ريض ٣٦٣ - ريض ٣٦٤ - ريض ٣٦٥

قررت وزارة التربية والتعليم بمملكة البحرين اعتماد هذا الكتاب لتدريس منهج الرياضيات ٥ للمرحلة الثانوية

الرياضيات ٥

للمرحلة الثانوية

دليل المعلم

الطبعة الأولى
١٤٣٤هـ - ٢٠١٣م

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

الرياضيات ٥
للمرحلة الثانوية

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان
خلود عبد الحفيظ لوباني
عمر محمد أبوغليون
أحمد مصطفى سمارة
محمد عبدالوهاب العالم
هاني جميل زريقات

التعريب

د. محمد صبابحة
د. محمد الخليل
إبراهيم عمايرة
تيسير رمضان

التحرير اللغوي

عمر الصاوي
محمد رمضان
أحمد عليَّان

المواءمة والمراجعة لنسخة مملكة البحرين

هند إبراهيم الجودر
نسيمة محمد غلوم
بهرام حسين حاجي
نور محمد حسان
إيمان ناصر المسيفر

إعداد الصور

د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

Original Title:

Precalculus ©2011 & Algebra 2 ©2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

Contributing Author
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2010.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠١٠م/ ١٤٣١هـ.

حضرة صاحب الجلالة الملك حمد بن عيسى آل خليفة
ملك مملكة البحرين المفدى

المقـدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلبة، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلبة.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. ثم يقدم دعمًا للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس

يقدّم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلبة، وبأساليب متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس، كما يقدّم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة حسب مستويات الطلبة تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات.

كما يقدّم الدليل في كل درس إجابات الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلبة (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلبة.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الفصل 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل 2 تحليل الدوال

الفصل 3 النهايات والاشتقاق

الفهرس

الفصل 4 المتجهات

الفصل 5 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الفصل 6 الإحصاء والتوزيعات الاحتمالية

أهلًا بك في عالم الرياضيات

منهج الرياضيات المترابط رأسيًّا
ابتداءً من الصف الأول وحتى الصف الثاني عشر

تقدم لك هذه السلسلة ثلاثة أبعاد للترابط الرأسي:

1 تصميم المحتوى

يعد الترابط الرأسي للمحتوى عملية مهمة تساعد طلبتك على التحقق من التسلسل الدقيق للمحتوى وتتابعه من مستوى إلى مستوى آخر. وهذا يمنحك الثقة بأن المحتوى يتم تقديمه، وتعزيزه، وتقويمه في الأوقات المناسبة، كما يساعد على سد الثغرات وتجنب التكرار غير المبرّر، مما يمكنك من توجيه تدريسك وتكييفه ليتلاءم مع حاجات الطلبة.

2 تصميم التدريس

إن الترابط الرأسي القوي بين الأساليب التدريسية بدءًا من الصف الأول يُسهّل على الطلبة الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى الإعدادية، فالثانوية. إذ تعمل المفردات، والتقنيات والوسائل الحسية، وخطة الدرس والمعالجة على التقليل من عوامل الصعوبة والتشويش التي يواجهها بعض الطلبة عندما ينتقلون عبر الصفوف المختلفة.

3 التصميم البصري

تشتمل صفحات السلسلة على تصاميم بصرية متسقة من صف إلى آخر، تساعد الطلبة على الانتقال بسلاسة من مرحلة إلى أخرى، كما تزداد دافعيتهم للتعلم والنجاح عندما تكون طريقة التعامل مع هذه الصفحات مألوفة لديهم.

الحلقة الأولى من المرحلة الابتدائية

الحلقة الثانية من المرحلة الابتدائية

المفاتيح الخمسة للنجاح

1 الخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة

تراعي السلسلة الخرائط المفاهيمية وتطورها اعتمادًا على نتائج الطلبة في رياضيات المرحلة الثانوية.

2 المحتوى العميق المتوازن

تم تطوير السلسلة بحيث تركز على المهارات والموضوعات التي يواجه الطلبة صعوبات فيها، مثل حَلّ المسألة في كل مستوى صفي.

الصفان 2 ,1	الصفوف 5-3
1) حَلّ المسألة	1) حَلّ المسألة
2) النقود	2) الكسور الاعتيادية
3) الزمن	3) القياس
4) القياس	4) الكسور العشرية
5) الكسور الاعتيادية	5) الزمن
6) الحساب	6) الجبر
الصفوف 8-6	**الصفوف 12-9**
1) الكسور الاعتيادية	1) حَلّ المسألة
2) حَلّ المسألة	2) الكسور الاعتيادية
3) القياس	3) الجبر
4) الجبر	4) الهندسة
5) الحساب	5) الحساب
	6) الاحتمالات

3 التقويم المستمر

تتضمن هذه السلسلة تقويمات تشخيصية وتكوينية وختامية، وخططًا علاجية، وإثرائية.

4 الخطط العلاجية وتنويع التدريس

توفر السلسلة خطة علاجية ذات ثلاثة مستويات:

المعالجة 1 **المعالجة اليومية** تحدّد بدائل متنوعة في دليل المعلم لتدريس المفاهيم وفق أنماط التعلم المختلفة.

المعالجة 2 **المعالجة الاستراتيجية** يستعمل المعلمون إرشادات علاجية ومواد مساندة.

المعالجة 3 **المعالجة المكثفة** توفر إرشادات للتدريس، ومفردات داعمة، وخططًا علاجية لمساعدة الطلبة على النجاح.

5 التطوير المهني

توفر السلسلة فرصًا عديدة للمعلم ليطوّر أداءه مهنيًّا، بطرق تعليم إضافية، مثل: الفيديو، والرياضيات المحوسبة، والمواقع الإلكترونية المترابطة ترابطـًا رأسيًّا متكاملًا من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر.

المرحلة الإعدادية

المرحلة الثانوية

قاعدة البحوث لبرامج الرياضيات

تساعد البحوث المستمرة مع الطلبة والمعلمين والأكاديميين والخبراء على بناء جميع برامج الرياضيات من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر على أسس قوية متينة.

1 بحوث تطوير البرامج

- تقويم المعايير الوطنية
- بحوث نوعية لحاجات سوق العمل
- بحوث خاصة بالمحتوى العلمي

2 البحوث التكوينية

- قاعدة البحوث الخاصة بطرائق التدريس
- اختبارات صفية تجريبية
- لجان المعلمين الاستشارية
- مراجعون ومستشارون أكاديميون

3 البحوث الختامية

- مؤشرات على تحسّن درجات الاختبارات
- بحوث شبه تجريبية لفاعلية البرامج
- دراسات طولية
- تقويمات نوعية للبرامج

إعداد الطلبة للدراسة الجامعية وسوق العمل

دليل المعلم

تعمل هذه السلسلة على الربط بين ما يتعلمه الطلبة في المدرسة الثانوية وما يتوقع منهم أن يعرفوه عند بدء دراستهم الجامعية.

كيف يمكن إعداد الطلبة بصورة أفضل للدراسة الجامعية؟

إن المنهج القوي للمدارس الثانوية مؤشر جيد على الاستعداد للدراسة الجامعية (Adelman 2006). فالطلبة الذين يدرسون كتب الرياضيات المعدّة للمرحلة الثانوية من هذه السلسلة يكونون أكثر استعدادًا للدراسة الجامعية من الذين لم يدرسوها (Abraham & Crrech 2002).

وفيما يأتي بعض مناحي الاستعداد للدراسة الجامعية التي طورها (David Conley at the University of Oregon):

- **مهارات عقلية** وهي مهارات ضرورية لتعلم المحتوى على المستوى الجامعي، وتشمل: التفكير الناقد، وحَلّ المسألة، والتبرير، وتتاح في كل يوم للطلبة الّذين يدرسون هذه السلسلة فرص لتنمية مهارات التفكير العليا من خلال المسائل الخاصة بذلك.
- **المحتوى العلمي** إن كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة متسقة مع معايير عالمية دقيقة تشمل معايير NCTM للرياضيات المدرسية، وغيرها.
- **مهارات عامة** تشمل مهارات مثل: الاستيعاب القرائي، وإدارة الوقت، وتسجيل الملاحظات، ... إلخ. وتوفر هذه السلسلة فرصًا لتنمية هذه المهارات من خلال إرشادات قراءة الرياضيات وروابط المفردات، ودليل التوقّع، وغيرها.

ماذا عن الطلبة الّذين لا يخططون للالتحاق بالجامعات؟

لم تعد الرياضيات في عالم التقنية المعاصر مقتصرة على الطلبة الّذين يلتحقون بالجامعات. فقد أظهرت إحدى الدراسات أن البرامج التدريبية التي يخضع لها شخص يريد الحصول على عمل تتطلب أن يكون هذا الشخص على مستوى معين من التعليم في الجبر، والهندسة، وتحليل البيانات والإحصاء يماثل مستوى الطالب الذي يلتحق بالسنة الأولى في الجامعة؛ حتى ينجح في عمله.

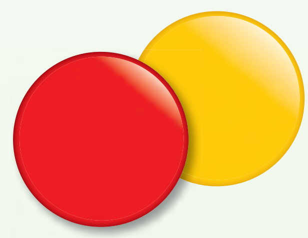
فلسفة السلسلة

تعليم متوازن، ترابط رأسي بين الصفوف من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر

يظهر الترابط الرأسي لهذه السلسلة من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر دمجًا متوازنًا للتعليم. وتوفر هذه السلسلة للطلبة منحى متوازنًا للرياضيات من خلال:

- استقصاء المفاهيم وبناء فهم إدراكي.
- تطوير مهارات إجرائية وحسابية وتعزيزها وإتقانها.
- تطبيق الرياضيات في حَلّ مسائل من واقع الحياة.

ويوضح تسلسل صفحات كتاب الطالب، تطور الترابط الرأسي للفهم الإدراكي والمهارات الإجرائية والحسابية لموضوع مهم في الجبر.



يستعمل طلبة الحلقة الأولى من **المرحلة الابتدائية** قطع عد بلونين مختلفين؛ لتمثيل جمل الجمع. ويُعدُّ هذا النشاط أساسًا للفهم والنجاح في حَلّ معادلات جبرية.


١ الجَمْعُ بِأَيِّ تَرْتِيبٍ

اسْتَعِدّ

فِكْرَةُ الدَّرْسِ: أَجْمَعُ بِأَيِّ تَرْتِيبٍ.

المُفْرَداتُ: العَدَدُ المُضافُ

عِنْدَما أُغَيِّرُ تَرْتِيبَ العَدَدَيْنِ المُضافَيْنِ فِي جُمْلَةِ الجَمْعِ، فَإِنَّ ناتِجَ الجَمْعِ لا يَتَغَيَّرُ.

٣ + ٦ = ٩

٦ + ٣ = ٩

أَتَأَكَّدُ

أَكْتُبُ العَدَدَيْنِ المُضافَيْنِ، وَأَسْتَعْمِلُ، لِأَجِدَ ناتِجَ الجَمْعِ:

١ ٢ + ٤ = ٦

٢ ١ + ٣ = ٤

٣ ١ + ٧ = ...

٤ ٧ + ١ = ...

٥ أَتَحَدَّثُ: أُبَيِّنُ أَنَّ ١ + ٩ تُساوِي ٩ + ١.

١٠ الفصل السادس

أما طلبة الحلقة الثانية من **المرحلة الابتدائية** فإنهم يستفيدون من خبراتهم في التعامل مع الأكواب وقطع العد؛ لاستعمالها في تمثيل معادلات الجمع والطرح، وحلها.


٤ - ٨ التَّعابيرُ الجَبْرِيَّةُ

اسْتَعِدّ

عِنْدَ أَحْمَدَ ٣ بِطاقاتٍ، أَعْطاهُ صَدِيقُهُ عَلِيٌّ بَعْضَ البِطاقاتِ الأُخْرى. يُمْكِنُكَ أَنْ تَجِدَ عَدَدَ البِطاقاتِ عِنْدَ أَحْمَدَ بِاسْتِعْمالِ التَّعْبِيرِ الجَبْرِيِّ ٣ + س.

فِكْرَةُ الدَّرْسِ: أَكْتُبُ تَعابيرَ جَبْرِيَّةً وَأَجِدُ قِيَمَها.

المُفْرَداتُ: المُتَغَيِّرُ، التَّعْبِيرُ الجَبْرِيُّ، الأَقْواسُ

التَّعْبِيرُ الجَبْرِيُّ: ٣ + س هُوَ تَعْبِيرٌ يَحْتَوِي عَلَى أَعْدادٍ وَمُتَغَيِّراتٍ. والمُتَغَيِّرُ هُنا يُمَثِّلُ القِيمَةَ المَجْهُولَةَ س، وَيُمْكِنُكَ أَنْ تَجِدَ قِيمَةَ التَّعْبِيرِ الجَبْرِيِّ إِذا عَلِمْتَ قِيمَةَ المُتَغَيِّرِ.

إِيجادُ قِيمَةِ تَعْبِيرٍ جَبْرِيٍّ

الجَبْرُ: إِذا أَعْطَى عَلِيٌّ أَحْمَدَ ٥ بِطاقاتٍ، فَكَمْ بِطاقَةً أَصْبَحَتْ عِنْدَهُ؟

المَطْلُوبُ هُوَ إِيجادُ قِيمَةِ ٣ + س عِنْدَما س = ٥.

٣ + س — أَكْتُبُ التَّعْبِيرَ الجَبْرِيَّ

٣ + ٥ — أَسْتَبْدِلُ س بِالعَدَدِ ٥

٨ — أَجْمَعُ ٣ و ٥

إِذَنْ، قِيمَةُ ٣ + س عِنْدَما س = ٥ هِيَ ٨

عِنْدَ أَحْمَدَ الآنَ ٨ بِطاقاتٍ.

www.obeikaneducation.com

١١٦ الفصل ٤: الأنماط والجبر

ينتقل طلبة **المرحلة الإعدادية** خلال التعامل مع الجبر، من استعمال الأكواب وقطع العد إلى استعمال نماذج جبرية أكثر تجريدًا. وفي الدروس اللاحقة، يحلّ الطلبة معادلات بسيطة تتضمن رموزًا جبرية.

استمرارية التعليم

يوضّح التسلسل التعليمي الذي تم وصفه قوّة المقابلة بين النتيجة المرغوب فيها والنجاح في الجبر. وتعمل هذه العملية التطويرية على تجنب وجود فجوات أو تداخلات بين مستويات الصفوف، وتؤكّد أنّ مفاهيم كل صف ومهاراته مبنيّة على أساس قوي تم تطويره في صفوف سابقة. ويستعمل المنحى نفسه عبر المسارات جميعها؛ ابتداءً من الصف الأول وحتى الصف الثاني عشر.

فلسفة البرنامج

دليل المعلم

توازن عملية التدريس

- مفاهيم
- مهارات
- حَلّ مسائل

حَلّ المسألة ذات العلاقة

تزوّد السلسلة الطلبة بخطط ملائمة لحَلّ المسألة، ومهارات وتطبيقات عليها خلال الصفوف؛ إذ يتوافر للطلبة فرص مستمرة لتطبيق مهارات الرياضيات، وحَلّ المسائل باستعمال التفكير البصري، والاستدلال المنطقي، والحس العددي، والجبر.

استراتيجيات حل المسألة

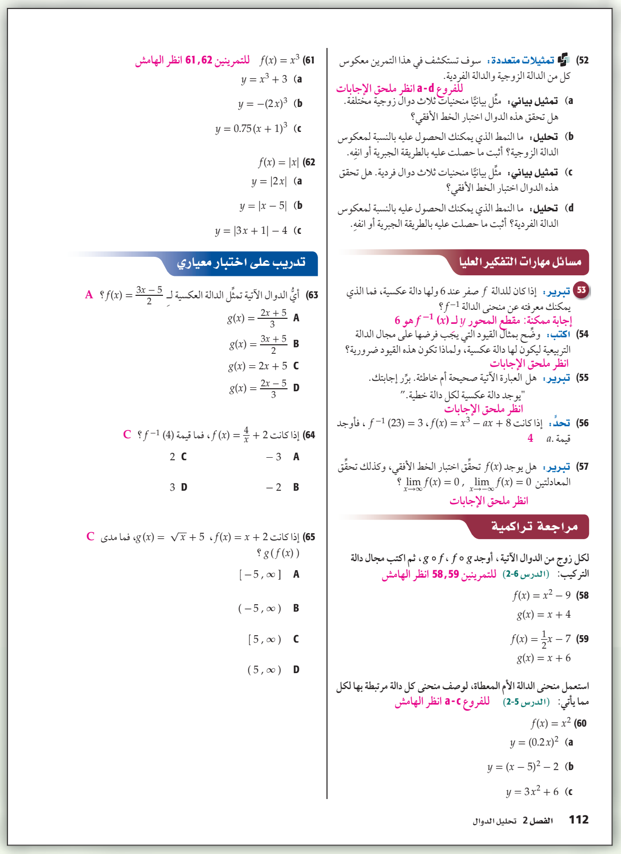
تساعد استراتيجيات حَلّ المسألة الطلبة على تعلم طرائق مختلفة لمواجهة المسائل اللفظية.

مسائل مهارات التفكير العليا

تتطلب هذه المسائل استعمال مهارات التفكير العليا (التحليل، التركيب، ... ، إلخ).

تمثيلات متعددة

تساعد مسائل التمثيلات المتعددة الطلبة على تصور المفاهيم وتعميق الفهم، وتتضمن: العبارات اللفظية، والعددية، والجبرية، والتمثيل البياني، والجداول، ... إلخ.



52) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذا التمرين معكوس كل من الدالة الزوجية والدالة الفردية.
للفروع a-d انظر ملحق الإجابات

a) **تمثيل بياني:** مثّل بيانيًا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

b) **تحليل:** ما النمط الذي يمكنك الحصول عليه بالنسبة لمعكوس الدالة الزوجية؟ أثبت ما حصلت عليه بالطريقة الجبرية أو انفِه.

c) **تمثيل بياني:** مثّل بيانيًا منحنيات ثلاث دوال فردية. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

d) **تحليل:** ما النمط الذي يمكنك الحصول عليه بالنسبة لمعكوس الدالة الفردية؟ أثبت ما حصلت عليه بالطريقة الجبرية أو انفِه.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفر عند 6 ولها دالة عكسية، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟
إجابة ممكنة: مقطع المحور y لـ $f^{-1}(x)$ هو 6

54) **اكتب:** وضّح بمثال القيود التي يجب فرضها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية، ولماذا تكون هذه القيود ضرورية؟
انظر ملحق الإجابات

55) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برّر إجابتك.
"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية."
انظر ملحق الإجابات

56) **تحدٍّ:** إذا كانت $f(x) = x^3 - ax + 8$، $f^{-1}(23) = 3$، فأوجد قيمة a. 4

57) **تبرير:** هل يوجد $f(x)$ تحقّق اختبار الخط الأفقي، وكذلك تحقّق المعادلتين $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$؟
انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

لكل زوج من الدوال الآتية، أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$، ثم اكتب مجال دالة التركيب: (الدرس 2-6) للتمرينين 58,59 انظر الهامش

58) $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = x + 4$

59) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$
$g(x) = x + 6$

استعمل منحنى الدالة الأم المعطاة، لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكل مما يأتي: (الدرس 2-5) للفروع a-c انظر الهامش

60) $f(x) = x^2$

a) $y = (0.2x)^2$

b) $y = (x-5)^2 - 2$

c) $y = 3x^2 + 6$

61) $f(x) = x^3$ للتمرينين 61,62 انظر الهامش

a) $y = x^3 + 3$

b) $y = -(2x)^3$

c) $y = 0.75(x+1)^3$

62) $f(x) = |x|$

a) $y = |2x|$

b) $y = |x-5|$

c) $y = |3x+1| - 4$

تدريب على اختبار معياري

63) أيُّ الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية لـ $f(x) = \frac{3x-5}{2}$؟ A

A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

64) إذا كانت $f(x) = \frac{4}{x} + 2$، فما قيمة $f^{-1}(4)$؟ C

A -3 C 2

B -2 D 3

65) إذا كانت $f(x) = x + 2$، $g(x) = \sqrt{x} + 5$، فما مدى $g(f(x))$؟ C

A $[-5, \infty]$

B $(-5, \infty)$

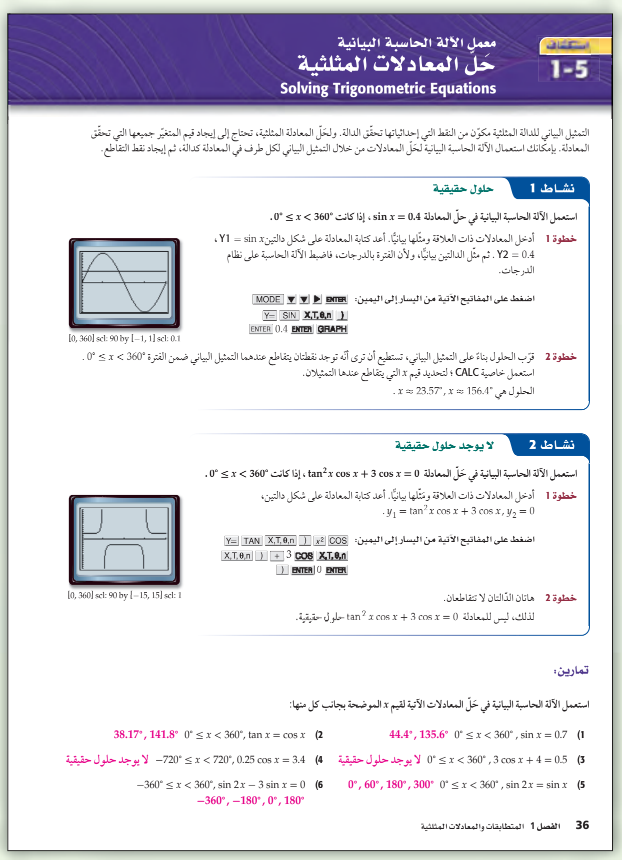
C $[5, \infty)$

D $(5, \infty)$

112 الفصل 2 تحليل الدوال

معامل الآلة الحاسبة البيانية

توفر هذه المعامل للطلبة فرصة لفهم الرياضيات من خلال التمثيلات البيانية.



استكشاف 1-5

معمل الآلة الحاسبة البيانية

حَلّ المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحَلّ المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر جميعها التي تحقّق المعادلة. بإمكانك استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحَلّ المعادلات من خلال التمثيل البياني لكل طرف في المعادلة كدالة، ثم إيجاد نقط التقاطع.

نشاط 1 حلول حقيقية

استعمل الآلة الحاسبة البيانية في حلّ المعادلة $\sin x = 0.4$، إذا كانت $0° \le x < 360°$.

خطوة 1 أدخل المعادلات ذات العلاقة ومثّلها بيانيًا. أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $Y1 = \sin x$، $Y2 = 0.4$. ثم مثّل الدالتين بيانيًا، ولأن الفترة بالدرجات، فاضبط الآلة الحاسبة على نظام الدرجات.

اضغط على المفاتيح الآتية من اليسار إلى اليمين: MODE ▼ ▼ ▶ ENTER Y= SIN X,T,θ,n) ENTER 0.4 ENTER GRAPH

[0, 360] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.1

خطوة 2 قرّب الحلول بناءً على التمثيل البياني، تستطيع أن ترى أنّه توجد نقطتان يتقاطع عندهما التمثيل البياني ضمن الفترة $0° \le x < 360°$.
استعمل خاصية CALC ؛ لتحديد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان.
الحلول هي $x \approx 23.57°$, $x \approx 156.4°$.

نشاط 2 لا يوجد حلول حقيقية

استعمل الآلة الحاسبة البيانية في حَلّ المعادلة $\tan^2 x \cos x + 3\cos x = 0$، إذا كانت $0° \le x < 360°$.

خطوة 1 أدخل المعادلات ذات العلاقة ومَثّلها بيانيًا. أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين، $y_1 = \tan^2 x \cos x + 3\cos x$, $y_2 = 0$.

اضغط على المفاتيح الآتية من اليسار إلى اليمين: Y= TAN X,T,θ,n) x^2 COS X,T,θ,n) + 3 COS X,T,θ,n) ENTER 0 ENTER

[0, 360] scl: 90 by [−15, 15] scl: 1

خطوة 2 هاتان الدّالتان لا تتقاطعان.
لذلك، ليس للمعادلة $\tan^2 x \cos x + 3\cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الآلة الحاسبة البيانية في حَلّ المعادلات الآتية لقيم x الموضحة بجانب كل منها:

1) $0° \le x < 360°$, $\sin x = 0.7$ **44.4° , 135.6°**

2) $0° \le x < 360°$, $\tan x = \cos x$ **38.17° , 141.8°**

3) $0° \le x < 360°$, $3\cos x + 4 = 0.5$ **لا يوجد حلول حقيقية**

4) $-720° \le x < 720°$, $0.25\cos x = 3.4$ **لا يوجد حلول حقيقية**

5) $0° \le x < 360°$, $\sin 2x = \sin x$ **0° , 60° , 180° , 300°**

6) $-360° \le x < 360°$, $\sin 2x - 3\sin x = 0$ **−360° , −180° , 0° , 180°**

36 الفصل 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية

نظام التقويم الشامل

معالجة الأخطاء

توفر السلسلة تقويمًا مستمرًا ذا معنى لمدى تقدم الطلبة في بنية المنهج وفي المواد المساندة التي يستعين بها المعلم.

