \div \frac{x^2-y^2}{3}$

16) $\frac{3x+6}{x^2-9} \div \frac{6x^2+12x}{4x+12} \cdot \frac{2}{x(x-3)}$

17) $\frac{2s+3}{(s+4)(s-5)} \cdot \frac{2s^2-7s-15}{(s+4)^2} \div \frac{s^2-10s+25}{s+4}$

18) $-\frac{5}{2} \cdot \frac{9-a^2}{a^2+5a+6} \div \frac{2a-6}{5a+10}$

19) $\frac{2x+1}{4-x} \cdot \frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{4-x}{x}}$

20) $\frac{\frac{x^2-9}{4}}{\frac{3-x}{8}} \cdot (3)\,-2(x+3)$

21) $\frac{\frac{x^3+2^3}{x^2-2x}}{\frac{(x+2)^3}{x^2+4x+4}} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x(x-2)}$

22) هندسة، مثلث قائم الزاوية مساحة سطحه (x^2-4) وحدة مربعة، وطول أحد ضلعي القائمة فيه $(2x+4)$ وحدة. أوجد طول ضلع القائمة الآخر. $(x-2)$ وحدة

23) هندسة، هرم رباعي مساحة سطح قاعدته $\left(\frac{x^2+3x-10}{2x}\right)$ cm^2، وارتفاعه $\left(\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}\right)$ cm. عبر عن حجمه بتعبير نسبي. $\left(\frac{x+5}{6}\right)$cm^3

ملحق إجابات كتاب التمارين

4-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

أوجد (م. م. أ) لكل مجموعة كثيرات حدود مما يأتي:

1) $x^2y^3,\ x^2y,\ xy^3$
2) $a^2b^3c^4,\ a^2b^3c,\ abc^4$
3) $x+1,\ x+3,\ (x+1)(x+3)$
4) $g-1,\ g^2+3g-4,\ (g-1)(g+4)$
5) $2r+2,\ r^2+r,\ r+1,\ 2r(r+1)$
6) $3,\ 4w+2,\ 4w^2-1,\ 6(2w+1)(2w-1)$
7) $x^2+2x-8,\ x+4,\ (x+4)(x-2)$
8) $x^2-x-6,\ x^2+6x+8,\ (x+2)(x+4)(x-3)$
9) $d^2+6d+9,\ 2(d^2-9),\ 2(d-3)(d+3)^2$

بسِّط كل تعبير مما يأتي:

10) $\frac{5}{6ab}-\frac{7}{8a}$; $\frac{20-21b}{24ab}$
11) $\frac{5}{12x^4y}-\frac{1}{5x^2y^3}$; $\frac{25y^2-12x^2}{60x^4y^3}$
12) $\frac{1}{6c^2d}+\frac{3}{4cd^3}$; $\frac{2d^2+9c}{12c^2d^3}$
13) $\frac{4m}{3mn}+2$; $\frac{2(2+3n)}{3n}$
14) $2x-5-\frac{x-8}{x+4}$; $\frac{2(x+3)(x-2)}{x+4}$
15) $\frac{4}{a-3}+\frac{9}{a-5}$; $\frac{13a-47}{(a-3)(a-5)}$
16) $\frac{16}{x^2-16}+\frac{2}{x+4}$; $\frac{2}{x-4}$
17) $\frac{2-5m}{m-9}+\frac{4m-5}{9-m}$; $\frac{7-9m}{m-9}$
18) $\frac{y-5}{y^2-3y-10}+\frac{y}{y^2+y-2}$; $\frac{2y-1}{(y+2)(y-1)}$
19) $\frac{5}{2x-12}-\frac{20}{x^2-4x-12}$; $\frac{5}{2(x+2)}$
20) $\frac{2p-3}{p^2-5p+6}-\frac{5}{p^2-9}$; $\frac{2p^2-2p+1}{(p-2)(p+3)(p-3)}$
21) $\frac{1}{5n}-\frac{3}{4}+\frac{7}{10n}$; $\frac{3(6-5n)}{20n}$
22) $\frac{2a}{a-3}-\frac{2a}{a+3}+\frac{36}{a^2-9}$; $\frac{12}{a-3}$
23) $\frac{2}{x-y}+\frac{1}{x+y}$; $\frac{3x+y}{x+y}$
24) $\frac{\frac{r+6}{r}-\frac{1}{r+2}}{\frac{r^2+4r+3}{r^2+2r}}$; $\frac{r+4}{r+1}$