1 التقويم التشخيصي

التهيئة للفصل الأول

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1 أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب «كثيرة حدود أولية» (مهارة سابقة) للأسئلة 1–4 انظر الهامش

1) $-16a^2 + 4a$ 2) $5x^2 - 20$

3) $x^3 + 9$ 4) $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة سطح قطعة ورقية مستطيلة الشكل: $(x^2 + 6x + 8)\ cm^2$، إذا كان طول القطعة $(x + 4)\ cm$، فما عرضها؟ (مهارة سابقة) $(x + 2)\ cm$

حُلّ كل معادلة من المعادلات الآتية باستعمال التحليل.

5) $x^2 + 6x = 0$ $\{-6, 0\}$ 6) $x^2 + 2x - 35 = 0$ $\{-7, 5\}$

7) $x^2 - 9 = 0$ $\{-3, 3\}$ 8) $x^2 - 7x + 12 = 0$ $\{3, 4\}$

حُلّ كل مثلث مما يأتي: (مهارة سابقة) للأسئلة 9–12 انظر الهامش

9) 10) 11) 12)

أوجد القيمة الفعلية لكل دالة مثلثية مما يأتي: (مهارة سابقة)

13) $\sin 45°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 14) $\cos 225°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

15) $\tan 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 16) $\sin 120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17) **العجلة الدوارة:** المسافة بين أعلى نقطة على العجلة وسطح الأرض يمكن إيجادها عن طريق ضرب 90 ft بالقيمة $\sin 90°$. ما ارتفاع العجلة عندما تكون في منتصف المسافة بين أعلى نقطة وسطح الأرض؟ (مهارة سابقة) 45 ft

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المفردات العامة

المتطابقة المثلثية	ص 10	trigonometric identity
متطابقات فيثاغورس	ص 10	Pythagorean identities
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	ص 10	odd—even— functions identities
متطابقات الزاويتين المتتامتين	ص 10	cofunction identities
متطابقات المجموع	ص 22	sum identities
متطابقات الفرق	ص 22	difference identities
المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية	ص 29	double trigonometric identities
المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية	ص 30	half angle trigonometric identities
المعادلات المثلثية	ص 37	differential equation

مراجعة المفردات

الحل المرفوض (extraneous solution) الحل الذي لايحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle) زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع الضلع النهائي على أحد المحورين x أو y.

دائرة الوحدة (unit circle) هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function) هي دالة تتكرر قيمها ضمن فترات منتظمة، بحيث يُسمى النمط الواحد الكامل منها دورة.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions) لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على الضلع النهائي، لتكن r المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل حيث $r \neq 0$، باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$

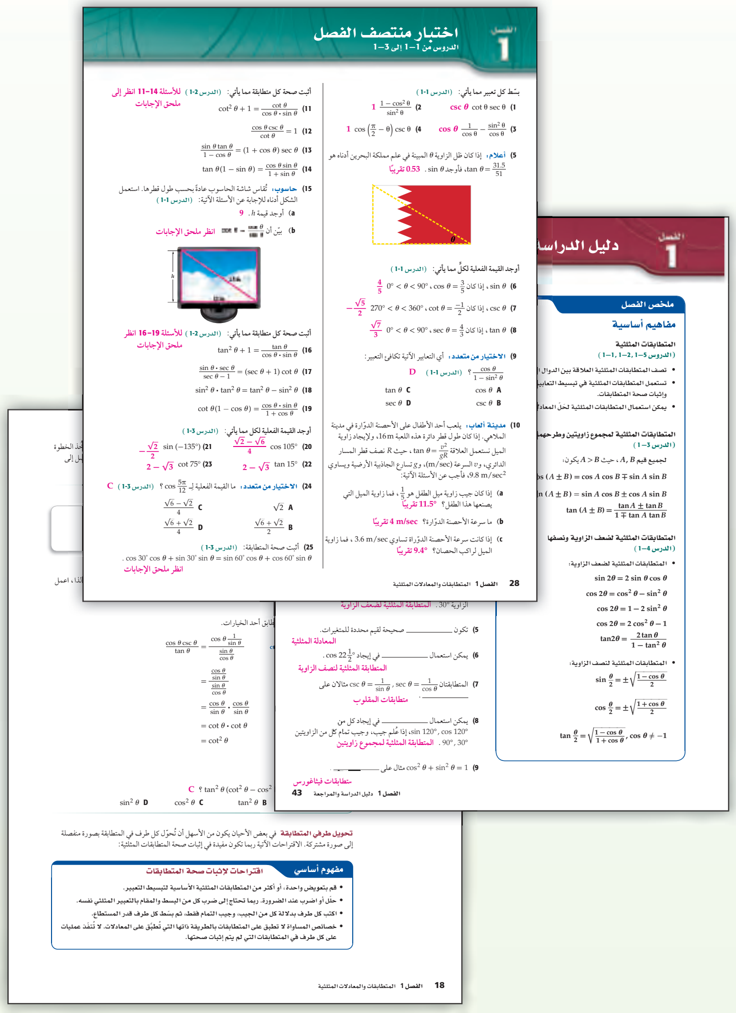
$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$ $\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$

$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

9 التهيئة للفصل 1 الفصل 1

تقويم أوّلي قوِّم معرفة طلبتك في بداية العام الدراسي باستعمال اختبارات تشخيصية، واختبارات تحديد المستوى. وسوف يساعدك هذا على تحديد مدى حاجة طلبتك لمواد ومصادر تعلم إضافية؛ ليكونوا قادرين على المواءمة مع معايير مستوى الصف.

تقويم مستوى المدخلات الدراسية قوِّم المعارف السابقة لطلبتك في بداية الفصل أو الدرس، من خلال المصادر الموجودة في كتاب الطالب، أو دليل المعلم، أو أي مصادر أخرى تراها مناسبة.

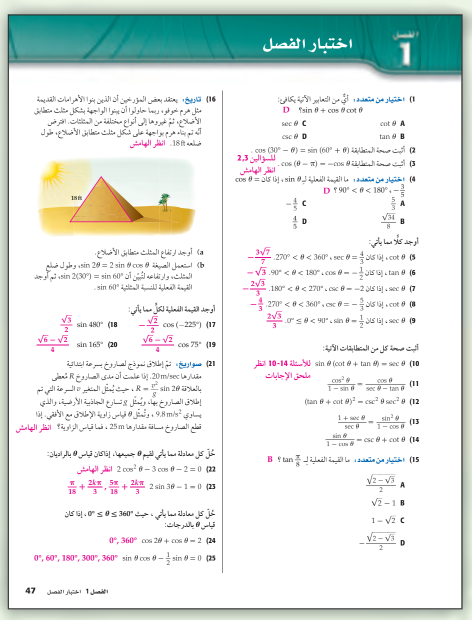


2 التقويم التكويني

مراقبة التقدم حدِّد إذا كان طلبتك يحرزون تقدمًا مناسبًا في أثناء تعلمهم في كل درس أو لا، باستعمال أنواع التقويم الآتية لتنويع التدريس والتدريبات:

كتاب الطالب
- تأكد
- اختبار منتصف الفصل
- دليل الدراسة والمراجعة

دليل المعلم
- بدائل تنويع التعليم
- الخطوة الرابعة (التقويم) في خطة التدريس
- معالجة الأخطاء



3 التقويم الختامي

التقويم الختامي قوِّم مدى نجاح طلبتك في تعلم مفاهيم كل فصل باستعمال ما يأتي:

كتاب الطالب
- اختبار الفصل

دليل المعلم
- معالجة الأخطاء

دليل المعلم

تنويع التعليم

تلبية حاجات الطلبة

توفر السلسلة دعمًا واسعًا يراعي الفروق الفردية بين الطلبة.

حيث يحتوي كل فصل وكل درس على اقتراحات؛ لتحديد احتياجات طلبتك وتلبيتها.

كما أن تنويع التعليم يلبي حاجات الفئتين الآتيتين :

- دون الطلبة دون المتوسط
- فوق الطلبة فوق المتوسط

الطلبة من المستوى المتقدم

التسريع والإثراء: يمكن استعمال المصادر والواجبات المنزلية ، التي تم تصنيفها للطلبة فوق المتوسط، مع الطلبة ذوي المستوى التعليمي المتقدم.


الفصل 1 تنويع التعليم

مجموعات أسئلة متعددة المستويات

تم تنويع الواجبات المنزلية لكل درس حسب مستويات الطلبة:

- دون دون المتوسط
- ضمن ضمن المتوسط
- فوق فوق المتوسط


تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	39 ، 38 ، 56–41
ضمن المتوسط	33–31 فردي، 56–41
فوق المتوسط	56–31

دليل المعلم

المعالجة

معالجة متعددة المستويات

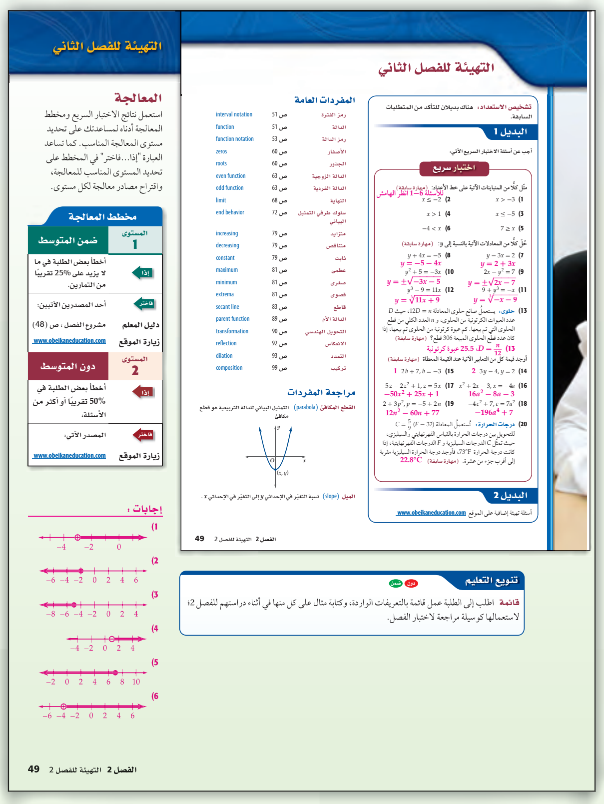
يُقدّم في كل فصل من فصول كتاب المعلم لمختلف الصفوف مدخلًا شاملًا للمعالجة.

التقويم والمعالجة

يتضمن كل فصل اقتراحات للتشخيص ومستويات المعالجة.

المعالجة 1 استعمال مجموعات أسئلة.

المعالجة 2 استعمال دليل الدراسة والمراجعة، وبدائل تنويع التعليم.



في بداية كل فصل

يقدم مخطط المعالجة اقتراحات لطرائق التعامل مع الطلبة بناءً على نتائج اختبار "التهيئة" في بداية كل فصل. وتساعدك العبارات الشرطية التي يتضمنها المخطط على تحديد مستوى المعالجة الذي تستعمله.

خلال كل درس

توفر السلسلة فرصًا متعددة للتقويم التكويني في كل فصل؛ ليحدّد المعلم إذا كانت هناك ضرورة للمعالجة بناءً على نتائج الطلبة.

ما بعد الفصل

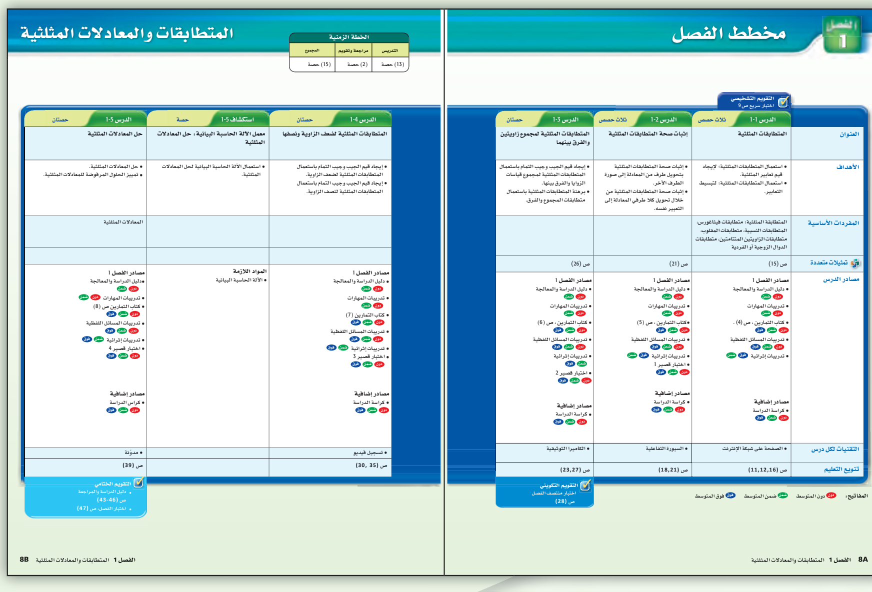
توفر السلسلة بدائل متعددة للطلبة الّذين لا يزالون يعانون من صعوبات بعد إنهاء الفصل تساعدهم على تحسين مستوياتهم.

دليل المعلم

التخطيط للنجاح

سهولة الاستعمال

تتميّز السلسلة بأنها نموذج تعليم قوي يشتمل على بدائل تنويع التعليم، وإعادة التعليم والتعزيز، وبدائل للتوسّع، وإرشادات للمعلم تساعده على تعرّف مستويات الطلبة، كما يشتمل على نشاطات قبلية متقدمة، وتقويم مصاحب للتعليم.



تخطيط ملائم للدرس في متناول اليد

يساعدك مخطط الفصل على التخطيط للتعليم من خلال توضيح الأهداف والخطة الزمنية المقترحة، والتغطية الشاملة للأفكار المحورية.

الترابط الرأسي (بين الفصول)

بُنيت المواضيع الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لمواضيع مستقبلية.

خطة التعليم ذات الخطوات الأربع

تنظم تعليمك، وتتضمن:

1 التركيز   3 التدريب

2 التدريس   4 التقويم

الترابط الرأسي (بين الدروس)

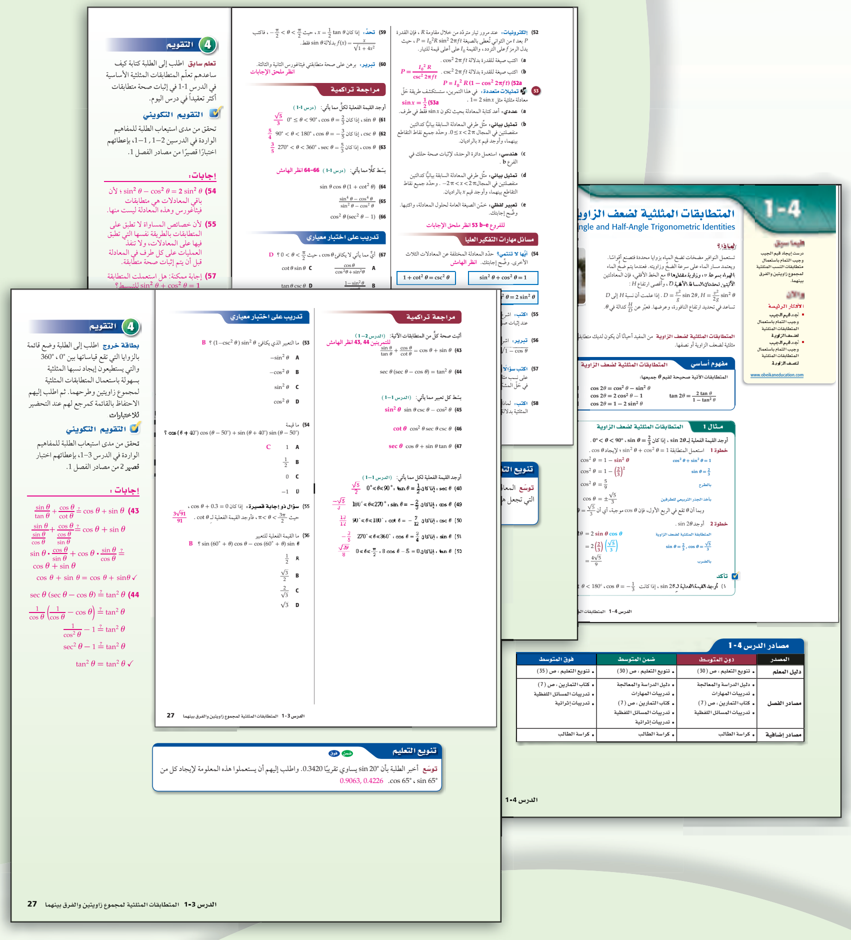
يوضح الترابط الرأسي في بداية كل درس الأهداف التي تؤدي إلى محتوى الدرس الحالي والأهداف التي تتبعه، والّذي يأتي في إطار وثيقة المدى والتتابع من الصف الأول إلى الصف الثاني عشر.

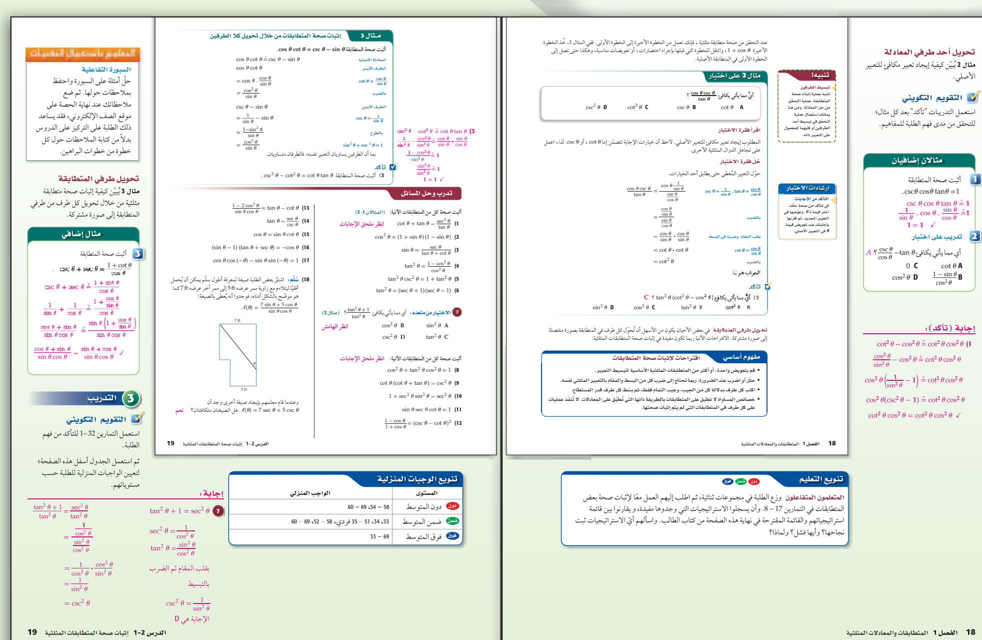
أسئلة التعزيز

يحتوي كل درس على أسئلة تعزيز؛ لتستعملها في مساعدة الطلبة على استقصاء الأفكار الرئيسة للدرس وفهمها.

أمثلة إضافية

يُعدُّ كل مثال إضافي انعكاسًا لمثال في كتاب الطالب.





بدائل تنويع الواجبات المنزلية

بما أن معظم الصفوف تشمل طلبة ذوي قدرات مختلفة، فإن بدائل تنويع الواجبات المنزلية يسمح لك بتعديل أسئلة الواجب المنزلي.

نشاطات تقويمية

توفر نشاطات التقويم التكويني طرائق بديلة؛ لتحديد مدى استيعاب الطلبة في نهاية كل درس، مثل:

تعلم سابق يربط الطلبة ما تعلموه في الدرس الحالي بما تعلموه سابقًا.

تعلم لاحق يتوقّع الطلبة كيفية ارتباط الدرس الحالي بالدرس التالي.

التسمية في الرياضيات يُحدّد الطلبة المعلومات الرياضية المستعملة في المسألة.

بطاقة خروج يكتب الطلبة جواب السؤال على ورقة خارجية يسلمونها قبل مغادرتك غرفة الصف.

الفصل 1

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص 9

	الدرس 1-1 ثلاث حصص	الدرس 1-2 ثلاث حصص	الدرس 1-3 حصتان
العنوان	المتطابقات المثلثية	إثبات صحة المتطابقات المثلثية	المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
الأهداف	• استعمال المتطابقات المثلثية؛ لإيجاد قيم تعابير المثلثية. • استعمال المتطابقات المثلثية؛ لتبسيط التعابير.	• إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل طرف من المعادلة إلى صورة الطرف الآخر. • إثبات صحة المتطابقات المثلثية من خلال تحويل كلا طرفي المعادلة إلى التعبير نفسه.	• إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع قياسات الزوايا والفرق بينها. • برهنة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.
المفردات الأساسية	المتطابقة المثلثية؛ متطابقات فيثاغورس، المتطابقات النسبية، متطابقات المقلوب، متطابقات الزاويتين المتتامتين، متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية		
تمثيلات متعددة	ص (15)	ص (21)	ص (26)
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (4) . دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية فوق ضمن **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن •كتاب التمارين ، ص (5) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية فوق ضمن • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 1** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (6) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• الصفحة على شبكة الإنترنت	• السبورة التفاعلية	• الكاميرا التوثيقية
تنويع التعليم	ص (11,12,16)	ص (18,21)	ص (23,27)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل
ص (28)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

المتطابقات والمعادلات المثلثية

الخطة الزمنية		
التدريس	مراجعة وتقويم	المجموع
(13) حصة	(2) حصة	(15) حصة

الدرس 1-4 حصتان	استكشاف 1-5 حصة	الدرس 1-5 حصتان
المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها	**معمل الآلة الحاسبة البيانية: حل المعادلات المثلثية**	**حل المعادلات المثلثية**
• إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. • إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل المعادلات المثلثية.	• حل المعادلات المثلثية. • تمييز الحلول المرفوضة للمعادلات المثلثية.
		المعادلات المثلثية
مصادر الفصل 1 • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين (7) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر الفصل 1** •دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • تدريبات المهارات دون ضمن • كتاب التمارين ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 4 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراس الدراسة دون ضمن فوق
• تسجيل فيديو		• مدوّنة
ص (30, 35)		ص (39)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (43-46)
- اختبار الفصل، ص (47)

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المرجع	إرشادات المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 1**			
	التهيئة للفصل الأول، ص (9)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (9)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم	دليل المعلم
	تنبيه !	دليل المعلم	دليل الدراسة والمراجعة	مصادر الفصل
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (28)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار منتصف الفصل	مصادر الفصل	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 1، ص (43-46)	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (47)	كتاب الطالب	تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	برنامج بناء الاختبارات		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com		مستوى المعالجة 2 دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**			
	نماذج اختبارات، الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	نماذج اختبارات	مصادر الفصل	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابة مطولة	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات			

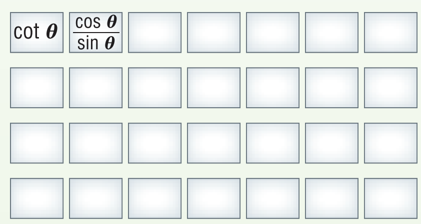
تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون وزّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية. واطلب إلى كل مجموعة إعداد بطاقات لمتطابقات مثلثية أساسية، على أن تُعد كل مجموعة بطاقتين يكتب على كل منهما نسبة مثلثية مساوية للنسبة المثلثية المكتوبة على البطاقة الأخرى لكل من الأنواع الآتية (المتطابقات النسبية، ومتطابقات المقلوب، ومتطابقات فيثاغورس، ومتطابقات الزاويتين المتتامتين، ومتطابقات الدوال الزوجية أو الفردية). فعلى سبيل المثال، يمكن أن تظهر بطاقات تحمل الآتي:

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\cot\theta$, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\tan\theta$ ، ... وهكذا، بحيث يتكون ما مجموعه 28 بطاقة.

ثم تلعب المجموعات لعبة "الذاكرة"، حيث يقوم أحد الطالبين بقلب بطاقتين، ويتم استبعادهما إذا كانتا تمثلان نسبًا مثلثية متساوية. وتُقلب البطاقتان، إذا لم تكن النسب المثلثية متساوية، ويتم بعد ذلك تبادل الأدوار بين الطالبين.



المتعلمون المنطقيون وزع الطلبة إلى مجموعات ثنائية لتكوين متطابقات مثلثية. واطلب إليهم أن يبدؤوا بتعبير صائب، مثل، $\cos\theta = \cos\theta$. ثم تحويل كل طرف باستبداله بتعبير مكافئ له. فعلى سبيل المثال، يمكن تحويل $\cos\theta = \cos\theta$ باستعمال المتطابقات النسبية لتعطي النتيجة الآتية

$$\cot\theta + \frac{1}{\sec\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta}.$$

ثم اطلب إلى مجموعات الطلبة تبادل المتطابقات فيما بينها على أن تتحقق كل مجموعة من صحة المتطابقة.

البديل 2 دون المتوسط دون

تعاون مع الطلبة على تكوين جدول كالجدول أدناه وإكماله، والذي يمكن أن يتخذوه مرجعًا لمعرفة إشارة كل دالة مثلثية لـ θ في كل ربع.

الربع	I	II	III	IV
الجيب sin	+	+	−	−
جيب التمام cos	+	−	−	+
الظل tan	+	−	+	−

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلبة تكوين لغز على شكل كلمات متقاطعة باستعمال مفردات النسب المثلثية في هذا الفصل. واستعمال تعريف المفردة أو مثال عليها للمفردات المتقاطعة أفقيًا ورأسيًا. واطلب إلى كل طالب تصوير نسخ عدّة من اللغز الذي أعدّه لتوزيعه على الطلبة الآخرين. ثم اطلب إلى الطلبة حل هذه الألغاز.

الفصل 1 التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 1

مواضيع ذات صلة من الجبر

- إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا باستعمال دائرة الوحدة.
- استعمال قياسات الزوايا بالدرجات وبالراديان.
- تعرّف الزوايا بوصفها أشعة في الوضع القياسي ونقاطًا على دائرة واحدة.
- استكشاف كل من الدوال الدائرية ومعكوساتها.

الفصل 1

مواضيع ذات صلة من الجبر

- تعرف المتطابقات المثلثية واستعمالها؛ لإيجاد قيم النسب المثلثية.
- استعمال المتطابقات المثلثية؛ لتبسيط تعابير مثلثية.
- إثبات صحة متطابقات مثلثية.
- حل معادلات مثلثية.

ما بعد الفصل 1

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- استعمال المتطابقات المثلثية؛ لتحويل التعابير المثلثية إلى صور تكُون أكثر مناسبة لتطبيق الاشتقاق أو التكامل عليها.
- استعمال التعويضات المثلثية؛ لإجراء التكامل.

نظرة على الدروس

1-1 المتطابقات المثلثية

تكون المعادلة **متطابقة مثلثية**، إذا كان الطرف الأيمن فيها يساوي الطرف الأيسر لجميع قيم المتغيّر الذي تحويه. وهناك خمسة أنواع للمتطابقات المثلثية هي المتطابقات النسبية، ومتطابقات المقلوب، ومتطابقات فيثاغورس، ومتطابقات الزاويتين المتتامتين، ومتطابقات الدوال الزوجية أو الفردية.

المتطابقات المثلثية الأساسية		
المتطابقات النسبية (المقام لا يساوي 0)		
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	
متطابقات المقلوب (المقام لا يساوي 0)		
$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس		
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات الزاويتين المتتامتين		
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$
$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية		
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

هذه المتطابقات مفيدة عند تبسيط التعابير المثلثية وحل مسائل من واقع الحياة.

1-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

يمكن استعمال التعريفات والمتطابقات المثلثية الأساسية لإثبات صحة المتطابقات. ويتم إثبات صحة المتطابقة عن طريق تحويل أحد طرفيها إلى صورة الطرف الآخر وذلك من خلال استبدال تعابير ذلك الطرف بأخرى مكافئة لها حتى يصبح الطرفان متساويين، أو تحويل كلا طرفي المتطابقة إلى صورة مشتركة. وهناك طرق عدة لكتابة تعابير متطابقة، منها:

- التعويض باستعمال متطابقات فيثاغورس.
- استعمال خاصية التوزيع لتحليل تعبير أو تجميع حدود متشابهة.
- تحويل حدّ من الحدود بضربه في تعبير يكافئ العدد (1).
- إعادة كتابة جميع الدوال المثلثية بدلالة $\sin\theta$ أو $\cos\theta$ عن طريق استعمال المتطابقات النسبية أو متطابقات المقلوب.

تحذير لا تجرِ أية عمليات حسابية على كل طرف من المتطابقة التي لم تتحقق من صحتها بعد؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

المتطابقات والمعادلات المثلثية

1-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما $\sin(a \pm b), \cos(a \pm b), \tan(a \pm b)$؛ لإيجاد قيم الجيب وجيب التمام والظل لزاوية معينة، فمثلًا 105° يمكن أن تكتب كمجموع لزاويتين مشهورتين $60^\circ + 45^\circ$. كما يمكن استعمال هذه المتطابقات أيضًا في التحقق من صحة متطابقات مثل $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$.

وإذا كان β , $\propto$ قياسي زاويتين، $\propto > \beta$ ، تكون متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما هي:

- $\sin(\propto + \beta) = \sin\propto\cos\beta + \cos\propto\sin\beta$
- $\sin(\propto - \beta) = \sin\propto\cos\beta - \cos\propto\sin\beta$
- $\cos(\propto + \beta) = \cos\propto\cos\beta - \sin\propto\sin\beta$
- $\cos(\propto - \beta) = \cos\propto\cos\beta + \sin\propto\sin\beta$
- $\tan(\propto + \beta) = \dfrac{\tan\propto + \tan\beta}{1 - \tan\propto\tan\beta}$
- $\tan(\propto - \beta) = \dfrac{\tan\propto - \tan\beta}{1 + \tan\propto\tan\beta}$

1-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

عند استعمال متطابقات $\sin(\propto + \beta), \cos(\propto + \beta), \tan(\propto + \beta)$، والتعويض عن كلٍّ من $\propto$ و β بـ θ، على فرض أن $\beta = \propto$ ينتج متطابقات جديدة تسمى المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. وهذه المتطابقات هي:

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$

  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$

  $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
- $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

ويمكن اشتقاق المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية وعددها ثلاث باستعمال قانون ضعف الزاوية، وهي:

- $\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{2}}$
- $\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}$
- $\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}, \quad \cos\theta \neq -1$

ويمكن استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية والمتطابقات المثلثية لنصف الزاوية، بالإضافة إلى متطابقات أخرى؛ لإيجاد القيمة الفعلية لبعض التعابير المثلثية. كما يمكن أن تستعمل هذه المتطابقات أيضًا في التحقق من صحة متطابقات مثلثية أخرى.

1-5 حل المعادلات المثلثية

المعادلات المثلثية صحيحة فقط عند قيم محددة للمتغير ويشبه حلها حل المعادلات الجبرية.

- الخطوة الأولى في حل المعادلات المثلثية: هي استعمال التحليل إلى العوامل، وخاصية الضرب في الصفر، و/ أو إعادة كتابة معادلة معقّدة على صورة سلسلة من معادلات مثلثية أبسط.
- الخطوة الثانية: هي استعمال الدوال المثلثية العكسية ليتم عزل المتغير للحصول على حل المعادلة، فمثلًا $\cos\theta = -1$ يصبح حلها هو $\theta = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ$.
- الخطوة الثالثة: استعمال الخاصية الدورية للدالة المثلثية الدورية ليتضمن الحل جميع الحالات.

بعض المعادلات لها عدد لانهائي من الحلول، وبعضها الآخر ليس له حل. لذا، فإنه من المفيد التعويض في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحلول التي توصلت إليها.

الفصل 1 ملاحظات

مشروع الفصل

مهن إلكترونية

يستعمل الطلبة ما تعلموه حول المتطابقات والمعادلات المثلثية في إجراء مقابلات مع أفراد يستعملون حساب المثلثات في مهنهم.

- اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات يتكون كل منها من ثلاثة أفراد أو أربعة، وشجعهم على عمل أبحاث تتناول مهناً تتعامل مع ما يعرف بالتيار المتردد، مثل المهن التي ترتبط بالهندسة الكهربائية، أو المهن التي ترتبط بهندسة الحاسوب.
- شجع الطلبة على إجراء مقابلات شخصية أو عبر الهاتف مع موظفين يعملون في هذه المهن، واستفسر منهم عن طريقة استعمال حساب المثلثات في مهنهم. واطلب إليهم أخذ صورة رقمية لمن تتم مقابلته إذا أمكن ذلك.
- اطلب إلى كل مجموعة عند الانتهاء من إجراء المقابلات، إعداد تقرير يلخص طريقة استعمال حساب المثلثات في المهنة التي ينتمي إليها كل شخص ممن قابلوه.
- استعمل التقرير متضمناً الصور لعرضه على لوحة في الصف بعنوان "مهن إلكترونية".

المفردات الأساسية قدّم مفردات الفصل مستعملاً الخطوات الآتية:

التعريف: المتطابقة المثلثية هي معادلة تحتوي على دالة مثلثية صحيحة لجميع قيم المتغيّر.

مثال: المتطابقة $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ هي إحدى متطابقات الدوال الفردية.

سؤال: اذكر متطابقة مثلثية أخرى تعلمتها.
قد تتنوع الإجابات.

الفصل 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق

درست تمثيل الدوال المثلثية، وتحديد طول الدورة، والسعة.

والآن

الأفكار العامة

- أتحقق من صحة بعض المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل متطابقات جمع الزوايا وطرحها.
- أستعمل متطابقات ضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات يمكن تمثيل خصائص العديد من الأجهزة الإلكترونية بدوال مثلثية، والمثال على ذلك أجهزة الراديو، والتلفاز، والهاتف الجوّال، والاتصالات اللاسلكية في استعمال الإنترنت، حيث تستعمل جميعها أمواج الراديو التي تتضمن تمثيل هذه الأمواج بالدوال المثلثية. ويمكن إيجاد القدرة في هذه الأجهزة باستعمال معادلات مثلثية.

قراءة سابقة اكتب فقرة عما تعلمته عن الدوال المثلثية، ثم تنبّأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

8 الفصل 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية

قراءة سابقة

شجع الطلبة على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه، وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة للفصل الأول

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب «كثيرة حدود أولية» (مهارة سابقة) **للأسئلة 1-4 انظر الهامش**

(1 $-16a^2+4a$ (2 $5x^2-20$

(3 x^3+9 (4 $2y^2-y-15$

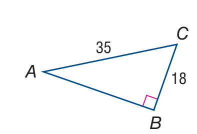
(5 **هندسة:** مساحة سطح قطعة ورقية مستطيلة الشكل: $(x^2+6x+8)\,\text{cm}^2$، إذا كان طول القطعة $(x+4)\,\text{cm}$، فما عرضها؟ (مهارة سابقة) $(x+2)\,\text{cm}$

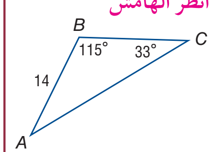
حُلّ كل معادلة من المعادلات الآتية باستعمال التحليل.

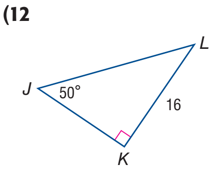
(5 $x^2+6x=0$ $\{-6, 0\}$ (6 $x^2+2x-35=0$ $\{-7, 5\}$

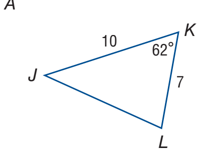
(7 $x^2-9=0$ $\{-3, 3\}$ (8 $x^2-7x+12=0$ $\{3, 4\}$

حُلّ كل مثلث مما يأتي: (مهارة سابقة) **للأسئلة 9-12 انظر الهامش**

(9 

(10 

(11 

(12 

أوجد القيمة الفعلية لكل دالة مثلثية مما يأتي: (مهارة سابقة)

(13 $\sin 45°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (14 $\cos 225°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(15 $\tan 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (16 $\sin 120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(17 **العجلة الدوارة:** المسافة بين أعلى نقطة على العجلة وسطح الأرض يمكن إيجادها عن طريق ضرب 90 ft بالقيمة $\sin 90°$. ما ارتفاع العجلة عندما تكون في منتصف المسافة بين أعلى نقطة وسطح الأرض؟ (مهارة سابقة) 45 ft

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المفردات العامة

مراجعة المفردات

الحل المرفوض (extraneous solution) الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle) زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع الضلع النهائي على أحد المحورين x أو y.

دائرة الوحدة (unit circle) هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

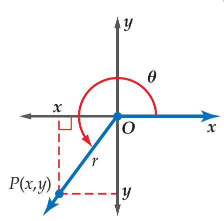
الدالة الدورية (periodic function) هي دالة تتكرر قيمها ضمن فترات منتظمة، بحيث يُسمى النمط الواحد الكامل منها دورة.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions) لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على الضلع النهائي، ولتكن r المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل حيث $r \neq 0$، باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r، $r=\sqrt{x^2+y^2}$، فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$\sin\theta=\frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos\theta=\frac{x}{r}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}, x\neq 0$ $\quad$ $\csc\theta=\frac{r}{y}, y\neq 0$

$\sec\theta=\frac{r}{x}, x\neq 0$ $\quad$ $\cot\theta=\frac{x}{y}, y\neq 0$



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر معالجة لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين.

فاختر أحد المصادر الآتية:

مصادر الفصل تدريبات المهارات

دليل المعلم مشروع الفصل، ص (8)

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،

فاختر أحد المصدرين الآتيين:

مصادر الفصل دليل الدراسة والمعالجة

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

(1 $-4a(4a-1)$

(2 $5(x^2-4)$

(3 أولية

(4 $(2y+5)(y-3)$

(9 $AB\approx 30$، $m\angle C\approx 59°$، $m\angle A\approx 31°$

(10 $BC\approx 14$، $AC\approx 23$، $m\angle A\approx 32°$

(11 $JK\approx 13$، $JL\approx 21$، $m\angle L\approx 40°$

(12 $m\angle J\approx 39°$، $m\angle L\approx 79°$، $JL\approx 9$

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلبة عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل 1 لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

1-1 المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identities

لماذا؟

كمية الضوء التي يوفّرها مصدر ما على سطح ، تُسمّى الإضاءة . وتقاس قوة الإضاءة E بالشمعة القدمية، وترتبط بالمسافة R بالأقدام من المصدر الضوئي. ويمكن استعمال الصيغة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ ، حيث I شدة الضوء مقاسة بالشمعة ، θ الزاوية بين شعاع الضوء، وبين العمودي على السطح، وتفيد هذه الصيغة في المواقف التي تكون فيها الإضاءة مهمة كما هو الحال في التصوير.

المتطابقات المثلثية الأساسية يمكن كتابة المعادلة أعلاه على الصورة $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$، وهي مثال على متطابقة مثلثية. **المتطابقة المثلثية** هي معادلة تحتوي دوال مثلثية، بحيث يتساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يُثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذ ليست متطابقة.

فيما سبق

درست كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أستعمل المتطابقات المثلثية؛ لإيجاد قيم تعابير مثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية؛ لتبسيط التعابير.

المفردات الأساسية

المتطابقة المثلثية
trigonometric identity

متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities

المتطابقات النسبية
quotient identities

متطابقات المقلوب
reciprocal identities

متطابقات الزاويتين المتتامتين
cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية
odd-even functions identities

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين باستعمال الدرجات كقياس للزوايا، مثال: $\sin(90°-\theta) = \cos\theta$

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta},\ \csc\theta \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},\ \sec\theta \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$$

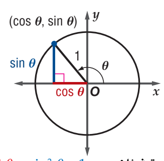
$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta},\ \cot\theta \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},\ \tan\theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$



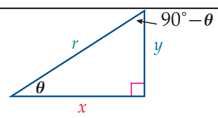
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ حسب نظرية فيثاغورس

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos(90°-\theta)$

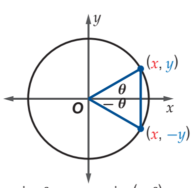
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot(90°-\theta)$

متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



$\sin\theta = y$ $\quad \sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\quad \cos(-\theta) = x$

1-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-1

إيجاد قيم الدوال المثلثية.

الدرس 1-1

استعمال المتطابقات المثلثية؛ لإيجاد قيم تعابير مثلثية.

استعمال المتطابقات المثلثية؛ لتبسيط التعابير.

ما بعد الدرس 1-1

إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

استعمال المتطابقات المثلثية في حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

أسأل:

- ما المتغير الذي يظهر في بسط التعبير الموجود في الطرف الأيمن من معادلة الإضاءة؟ وفي المقام؟ شدة الضوء، قوة الإضاءة والمسافة
- ماذا تساوي $\sec\theta$ في مثلث قائم الزاوية؟ $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$
- ما متطابقة المقلوب للنسبة المثلثية $\sec\theta$؟ $\frac{1}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (11)	• تنويع التعليم ، ص (11,16)	• تنويع التعليم ، ص (12,16)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (4) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

ستبرهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة في تمرين 60 من الدرس 2–1

المتطابقة $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ صحيحة فيما عدا بعض قياسات الزوايا مثل الزوايا ذات القياسات: $90° + k180°$ ، … ,$90°, 270°$ ، حيث k عدد صحيح؛ لأن جيب التمام لكل زاوية من هذه الزوايا هو 0 ، وبالتالي تكون $\tan\theta$ نسبة غير مُعرّفة عندما $\cos\theta = 0$. هذه المتطابقات تُسمّى في بعض الأحيان متطابقات نسبية. توجد متطابقة أخرى من هذا النوع هي $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم الفعلية للدوال المثلثية ، كما أنك تستطيع استعمال الآلة الحاسبة البيانية لإيجاد قيم تقريبية لها.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الفعلية لـ $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ — متطابقات فيثاغورس

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — بطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$ — بتعويض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$ — بتربيع العدد $\frac{1}{4}$

$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$ — بالطرح $1 - \frac{1}{16} = \frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ — بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ سالبة، ومنها $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

تحقق: استعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد الإجابة التقريبية.

خطوة 1 أوجد $\text{Arcsin}\,\frac{1}{4}$.

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ — باستعمال الآلة الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° \approx 165.52°$.

خطوة 2 أوجد $\cos\theta$

عوِّض عن θ بـ $165.52°$

$\cos 165.52° \approx -0.97$

خطوة 3 قارن الإجابة مع القيمة الفعلية.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الفعلية لـ $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}$ ، $270° < \theta < 360°$.

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ — متطابقات فيثاغورس

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$ — بتعويض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$

$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$ — بتربيع $-\frac{3}{5}$

$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$ — $\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$

$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$ — بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

بما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالب، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

إرشادات للدراسة

الأرباع الجدول أدناه يساعدك على تذكّر أي النسب المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع.

النسب المثلثية	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\csc\theta$	1, 2	3, 4
$\sec\theta$	1, 4	2, 3
$\cot\theta$	1, 3	2, 4

إيجاد القيم المثلثية

مثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد قيم دالة مثلثية لزاوية معينة في ربع محدد.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1

a) أوجد القيمة الفعلية لـ $\tan\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -2$، $180° < \theta < 270°$.

$\tan\theta = \sqrt{3}$

b) أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90° < \theta < 180°$.

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا كان لدى الطلبة صعوبة في فهم المتطابقات المثلثية،

فقم بتشجيعهم على العمل في مجموعات من ثلاثة طلبة، واطلب إلى كل مجموعة اختيار إحدى المتطابقات المثلثية الأساسية الموجودة في "مفهوم أساسي" صفحة 10 والعمل معًا للتحقق من صحتها، مستعملين تعريفات الجيب، وجيب التمام، والظل بدلالة أضلاع المثلث قائم الزاوية.

تبسط التعابير المثلثية

مثال 2 يُبيّن كيفية تبسيط تعبير عن طريق كتابته على صورة دالة مثلثية واحدة إن أمكن.

مثال 3 يبيّن كيفية إعادة كتابة تعبير من واقع الحياة يتضمن دوال مثلثية بدلالة متغير معين.

مثالان إضافيان

2 بسّط $\sin\theta(\csc\theta - \sin\theta)$.
$\cos^2\theta$

3 a) حُلّ المعادلة $\sec\theta = \frac{1}{ER^2}$ بالنسبة لـ R.
$R = \sqrt{\frac{I\cos\theta}{E}}$

b) هل المعادلة في الفرع **a** مكافئة للمعادلة $\frac{E}{I\sec\theta} = \frac{1}{R^2}$ ؟ لا

التركيز في المحتوى الرياضي

المتطابقات يجب على الطلبة أن يتذكروا جيدًا المتطابقات النسبية، ومتطابقات المقلوب، ومتطابقات فيثاغورس. وعلى الرغم من أن تذكر المتطابقات الأخرى مفيد إلا أنه يمكن اشتقاقها من المتطابقات الأساسية.

التعليم باستعمال التقنيات

الصفحة على شبكة الإنترنت
أنشئ صفحة على الإنترنت للصف على أن تتضمن متطابقات مثلثية وصيغًا من هذا الفصل. واطلب إلى الطلبة متابعة تحديثك لهذه الصفحة.

✓ تأكد

1A) أوجد القيمة الفعلية لـِ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1B) أوجد القيمة الفعلية لـِ $\sec\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$. $-\frac{7\sqrt{5}}{15}$

تبسيط التعابير المثلثية تبسيط التعابير المثلثية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد القيمة العددية للتعابير، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

مثال 2 تبسيط التعابير المثلثية

بسّط $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

$$= \tan\theta$$

إرشادات للدراسة

تبسيط في عملية تبسيط التعابير المثلثية يكون من الأسهل أن يُكتب التعبير بدلالة الجيب(sine) ، و / أو بدلالة جيب التمام (cosine) .

✓ تأكد

بسّط كلًّا من التعبيرين الآتيين:

2A) $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$ $\sin^2\theta$

2B) $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - \cos^2\theta)$ $\tan\theta$

تبسيط التعابير المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة تبسيط التعابير المثلثية وإعادة كتابتها

الإضاءة: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس.

a) حُلّ المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ ؛ لإيجاد E .

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2\sec\theta = I \qquad \text{بضرب كلا الطرفين في } ER^2$$

$$ER^2\frac{1}{\cos\theta} = I \qquad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{E}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \text{بقسمة كلا الطرفين على } R^2$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \text{بضرب كلا الطرفين في } \cos\theta$$

تاريخ الرياضيات

إن الفراعنة القدماء عرفوا حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، وظل علم حساب المثلثات نوعًا من أنواع الهندسة، حتى جاء المسلمون وطوروه ووضعوا الأسس الحديثة له بجعله علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي، ونصير الدين الطوسي.

تنويع التعليم

فوق

توسّع يهتم الطلبة الذين مستواهم فوق المتوسط على الأغلب بتعلم كيفية نشوء بعض الأفكار الرياضية، لذا زوّدهم بمعلومات تُضاف إلى موقع حول تاريخ الرياضيات يتضمن إسهامات عالِم الرياضيات الهندي أريابهاتا (Aryabhatta)، حيث يستطيعون البحث عن الاكتشافات السابقة لهذا العالم التي قادته إلى التفكير في الدوال المثلثية العكسية.

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$ ؟ فسّر إجابتك.

المعادلة الأصلية	$R^2 = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$
بضرب كلا الطرفين في E	$ER^2 = I \tan \theta \cos \theta$
بقسمة كلا الطرفين على R^2	$E = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{R^2}$
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$E = \frac{I \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \theta}{R^2}$
بالتبسّيط	$E = \frac{I \sin \theta}{R^2}$

لا، المعادلتان غير متكافئتين. $R^2 = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$ تبسّط إلى $E = \frac{I \sin \theta}{R^2}$.

تأكد

3) أعد كتابة $\tan^2 \theta - \cot^2 \theta$ بدلالة $\sin \theta$. $\frac{1 - 2\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - \sin^4 \theta}$

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي، علمًا بأن $0° < \theta < 90°$: (مثال 1)

1) $\tan \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = 2$. $\frac{1}{2}$

2) $\cos \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$. $\frac{3}{5}$

3) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4) $\csc \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

5) $\tan \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6) $\sec \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = 2$. $\sqrt{5}$

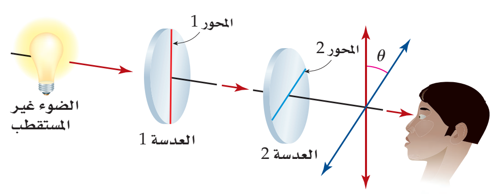
بسِّط كل تعبير مما يأتي: (مثال 2)

7) $\tan \theta \cos^2 \theta$ $\sin \theta \cos \theta$

8) $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$ 1

9) $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$ $\cot^2 \theta$

10) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة نظارات شمسية مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط المعادلة بدلالة $\cos \theta$. $I = I_0 \cos^2 \theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية ، إذا كان محورها يصنع زاوية قياسها 30° مع محور العدسة الأولى.