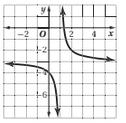
25) **هندسة،** إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تُعطى بالتعابير $\frac{5x}{2}$ ، $\frac{20}{x+4}$ ، $\frac{10}{x-4}$، فاكتب تعبيرًا يمثل محيط المثلث في أبسط صورة. $\frac{5(x^2-4x-16)}{(2x-4)(x+4)}$

26) **سياحة،** يسير قارب في نهر سرعة التيار فيه 2 mi/h. فإذا كانت r تمثل سرعة القارب في المياه الراكدة، فإن $(r+2)$ تمثل سرعته في اتجاه التيار، و $(r-2)$ تمثل سرعته في عكس اتجاه التيار. إذا قطع القارب مسافة 2 mi في اتجاه التيار ثم عاد إلى نقطة البداية. فاستعمل قانون الزمن $t=\frac{d}{r}$ ، لكتابة تعبير نسبي للزمن اللازم لإتمام الرحلة في أبسط صورة، حيث d المسافة. $\frac{4r}{(r+2)(r-2)}$ h

4-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا

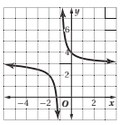
حدّد خطوط التقارب، والمجال والمدى لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{1}{x-1}-3$



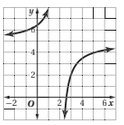
خطوط التقارب: $x=1,\ y=-3$
المجال= $\{x \mid x \neq 1\}$
المدى= $\{y \mid y \neq -3\}$

2) $f(x)=\frac{1}{x+1}+3$



خطوط التقارب: $x=-1,\ y=3$
المجال= $\{x \mid x \neq -1\}$
المدى= $\{y \mid y \neq 3\}$

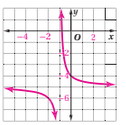
3) $f(x)=\frac{-3}{x-2}+5$



خطوط التقارب: $x=2,\ y=5$
المجال= $\{x \mid x \neq 2\}$
المدى= $\{y \mid y \neq 5\}$

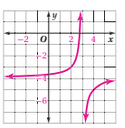
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

4) $g(x)=\frac{1}{x+1}-5$



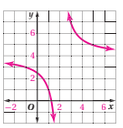
المجال= $\{x \mid x \neq -1\}$
المدى= $\{y \mid y \neq -5\}$

5) $g(x)=\frac{-1}{x-3}-4$



المجال= $\{x \mid x \neq 3\}$
المدى= $\{y \mid y \neq -4\}$

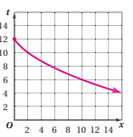
6) $g(x)=\frac{3}{x-2}+4$



المجال= $\{x \mid x \neq 2\}$
المدى= $\{y \mid y \neq 4\}$

7) **سباق،** شارك سعود في سباق للدراجات الهوائية مسافته 120 mi. إذا كان معدل سرعة سعود على دراجته هو 10 mi/h، وأراد أن يزيد المعدل بمقدار x mi/h. فاكتب معادلة تربط بين x والزمن اللازم لإنهاء السباق، ومثّلها بيانيًّا. وإذا أراد سعود أن ينهي السباق في 10 h بدلًا من 12 h، فكم يجب أن يزيد سرعته؟

$t=\frac{120}{x+10}$,

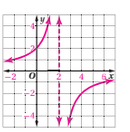


2 mi/h

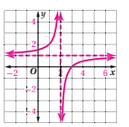
4-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

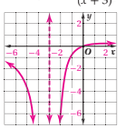
1) $f(x)=\frac{-4}{x-2}$



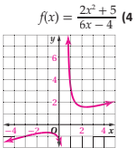
2) $f(x)=\frac{x-3}{x-2}$



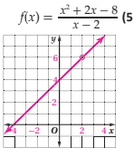
3) $f(x)=\frac{3}{(x+3)^2}$



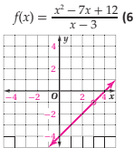
4) $f(x)=\frac{2x^2+5}{6x-4}$



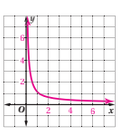
5) $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x-2}$