10b) $I = \frac{3}{4} I_0$؛ شدة الضوء تساوي ثلاثة أرباع شدة الضوء قبل المرور بالعدسة الثانية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-32 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

النسب المثلثية يمكنك استعمال التعريفات المألوفة لكل من الجيب، وجيب التمام، والظل كنسب تعتمد على الضلع المقابل، والضلع المجاور، والوتر في المثلث القائم الزاوية لتوضيح أن $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	40، 42–46، 48–64
ضمن المتوسط	33–40 فردي، 42–46، 48–64
فوق المتوسط	33–64

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي، علمًا بأن $180° < \theta < 270°$: (مثال 1)

11) $\csc\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ $-\frac{5}{4}$

12) $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta = -3$ $2\sqrt{2}$

13) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$ انظر الهامش

14) $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي، علمًا بأن $270° < \theta < 360°$: (مثال 1)

15) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ $-\frac{12}{13}$

16) $\sec\theta$، إذا كان $\tan\theta = -1$ $\sqrt{2}$

17) $\cos\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$ $\frac{3}{5}$

18) $\cos\theta$، إذا كان $\csc\theta = -\frac{5}{3}$ $\frac{4}{5}$

بسّط كل تعبير مما يأتي: (مثال 2)

19) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$ $\sec^3\theta$

20) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cot\theta$ $\cos\theta$

21) $\cot\theta\sec\theta$ $\csc\theta$

22) $\sin\theta(1 + \cot^2\theta)$ $\csc\theta$

23) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$ 1

24) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ $-\cot\theta$

25) **إلكترونيات:** عندما يتواجد تيار كهربائي في سلك في مجال مغناطيسي مثل الموجود في مُجفّف الشعر، فإنّه توجد قوة تؤثر في السلك. يمكن معرفة شدة المجال المغناطيسي باستعمال المعادلة $B = \frac{F\csc\theta}{I\ell}$، حيث F القوة المؤثرة في السلك، و I مقدار التيار الكهربائي في السلك، و ℓ طول السلك، و θ الزاوية التي يصنعها السلك مع المجال المغناطيسي. أعد كتابة المعادلة بدلالة $\sin\theta$. (إرشاد: حُلّ المعادلة بالنسبة لـ F) (مثال 3)
انظر الهامش

بسّط كل تعبير مما يأتي:

26) $\frac{1 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}$ $\cot^2\theta$

27) $\tan\theta\csc\theta$ $\sec\theta$

28) $\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ 1

29) $2(\csc^2\theta - \cot^2\theta)$ 2

30) $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$ $\cos^2\theta$

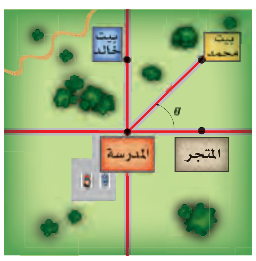
31) $2 - 2\sin^2\theta$ $2\cos^2\theta$

32) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم e. يمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال المعادلة $e = \frac{W\sec\theta}{AS}$، حيث W معدل امتصاص جسم الشخص للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حُلّ المعادلة؛ لإيجاد W. اكتب إجابتك باستعمال $\sin\theta$، أو $\cos\theta$. $W = eAS\cos\theta$

b) أوجد W إذا كانت:
$e = 0.80$, $\theta = 40°$, $A = 0.75\ m^2$, $S = 1000\ W/m^2$.
قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة. $459.63w$

33) **خرائط:** تبيِّن الخريطة أدناه المباني المجاورة لبيت محمد، والتي يقوم عادة بزيارتها بانتظام. إذا علمت أن جيب الزاوية θ المتكوّنة من الطريق من المدرسة إلى المتجر من جهة والطريق من المدرسة إلى بيت محمد من جهة أخرى يساوي $\frac{4}{9}$، فأوجد كل مما يأتي:
انظر الهامش



a) $\cos\theta$

b) $\tan\theta$

c) ما جيب، وجيب تمام، وظل الزاوية المحصورة بين الطريق من بيت محمد إلى المدرسة من جهة، وبين الطريق من بيت خالد إلى المدرسة من جهة أخرى؟

إجابات:

13 متطابقة فيثاغورس $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

بتعويض $\frac{1}{4}$ بدل $\cos\theta$ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$

بالتربيع $\frac{1}{16} + 1 = \csc^2\theta$

بالجمع $\frac{17}{16} = \csc^2\theta$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\pm\sqrt{\frac{17}{16}} = \csc\theta$

لأن θ في الربع الثالث، فإن قيمة $\csc\theta$ سالبة.

لذلك $\csc\theta = -\sqrt{\frac{17}{16}}$

25 المعادلة الأصلية $B = \frac{F\csc\theta}{I\ell}$

بضرب الطرفين في $I\ell$ $I\ell.B = F\csc\theta$

$\csc\theta = F\frac{1}{\sin}\theta$

$I\ell B = F\frac{1}{\sin\theta}$

بضرب الطرفين في $\sin\theta$ $I\ell B\sin\theta = F$

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$F = I\ell.B\sin\theta$

33

a) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{65}{81}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{65}}{9}$

(لاحظ اعتبار θ في الربع الأول كما هو في الشكل).

b) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{9} \div \frac{\sqrt{65}}{9}$

$= \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$

c) الزاوية المقصودة هي متممة θ، وعليه يكون:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{\sqrt{65}}{9}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = \frac{4}{9}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$= \frac{\sqrt{65}}{4}$

34) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين، سوف تستعمل الآلة الحاسبة البيانية لتحديد إذا كانت معادلة ما، متطابقة مثلثية أو لا. هل تُمثّل المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$ متطابقة مثلثية؟

a) **جدولة:** أكمل الجدول أدناه.

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\tan^2\theta \sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

b) **تمثيل بياني:** استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل الدالتين: $\tan^2\theta - \sin^2\theta\ ,\ \tan^2\theta \sin^2\theta$ بيانيًّا. **انظر الهامش**

c) **تحليل:** إذا كان التمثيل البياني للدالتين لا يتطابق، فإن المعادلة ليست متطابقة. هل التمثيلان البيانيان للدالتين متطابقين؟ **نعم**

d) **تحليل:** استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لمعرفة إذا كانت المعادلة $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ متطابقة أو لا. (تأكد أنّ الآلة الحاسبة البيانية بنظام الدرجات) **نعم**

35) **تزلّج على الجليد:** يتزلّج أحد الأشخاص، والذي كتلته m باتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة، وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة يتم استعمال نظام المعادلتين الآتي:

$F_n - mg\cos\theta = 0,\ mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل النظام لتعريف μ_k كدالة بدلالة θ.

$\mu_k = \tan\theta$

بسِّط كل تعبير مما يأتي:

36) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta}{1-\csc^2\theta}$ $\quad -\tan\theta\sec\theta$

37) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$ **انظر الهامش**

38) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$ $\quad \sin\theta$

39) $\dfrac{\cot\theta\cos\theta}{\tan(-\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ $\quad -\cot^2\theta$

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **اكتشف الخطأ:** يتجادل سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب البيتي إذا كانت متطابقة أو لا. يدّعي سعيد بأنّه جرّب 10 قيم للمتغير وكلّها حققت المعادلة، لذا، فهي متطابقة. بينما يدّعي أحمد بوجود مثال مضاد يبرهن أن هذه المعادلة ليست متطابقة. إذا كان ادّعاء كل منهما صحيحًا، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.
أحمد؛ لأن مثالًا مضادًّا يكون كافيًا لإثبات أن المعادلة ليست متطابقة.

41) **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًّا يُبيِّن أنّ $1-\sin x = \cos x$ ليست متطابقة. **إجابة ممكنة: $x = 45°$**

42) **تبرير:** حدّد كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الإضاءة الموجودة في فقرة "لماذا" في بداية الدرس، حتى نبيّن أنّ $\cos\theta = \frac{ER^2}{I}$. **انظر الهامش**

43) **اكتب:** تكتسب كلمة فيثاغورس الشهرة ذاتها التي تكتسبها نظرية فيثاغورس. فالمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ مثال على ذلك، حيث يمكن وصفها بأنها متطابقة فيثاغورس. لماذا تعتقد بأنّ هذه المتطابقة صنّفت كذلك؛ أي أنها مثال على نظرية فيثاغورس؟ **انظر الهامش**

44) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ باستعمال متطابقات المقلوب، ومتطابقات الدوال الزوجية أو الفردية. **انظر الهامش**

45) **مسألة مفتوحة:** اكتب تعبيرين مساويين للتعبير $\tan\theta\sin\theta$. **انظر الهامش**

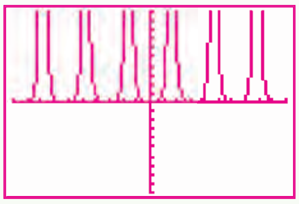
46) **تبرير:** اشرح كيف يمكنك استعمال القسمة للمعادلات لإعادة كتابة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ على الصورة: $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$
اقسم جميع الحدود على $\sin\theta^2$

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلبة جدول القيم إضافة إلى الآلة الحاسبة البيانية في التمرين 34 لتحديد ما إذا كانت معادلة معطاة تمثّل متطابقة أو لا.

إجابات:

34b)



$[-540, 540]$ scl: 90 by $[-10, 10]$ scl: 1

37)
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)} = \frac{\sin\theta-1}{1+\sin(-\theta)} = \frac{\sin\theta-1}{1-\sin\theta} = \frac{1}{-1} = -1$$

42)
$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{ER^2}$$
$$ER^2 = I\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{ER^2}{I}$$

43) إجابة ممكنة: يمكن النظر إلى كل من $\cos\theta$ ، $\sin\theta$ على أنهما ضلعان في مثلث قائم الزاوية، وأن العدد 1 هو طول الوتر في ذلك المثلث.

44)
$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

45) إجابة ممكنة:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta,\ \frac{\sin\theta^2}{\cos\theta}$$

47) **تحدٍّ:** أوجد قيمة $\cot\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}, 90° \le \theta < 180°$

$-\frac{4}{3}$

48) **اكتشف الخطأ:** يقوم علاء وسامي بتبسيط $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$ ، أيهما إجابته صحيحة؟ وضّح تبريرك.

سامي	علاء
$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1} = \sin^2\theta$	$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \tan^2\theta+1 = \sec^2\theta$

سامي؛ لأن $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b}+\frac{a}{c}$

مراجعة تراكمية

أوجد كلًّا ممّا يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة. (مهارة سابقة)

49) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\frac{2}{3}\pi \approx 2.09$

50) $\sin^{-1}\frac{\pi}{2}$ غير موجودة

51) $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\pi}{3} \approx 0.52$

52) $\tan\left(\cos^{-1}\frac{6}{7}\right)$ 0.60 تقريبًا

53) $\sin\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 0.5

54) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$ 0.8

الزاويتان A ، B حادّتان في مثلث قائم الزاوية. (مهارة سابقة)

55) إذا كان $\tan A = \frac{5}{12}$ ، فما قيمة $\csc A$ ؟ $\frac{13}{5}$

56) إذا كان $\sin B = \frac{12}{15}$ ، فما قيمة $\sec B$ ؟ $\frac{15}{9}$

57) إذا كان $\cos A = \frac{8}{17}$ ، فما قيمة $\cot A$ ؟ $\frac{8}{15}$

حُلّ كل معادلة من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة. (مهارة سابقة)

58) $\tan\theta = 2.7$ $69.7°$ تقريبًا

59) $\sin\theta = -0.3$ $197.5°$ تقريبًا

60) $\cos\theta = 0.46$ $62.6°$ تقريبًا

تدريب على اختبار معياري

61) أيٌّ مما يأتي يكافئ $\tan\theta\,\frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$ ؟ B

A $\tan\theta$

B $\cot\theta$

C $\sin\theta$

D $\cos\theta$

62) إذا كان $\csc\theta = -5$ ، حيث $270° < \theta < 360°$ ، فما القيمة الفعلية لـ $\cot\theta$؟ A

A $-2\sqrt{6}$

B $\frac{-2\sqrt{6}}{5}$

C $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

D $2\sqrt{6}$

63) إذا كان $\sin x = m$ ، $0 < x < 90°$ ، فما قيمة $\tan x$؟ B

A $\frac{1}{m^2}$

B $\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\frac{1-m^2}{m}$

D $\frac{m}{1-m^2}$

تنبيه!

اكتشف الخطأ يتعين على الطلبة في التمرين 40، أن يعرفوا أن حل احمد هو الصحيح. لذا اشرح لهم أنه لا يمكن استعمال التبرير الاستقرائي (أي التعميم باستعمال عدة أمثلة) لبرهنة أن المتطابقة صحيحة. لكن أي مثال مضاد يعد كافيًا لإثبات أن المعادلة ليست متطابقة.

وعليهم أن يعرفوا أيضًا في التمرين 48، أن جواب سامي هو الصحيح؛ (لأن $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$). وهكذا يكون حل علاء خطأ؛ (لأن $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b}+\frac{a}{c}$). واشرح للطلبة أنه عند تبسيط التعابير المثلثية، فإنهم يستعملون الخصائص نفسها كما لو أنهم يبسّطون أي تعبير نسبي.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة إلقاء نظرة على الدرس 2-1 اللاحق، واطلب إليهم تحديد كيف يمكن أن يساعدهم الدرس الحالي على فهم الدرس اللاحق.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اسأل الطلبة هل يمكن دائمًا تبسيط أي تعبير مثلثي بكتابته على صورة دالة مثلثية واحدة؟ واطلب إليهم أن يكتبوا مثالاً إذا كان ذلك غير ممكن، أو يوضحوا لماذا يكون ذلك ممكنًا.

1-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية
Verifying Trigonometric Identities

فيما سبق

درست كيفية استعمال المتطابقات؛ لإيجاد قيم التعابير المثلثية وتبسيطها.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية بتحويل طرف من المعادلة إلى صورة الطرف الآخر.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية من خلال تحويل كلا طرفي المعادلة إلى الصورة نفسها.

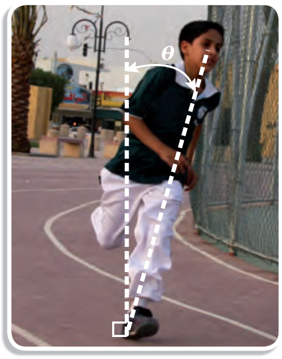
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند الركض بمسار دائري نصف قطره R، لاحظ عبدالله أن جسمه لا يكون عموديًّا على سطح الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادة غير سالبة هي θ، تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$.

هذه ليست المعادلة الوحيدة التي تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية، فتوجد معادلة أخرى هي $\sin \theta = \cos \frac{v^2}{gR}\theta$، حيث $0 \le \theta \le 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا إحداهما عن الأخرى، أو أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟



تحويل أحد طرفي المعادلة يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية، بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية؛ لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، تعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي | **إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل أحد الأطراف**

خطوة 1 بسّط أحد طرفي المعادلة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

خطوة 2 حوّل التعبير في هذا الطرف إلى صورة التعبير في الطرف الأسهل.

مثال 1 **تحويل أحد طرفي المعادلة**

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$.

المعادلة الأصلية	$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$
الطرف الأيسر	$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta}$
بضرب البسط والمقام في $1 + \cos \theta$	$= \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta}$
$(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta$	$= \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta}$
$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$	$= \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$
بقسمة البسط والمقام على $\sin^2 \theta$	$= 1 + \cos \theta$
	= الطرف الأيمن

تأكد

1) أثبت صحة المتطابقة $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$. انظر هامش الصفحة التالية

1-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-2

استعمال المتطابقات؛ لإيجاد قيم التعابير المثلثية وتبسيطها.

الدرس 1-2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل طرف من المعادلة إلى صورة الطرف الآخر.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية من خلال تحويل كلا طرفي المعادلة إلى الصورة نفسها.

ما بعد الدرس 1-2

استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لإثبات صحة متطابقات مثلثية أخرى أو تبسيطها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- أيّ المتغيرات يظهر في بسط الطرف الأيمن من معادلة زاوية الميلان؟ وأيها يظهر في المقام؟ v في البسط، R , g في المقام
- كيف تستطيع التعبير عن $\tan \theta$ بدلالة $\sin \theta$، $\cos \theta$؟ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- هل $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ يساوي $\frac{v^2}{gR}$ أو $\frac{gR}{v^2}$؟ $\frac{v^2}{gR}$

تحويل أحد طرفي المعادلة

مثال 1 يُبيّن كيفية إثبات صحة متطابقة بتحويل أحد طرفي المعادلة.

مصادر الدرس 1-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (18)	• تنويع التعليم، ص (18)	• تنويع التعليم، ص (18,21)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (5) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

تحويل أحد طرفي المعادلة

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد تعبير مكافئ للتعبير الأصلي.

التقويم التكويني

استعمل التدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أثبت صحة المتطابقة $\csc\theta \cos\theta \tan\theta = 1$.

$\csc\theta \cos\theta \tan\theta \stackrel{?}{=} 1$

$\frac{1}{\sin\theta} \cdot \cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1 \quad \checkmark$

2 **تدريب على اختبار**

أيٌّ مما يأتي يكافئ $\frac{\csc\theta}{\cos\theta} - \tan\theta$ ؟ A

A $\cot\theta$ **C** 0

B $\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}$ **D** $\cos^2\theta$

عند التحقق من صحة متطابقة مثلثية ، فإنك تعمل من الخطوة الأخيرة إلى الخطوة الأولى. ففي المثال 1، خُذ الخطوة الأخيرة $1 + \cos\theta$ ، وانتقل للخطوة التي قبلها بإجراء اختصارات ، أو تعويضات مناسبة، وهكذا حتى تصل إلى الخطوة الأولى في المتطابقة الأصلية.

مثال 2 على اختبار

أيٌّ مما يأتي يكافئ $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ **B** $\csc\theta$ **C** $\cot^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد تعبير مكافئ للتعبير الأصلي. لاحظ أن خيارات الإجابة تتضمّن إما cot θ ، أو csc θ. لذا ، اعمل على تجاهل الدوال المثلثية الأخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل التعبير المُعطى حتى يطابق أحد الخيارات.

$$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{بالضرب}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{بقلب المقام، وضربه في البسط}$$

$$= \cot\theta \cdot \cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{بالضرب}$$

الجواب هو C.

تنبيه!

تبسيط الطرفين

تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عمليةَ التحقّق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقّق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على التعبير ذاته.

ارشادات الاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتأكد من صحة حلّك اختر قيمة لـ θ. وعوّضها في التعبير الجديد، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في التعبير الأصلي.

تأكد

2) أيٌّ مما يأتي يكافئ $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟ C

A $\cot^2\theta$ **B** $\tan^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

تحويل طرفي المتطابقة في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. الاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي — اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- قم بتعويض واحدة، أو أكثر من المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط التعبير.
- حلّل أو اضرب عند الضرورة. ربما تحتاج إلى ضرب كل من البسط والمقام بالتعبير المثلثي نفسه.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط، ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- خصائص المساواة لا تطبق على المتطابقات بالطريقة ذاتها التي تُطبَّق على المعادلات. لا تُنفّذ عمليات على كل طرف في المتطابقات التي لم يتم إثبات صحتها.

إجابة (تأكد):

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\cos^2\theta(\csc^2\theta - 1) \stackrel{?}{=} \cot^2\theta\cos^2\theta$

$\cot^2\theta\cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta \quad \checkmark$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون وزع الطلبة في مجموعات ثنائية، ثم اطلب إليهم العمل معًا لإثبات صحة بعض المتطابقات في التمارين 17 – 8. وأن يسجلوا الاستراتيجيات التي وجدوها مفيدة، و يقارنوا بين قائمة استراتيجياتهم والقائمة المقترحة في نهاية هذه الصفحة من كتاب الطالب. واسألهم أيّ الاستراتيجيات ثبت نجاحها؟ وأيها فشل؟ ولماذا؟

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا الطرفين

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$.

المعادلة الأصلية	$\cos\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} \csc\theta - \sin\theta$
الطرف الأيسر	$\cos\theta\cot\theta$
$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$= \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
بالضرب	$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$
الطرف الأيمن	$\csc\theta - \sin\theta$
$\operatorname{coc}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$= \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta$
بالطرح	$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$
$\sin^2\theta + \operatorname{coc}^2\theta = 1$	$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

بما أن الطرفين يساويان التعبير نفسه، فالطرفان متساويان.

تأكد

3) أثبت صحة المتطابقة $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta \stackrel{?}{=} \cot\theta\tan\theta$

$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$

$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$ ✓

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: (المثالان 1، 3) انظر ملحق الإجابات

1) $\cot\theta + \tan\theta = \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}$

2) $\cos^2\theta = (1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

3) $\sin\theta = \frac{\sec\theta}{\tan\theta + \cot\theta}$

4) $\tan^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

5) $\tan^2\theta\csc^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

6) $\tan^2\theta = (\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)$

7) **الاختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟ (مثال 2) انظر الهامش

A $\sin^2\theta$ B $\cos^2\theta$

C $\tan^2\theta$ D $\csc^2\theta$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: انظر ملحق الإجابات

8) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

9) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

10) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

11) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

12) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

13) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

14) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

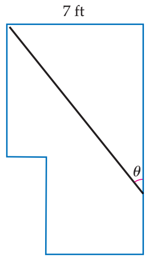
15) $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

16) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

17) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

18) **سُلَّم:** اشتقّ بعض الطلبة صيغة لمعرفة أطول سلّم يمكن أن يُحمل أفقيًا ليتلاءم مع زاوية ممر عرضه 5 ft إلى ممر آخر عرضه 7 ft كما هو موضح بالشكل أدناه، فوجدوا أنه يُعطى بالصيغة:

$\ell(\theta) = \frac{7\sin\theta + 5\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$.



وعندما قام معلمهم بإيجاد صيغة أخرى وجد أن $\ell(\theta) = 7\sec\theta + 5\csc\theta$. هل الصيغتان متكافئتان؟ نعم

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حلّ أمثلة على السبورة واحتفظ بملاحظات حولها. ثم ضع ملاحظاتك عند نهاية الحصة على موقع الصف الإلكتروني، فقد يساعد ذلك الطلبة على التركيز على الدروس بدلاً من كتابة الملاحظات حول كل خطوة من خطوات البراهين.

تحويل طرفي المتطابقة

مثال 3 يُبيّن كيفية إثبات صحة متطابقة مثلثية من خلال تحويل كل طرف من طرفي المتطابقة إلى صورة مشتركة.

مثال إضافي

3 أثبت صحة المتطابقة $\csc\theta + \sec\theta = \frac{1+\cot\theta}{\cos\theta}$.

$\csc\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{1+\cot\theta}{\cos\theta}$

$\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cos\theta}$

$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\sin\theta\cos\theta}$

$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ ✓

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–32 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	58 – 54، 69 – 60
ضمن المتوسط	33، 34، 51 – 35 فردي، 58 – 52، 69 – 60
فوق المتوسط	69 – 33

إجابة:

7) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta} = \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}$

$= \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

بقلب المقام ثم الضرب

$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

بالتبسيط

$= \frac{1}{\sin^2\theta}$

$= \csc^2\theta$

$\csc^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$

الإجابة هي D

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: (المثالان 1، 3)

للتمارين 19–32 انظر ملحق الإجابات

19) $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

20) $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

21) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

22) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

23) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

24) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

25) $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

26) $1 - \tan^4\theta = 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$

27) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

28) $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

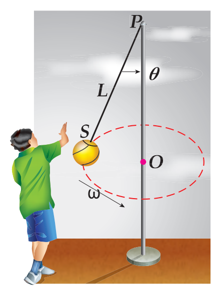
29) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

30) $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

31) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

32) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

33) يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. عندما تدور الكرة حول العمود، فإنها تكوّن مع الحبل شكلًا مخروطيًّا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L، والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود تُعطى بالصيغة: $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ؟ نعم



34) **جري:** جزء من حلبة السباق له شكل قوس دائري نصف قطره 16.7 m. يركض أحد العدّائين في هذا الجزء من الحلبة. إذا علمت أن جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$. فأوجد سرعة العدّاء. استعمل زاوية الميل المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، والتي تنص على أن: $\tan\theta = \dfrac{v^2}{gR}$، حيث $g = 9.8$، R نصف القطر لحل المسألة.
(إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا) 6.5 m/sec

عند تبسيط كلٍّ من التعابير الآتية، هل تحصل على 1 أم −1 ؟ وضِّح إجابتك.

35) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$ 1

36) $\sin\theta\csc(-\theta)$ −1

37) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$ 1

38) $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$ 1

39) $(\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta$ انظر ملحق الإجابات

40) $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ −1

41) $\cos(-\theta)\sec\theta$ 1

42) $\sin(-\theta)\csc\theta$ −1

بسّط كل تعبير مما يأتي إلى قيمة ثابتة، أو نسبة مثلثية أساسية:

43) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$ $\cos\theta$

44) $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$ $\tan\theta$

45) $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ 1

46) $\tan\theta\cos\theta$ $\sin\theta$

47) $\cot\theta\tan\theta$ 1

48) $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 1

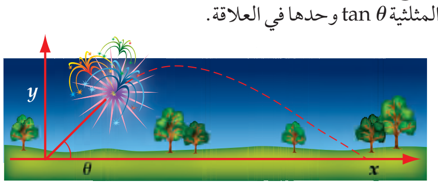
49) $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\csc^2\theta}$ $\tan^2\theta$

50) $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$ 2

51) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y، والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة:

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$$

حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، و θ زاوية الإطلاق، و g تسارع الجاذبية الأرضية، أعد كتابة هذه العلاقة بحيث تظهر الدالة المثلثية $\tan\theta$ وحدها في العلاقة.



$$y = -\frac{g\,x^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta) + x\tan\theta$$

التركيز في المحتوى الرياضي

تحويل طرف أو طرفي المعادلة يمكن إثبات صحة متطابقة بتحويل أحد طرفي المعادلة أو كليهما في الوقت نفسه. وربما يفضل بعض الطلبة تحويل أحد الطرفين تجنبًا للتشويش.

52) **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi f t$، حيث يدل الرمز f على التردد، والقيمة I_0 على أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi f t$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi f t$. $P = \frac{I_0^2 R}{\csc^2 2\pi f t}$

52a) $P = I_0^2 R(1 - \cos^2 2\pi f t)$

53) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين، ستستكشف طريقة حلّ معادلة مثلثية مثل $2\sin x = 1$.

53a) $\sin x = \frac{1}{2}$

a) **عددي:** أعد كتابة المعادلة بحيث تكون $\sin x$ فقط في طرف.

b) **تمثيل بياني:** مثّل طرفي المعادلة السابقة بيانيًّا كدالتين منفصلتين في المجال $0 \le x < 2\pi$. وحدّد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **هندسي:** استعمل دائرة الوحدة، لإثبات صحة حلك في الفرع b.

d) **تمثيل بياني:** مثّل طرفي المعادلة السابقة بيانيًّا كدالتين منفصلتين في المجال $-2\pi < x < 2\pi$. وحدّد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

e) **تعبير لفظي:** خمّن الصيغة العامة لحلول المعادلة، واكتبها، وضّح إجابتك.

للفروع 53 b–e انظر ملحق الإجابات

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **أيّها لا تنتمي؟** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضّح إجابتك. انظر الهامش

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

55) **اكتب:** اشرح لماذا لا تستطيع تربيع كل طرف من طرفي المعادلة عند إثبات صحة متطابقة مثلثية. انظر الهامش

56) **تبرير:** اشرح لماذا تُعدّ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin\theta = \sqrt{1-\cos\theta}$ ليست متطابقة. مثال مضاد $45°, 30°$

57) **اكتب سؤالًا:** يعاني زميلك مشكلة في برهنة متطابقة مثلثية تحتوي على نسب مثلثية متعددة، أو من درجات عليا. اكتب سؤالًا يساعده في حَلّ المشكلة. للتمارين 57-59 انظر الهامش

58) **اكتب:** لماذا تعتقد بأنه في معظم الأحيان تُعاد كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب (sine)، وجيب التمام (cosine)؟

59) **تحدٍّ:** إذا كان $x = \frac{1}{2}\tan\theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$، فاكتب $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$ بدلالة $\sin\theta$ فقط.

60) **تبرير:** برهن على صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الفعلية لكلّ مما يأتي: (درس 1-1)

61) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$، $0° \le \theta < 90°$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

62) $\csc\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $90° < \theta < 180°$ $\frac{5}{4}$

63) $\cos\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$، $270° < \theta < 360°$ $\frac{3}{5}$

بسّط كلًّا مما يأتي: (درس 1-1) 64–66 انظر الهامش

64) $\sin\theta\cos\theta(1 + \cot^2\theta)$

65) $\frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$

66) $\cos^2\theta(\sec^2\theta - 1)$

تدريب على اختبار معياري

67) أيٌّ مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟ D

A $\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

B $\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta \sin\theta$

D $\tan\theta \csc\theta$

68) أيٌّ مما يأتي يكافئ 1، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟ C

A $\tan^2\theta(1 - \csc^2\theta)$

B $\frac{\cot\theta}{\cos\theta} - \csc\theta$

C $\frac{\sin\theta}{\csc\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$

D $(1 - \sin^2\theta)(1 + \tan^2\theta)$

69) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت صحة المتطابقة:
$\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$

انظر الهامش

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدهم تعلّم المتطابقات المثلثية الأساسية في الدرس 1-1 في إثبات صحة متطابقات أكثر تعقيداً في درس اليوم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2–1 , 1–1، بإعطائهم اختبارًا قصيرًا من مصادر الفصل 1.

إجابات:

54) $\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$؛ لأن باقي المعادلات هي متطابقات فيثاغورس وهذه المعادلة ليست منها.

55) لأن خصائص المساواة لا تطبق على المتطابقات بالطريقة نفسها التي تطبق فيها على المعادلات، ولا تنفذ العمليات على كل طرف في المعادلة قبل أن يتم إثبات صحة متطابقة.

57) إجابة ممكنة: هل استعملت المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ للتبسيط؟

58) إجابة ممكنة: لأنهما أكثر دالتين مثلثتين شيوعًا.

59) عند استبدال x بـ $\frac{1}{2}\tan\theta$ نحصل على $\frac{1}{2}\sin\theta$

64) $\sin\theta\cos\theta(1 + \cot^2\theta)$

$= \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \csc^2\theta$

$= \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{\sin^2\theta}$

$= \cos\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta} = \cot\theta$

65) $= \frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} =$

$\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)} = 1$

66) $\cos^2\theta(\sec^2\theta - 1) = \cos^2\theta . \tan^2\theta$

$= \cos^2\theta \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \sin^2\theta$

69) $\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta$

$= \sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= \sin\theta\cos\theta(1)$

$= \sin\theta\cos\theta$

تنويع التعليم

فوق

توسّع المعادلة $\sin x + \cos x = 1$ ليست متطابقة، مما يعني أنها ليست صحيحة لكل قيم x. لذا أوجد قيم x التي تجعل هذه المعادلة صحيحة. $0° + k \cdot 360°$ أو $90° + k \cdot 360°$، حيث k هو أي عدد صحيح.

1-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-3

إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا.

الدرس 1-3

ايجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع قياسات الزوايا والفرق بينهما.

برهنة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

ما بعد الدرس 1-3

استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما لضعف الزاوية ونصفها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

أسأل:

- أين سمعت كلمة "تداخل" أيضًا؟ إجابة ممكنة: التلفاز والمذياع.
- كيف تقارن سعة الموجة المركبة بسعة الموجتين المكوّنتين لها عند القمة؟ سعة الموجة المركبة تساوي مجموع سعتي الموجتين المكوّنتين لها.
- لماذا تقطع الموجة المركبة محور x عند نقطة لا تقطعه عندها أي من الموجتين المكونتين لها؟ الموجة المركبة هي مجموع الموجتين المكونتين لها. وتقطع محور x عند نقطة تكون عندها إحدى الموجتين المكونتين أعلى من الموجة المركبة والأخرى أسفل منها بنفس مسافة ارتفاع الأولى عنها.

متطابقات المجموع والفرق

مثال 1 يُبيّن كيفية استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لإيجاد القيم الفعلية للتعابير المثلثية.

1-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

Sum and Difference of Angles Trigonometric Identities

فيما سبق

درست إيجاد قيم الدوال المثلثية لزوايا مختلفة.

والآن

الأفكار الرئيسة

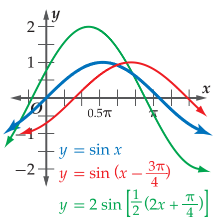
- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع قياسات الزوايا والفرق بينها.
- أبرهن المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هل استعملت مزوّد الإنترنت اللاسلكي، وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟ الأمواج التي تمر من المكان نفسه في الوقت نفسه، تُسبِّب تداخلًا. ويحدث التداخل عندما تندمج موجتان لتصبح سعتهما أكبر، أو أصغر من سعة الأمواج المكوّنة لهما.

متطابقات المجموع والفرق لاحظ أن المعادلة الثالثة الموضحة في الشكل المجاور، تتضمّن جمع الزاويتين $\frac{\pi}{4}$ ، x . وفي الغالب يكون من المفيد استعمال صيغ لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد قيمة التعابير المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الفعلية لـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin (60° - 45°)$. وتوجد صيغ يمكن استعمالها؛ لإيجاد تعابير مكافئة لبعض التعابير مثل $\sin (A - B)$ ، $\cos (A + B)$.



مفهوم أساسي **متطابقات المجموع والفرق**

- $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
- $\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan (A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1 **إيجاد قيم التعابير المثلثية**

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي:

a) $\sin 105°$

استعمل المتطابقة $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$\sin 105° = \sin (60° + 45°)$ — $A = 60°, B = 45°$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$ — متطابقة المجموع

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — بالتعويض

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ — بالتبسيط

b) $\cos (-120°)$

استعمل المتطابقة $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

$\cos (-120°) = \cos 120°$ — $A = 60°, B = 180°$

$= \cos (180° - 60°)$ — متطابقة الفرق

$= \cos 180° \cos 60° + \sin 180° \sin 60°$ — بالتعويض

$= (-1)\left(\frac{1}{2}\right) + (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — بالتبسيط

$= -\frac{1}{2}$

مصادر الدرس 1-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ، ص (23,27)	• تنويع التعليم ، ص (23,27)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (6) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

✔ تأكد

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي:

1A) $\sin 15°$ $\quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 1B) $\cos(-15°)$ $\quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما، لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متطابقات المجموع والفرق

إلكترونيات : يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، حيث تُعطى شدة التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة: $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات

$c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات

a) أعد كتابة الصيغة باستعمال مجموع زاويتين.

$$c = 3 \sin 165t \qquad \text{الصيغة الأساسية}$$
$$= 3 \sin (120t + 45t) \qquad 120t + 45t = 165t$$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الفعلية لشدة التيار بعد 1 sec.

$$c = 3 \sin (120t + 45t) \qquad \text{المعادلة حسب الفرع a}$$
$$= 3 \sin (120 + 45) \qquad t = 1$$
$$= 3[(\sin 120)(\cos 45) + (\cos 120)(\sin 45)] \qquad \text{متطابقة المجموع}$$
$$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \qquad \text{بالتعويض}$$
$$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \qquad \text{بالضرب}$$
$$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4} \qquad \text{بالتبسيط}$$

إذن، شدة التيار بعد 1 sec تساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$.

الربط مع واقع الحياة

يُسمّى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو جهاز القياس.

✔ تأكد

إذا كانت شدة التيار c تعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين. $2 \sin (315t - 30t)$

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين؛ لإيجاد القيمة الفعلية لشدة التيار بعد 1 sec . $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة كوّن قائمة بقياسات الزوايا بين $0°$, $360°$ ، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية تستطيع أيضًا استعمال متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات.

متطابقات المجموع والفرق

مثال 2 يُبيّن كيفية استعمال متطابقة مجموع زاويتين لحل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي:

a) $\sin 75°$ $\quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b) $\cos(-75°)$ $\quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 **إلكترونيات:** يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 4 \sin 255t$ ، حيث تقاس الزاوية t بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة باستعمال مجموع زاويتين.
$c = 4 \sin(210t + 45t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الفعلية لشدة التيار بعد 1 sec .
$(-\sqrt{2}-\sqrt{6})$Amp

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون اللغويون اطلب إلى الطلبة تحديد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين من جهة، والمتطابقات المثلثية لناتج طرح زاويتين من جهة أخرى. ثم اطلب إليهم كتابة جمل قصيرة لوصف نتائجهم.

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر مجموعة من الطلبة، واطلب إليهم أن يوضحوا كيفية استعمال متطابقات المجموع ومتطابقات الفرق من خلال أمثلة متعددة، وتوثيق ذلك باستعمال الكاميرا التوثيقية.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لإثبات صحة متطابقات مثلثية.

مثال إضافي

3 أثبت كلًّا مما يأتي:

a) $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(360° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos 360° \cos\theta + \sin 360° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

b) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\pi - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1 – 30 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ مما يأتي:

a) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

الطرف الأيسر	$\cos(90° - \theta)$
متطابقة المجموع	$= \cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta$
بالتعويض	$= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$
بالتبسيط	$= \sin\theta$
	= الطرف الأيمن

b) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

الطرف الأيسر	$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
متطابقة المجموع	$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$
بالتعويض	$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$
بالتبسيط	$= \cos\theta$
	= الطرف الأيمن

تأكد

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

3A) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B) $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

3A) $\sin(90° - \theta)$
$= \sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta$
$= 1\cos\theta - 0\sin\theta$
$= \cos\theta$

3B) $\cos(90° + \theta)$
$= \cos 90° \cos\theta - \sin 90° \sin\theta$
$= 0\cos\theta - 1\sin\theta$
$= -\sin\theta$

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165°$ انظر الهامش

2) $\cos 105°$ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

3) $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

4) $\sin(-30°)$ $-\frac{1}{2}$

5) $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sin(-210°)$ $\frac{1}{2}$

7) **إلكترونيات:** يمر تيار كهربائي متردّد في إحدى الدوائر الكهربائية. يمكن استعمال الصيغة $c = 2\sin(120t)$؛ لإيجاد شدة التيار c بالأمبيرات بعد t ثانية. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.
7a) إجابة ممكنة: $c = 2\sin(90t + 30t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الفعلية لشدة التيار بعد 1 sec. $\sqrt{3}$ Amp

للتمارين 11-8 انظر الهامش

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

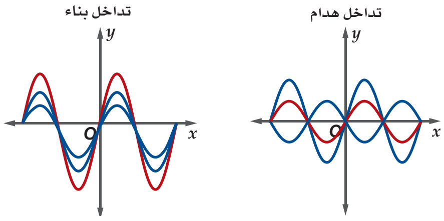
8) $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

9) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

10) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

11) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

12) **إلكترونيات:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. يحصل التداخل البنّاء عندما تندمج موجتان معًا للحصول على موجة سعتها أكبر من سعة كلا الموجتين المكوّنتين لها. كما يحصل التداخل الهدّام عندما تندمج الموجتان ؛ لتكوّنا موجة سعتها أصغر من سعة أيٍّ منهما.



يمكن تمثيل إشارة التداخل الأول بالمعادلة: $y = 20\sin(3\theta + 45°)$. أما إشارة التداخل الثاني فيمكن تمثيلها بالمعادلة $y = 20\sin(3\theta + 225°)$.

a) أوجد مجموع الدالتين. 0

b) ما نوع التداخل الناتج من دمج الإشارات الممثَّلة بالمعادلتين؟
تداخل هدّام، الإشارات تلغي بعضها بعضًا كليًّا

إجابات :

1) $\cos 165° = \cos(120° + 45°)$
$= \cos 120° \cos 45° - \sin 120° \sin 45°$
$= \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \frac{-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$
$= -\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)$

8) $\sin(90° + \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$
$\sin 90° \cos\theta + \cos 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$
$1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$
$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

9) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$
$\cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$
$0 \cdot \cos\theta - 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$
$-\sin\theta = -\sin\theta$ ✓

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

للتمارين 13–16 انظر الهامش

13) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$

14) $\cos(60° + \theta) = \sin(30° - \theta)$

15) $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$

16) $\tan(\theta + 45°) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

17a) $y = 30.9\sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 42.65$

17) **الطقس:** يمكن تمثيل درجات الحرارة الشهرية العليا في إحدى المدن بالدالة $y = 31.65\sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث x تُمثّل رقم الشهر من السنة. أما درجات الحرارة الدنيا في المدينة ذاتها فيمكن تمثيلها بالدالة: $y = 30.15\sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$.

a) اكتب دالة جديدة، وذلك من خلال إضافة التعبيرين الموجودين في الطرف الأيمن من كل دالة، ثم اقسم على 2 .

b) ما معنى الدالة التي كتبتها في الفرع **a** ؟

17b) الدالة الجديدة تُمثّل الوسط لدرجات الحرارة العليا والدنيا في كل شهر.

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي:

18) $\sin 165°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

19) $\cos 135°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

20) $\cos\frac{7\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

21) $\sin\frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

22) $\tan 195°$ $2-\sqrt{3}$

23) $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

24) $\tan 165°$ $-2+\sqrt{3}$

25) $\sec 1275°$ $\sqrt{2}-\sqrt{6}$

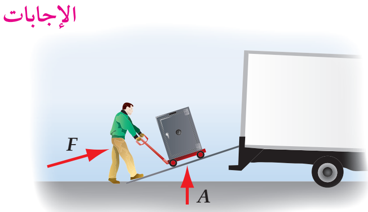
26) $\sin 735°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

27) $\tan\frac{23\pi}{12}$ $-2+\sqrt{3}$

28) $\csc\frac{5\pi}{12}$ $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

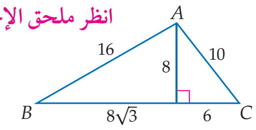
29) $\cot\frac{113\pi}{12}$ $2-\sqrt{3}$

30) **قوة:** في الشكل أدناه، إذا كان مقدار القوة اللازمة F، والضرورية لإبقاء الخزنة ثابتة على المنحدر تُعطى بالعلاقة: $F = \frac{W(\sin A + \mu\cos A)}{\cos A - \mu\sin A}$، حيث W هو وزن الخزنة، $\mu = \tan\theta$، فبيّن أن $F = W\tan(A+\theta)$. انظر ملحق الإجابات



31) **أغطية الأسِّرة:** قام مصمم أغطية أسرَّة بلصق مثلثين قائمي الزاوية للحصول على قطعة مثلثية يزيّن بها غطاء سرير. إذا كانت أطوال الأضلاع في المثلث الأول هي: 8 in , 10 in , 6 in ، وأطوال أضلاع المثلث الثاني هي $8\sqrt{3}$ in , 16 in , 8 in . وتم لصق المثلثين، بحيث وضع المصمم الضلعين اللذين قياسيهما 8 in أحدهما على الآخر؛ لينتج من ذلك المثلث ABC . كما في الشكل أدناه. للفروع a، b، c، d

انظر ملحق الإجابات



a) ما القيمة الفعلية لجيب الزاوية BAC ؟

b) ما القيمة الفعلية لجيب تمام الزاوية BAC ؟

c) ما قياس الزاوية BAC ؟

d) هل المثلث الجديد المتكوّن من لصق المثلثين قائم الزاوية أيضًا؟

32) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال منشور زجاجي، فإن معامل الانكسار n في الزجاج بالنسبة للهواء يعطى بالمعادلة:

$n = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\sin\frac{b}{2}}$ ، حيث a هو قياس زاوية انحراف الضوء الخارج من المنشور، و b قياس زاوية رأس المنشور.

بيّن أنه في المنشور المُعطى، $n = \sqrt{3}\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}$. انظر الهامش

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	39 ، 38 ، 41–56
ضمن ضمن المتوسط	31–33 فردي، 41–56
فوق فوق المتوسط	31–56

إجابات :

10) $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$\frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$\frac{(\sin\theta)\cdot 0 + (\cos\theta)\cdot 1}{(\cos\theta)\cdot 0 - (\sin\theta)\cdot 1} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$

$-\cot\theta = -\cot\theta$ ✓

11) $\sin(\theta+\pi) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$\sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$(\sin\theta)(-1) + (\cos\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$-\sin\theta = -\sin\theta$ ✓

13) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$(0)(\cos\theta) - (1)(\sin\theta) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$-\sin\theta = -\sin\theta$ ✓

14) $\cos(60° + \theta) \stackrel{?}{=} \sin(30° - \theta)$

$\cos 60°\cos\theta - \sin 60°\sin\theta \stackrel{?}{=}$

$\sin 30°\cos\theta - \cos 30°\sin\theta$

$\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$ ✓

15) $\cos(180° + \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\cos 180°\cos\theta - \sin 180°\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-1\cdot\cos\theta - 0\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

16) $\tan(\theta + 45°) \stackrel{?}{=} \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\frac{\tan\theta + \tan 45°}{1 - \tan\theta\tan 45°} \stackrel{?}{=} \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\frac{\tan\theta + 1}{1 - (\tan\theta)(1)} \stackrel{?}{=} \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ ✓

32) $\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\sin\frac{b}{2}} = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(a+60°)\right]}{\sin\frac{60°}{2}}$

$= \frac{\sin\left(\frac{a}{2}+30°\right)}{\sin 30°}$

$= \frac{\sin\frac{a}{2}\cos 30° + \cos\frac{a}{2}\sin 30°}{\sin 30°}$

$= \frac{\left(\sin\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\cos\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{3}\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}$

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلبة في التمرين 33 المعلومات المنظمة في جدول، بالإضافة إلى الآلة الحاسبة البيانية؛ لإثبات عدم صحة فرضية حول المتطابقات المثلثية.

إجابات :

39) إجابة ممكنة: لوصف الاندماج في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت، نحتاج إلى تحديد المجموع أو الفرق بين جيب أو جيب تمام زاويتين، حيث يحصل الاندماج عند مرور الأمواج عبر الفضاء نفسه في الوقت نفسه، وعندما تكون سعة الأمواج المندمجة أكبر يحصل تداخل بنّاء، أما عندما تكون للأمواج المندمجة سعة أقل يحصل تداخل هدّام.

42) إجابة ممكنة

$A = 35°,\ B = 60°,\ C = 85°,$

$0.7002 + 1.7321 + 11.4301 \stackrel{?}{=} (0.7002)\ (1.7321)\ (11.4301)$

$13.86 = 13.86\ \checkmark$

33) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين سوف نثبت عدم صحة الفرضية $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$.

للفرعين b,c انظر ملحق الإجابات

a) **جدولة:** أكمل الجدول أدناه.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45°	60°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
60°	45°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90°	30°	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b) **تمثيل بياني:** افترض أن B دائمًا أقل من A بـ $15°$. استعمل الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل كل من: $y = \sin (x + x - 15)$، $y = \sin x + \sin (x - 15)$ على الشاشة نفسها .

c) **تحليل:** حدّد إذا كانت $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$ متطابقة. فسِّر إجابتك.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات: للتمارين 34–37 انظر ملحق الإجابات

34) $\sin (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

35) $\cos (A + B) = \frac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

36) $\sec (A - B) = \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

37) $\sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **تبرير:** بسّط التعبير الآتي دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق. $\sin (-2\,\theta)$

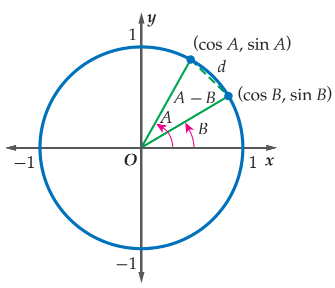
$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

39) **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، وفي التمرين 12 لشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. وضّح من خلال الشرح الفرق بين التداخل البنّاء، والتداخل الهدّام. انظر الهامش

40) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot (A + B)$ بدلالة $\cot A$, $\cot B$.

للتمرينين 40,41 انظر ملحق الإجابات

41) **برهان:** الشكل أدناه يُبيّن الزاويتين A , B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل صيغة المسافة؛ لإيجاد قيمة d ، حيث $(x_1 , y_1) = (\cos B , \sin B)$, $(x_2 , y_2) = (\cos A , \sin A)$



42) **مسألة مفتوحة:** في النظرية الآتية إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C . وتحقَّق من المساواة لكل القيم التي تختارها. انظر الهامش

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2-1)

للتمرينين 43, 44 انظر الهامش

43) $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}+\frac{\cos\theta}{\cot\theta}=\cos\theta+\sin\theta$

44) $\sec\theta\,(\sec\theta-\cos\theta)=\tan^2\theta$

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 1-1)

45) $\sin\theta\csc\theta-\cos^2\theta$ **$\sin^2\theta$**

46) $\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$ **$\cot\theta$**

47) $\cos\theta+\sin\theta\tan\theta$ **$\sec\theta$**

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي: (الدرس 1-1)

48) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta=\frac{1}{2}$ ، $0^\circ<\theta<90^\circ$ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

49) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ ، $180^\circ<\theta<270^\circ$ $\frac{-\sqrt{5}}{3}$

50) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta=-\frac{7}{12}$ ، $90^\circ<\theta<180^\circ$ $\frac{13}{12}$

51) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta=\frac{3}{4}$ ، $270^\circ<\theta<360^\circ$ $-\frac{3}{5}$

52) $\tan\theta$ ، إذا كان $8\cos\theta-5=0$ ، $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ $\frac{\sqrt{39}}{8}$

تدريب على اختبار معياري

53) ما التعبير الذي يكافئ $\sin^2\theta\,(1-\csc^2\theta)$ ؟ **B**

A $-\sin^2\theta$

B $-\cos^2\theta$

C $\sin^2\theta$

D $\cos^2\theta$

54) ما قيمة $\cos(\theta+40^\circ)\cos(\theta-50^\circ)+\sin(\theta+40^\circ)\sin(\theta-50^\circ)$ ؟ **C**

A 1

B $\frac{1}{2}$

C 0

D -1

55) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\cos\theta+0.3=0$ ، حيث $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الفعلية لـ $\cot\theta$. $\frac{3\sqrt{91}}{91}$

56) ما القيمة الفعلية للتعبير $\sin(60^\circ+\theta)\cos\theta-\cos(60^\circ+\theta)\sin\theta$ ؟ **B**

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D $\sqrt{3}$

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة وضع قائمة بالزوايا التي تقع قياساتها بين 0° ، 360° والتي يستطيعون إيجاد نسبها المثلثية بسهولة باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين وطرحهما. ثم اطلب إليهم الاحتفاظ بالقائمة كمرجع لهم عند التحضير للاختبارات.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-1، بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 1.