6) $f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x-3}$

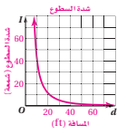


7) **طلاء،** يستطيع أحد العمال طلاء منزل في 6 h إذا عمل وحده، على حين يستطيع عامل آخر طلاء المنزل نفسه في 4 h إذا عمل وحده، وتمثل المعادلة $f(x)=\frac{6+x}{6x}$ جزءًا من العمل يمكنهما معًا إنجازه في ساعة واحدة. مثّل المعادلة بيانيًّا، حيث $x>0,\ f(x)>0$. وإذا كان العامل الثاني يستطيع طلاء المنزل في 4 h وحده، فما مقدار الجزء من العمل الذي يستطيع العاملان إنجازه معًا في ساعة واحدة؟ حدد قيم المجال والمدى المقبولة في سياق المسألة.



$\frac{5}{12}$، إجابة ممكنة: عدد ساعات العمل لكلا العاملين يجب أن يكون موجبًا، ولذلك فإن قيم x تكون أكبر من 0، وقيم $f(x)$ تكون أكبر من $\frac{1}{16}$ ، وهذه هي القيم ذات المعنى في هذا السياق لكل من المجال والمدى على الترتيب.

8) **ضوء،** يمكن تمثيل شدة الضوء الساقط على جسم من مصدر ضوء بعد عنه مسافة d ft، بالعلاقة $I(d)=\frac{4500}{d^2}$، حيث I شدة الضوء بالشمعة القدمية. مثّل الدالة $I(d)=\frac{4500}{d^2}$ بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، حيث $0<I\leq 80$ و $0<d\leq 80$.



ما شدة الضوء الساقط على جسم يبعد 20 ft عن مصدر الضوء؟ 11.25 شمعة قدمية

4-5 التغيُّر

حدّد إذا كانت كل معادلة مما يأتي تمثل تغيُّرًا طرديًّا أو عكسيًّا أو مشتركًا أو مركبًا، وأوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كل منها:

1) $u=8wz$ مشترك، 8
2) $p=4s$ طردي، 4
3) $L=\frac{5}{k}$ عكسي، 5
4) $xy=4.5$ عكسي، 4.5
5) $\frac{C}{d}=\pi$ طردي، π
6) $2d=mn$ مشترك، $\frac{1}{2}$
7) $\frac{1.25}{s}=h$ عكسي، 1.25
8) $y=\frac{3}{4x}$ عكسي، $\frac{3}{4}$

9) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y=8$ عندما $x=2$، فأوجد قيمة y عندما $x=6$. 24

10) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y=-16$ عندما $x=6$، فأوجد قيمة x عندما $y=-4$. 1.5

11) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y=132$ عندما $x=11$، فأوجد قيمة y عندما $x=33$. 396

12) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y=7$ عندما $x=1.5$، فأوجد قيمة y عندما $x=4$. $\frac{56}{3}$

13) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y=24$ عندما $x=2$ و $z=1$، فأوجد قيمة y عندما $x=12$ و $z=2$. 288

14) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y=60$ عندما $x=3$ و $z=4$، فأوجد قيمة y عندما $x=6$ و $z=8$. 240

15) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y=12$ عندما $x=-2$ و $z=3$، فأوجد قيمة y عندما $x=4$ و $z=-1$. 8

16) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y=16$ عندما $x=4$، فأوجد قيمة y عندما $x=3$. $\frac{64}{3}$

17) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y=3$ عندما $x=5$، فأوجد قيمة x عندما $y=2.5$. 6

18) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع z، وعكسيًّا مع x وكانت $y=-18$ و $z=3$ عندما $x=6$، فأوجد قيمة y عندما $x=5$ و $z=-5$. 36

19) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع كل من z و x، وكانت $y=5$ و $z=5$ عندما $x=0.4$، فأوجد قيمة x عندما $y=37.5$ و $z=2$. 7.5

20) **غازات،** يتغيَّر حجم كمية محددة من غاز محصور V عكسيًّا مع ضغطه P عند ثبوت درجة الحرارة. فإذا كان $V=80\ cm^3$ عندما P تعادل 2000 mmHg، أوجد قيمة V عندما P تعادل 320. mmHg 500 cm^3

21) **زنبركات،** تتغيَّر الزيادة في طول الزنبرك S طرديًّا مع الوزن F للجسم المعلق به. إذا ازداد طول زنبرك بمقدار 20 in عند تعليق جسم وزنه 25 pounds فيه، فكم تكون الزيادة في طوله عند تعليق 15 pounds فيه؟ 12 in