إجابات:

43) $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}+\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\stackrel{?}{=}\cos\theta+\sin\theta$

$\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\stackrel{?}{=}\cos\theta+\sin\theta$

$\sin\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\stackrel{?}{=}\cos\theta+\sin\theta$

$\cos\theta+\sin\theta=\cos\theta+\sin\theta$ ✓

44) $\sec\theta\,(\sec\theta-\cos\theta)\stackrel{?}{=}\tan^2\theta$

$\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\stackrel{?}{=}\tan^2\theta$

$\frac{1}{\cos^2\theta}-1\stackrel{?}{=}\tan^2\theta$

$\sec^2\theta-1\stackrel{?}{=}\tan^2\theta$

$\tan^2\theta=\tan^2\theta$ ✓

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أخبر الطلبة بأن $\sin 20^\circ$ يساوي تقريبًا 0.3420. واطلب إليهم أن يستعملوا هذه المعلومة لإيجاد كل من $\sin 65^\circ$ ، $\cos 65^\circ$. 0.9063, 0.4226

الفصل 1 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–1 إلى 3–1

بسّط كل تعبير مما يأتي: (الدرس 1-1)

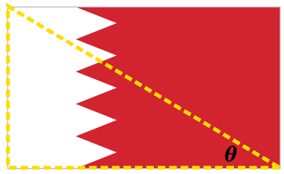
1) $\cot\theta \sec\theta$ **$\csc\theta$**

2) $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ **1**

3) $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ **$\cos\theta$**

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$ **1**

5) **أعلام:** إذا كان ظل الزاوية θ المبينة في علم مملكة البحرين أدناه هو $\tan\theta = \frac{31.5}{51}$، فأوجد $\sin\theta$. **0,53 تقريبًا**



أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-1)

6) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$، $0° < \theta < 90°$ **$\frac{4}{5}$**

7) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = \frac{-1}{2}$، $270° < \theta < 360°$ **$-\frac{\sqrt{5}}{2}$**

8) $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $0° < \theta < 90°$ **$\frac{\sqrt{7}}{3}$**

9) **الاختيار من متعدد:** أي التعابير الآتية تكافئ التعبير: $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$؟ (الدرس 1-1) **D**

A $\cos\theta$

B $\csc\theta$

C $\tan\theta$

D $\sec\theta$

10) **مدينة ألعاب:** يلعب أحد الأطفال على الأحصنة الدوّارة في مدينة الملاهي. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16m، ولإيجاد زاوية الميل نستعمل العلاقة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث R نصف قطر المسار الدائري، و v السرعة (m/sec)، و g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/sec^2$، فأجب عن الأسئلة الآتية:

a) إذا كان جيب زاوية ميل الطفل هو $\frac{1}{5}$ ، فما زاوية الميل التي يصنعها هذا الطفل؟ **11.5° تقريبًا**

b) ما سرعة الأحصنة الدوّارة؟ **4 m/sec تقريبًا**

c) إذا كانت سرعة الأحصنة الدوّارة تساوي 3.6 m/sec ، فما زاوية الميل لراكب الحصان؟ **9.4° تقريبًا**

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي: (الدرس 1-2) **للأسئلة 11–14 انظر إلى ملحق الإجابات**

11) $\cot^2\theta + 1 = \frac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$

12) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = 1$

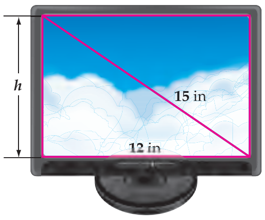
13) $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} = (1+\cos\theta)\sec\theta$

14) $\tan\theta(1-\sin\theta) = \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$

15) **حاسوب:** تُقاس شاشة الحاسوب عادةً بحسب طول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عن الأسئلة الآتية: (الدرس 1-1)

a) أوجد قيمة h . **9**

b) بيّن أن $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **انظر ملحق الإجابات**



أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي: (الدرس 1-2) **للأسئلة 16–19 انظر ملحق الإجابات**

16) $\tan^2\theta + 1 = \frac{\tan\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$

17) $\frac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} = (\sec\theta + 1)\cot\theta$

18) $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

19) $\cot\theta(1-\cos\theta) = \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1+\cos\theta}$

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-3)

20) $\cos 105°$ **$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$**

21) $\sin(-135°)$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

22) $\tan 15°$ **$2-\sqrt{3}$**

23) $\cot 75°$ **$2-\sqrt{3}$**

24) **الاختيار من متعدد:** ما القيمة الفعلية لِـ $\cos\frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 1-3) **C**

A $\sqrt{2}$

B $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

25) أثبت صحة المتطابقة: (الدرس 1-3)

$\cos 30°\cos\theta + \sin 30°\sin\theta = \sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta$. **انظر ملحق الإجابات**

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات

التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-1 , 1-2 , 1-3	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	تدريبات المهارات		
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

1-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
Double-Angle and Half-Angle Trigonometric Identities

فيما سبق
درست إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
تستعمل النوافير مضخات تضخ المياه بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء بالهواء بسرعة v، وزاوية مقدارها θ مع الخط الأفقي، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H :
$D = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta,\ H = \frac{v^2}{2g}\sin^2\theta$. إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية أو نصفها.

مفهوم أساسي — **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية**

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

مثال 1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الفعلية لِـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$.

خطوة 1 استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$ بالطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجبة، أي أن $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

خطوة 2 أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ بالضرب

تأكد

1) أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كانت $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ، $90° < \theta < 180°$. $\frac{-4\sqrt{2}}{9}$

1-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي
ما قبل الدرس 1-4
إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

الدرس 1-4
إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

ما بعد الدرس 1-4
حل معادلات مثلثية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- ما الفرق بين $\sin 2\theta$ ، $\sin^2\theta$؟ فسّر إجابتك. $\sin 2\theta$ تمثّل جيب الزاوية التي تساوي مثلي الزاوية θ، في حين تمثل $\sin^2\theta$ مربّع قيمة $\sin\theta$.
- هل التعبير عن $\frac{H}{D}$ بصورة دالة بدلالة θ يشمل المتغير v؟ لا؛ عند التبسيط، $\frac{v^2}{v^2} = 1$.
- وهل يحوي المتغير g؟ فسّر إجابتك. لا؛ قيمة $\frac{1}{2g} \div \frac{1}{g}$ هي $\frac{1}{2}$. لذا، لا يحتوي التعبير على المتغير g.

مصادر الدرس 1-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (30)	• تنويع التعليم ، ص (30)	• تنويع التعليم ، ص (35)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (7) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المثالان 2 ,1 يبيّنان كيفية إيجاد القيمة الفعلية لتعبير ما باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد القيمة الفعلية لـ $\cos 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{4}$، $0 < \theta < 90°$.
-0.125

2 أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي، علمًا بأن $\cos\theta = \frac{4}{5}$، $0° < \theta < 90°$.

a) $\tan 2\theta$ $\quad \frac{24}{7}$

b) $\sin 2\theta$ $\quad \frac{24}{25}$

إرشادات للمعلم الجديد

الحسّ الرياضي ذكِّر الطلبة بالمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$، وأن هناك صيغتان أخريان نحصل عليهما من هذه المتطابقة من خلال طرح $\sin^2\theta$ أو $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين. وذكِّرهم أيضًا بأن لـ $\cos 2\theta$ ثلاث صيغ.

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي، علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيم $\cos\theta, \sin\theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. سوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \quad \text{متطابقة مثلثية لضعف الزاوية}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}$$

b) $\tan 2\theta$

خطوة 1 أوجد $\tan\theta$ كي نستعمل متطابقة ظل ضعف الزاوية $\tan 2\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{تعريف دالة الظل}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{بالقسمة وإنطاق المقام}$$

خطوة 2 $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \quad \text{متطابقة مثلثية لضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \quad \tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}} \quad \text{بتربيع المقام}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

تأكد

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي، علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$:

2A) $\cos 2\theta$ $\quad -\frac{7}{9}$

2B) $\tan 2\theta$ $\quad \frac{4\sqrt{2}}{7}$

> **إرشادات للدراسة**
>
> **اشتقاق الصيغ**
>
> يمكنك استعمال المتطابقة $\sin(A+B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ، أو $\sin 2\theta$، كما يمكنك استعمال المتطابقة $\cos(A+B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ، أو $\cos 2\theta$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون يقدّم في هذا الدرس آخر المتطابقات المثلثية في هذا الفصل. وزّع الطلبة في مجموعات صغيرة، واطلب إليهم عمل بطاقات لكل متطابقة من المتطابقات، وكتابة طرف المتطابقة الأيسر على بطاقة وطرفها الأيمن على بطاقة أخرى، ثم يقومون بخلط البطاقات، ووضعها مقلوبة على الطاولة، ثم اطلب إليهم أن يلعبوا لعبة الذاكرة في قلب البطاقات لتجميع طرفي كل متطابقة.

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الفعلية لِـ $\cos \frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ باستعمال متطابقة فيثاغورس

$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ ‏ $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$ ‏ $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$ بالطرح

$\cos \theta = \pm\frac{3}{5}$ بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$ ‏ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ بالتبسيط

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°, 270°$ ، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°, 135°$. إذن؛ $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) أوجد القيمة الفعلية لِـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos \frac{135°}{2}$ ‏ $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos 135°}{2}}$ ‏ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ ‏ $67.5°$ تقع في الربع الأول فالقيمة موجبة

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ ‏ $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}}$ بالطرح

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$ ‏ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$ بالضرب

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ ‏ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ بالتبسيط

تأكد

3) أوجد القيمة الفعلية لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني. $\frac{\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}{6}$

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة
أول خطوة في الحل تكون بتحديد الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاوية $\frac{\theta}{2}$. عندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

قراءة الرياضيات

موجب أو سالب
إشارة النسبة المثلثية لنصف الزاوية تكون إمّا موجبة أو سالبة. ولذلك يجب تحديدها من البداية، بعكس إشارة النسب المثلثية لضعف الزاوية، حيث تُحدّد بالضبط.

التركيز في المحتوى الرياضي

اشتقاق الصيغ تُعَدُّ صيغ المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية حالات خاصة من الصيغ التي تمت دراستها في الدرس السابق. ويمكن الحصول على صيغ المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية من خلال فرض تساوي القيمتين A ، B في الصيغ المثلثية لمجموع زاويتين.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال متطابقات نصف الزاوية؛ لإيجاد القيمة الفعلية للدّالة المثلثية لزاوية موجودة في ربع محدد.

مثال إضافي

3

b) أوجد القيمة الفعلية لِـ $\cos\frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{3}{5}$، θ تقع في الربع الثاني. $\sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

b) أوجد القيمة الفعلية لِـ $\sin 165°$. $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء ركز على "إرشادات للدراسة" الموجودة في الهامش بجانب المثال 3 حيث إن معرفة الإشارة المناسبة للجواب في بداية الحسابات تساعد بعض الطلبة على تجنّب نسيان هذه الخطوة عند الانتهاء من حساباتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل فيديو وزع الطلبة في مجموعات، وزوّد كل مجموعة بمسألة تتناول إما المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية أو المتطابقة المثلثية لنصف الزاوية. واطلب إلى كل مجموعة تسجيل عرضٍ على الفيديو يُبيّن كيفية اختيار الصيغة المناسبة لحل المسألة، محاولاً أن تعطي الطلبة مسائل متنوعة قدر الإمكان.

مثال 4 من واقع الحياة: التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D}=\frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$=\frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بتبسيط كل من البسط والمقام

$$=\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$$=\frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بالتبسيط

$$=\frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بالتبسيط

$$=\frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

تأكد

أوجد قيمة كل ممّا يأتي:

4A) $\sin 135°$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

4B) $\cos\frac{7\pi}{8}$ $\quad -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

الربط مع واقع الحياة

تقع نافورة جلالة الملك حمد في المنطقة الواقعة بين جسر الشيخ حمد وجسر الشيخ عيسى بن سلمان، ويبلغ ارتفاعها 123 m، وتقارب في ارتفاعها نافورة (جيت دو) الشهيرة في بحيرة جنيف الذي يبلغ 140 m.

المصدر: منتدى بوابة البحرين
قسم: باب البحرين

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}=\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$.

$$\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}\overset{?}{=}\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$$ الطرف الأيمن

$$=\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+1}$$ $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$ بضرب كل من البسط والمقام في $\sin\theta$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$ بالضرب في $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=1$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}$$ بالضرب

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\cos\theta\sin\theta}$$ بالتبسيط

$$=\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$$ $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$

= الطرف الأيسر

تأكد

5) أثبت صحة المتطابقة $4\cos^2 x-\sin^2 2x=4\cos^4 x$ انظر الهامش

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مثال 4 يُبيّن كيفية تبسيط معادلة تحتوي على تعابير مثلثية.

مثال 5 يُبيّن كيفية إثبات صحة متطابقات مثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

مثالان إضافيان

4 **نافورة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، ثم أوجد $\frac{D}{H}$.

$4\cot\theta=\frac{4}{\tan\theta}$

5 أثبت صحة المتطابقة

$\sin\theta(\cos^2\theta-\cos 2\theta)=\sin^3\theta$

$\sin\theta\,(\cos^2\theta-\cos 2\theta)\overset{?}{=}\sin^3\theta$

$\sin\theta\,[\cos^2\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]\overset{?}{=}\sin^3\theta$

$\sin\theta\,(\cos^2\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta)\overset{?}{=}\sin^3\theta$

$\sin\theta\,(\sin^2\theta)\overset{?}{=}\sin^3\theta$

$\sin^3\theta=\sin^3\theta\ ✓$

إجابة (تأكد):

5) $4\cos^2 x-\sin^2 2x\overset{?}{=}4\cos^4 x$

$4\cos^2 x-4\sin^2 x\cos^2 x\overset{?}{=}4\cos^4 x$

$4\cos^2 x\,(1-\sin^2 x)\overset{?}{=}4\cos^4 x$

$4\cos^2 x\cos^2 x\overset{?}{=}4\cos^4 x$

$4\cos^4 x=4\cos^4 x\ ✓$

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$، إذا كان: (الأمثلة 1-3) للتمارين 1-6 انظر الهامش

1) $\sin \theta = \frac{1}{4},\ 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{4}{5},\ 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = -\frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

4) $\cos \theta = \frac{3}{5},\ 270° < \theta < 360°$

5) $\tan \theta = -\frac{8}{15},\ 90° < \theta < 180°$

6) $\tan \theta = \frac{5}{12},\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي:

7) $\sin \frac{\pi}{8}$ $\quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

8) $\cos 15°$ $\quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

9) **كرة قدم:** يركل لاعب الكرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية مقدارها 52 ft/sec. إذا كانت المسافة d التي تقطعها الكرة في الهواء تعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث الرمز g يُمثّل تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\ ft/s^2$، و v تُمثّل السرعة الابتدائية، فأجب عن الأسئلة الآتية: (مثال 4)

$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

a) بسّط الصيغة باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) باستعمال الصيغة المبسّطة، ما المسافة التي تقطعها الكرة قبل أن تصطدم بسطح الأرض؟ 81 ft تقريبًا

أثبت صحة المتطابقات الآتية: (مثال 5) للتمرينين 10-11 انظر الهامش

10) $\tan \theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

11) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$، إذا كان: (الأمثلة 1-3) للتمارين 12-17 انظر ملحق الإجابات

12) $\sin \theta = \frac{2}{3},\ 90° < \theta < 180°$

13) $\sin \theta = -\frac{15}{17},\ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

14) $\cos \theta = \frac{3}{5},\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

15) $\cos \theta = \frac{1}{5},\ 270° < \theta < 360°$

16) $\tan \theta = \frac{4}{3},\ 180° < \theta < 270°$

17) $\tan \theta = -2,\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي:

18) $\sin 75°$ $\quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

19) $\sin \frac{3\pi}{8}$ $\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

20) $\cos \frac{7\pi}{12}$ $\quad -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

21) $\tan 165°$ $\quad \sqrt{3}-2$

22) $\tan \frac{5\pi}{12}$ $\quad 2+\sqrt{3}$

23) $\tan 22.5°$ $\quad \sqrt{2}-1$

أثبت صحة المتطابقات الآتية: (مثال 5)

24) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

25) $1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{\sec \theta + \sin \theta}{\sec \theta}$ للتمارين 24-27 انظر ملحق الإجابات

26) $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

27) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 29 – 1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$

2) $\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$

3) $\frac{-120}{169}, \frac{-119}{169}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}$

4) $\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

5) $\frac{-240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$

6) $\frac{120}{169}, \frac{119}{169}, \frac{5\sqrt{26}}{26}, \frac{-\sqrt{26}}{26}$

10)
$$\tan \theta \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$
$$\stackrel{?}{=} \frac{1-(1-2\sin^2 \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta}$$
$$\stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta}$$
$$\stackrel{?}{=} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$
$$= \tan \theta \checkmark$$

11)
$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 \stackrel{?}{=} 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$
$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \stackrel{?}{=} 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$
$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \checkmark$$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	37، 58–39
ضمن المتوسط	30، 31–37 فردي، 58–39
فوق المتوسط	58–30

28) **جغرافيا:** أثارت مسألة تمثيل الأرض على سطحٍ مستوٍ كثيرٍ من التساؤلات والأبحاث الفنية والهندسية، حيث تأكد أن سطح الأرض منحنٍ أو كروي، فكيف يمكن تمثيل هذا السطح على سطح مستوٍ (وهو الخارطة). على هذا الأساس يمكننا تعريف الإسقاط الميركاتوري (Mercator projection) على أنه تعبير فني هندسي يقصد به نقل شكل المعالم، والشخوص من السطح الأرضي إلى السطح المستوي (الخارطة)، إذا علمت أن عملية الإسقاط هذه تنتج مسافات مشوّهة تختلف عن المسافات الحقيقية، وتقل دقتها كلما ابتعدنا عن خط الاستواء، وأن موقع أية نقطة على الكرة الأرضية يُعطى مسقطها بالتعبير: $\tan\left(45° + \frac{L}{2}\right)$ حيث يُمثّل الرمز L دائرة العرض التي تقع عليها النقطة، فاعتمد على ذلك في الإجابة عما يأتي:

a) اكتب التعبير بدلالة دالة مثلثية في L. انظر الهامش

b) إذا كان موقع احدى المناطق على الكرة الأرضية °30 شمالاً،فأوجد موقعها بالإسقاط الميركاتوري عندما $L = 30°$. $\sqrt{3}$

29) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي المار في الدائرة الكهربائية I بالأمبيرات عند t ثانية هو $I_0 \sin t\theta$، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$، حيث R المقاومة. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$. (مثال 4) انظر الهامش

30) **كرة قدم:** افرض أن لاعب كرة القدم يستمر في ضرب الكرة بسرعة ابتدائية مقدارها 95 ft/sec . برهن أن المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة في الهواء، ستكون نفسها لكل من الزاويتين $\theta = 45° + A$, $\theta = 45° - A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 9 . انظر ملحق الإجابات

أوجد القيم الفعلية لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، اذا كان:

31) $\cos\theta = \frac{4}{5}, 0° < \theta < 90°$ $\quad \frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

32) $\sin\theta = \frac{1}{3}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{7}$

33) $\tan\theta = -3, 90° < \theta < 180°$ $\quad -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

34) $\sec\theta = -\frac{4}{3}, 90° < \theta < 180°$ $\quad \frac{-3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}, -3\sqrt{7}$

35) $\csc\theta = -\frac{5}{2}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ $\quad \frac{-4\sqrt{21}}{25}, \frac{17}{25}, \frac{-4\sqrt{21}}{17}$

36) $\cot\theta = \frac{3}{2}, 180° < \theta < 270°$ $\quad \frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** يحاول علي وسلمان حساب القيمة الفعلية لِـ $\sin 15°$. أيهما حلّه صحيح؟ فسّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

علي

$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\sin(45 - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{4}}{4}$

سلمان

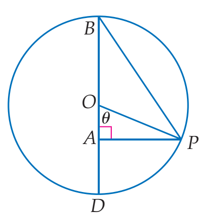
$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

$\sin\frac{30°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$

$= 0.5$

38) **تحدٍّ:** استعمل دائرة الوحدة أدناه والشكل المرسوم داخلها، لتبرهن أن: انظر الهامش

$$\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$



إجابات :

(28a $\quad \dfrac{1 \pm \sqrt{\frac{1-\cos L}{1+\cos L}}}{1 \mp \sqrt{\frac{1-\cos L}{1+\cos L}}}$

29 $\quad P = I_0^2 R \sin^2 \theta t$

$P = I_0^2 R (\cos^2 \theta t - \cos 2\theta t)$

$P = I_0^2 R(\frac{1}{2}\cos 2\theta t + \frac{1}{2} - \cos 2\theta t)$

$P = I_0^2 R(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta t)$

$P = \frac{1}{2} I_0^2 R - \frac{1}{2} I_0^2 R \cos^2 2\theta t$

38) $\angle PBD$ هي زاوية محيطة تقابل القوس نفسه الذي تقابله الزاوية المركزية POD . لذا، فإن $m\angle PBD = \frac{1}{2} m\angle POD$، وباستعمال المثلث القائم، تجد أن

$\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{PA}{BA} = \frac{PA}{1+OA}$

$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

34 الفصل 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية

39) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin(A+B)$، لاشتقاق $\sin 2\theta$، واستعمل الصيغة $\cos(A+B)$، لاشتقاق $\cos 2\theta$. انظر ملحق الإجابات

40) **تبرير:** اشتقّ متطابقات النسب المثلثية لنصف الزاوية من متطابقات النسب المثلثية لضعف الزاوية. انظر ملحق الإجابات

41) **مسألة مفتوحة:** يقوم لاعب الغولف بضرب الكرة باستمرار بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/sec، ولنفرض أن المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$. فسّر لماذا نحصل على مسافة عظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32\ \text{ft/sec}^2)$ انظر الهامش

42) **اكتب:** فقرة مختصرة عن الشروط اللازم توافرها، كي تستعمل كلّا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3–1)

43) $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

44) $\cos 105°$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

45) $\sin 285°$ $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

46) $\cos(-30°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

47) $\sin(-240°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

48) $\cos(-120°)$ $-\frac{1}{2}$

أثبت صحة المتطابقات الآتية: (الدرس 2–1) 49–51 انظر الهامش

49) $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

50) $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1-\cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

51) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

ما القيمة الفعلية لكل مما يأتي: (الدرس 3–1)

52) $\cos 78° \cos 18° - \sin 78° \sin 18°$ $\frac{1}{2}$

53) $\cos 31° \cos 14° + \sin 31° \sin 14°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

54) $\frac{\tan 70° - \tan 40°}{1 + \tan 70° \tan 40°}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

تدريب على اختبار معياري

55) ماالقيمة الفعلية لـ $\tan\frac{\theta}{2}$، إذا كان $\cos\theta = \frac{-4}{5}$، $90° < \theta < 180°$؟ **A**

A) -3

B) $\frac{-1}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

D) 3

56) ماالقيمة الفعلية لـ $\cos 2\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{-3}{4}$، θ تقع في الربع الثالث؟ **B**

A) $\frac{-7}{16}$

B) $-\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{7}{16}$

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي: للتمرينين 57, 58 انظر ملحق الإجابات

57) $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$

58) $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

تنبيه!

اكتشف الخطأ يتعين على الطلبة في التمرين 37 أن يعرفوا أن حل علي خاطئ، حيث عوض عن $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ بـ $\frac{\sqrt{4}}{4}$، كما أن حل سلمان خاطئ حيث عوض عن $\cos 30°$ بـ $\frac{1}{2}$ بدلاً من $\frac{\sqrt{3}}{2}$، لذا بيّن للطلبة أن الخطوتين $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$، $\sin 15° = \sin\frac{30°}{2}$، صحيحتان. ولكن خطوة علي الرابعة يجب أن تكون $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$، وخطوات سلمان بعد السطر الأول يجب أن تكون

$$\sin\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة توضيح كيفية تحديد إن كانت المسألة تتضمن استعمال المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية أو المتطابقة المثلثية لنصف الزاوية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 4–1، بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 1.

إجابات:

41) إجابة ممكنة:

$d = \frac{2v^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

وتكون أكبر قيمة للمقدار $\frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$ عندما $\sin 2\theta = 1$، ويتحقق هذا عندما $2\theta = 90°$

أي أن $\theta = 45°$

49) $\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta = \cot\theta + \sec\theta$ ✓

51) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ ✓

50) $\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} (1-\cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} \div \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta = \sin^2\theta + \tan^2\theta$ ✓

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلبة كتابة تعبير لـ $\sin 4\theta$ بدلالة $\cos\theta$، $\sin\theta$.

إجابة ممكنة: $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

استكشاف
1-5 معمل الآلة الحاسبة البيانية
حَلّ المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

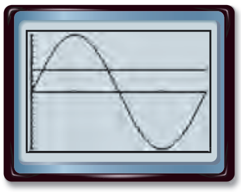
التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحَلّ المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر جميعها التي تحقق المعادلة. بإمكانك استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحَلّ المعادلات من خلال التمثيل البياني لكل طرف في المعادلة كدالة، ثم إيجاد نقط التقاطع.

نشاط 1 حلول حقيقية

استعمل الآلة الحاسبة البيانية في حَلّ المعادلة $\sin x = 0.4$، إذا كانت $0° \le x < 360°$.

خطوة 1 أدخل المعادلات ذات العلاقة ومثّلها بيانيًا. أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين: $Y1 = \sin x$، $Y2 = 0.4$. ثم مثّل الدالتين بيانيًا، ولأن الفترة بالدرجات، فاضبط الآلة الحاسبة على نظام الدرجات.

اضغط على المفاتيح الآتية من اليسار إلى اليمين: MODE ▼ ▼ ▶ ENTER
Y= SIN X,T,θ,n)
ENTER 0.4 ENTER GRAPH



[0, 360] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.1

خطوة 2 قرّب الحلول بناءً على التمثيل البياني، تستطيع أن ترى أنّه توجد نقطتان يتقاطع عندهما التمثيل البياني ضمن الفترة $0° \le x < 360°$. استعمل خاصية CALC ؛ لتحديد قيم x التي يتقاطع عندها التمثيلان.

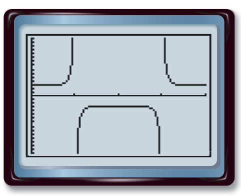
الحلول هي $x \approx 23.57°$, $x \approx 156.4°$.

نشاط 2 لا يوجد حلول حقيقية

استعمل الآلة الحاسبة البيانية في حَلّ المعادلة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.

خطوة 1 أدخل المعادلات ذات العلاقة ومَثّلها بيانيًا. أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين، $y_1 = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x$, $y_2 = 0$.

اضغط على المفاتيح الآتية من اليسار إلى اليمين: Y= TAN X,T,θ,n) x^2 COS
X,T,θ,n) + 3 COS X,T,θ,n
) ENTER 0 ENTER



[0, 360] scl: 90 by [−15, 15] scl: 1

خطوة 2 هاتان الدّالتان لا تتقاطعان.

لذلك، ليس للمعادلة $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الآلة الحاسبة البيانية في حَلّ المعادلات الآتية لقيم x الموضحة بجانب كل منها:

1) $0° \le x < 360°$, $\sin x = 0.7$ **$44.4°$, $135.6°$**

2) $0° \le x < 360°$, $\tan x = \cos x$ **$38.17°$, $141.8°$**

3) $0° \le x < 360°$, $3 \cos x + 4 = 0.5$ **لا يوجد حلول حقيقية**

4) $-720° \le x < 720°$, $0.25 \cos x = 3.4$ **لا يوجد حلول حقيقية**

5) $0° \le x < 360°$, $\sin 2x = \sin x$ **$0°$, $60°$, $180°$, $300°$**

6) $-360° \le x < 360°$, $\sin 2x - 3 \sin x = 0$ **$-360°$, $-180°$, $0°$, $180°$**

استكشاف
5 - 1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل المعادلات المثلثية.

المواد اللازمة

الآلة الحاسبة البيانية.

إرشادات التدريس

في النشاط 1 يمكن إيجاد الحلول التقريبية باستعمال ميزة Trace. وعلى أية حال، فإن ميزة Intersect تعطي حلولاً أكثر دقة في معظم المواقف.

ذكّر الطلبة باستعمال النوافذ المناسبة لرسوماتهم.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلبة في مجموعات ثنائية ، ذوي قدرات متفاوتة لكي يساعد بعضهم بعضًا على تصحيح أخطاء الضغط على المفاتيح، ثم اطلب إليهم إكمال تنفيذ النشاطين 1, 2 وحل التمرين 1.

اسأل:

- كيف ترتبط حلول المعادلات بنقاط تقاطع المنحنيات؟ **الحلول هي قيم x لنقاط التقاطع.**
- كيف يمكنك أن تحدّد عدم وجود حل للمعادلة؟ **منحنيا y_1 ، y_2 لا يتقاطعان.**

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 6–2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 6 ؛ لتقويم مدى فهم الطلبة لطريقة تأثير فترات قيم x في الحلول.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلبة حول الطريقة التي يؤثر فيها تحديد فترة مختلفة أو عدم وجود فترة في حلول التمارين 6–1.

1-5 حَلّ المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فيما سبق

درست المتطابقات المثلثية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميِّز الحلول المرفوضة للمعادلات المثلثية.

المفردات الأساسية

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند ركوب لعبة العجلة الدوارة التي قطرها 40m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة، يمكن تمثيل ارتفاعك فوق سطح الأرض بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

ما الزمن اللازم ليكون ارتفاع مقعدك عن سطح الأرض 31m منذ ركوبك؟

حَلّ المعادلات المثلثية درست نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية وهو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. في هذا الدرس سوف يتم حَلّ **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير. ويشبه حَلّ هذا النوع من المعادلات الحل للمعادلات الجبرية.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ المعادلة $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2}\cos \theta = 0$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$.

المعادلة الأصلية $\quad \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2}\cos \theta = 0$

بالتحليل $\quad \cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) = 0$

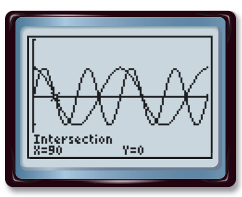
خاصية الضرب الصفري $\quad \cos \theta = 0$ أو $\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$

$\theta = 90°$ أو $270°$ $\qquad \sin \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$

الحلول هي $30°, 90°, 150°$.

التحقق يمكنك التأكد من الإجابة بالتمثيل البياني لكل من: $y = \sin \theta \cos \theta,\ y = \frac{1}{2}\cos \theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلات البيانية. بإمكانك أن ترى أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم فقط بالنقط الموجودة في الفترة بين $0°, 180°$.



تأكد

1) أوجد حلول المعادلة $\sin 2\theta = \cos \theta$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$. $\quad \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

نقوم بحل المعادلات المثلثية عادة لقيم المتغيّر بين $0°, 360°$ أو بين $0, 2\pi$. يوجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. ولذلك فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

1-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-5

إثبات صحة متطابقات مثلثية.

الدرس 1-5

حل معادلات مثلثية.

تمييز الحلول المرفوضة للمعادلات المثلثية.

ما بعد الدرس 1-5

استعمال حساب المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما المسافة التي تقطعها نقطة على العجلة في الدورة الواحدة؟ $40\pi \approx 125.66\,m$.
- ما المسافة التي يقطعها أيُّ موقع على العجلة في دقيقة واحدة؟ $60\pi \approx 188.5\,m$.
- ما قيمة $20 \cos 3\pi t$ عندما $t = 0$؟ 20

حل المعادلات المثلثية

مثال 1 يُبيّن كيفية حل المعادلات المثلثية في فترة معينة.

مصادر الدرس 1-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (39)	• تنويع التعليم ، ص (39)	
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (8) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

حل المعادلات المثلثية

مثال 2 يُبيّن كيفية حل المعادلات المثلثية لزوايا بالراديان.

مثال 3 يُبيّن كيفية حل مسائل من واقع الحياة تتضمن معادلات مثلثية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حُلّ المعادلة $2\cos^2\theta - 1 = \sin\theta$، إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$. $30°, 150°$

2 a) حُلّ المعادلة $\cos\theta + \frac{1}{4} = \sin^2\theta$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات.
$60° + k \cdot 360°, 300° + k \cdot 360°$ حيث k أي عدد صحيح.

b) حُلّ المعادلة $2\cos\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.
$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ حيث k أي عدد صحيح.

3 **مدينة الملاهي:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. بعد كم من الزمن سيكون ارتفاع العجلة الدوّارة $(10\sqrt{2} + 21)\,m$ عن سطح الأرض، بدءًا من دورانها لأول مرة؟

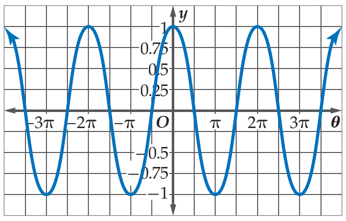
$10\sqrt{2} + 21 = 21 - 20\cos 3\pi t$,
$10\sqrt{2} = -20\cos 3\pi t$,
$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 3\pi t$,
$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\pi t$,
$\frac{3}{4}\pi = 3\pi t$,
$\frac{1}{4} = t$,
$\frac{1}{4}\,min$ ، أو $15\,sec$.

مثال 2 عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

انظر إلى التمثيل البياني لـ $y = \cos\theta$؛ لإيجاد حلول $\cos\theta = -1$.



الحلول هي $\ldots, -5\pi, -3\pi, -\pi$، الحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π، وكذلك $\ldots$، $\pi, 3\pi, 5\pi$. طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$، حيث k يمثل عددًا صحيحًا.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول كمضاعفات التعبير $\pi + 2k\pi$ عبارة عن π مجموعًا له مضاعفات 2π، ولذلك، فليس من الضروري سرد جميع الحلول.

تأكد

2A) حُلّ $\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات.

2B) حُلّ $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

2A) $90° + k \cdot 180°$, $120° + k \cdot 360°$, $240° + k \cdot 360°$

2B) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حَلّ مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة حَلّ معادلات مثلثية

مدينة ملاهٍ: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك $31\,m$ عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

المعادلة الأصلية	$h = 21 - 20\cos 3\pi t$
بالتعويض بـ 31 بدلًا من h	$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$
بطرح 21 من كلا الطرفين	$10 = -20\cos 3\pi t$
بقسمة كل طرف على -20	$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$
بأخذ معكوس جيب التمام	$\cos^{-1} -\frac{1}{2} = 3\pi t$

بما أن $-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ k أي عدد صحيح

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ بقسمة الطرفين على 3π $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}\,min$، أو $13\,sec$ تقريبًا.

تأكد

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك $41\,m$ فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟ $20\,sec$ تقريبًا

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π أو 2π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

حلول مرفوضة بعض المعادلات المثلثية ليس لها حلول. على سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل، لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع بين 1 و -1، بما فيها هذان العددان. وبناءً على ذلك تكون مجموعة الحل لـ $\cos\theta = 4$ هي المجموعة الخالية ϕ. وبعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، هذه الحلول تسمى حلولًا مرفوضة.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير يوضح المثال 2 كيفية البحث عن أنماط في الحل. لذا اطلب إلى الطلبة البحث عن أزواجٍ من الحلول يكون الفرق بينها إما π أو 2π.

مثال 4 حدّد إذا كان الحَلّ موجودًا أو لا

حُلّ كلًّا من المعادلتين المثلثيتين الآتيتين:

a) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

المعادلة الأصلية: $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$

بالتحليل: $(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$

خاصية الضرب الصفري: $2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$

$2\sin\theta = -1 \qquad \sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل، لأن كل قيمة من قيم النسبة المثلثية $\sin\theta$ يجب أن يقع بين 1 و -1 ، بما فيها هذان العددان.

لذلك، تكون الحلول $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

التحقق:

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0 \qquad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$

$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0 \qquad 2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0 \qquad 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0 \qquad \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \checkmark \qquad 0 = 0 \checkmark$$

b) $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ ، إذا كان $0° \le \theta < 360°$.

المعادلة الأصلية: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$

بالتربيع: $\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$: $1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$

بطرح $(1 - \cos^2\theta)$ من الطرفين: $0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$

بالتحليل: $0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$

خاصية الضرب الصفري: $1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta \qquad \sin\theta = 1 + \cos\theta$$

$$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180° \qquad \sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$$

$$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1) \qquad 1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$

$$0 = 0 \checkmark \qquad 1 = 1 \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$

$$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$$

$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$

$$-1 \ne 1 \checkmark$$

إذن $270°$ حلًّا مرفوضًا

الحلول هي $90°, 180°$.

تأكد

حُلّ كلًّا من المعادلتين المثلثيتين الآتيتين:

4A) $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$ لا يوجد حل

4B) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$ متطابقة، لها عدد لانهائي من الحلول؛ لأن جميع قيم θ تمثل حلولًا لها.

إذا لم تتمكّن من حَلّ معادلة بالتحليل إلى العوامل، حاول إعادة كتابة التعبير فيها باستعمال المتطابقات المثلثية. بالرغم من أن استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، مثل التربيع قد يقود إلى حلول مرفوضة. لذلك من الضروري التأكد من حلولك باستعمال المعادلة الأصلية.

حلول مرفوضة

مثال 4 يُبيّن كيفية حل معادلة مثلثية واختبار إن كان لها حلول مرفوضة أو لا.

مثال إضافي

4 حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta$ إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos\theta = 1 - \sin\theta$ إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$

$0°, 90°, 360°$

التركيز في المحتوى الرياضي

عدد لا نهائي من الحلول العديد من المعادلات المثلثية لها عدد لانهائي من الحلول. وإذا لم يكن هنالك فترة لتحديد عدد الحلول، فإنه يجب التعبير عن العدد اللانهائي من الحلول باستعمال تعبير بدلاً من مجرد استعمال عدد. فعندما يتم إيجاد حل معادلة مثلثية لكل دورة كاملة حول نقطة الأصل، فإن الحلول جميعها تكتب على الصورة $a° + k \cdot 360°$ ، حيث k أي عدد صحيح.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة اطلب إلى الطلبة كتابة مدوّنة حول كيفية حل المعادلات المثلثية، واطلب إليهم أيضًا وصف كيف تشبه هذه العملية حل الأنواع الأخرى من المعادلات وكيف تختلف عنها.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة في أثناء دراستهم هذا الدرس وضع قائمة بالأخطاء الشائعة التي وقعوا فيها على لوحة تعلّق داخل الصف. وشجعهم على إضافة بعض المقترحات حول كيفية تفادي مِثل هذه الأخطاء. فعلى سبيل المثال، أحد الأخطاء الشائعة هو أن تكون الآلة الحاسبة مضبوطة على نظام الدرجات، في حين يجب أن تكون مضبوطة على نظام الراديان؛ لأن حل المسألة يتطلب ذلك، والعكس صحيح.

حلول مرفوضة

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال المتطابقات لحل معادلة مثلثية.

مثال إضافي

5 حُلّ المعادلة $\tan^4\theta - 4\sec^2\theta = -7$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات.

$\theta = 60° + 180°k,\ \theta = 120° + 180°k$ حيث k أي عدد صحيح.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–29 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة (تأكد):

(5A $\sin\theta \cot\theta - \cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow \sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta - \cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta(1-\cos\theta) = 0$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90° \text{ or } 270°$

$1-\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$\Rightarrow \theta = 0° \text{ or } 180°$

لاحظ أن $\cot\theta$ غير معرف عند $0°$ وعند $180°$

الحلول هي:

$\theta = 90° + k \bullet 180°$

أو $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح

(5B $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

$\cos\theta \div \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 2\sin^2\theta = 0 \Rightarrow$

$\cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 2\sin^2\theta = 0 \Rightarrow$

$\sin\theta + 2\sin^2\theta = 0 \Rightarrow$

$\sin\theta(1+2\sin\theta) = 0 \Rightarrow$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ or } \pi \Rightarrow$

مرفوض لأن $\cot\theta$ غير معرف عندها.

أو $1+2\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{-1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \theta = 210° + k\bullet 360° \rightarrow \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ &\text{أو } \theta = 330° + k\bullet 360° \rightarrow \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}\right\} k \in Z$$

إرشادات للدراسة

حَلّ المعادلات المثلثية
تذكر أن حَلّ معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغيرات جميعها.

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات

حُلّ $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

المعادلة الأصلية	$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$
$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$	$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$
خاصية التوزيع	$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$
بجعل أحد طرفي المعادلة مساويًا للصفر	$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$
بالتحليل	$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta - 3 = 0$، $\tan^2\theta = 3$، $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

أو $\tan^2\theta + 1 = 0$، $\tan^2\theta = -1$ هذا الجزء لا يعطي حلولًا لأن $\tan^2\theta$ ليس سالبًا.

الحلول هي $\theta = 60° + 180°k,\ \theta = -60° + 180°k$، حيث k هو أي عدد صحيح. $60° + 180°k,\ -60° + 180°k$.

تأكد

حُلّ كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان: انظر الهامش

(5A $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$ **(5B** $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي، علمًا بأن $0° \le \theta \le 360°$: (مثال 1)

1) $2\sin\theta + 1 = 0$ — $210°, 330°$
2) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$ — $180°$
3) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ — $60°, 180°, 300°$
4) $2\cos\theta = 1$ — $60°, 300°$
5) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ — $150°, 210°$
6) $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ — $120°, 150°, 300°, 330°$
7) $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta$ — انظر ملحق الإجابات
8) $\sin\theta + \cos\theta = 1$ — $0°, 90°, 360°$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)
للتمارين (9, 11, 12, 14) انظر ملحق الإجابات

9) $4\sin^2\theta - 1 = 0$
10) $2\cos^2\theta = 1$ — $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
11) $\cos 2\theta\sin\theta = 1$
12) $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$
13) $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$ — $\pi + 2k\pi$
14) $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

15) $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$ — $90° + k \bullet 180°$
16) $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$ — $0° + k \bullet 180°, 90° + k \bullet 360°$
17) $2\sin^2\theta - 1 = 0$ — $45° + k \bullet 90°$
18) $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$ — $30° + k \bullet 360°, 150° + k \bullet 360°, 90° + k \bullet 180°$
19) $\cos 2\theta\sin\theta = 1$ — $270° + k \bullet 360°$
20) $\sin\theta\tan\theta - \tan\theta = 0$ — $0° + k \bullet 180°, 90° + k \bullet 360°$

21) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: انظر ملحق الإجابات
a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة المعينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟ (مثال 3)
b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات على الأقل؟ فسّر إجابتك.

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

22) $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ — $\frac{\pi}{2} + \pi k$
23) $\tan^2\theta + 2\tan\theta + 1 = 0$ — $\frac{3\pi}{4} + \pi k$
24) $\cos^2\theta + 3\cos\theta = -2$ — $\pi + 2\pi k$
25) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ — $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	30–48، 58، 60–62، 64–83
ضمن المتوسط	31–55 فردي، 56–58، 60–62، 64–83
فوق المتوسط	49–83

29) $\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$

26) $\tan \theta = 1$ $\frac{\pi}{4}+k \cdot \pi$ أو $45° + k \cdot 180°$

27 $\cos 8\theta = 1$ انظر ملحق الإجابات

28) $\sin \theta + 1 = \cos 2\theta$ $0° + k \cdot 180°, 210° + k \cdot 360°,$ $330° + k \cdot 360°$

29) $2\cos^2 \theta = \cos \theta$

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم **θ** جميعها الموضحة بجانب كل منها:
(مثال 1)

30) $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$ ، $0° \le \theta \le 360°$ $60°, 120°, 240°, 300°$

31) $2\sin^2 \theta = 1$ ، $90° < \theta < 270°$ $135°, 225°$

32) $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

33) $3\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ ، $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{6}$

34) $2\sin \theta + \sqrt{3} = 0$ ، $180° < \theta < 360°$ $240°, 300°$

35) $4\sin^2 \theta - 1 = 0$ ، $180° < \theta < 360°$ $210°, 330°$

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم **θ** جميعها، إذا كان قياس **θ** بالراديان:
(مثال 2)

36) $\cos 2\theta + 3\cos \theta = 1$ $\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$

37 $2\sin^2 \theta = \cos \theta + 1$ انظر الهامش

38) $\cos^2 \theta - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\cos \theta$ $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ، $\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

39) $3\cos \theta - \cos \theta = 2$ $0+2k\pi$

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم *θ* جميعها، إذا كان قياس *θ* بالدرجات:

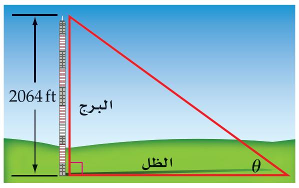
40) $\sin \theta - \cos \theta = 0$ $45° + k \cdot 180°$

41) $\tan \theta - \sin \theta = 0$ $0° + k \cdot 180°$

42) $\sin^2 \theta = 2\sin \theta + 3$ $270° + k \cdot 360°$

43) $4\sin^2 \theta = 4\sin \theta - 1$ $30° + k \cdot 360°, 150° + k \cdot 360°$

44) **إلكترونيات:** يبلغ ارتفاع أعلى برج للبث التلفزيوني 2064 ft. أوجد *θ*، إذا كان طول الظل هو 1mi؟ $21°$ تقريبًا



حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم **θ** جميعها، إذا كان قياس **θ** بالراديان:

45) $2\sin^2 \theta = 3\sin \theta + 2$ للتمارين 45-48 انظر الهامش

46) $2\cos^2 \theta + 3\sin \theta = 3$

47) $\sin^2 \theta + \cos 2\theta = \cos \theta$

48) $2\cos^2 \theta = -\cos \theta$

49 **أنهار:** يسبِّب المدّ والجزر في أحد المحيطات اختلاف العمق y بالأمتار لأحد الأنهار التي تصب في المحيط، حسب دالة تتضمّن جيب المتغير x الذي يدل على الساعة في اليوم. إذا علمت أن الدالة في أحد الأيام هي:
$y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$ ، حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$ ،
0 تدل على الساعة 12 في منتصف الليل، 13 تدل على الساعة 1 بعد الظهر، وهكذا.... انظر ملحق الإجابات

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم **θ** جميعها ، إذا كان قياس **θ** بالراديان:

50) $(\cos \theta)(\sin 2\theta) - 2\sin \theta + 2 = 0$ $\frac{\pi}{2}+2\pi k$

51 $2\sin^2 \theta + (\sqrt{2}-1)\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ انظر ملحق الإجابات

52) $2\sin \theta = \sin 2\theta$ πk

53) $\cos \theta \tan \theta - 2\cos^2 \theta = -1$ $\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k$

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم **θ** جميعها ، إذا كان قياس **θ** بالدرجات.

54) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta$ $30° + 360°k,$ $150° + 360°k, 330° + 360°k$

55) $1 - \sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{3}{4}$ $120° + 360°k, 240° + 360°k$

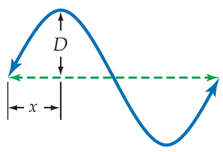
56) **ألماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin \boldsymbol{i} = n_2 \sin r$ ، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و $\boldsymbol{i}$ قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1 . وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو 35°، فما قياس زاوية الانكسار؟ $13.71°$

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًّا ونقيًّا أو لا. انظر الهامش

57 **أوتار:** يمكن تمثيل مسار الموجة الناتجة عن وتر بالمعادلة $D = 0.5\sin(6.5x)\sin(2500t)$ ، حيث D تُمثّل مقدار الإزاحة بالملمتر في الموضع x ملمترًا مقاسًا من الطرف الأيسر للوتر عند t ثانية. أوجد أول قيمة موجبة للمتغيّر t عندما تبعد النقطة من اليسار بمقدار 0.5 m، وتكون الإزاحة 0.01mm.

انظر ملحق الإجابات



إجابات :

37 $2\sin^2 \theta = \cos \theta + 1$
$2(1-\cos^2 \theta) = \cos \theta + 1$
$2 - 2\cos^2 \theta = \cos \theta + 1$
$-2\cos^2 \theta - \cos \theta + 1 = 0$
$(-2\cos \theta + 1)(\cos \theta + 1) = 0$
$-2\cos \theta + 1 = 0$ أو $\cos \theta + 1 = 0$
$\cos \theta = \frac{1}{2}$ أو $\cos \theta = -1$

حلول المعادلة $\cos \theta = \frac{1}{2}$ هي
$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ، $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$
حل المعادلة $\cos \theta = -1$ هو:
$\theta = \pi + 2k\pi$

45) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,$
أو $210° + k \cdot 360°, 330° + k \cdot 360°$

46) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو
$30° + k \cdot 360°, 150° + k \cdot 360°,$
$90° + k \cdot 360°$

47) $0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi$
أو
$0° + k \cdot 360°, 90° + k \cdot 180°$

48) $\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$
أو
$90° + k \cdot 180°,$
$120° + k \cdot 360°,$
$240° + k \cdot 360°$

56b) يحسب قياس كل من زاوية السقوط وزاوية الانكسار ليحدد معامل الانكسار، فإذا كان 2.42 يكون ألماسًا حقيقيًا.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة كتابة معادلة تتضمن $\sin^2\theta$ ثم حلها، بحيث يكون لها حل وحيد في المجال $90° < \theta < 270°$، واطلب إليهم تسليم الحلول قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 5 - 1، بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 1 .