22) **هندسة،** تتغيَّر مساحة سطح شبه المنحرف تغيُّرًا مشتركًا مع كل من ارتفاعه ومجموع طولي قاعدتيه. إذا كانت مساحة سطح شبه منحرف $480\ m^2$، وارتفاعه 20 m، وطولا قاعدتيه 28 m، و 20 m، فما مساحة سطحه عندما يكون ارتفاعه 8 m وطولا قاعدتيه 10 m و 15 m؟ 100 m^2

ملحق إجابات كتاب التمارين

4-6 حل المعادلات النسبية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

1) $\frac{12}{x}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ 16

2) $\frac{x}{x-1}-1=\frac{x}{2}$ $-1, 2$

3) $\frac{p+10}{p^2-2}=\frac{4}{p}$ $-\frac{2}{3}, 4$

4) $\frac{s}{s+2}+s=\frac{5s+8}{s+2}$ 4

5) $\frac{5}{y-5}=\frac{y}{y-5}-1$ جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 5

6) $\frac{1}{3x-2}+\frac{5}{x}=0$ $\frac{5}{8}$

7) $\frac{5}{t}=\frac{9}{2t+1}$ -5

8) $\frac{1}{2h}+\frac{5}{h}=\frac{3}{h-1}$ $\frac{11}{5}$

9) $\frac{4}{w-2}=\frac{-1}{w+3}$ -2

10) $5-\frac{3}{a}=\frac{7}{a}$ 2

11) $\frac{4}{5x}+\frac{1}{10}=\frac{3}{2x}$ 7

12) $\frac{6}{x-1}=\frac{4}{x-2}+\frac{2}{x+1}$ ∅

13) $g+\frac{g}{g-2}=\frac{2}{g-2}$ -1

14) $b+\frac{2b}{b-1}=1-\frac{b-3}{b-1}$ -2

15) $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n-2}=\frac{3}{n^2-4}$ $\frac{3}{2}$

16) $\frac{c+1}{c-3}=4-\frac{12}{c^2-2c-3}$ $-\frac{5}{3}$, 5

17) $\frac{3}{k-3}+\frac{4}{k-4}=\frac{25}{k^2-7k+12}$ 7

18) $\frac{4v}{v-1}-\frac{5v}{v-2}=\frac{2}{v^2-3v+2}$ $-1, -2$

19) $\frac{y}{y+2}+\frac{7}{y-5}=\frac{14}{y^2-3y-10}$ 0

20) $\frac{x^2+4}{x^2-4}+\frac{x}{2-x}=\frac{2}{x+2}$ ∅

21) $\frac{r}{r+4}+\frac{4}{r-4}=\frac{r^2+16}{r^2-16}$ جميع الأعداد الحقيقية ماعدا 4 ، -4

22) $3=\frac{6a-1}{2a+7}+\frac{22}{a+5}$ -2

23) **كرة سلة،** سجل علي 9 أهداف من 19 رمية حرة. ويريد أن يرفع نسبة الأهداف التي يسجلها إلى 60% من الرميات. فإذا كان x عدد الرميات الحرة التي رماها بعد ذلك فسجلها جميعًا أهدافًا، فإن الدالة $f(x)=\frac{9+x}{19+x}$ تمثل النسبة الجديدة للأهداف التي سجلها. أوجد قيمة x التي تكون عندها نسبة الأهداف 60%، وهل الإجابة مقبولة؟ فسر إجابتك.

6، إجابة ممكنة: الإجابة منطقية. يجب أن يسجل 15 هدفًا من 25 رمية حرة لتكون النسبة 60%.

24) **عدسات،** تربط المعادلة $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$ بين بُعد الجسم p عن العدسة، وبُعد صورة الجسم q عن العدسة والبُعد البؤري f للعدسة. فإذا كان البُعد البؤري للعدسة 4 cm، وبُعد صورة الجسم عن العدسة 5 cm. أوجد بُعد الجسم عن العدسة، وهل الإجابة مقبولة؟ فسر إجابتك.

20 cm، إجابة ممكنة: الإجابة منطقية، لأن $\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

28

الفصل الرابع
العلاقات والدوال النسبية

ملحوظات للمعلم