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 58، يتعين على الطلبة أن يلاحظوا أن هلا قد قسمت طرفي المعادلة على $\sin\theta$، وأن شهد قد أعادت كتابة $2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$ بطريقة غير صحيحة. واشرح للطلبة أنه إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$، فإن θ يجب أن تكون في الربع الأول أو الربع الرابع. لذا، فإن $\theta = 60°$ أو $300°$. وبيّن لهم أيضًا أن التعبير: $2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$ يمكن أن يكتب على الصورة $2 \bullet B \bullet C - B$، وهذا التعبير لا يساوي $2 \bullet C$.

مسائل مهارات التفكير العليا

انظر الهامش

58) **اكتشف الخطأ:** تقوم هلا وشهد بحل $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$، حيث $0° \le \theta \le 360°$. أيهما إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

شهد	هلا
$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$
$-\sin\theta = -\sin\theta$	$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$
$2\cos\theta = 0$	$2\cos\theta = 1$
$\cos\theta = 0$	$\cos\theta = \frac{1}{2}$
$\theta =$	$\theta =$
$90°, 270°$	$60°, 300°$

59) **تحدٍّ:** حُلّ $\sin 2x < \sin x$، حيث $0 \le x \le 2\pi$، دون استعمال الآلة الحاسبة. $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$ أو $\frac{\pi}{3} < x < \pi$

60) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه والاختلاف بين حَلّ المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية، والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وكم عدد الحلول المتوقعة؟ انظر الهامش

61) **تبرير:** اشرح سبب وجود عدد لا نهائي من الحلول للمعادلات المثلثية. انظر الهامش

62) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على معادلة مثلثية لها حلّان فقط، حيث $0° \le \theta \le 360°$. إجابة ممكنة: $2\cos\theta = 0°, 90°, 270°$

63) **تحدٍّ:** هل للمعادلتين $\csc x = \sqrt{2}$، $\cot^2 x + 1 = 2$ الحلول نفسها؟ برِّر إجابتك. لا؛ لأن المعادلة الثانية تكتب بالشكل $\cos x = \pm\sqrt{2}$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي: (درس 1-4) للتمارين 64-69 انظر الهامش

64) $\cos 165°$ 65) $\sin 22\frac{1}{2}°$

66) $\sin\frac{7\pi}{8}$ 67) $\cos\frac{7\pi}{12}$

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي: (درس 1-3)

68) $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$ 69) $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

70) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ 71) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

للتمرينين 70,71 انظر ملحق الإجابات

72) **ألعاب نارية:** إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$، حيث θ تمثل زاوية القذف، و v السرعة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي $9.8m/sec$. (الدرس 1-2) انظر ملحق الإجابات

a) أثبت صحة المتطابقة $\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta}$.

b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية $80°$، وسرعة ابتدائية مقدارها $110m/sec$، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه.

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-3)

73) $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 74) $\tan\frac{\pi}{12}$ $2-\sqrt{3}$

75) $\sin\frac{11\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 76) $\tan\frac{23\pi}{12}$ $-2+\sqrt{3}$

إذا كان $\sin\theta = \frac{-7}{25}$، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-4)

77) $\sin 2\theta$ $\frac{336}{625}$ 78) $\cos 2\theta$ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 79) $\tan 2\theta$ $\frac{336}{527}$

تدريب على اختبار معياري

80) أيٌّ مما يأتي لا يُعدُّ حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$؟ D

A $\frac{3\pi}{4}$ B $\frac{7\pi}{4}$ C 2π D $\frac{5\pi}{2}$

81) أيٌّ مما يأتي يُعدُّ حلًّا للمعادلة $\cos\theta\tan\theta - \sin^2\theta = \theta$؟ J

F $\frac{\pi}{2}n$ حيث n عدد صحيح

G $\frac{\pi}{2} + n\pi$ حيث n عدد صحيح

H $\pi + 2n\pi$ حيث n عدد صحيح

J $n\pi$ حيث n عدد صحيح

82) ماحَل المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$، حيث $0° < x < 360°$؟ D

A $30°$ أو $150°$ C $210°$ أو $330°$

B $60°$ أو $120°$ D $240°$ أو $300°$

83) حُلّ المعادلة $\cos\theta - \sin^2\theta = 0$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات. انظر الهامش

إجابات :

58) كلتاهما إجابتها غير صحيحة، حيث قسمت هلا كلًّا من الطرفين على $\sin\theta$ وهذا خطأ، وطرحت شهد $\sin\theta$ من الطرفين بشكل خاطئ أيضًا .

60) كل نوع من المعادلات يحتاج إما إلى جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة كل طرف على العدد نفسه. تُحلّ المعادلات التربيعية والمثلثية على الأغلب باستعمال التحليل. ولا تحتاج المعادلات الخطية والتربيعية إلى متطابقات لحلها. ويمكن حلها جبريًا، في حين يمكن تمثيل بعض المعادلات المثلثية بيانيًا بسهولة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. أما المعادلة الخطية فلها على الأكثر حل واحد. والمعادلة التربيعية لها على الأكثر حلان. أما المعادلة المثلثية فلها عادة عدد لا نهائي من الحلول إلاّ إذا كانت قيم المتغير مقيّدة أو مشروطة.

61) لأن الدوال المثلثية دورية، فإضافة دورة كاملة لأي حل للمعادلة ينتج حلًّا لها.

64) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

65) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

66) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

67) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

68)
$$\sin(270° - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$\sin 270°\cos\theta - \cos 270°\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$-1\cos\theta - 0 \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$$

69)
$$\cos(90° + \theta) \stackrel{?}{=} -\sin\theta\cos 90°\cos\theta$$
$$-\sin 90°\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$
$$0 - 1\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$
$$-\sin\theta = -\sin\theta \checkmark$$

83) $51.8° + 360°k$، حيث k عدد صحيح

التقويم التكويني

المفردات الأساسية

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 1–9، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات في مصادر الفصل.

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة الحروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

الفصل 1 دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتطابقات المثلثية
(الدروس 5–1, 2–1, 1–1)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- تستعمل المتطابقات المثلثية في تبسيط التعابير المثلثية، وإثبات صحة المتطابقات.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لحَلّ المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين وطرحهما
(الدرس 3–1)

لجميع قيم A, B ، حيث $A > B$ يكون:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
(الدرس 4–1)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

المفردات الأساسية

- المتطابقة المثلثية ص 10
- المتطابقة النسبية ص 10
- متطابقات المقلوب ص 10
- متطابقات فيثاغورس ص 10
- متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية ص 10
- متطابقات الزاويتين المتتامتين ص 10
- المتطابقات المثلثة لمجموع زاويتين ص 22
- المتطابقات المثلثة للفرق بين زاويتين ص 22
- المتطابقات المثلثة لضعف الزاوية ص 29
- المتطابقات المثلثة لنصف الزاوية ص 30
- المعادلة المثلثة ص 37

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) يمكن استعمال ________ في إيجاد جيب، أو جيب تمام الزاوية 75°، إذا علم جيب، وجيب تمام كل من 90°، 15° . **المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين**

2) المتطابقتان $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ هما مثالان على ________ . **المتطابقات النسبية**

3) ________ هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا. **المتطابقة المثلثة**

4) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\sin 60°$ باستعمال الزاوية 30° . **المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية**

5) تكون ________ صحيحة لقيم محددة للمتغيرات. **المعادلة المثلثة**

6) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$. **المتطابقة المثلثية لنصف الزاوية**

7) المتطابقتان $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ مثالان على ________ . **متطابقات المقلوب**

8) يمكن استعمال ________ في إيجاد كل من $\cos 120°$, $\sin 120°$، إذا عُلم جيب، وجيب تمام كل من الزاويتين 30° , 90° . **المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين**

9) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ مثال على ________ . **متطابقات فيثاغورس**

الفصل 1 دليل الدراسة و المراجعة

مراجعة الدروس

1-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 10 - 16)

مثال 1

أوجد $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقة مثلثية
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	بطرح $\cos^2\theta$ من كل طرف.
$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$	بتعويض $\frac{3}{4}$ بدلًا عن $\cos\theta$
$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$	بتربيع $\frac{3}{4}$
$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$	بالطرح
$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$	بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف

بما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط التعبير: $\cos\theta\sec\theta\cot\theta$.

$$\cos\theta\sec\theta\cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cot\theta$$

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي:

10) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $270° < \theta < 360°$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

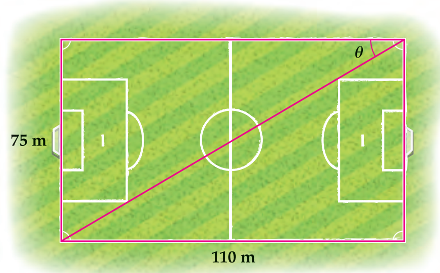
11) $\sec\theta$، إذا كان $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $90° < \theta < 180°$ $\quad -\sqrt{3}$

12) $\tan\theta$، إذا كان $\cot\theta = 2$، $0° < \theta < 90°$ $\quad \frac{1}{2}$

13) $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = -\frac{3}{5}$، $180° < \theta < 270°$ $\quad -\frac{4}{5}$

14) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{4}{5}$، $270° < \theta < 360°$ $\quad -\frac{\sqrt{41}}{5}$

15) **كرة قدم:** أكبر قيم لأبعاد ملعب كرة قدم هي 75 m, 110 m كما في الشكل أدناه، أوجد $\sin\theta$. انظر الهامش



بسّط كل تعبير مما يأتي: $\cos^2\theta$ (16 $\quad \csc\theta$ (18

16) $1 - \tan\theta\sin\theta\cos\theta$ $\qquad$ 17) $\tan\theta\csc\theta$ $\quad \sec\theta$

18) $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$ $\qquad$ 19) $\cos\theta\,(1+\tan^2\theta)$ $\quad \sec\theta$

1-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 17 - 21)

مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$.

$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}$	الطرف الأيسر
$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$	بالتبسيط
$= \cot\theta + \csc\theta$	بالتبسيط
= الطرف الأيمن	

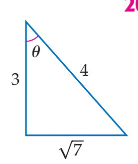
أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22) $\sec^2\theta - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$ $\quad$ للتمارين 20-23 انظر الهامش

23) **هندسة:** المثلث القائم الزاوية المجاور، يُستعمل في خياطة أنواع معينة من الأغطية. استعمل أطوال المثلث لتتحقّق من أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$



مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

بناء الاختبارات
التقـويم

إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل (ص 46 - 43)، يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا، أو على الجزء من الفصل الذي ما زال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

إجابات:

15) أولاً، أوجد طول القطر:

$$c^2 = 75^2 + 110^2$$
$$c^2 = 5625 + 12100 = 17725$$
$$c = 5\sqrt{709},\ \sin\theta = \frac{75}{5\sqrt{709}}$$
$$= \frac{15\sqrt{709}}{709}$$

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$$
$$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta\ ✓$$

21) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$$\cos\theta \div \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta \div \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$$
$$\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$$
$$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta\ ✓$$

22) $\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}$

$$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$$
$$\sec^2\theta - 1 = \sec^2\theta - 1\ ✓$$

23) $\tan^2\theta + 1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{7}{9} + 1$

$$= \frac{7}{9} + \frac{9}{9} = \frac{16}{9},$$
$$\sec^2\theta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

الفصل 1 دليل الدراسة و المراجعة

1-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 27 - 22)

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي:

24) $\cos(-135°)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

25) $\cos 15°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

26) $\sin 210°$ $-\frac{1}{2}$

27) $\sin 105°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

28) $\tan 75°$ $\sqrt{3}+2$

29) $\cos 105°$ $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أثبت صحة المتطابقات الآتية: للتمارين 30-32 انظر ملحق الإجابات

30) $\sin(\theta+90) = \cos\theta$

31) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\theta$

32) $\tan(\theta-\pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin 75°$.

باستعمال المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

$$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(30°+45°)\\ &= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

1-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الصفحات 35 - 29)

أوجد القيم الفعلية لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ ، إذا علمت أن: للتمارين 33-36 انظر ملحق الإجابات

33) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ، $0° < \theta < 90°$.

34) $\sin\theta = -\frac{1}{4}$ ، $180° < \theta < 270°$.

35) $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول القطر.

b) اكتب $\sin 45°$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ؛ لبرهنة النسبة التي كتبتها في الفرع **b** .

مثال 5

أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin\frac{\theta}{2}$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ بالطرح

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ بالقسمة، والتبسيط وإنطاقه المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

1-5 حَلّ المعادلات المثلثية (الصفحات 42 - 37)

حُلّ كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كلٍّ منها:

37) $2\cos\theta - 1 = 0$ ، $0° \le \theta < 360°$. $60°, 300°$

38) $4\cos^2\theta - 1 = 0$ ، $0 \le \theta < 2\pi$. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

39) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0$ ، $0° \le \theta < 360°$.

40) $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3$ ، $0° \le \theta < 360°$. $270°$

41) $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$ ، $0 \le \theta < 2\pi$. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

39) $90°, 210°, 270°, 330°$

مثال 6

حُلّ المعادلة $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ بالتحليل

$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

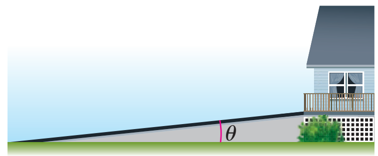
$\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

45 الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

تطبيقات ومسائل

42) **إنشاءات:** يُبيّن الشكل أدناه ممرًّا مائلًا لمنزل .

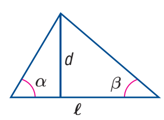


أوجد $\sin\theta$ ، $\cos\theta$، إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$. (الدرس 1 – 1)

$\frac{12\sqrt{145}}{145}$, $\frac{\sqrt{145}}{145}$

43) **ضوء:** شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين يُعطَى بالعلاقة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء الذي يخترق العدسة الأولى، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب المعادلة السابقة باستعمال $\tan\theta$. (الدرس 1 - 1) $I=I_0\left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$

44) **حساب المسافات بالنسب المثلثية:** يمكن إيجاد المسافة d على الشكل أدناه بمعرفة الزاويتين β , α والمسافة ℓ باستعمال العلاقة : $\ell = \frac{d}{\tan\alpha} + \frac{d}{\tan\beta}$. (الدرس 1-4) انظر الهامش



a) اكتب صيغة لإيجاد d .

b) أثبت $d = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha + \beta}$.

c) إذا كانت $\alpha = \beta$ ، فأثبت أن $d = 0.5\,\ell\tan\alpha$.

قراءة الرياضيات

حروف إغريقية

الحرفان الإغريقيان α ، β يقرآن ألفا، بيتا على الترتيب، واستعملا في التمرين 44 للتعبير عن قياسي زاويتين في المثلث.

45) **تداخل الموجات:** يكون تداخل الموجات هدَّامًا، إذا كانت سعة الموجة الناتجة من تداخل (جمع) الموجتين أصغر من سعة كلّ منهما. هل يكون التداخل للموجتين اللتين معادلتهما: $y = 20\ \mathrm{Sin}\ (3t + 45°), y = 20 \sin\ (3t + 225°)$ هدَّامًا؟ (الدرس 1-3) نعم؛ لأن مجموع الدالتين يساوي 0

46) **بصريات:** إذا وضع منشوران لهما قوة التفريق اللوني (p) نفسها، أحدهما بجوار الآخر، فإن إجمالي قوتهما على التفريق اللوني تُعطَى بالعلاقة $z = 2p\cos\theta$ ، حيث z محصلة قوتيهما، و θ الزاوية بين المنشورين. أثبت أن: $2p\cos\theta = 2p(1 - \sin^2\theta)\sec\theta$ (الدرس 1-2)

انظر الهامش

47) **حركة المقذوفات:** إذا رميت كرة بسرعة مقدارها v ، وزاوية قذف قياسها θ ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ، فإن زمن تحليقها t يُعطَى بالعلاقة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$. فأوجد زاوية القذف، إذا كانت $v = 50\text{ft/sec}$ ، وكانت المسافة الأفقية 100 ft ، وزمن التحليق 4 sec . (الدرس 1-5) $60°$

مراجعة حَلّ المسائل

إذا احتاج الطلبة إلى تدريبات إضافية على حَلّ المسألة، فذكّرهم بخطوات حَلّ المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيداً من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقّع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 1، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجابتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 1.

قبل الاختبار

اطلب إلى الطلبة دراسة الصفحات 46 – 43 من دليل الدراسة والمراجعة؛ لمراجعة المواضيع، والمهمات الواردة في الفصل.

إجابات:

44a) $d = \frac{\ell}{\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}}$

44b)

$$\frac{\ell}{\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}} = \frac{\ell}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}}$$
$$= \frac{\ell}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

44c)

$$\frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\ell\sin\alpha\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha)}$$
$$= \frac{\ell\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$
$$= \frac{\ell\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$= \frac{\ell\sin\alpha}{2\cos\alpha}$$
$$= \frac{\ell}{2}\tan\alpha$$

46)

$$2p\cos\theta \stackrel{?}{=} 2p(1-\sin^2\theta)\sec\theta$$
$$2p\cos\theta \stackrel{?}{=} 2p(\cos^2\theta)\frac{1}{\cos\theta}$$
$$2p\cos\theta = 2p\cos\theta\ \checkmark$$

بناء الاختبارات
التقويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أنّ جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 1 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

إجابات:

2)
$\cos(30° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin(60° + \theta)$
$\cos 30° \cos\theta + \sin 30° \sin\theta \stackrel{?}{=}$
$\sin 60° \cos\theta + \cos 60° \sin\theta$
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$
$+ \frac{1}{2}\sin\theta$ ✓

3)
$\cos(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$
$\cos\theta\cos\pi + \sin\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\cos\theta$
$(\cos\theta)(-1) + (\sin\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$
$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

a16) $18^2 = 9^2 + a^2,\ 324 = 81 + a^2,$
$243 = a^2,\ a = 9\sqrt{3}$

b16) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,$
$\sin 2(30) = 2\sin 30 \cos 30,$
$\sin 60 = 2\left(\frac{9}{18}\right)\left(\frac{9\sqrt{3}}{18}\right)$
$= \frac{162\sqrt{3}}{324} = \frac{\sqrt{3}}{2},$
$\sin 60 = \frac{9\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

21) $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta,\ 25 = \frac{20^2}{9.8}\sin 2\theta,$
$0.6125 = \sin 2\theta,\ \theta \approx 18.9°$

22) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$

الفصل 1
اختبار الفصل

1) **اختيار من متعدد:** أيٌّ من التعابير الآتية يكافئ: $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$؟ **D**

- A) $\cot\theta$
- B) $\tan\theta$
- C) $\sec\theta$
- D) $\csc\theta$

2) أثبت صحة المتطابقة $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3) أثبت صحة المتطابقة $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

للسؤالين 2,3 انظر الهامش

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الفعلية لـ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $90° < \theta < 180°$؟ **D**

- A) $\frac{5}{3}$
- B) $\frac{\sqrt{34}}{8}$
- C) $-\frac{4}{5}$
- D) $\frac{4}{5}$

أوجد كلًّا مما يأتي:

5) $\cot\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $270° < \theta < 360°$. **$-\frac{3\sqrt{7}}{7}$**

6) $\tan\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90° < \theta < 180°$. **$-\sqrt{3}$**

7) $\sec\theta$، إذا كان $\csc\theta = -2$، $180° < \theta < 270°$. **$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$**

8) $\cot\theta$، إذا كان $\csc\theta = -\frac{5}{3}$، $270° < \theta < 360°$. **$-\frac{4}{3}$**

9) $\sec\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$، $0° \le \theta < 90°$. **$\frac{2\sqrt{3}}{3}$**

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

10) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$ **للأسئلة 10-14 انظر ملحق الإجابات**

11) $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

12) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$

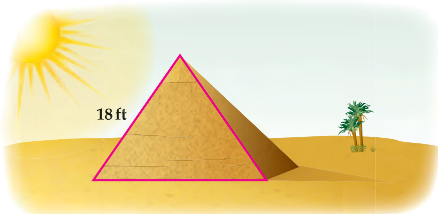
13) $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

14) $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \csc\theta + \cot\theta$

15) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الفعلية لـ $\tan\frac{\pi}{8}$؟ **B**

- A) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$
- B) $\sqrt{2} - 1$
- C) $1 - \sqrt{2}$
- D) $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

16) **تاريخ:** يعتقد بعض المؤرخين أن الذين بنوا الأهرامات القديمة مثل هرم خوفو، ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة بشكل مثلث متطابق الأضلاع، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 18 ft. **انظر الهامش**



a) أوجد ارتفاع المثلث متطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، وطول ضلع المثلث، وارتفاعه لتُبيِّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$، ثم أوجد القيمة الفعلية للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي:

17) $\cos(-225°)$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

18) $\sin 480°$ **$\frac{\sqrt{3}}{2}$**

19) $\cos 75°$ **$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$**

20) $\sin 165°$ **$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$**

21) **صواريخ:** تمّ إطلاق نموذج لصاروخ بسرعة ابتدائية مقدارها 20 m/sec. إذا علمت أن مدى الصاروخ R مُعطى بالعلاقة $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$، حيث يُمثِّل المتغير v السرعة التي تم إطلاق الصاروخ بها، ويُمثِّل g تسارع الجاذبية الأرضية، والذي يساوي $9.8\,m/s^2$، وتُمثِّل θ قياس زاوية الإطلاق مع الأفقي. إذا قطع الصاروخ مسافة مقدارها 25 m، فما قياس الزاوية؟ **انظر الهامش**

حُلّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذاكان قياس θ بالراديان:

22) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ **انظر الهامش**

23) $2\sin 3\theta - 1 = 0$ **$\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، حيث $0° \le \theta \le 360°$، إذا كان قياس θ بالدرجات:

24) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$ **$0°, 360°$**

25) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ **$0°, 60°, 180°, 300°, 360°$**

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة	**إذا** أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة
فاختر أحد المصادر الآتية:	**فاختر** أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب الدروس 1-1 ، 1-2 ، 1-3 ، 1-4 ، 1-5	**مصادر الفصل** دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل تدريبات المهارات	**زيارة الموقع** www.obeikaneducation.com
دليل المعلم مشروع الفصل، ص (8)	
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

الدرس 1-2 ، ص 17-21

(1
$$\cot\theta+\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}$$
$$\cot\theta+\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\tan^2\theta+1}{\tan\theta}$$
$$\cot\theta+\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}$$
$$\cot\theta+\tan\theta = \tan\theta+\cot\theta\checkmark$$

(2
$$\cos^2\theta \stackrel{?}{=} (1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$$
$$\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1-\sin^2\theta$$
$$\cos^2\theta = \cos^2\theta\checkmark$$

(3
$$\sin\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sec\theta}{\tan\theta+\cot\theta}$$
$$\sin\theta \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$
$$\sin\theta \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}}$$
$$\sin\theta \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}$$
$$\sin\theta \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta\sin\theta}{1}$$
$$\sin\theta = \sin\theta\checkmark$$

(4
$$\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\tan^2\theta = \tan^2\theta\checkmark$$

(5
$$\tan^2\theta\csc^2\theta \stackrel{?}{=} 1+\tan^2\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\sec^2\theta = \sec^2\theta\checkmark$$

(6
$$\tan^2\theta \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$$
$$\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta-1$$
$$\tan^2\theta = \tan^2\theta\checkmark$$

(8
$$\cos^2\theta+\tan^2\theta\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$
$$\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$
$$\cos^2\theta+\sin^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$
$$1 = 1\checkmark$$

(9
$$\cot\theta(\cot\theta+\tan\theta) \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\cot^2\theta+\cot\theta\tan\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\cot^2\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\cot^2\theta+1 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\csc^2\theta = \csc^2\theta\checkmark$$

(10
$$1+\sec^2\theta\sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$1+\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$1+\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\sec^2\theta = \sec^2\theta\checkmark$$

(11
$$\sin\theta\sec\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} 1$$
$$\sin\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} 1$$
$$1 = 1\checkmark$$

(12
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} (\csc\theta-\cot\theta)^2$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta-2\cot\theta\csc\theta+\cot^2\theta$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin^2\theta}-2\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\checkmark$$

(13
$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta-\cot\theta$$
$$\frac{(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta-\cot\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta-\cot\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta-\cot\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta-\cot\theta$$
$$\tan\theta-\cot\theta = \tan\theta-\cot\theta\checkmark$$

(14
$$\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$
$$\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}$$
$$\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\tan\theta = \tan\theta\checkmark$$

(15
$$\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\cot\theta$$
$$\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$\cos\theta = \cos\theta\checkmark$$

16) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$$\sin\theta\tan\theta + \sin\theta\sec\theta - \tan\theta - \sec\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta - 1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$\frac{-\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

$$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$$

17) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) \stackrel{?}{=} 1$

$$\cos\theta\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta) \stackrel{?}{=} 1$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

19) $\sec\theta - \tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} \checkmark$$

20) $\frac{1 + \tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$$\frac{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\frac{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\sec\theta = \sec\theta \checkmark$$

21) $\sec\theta\csc\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta + \cot\theta$

$$\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \checkmark$$

22) $\sin\theta + \cos\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

$$\sin\theta + \cos\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$\sin\theta + \cos\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$\sin\theta + \cos\theta \stackrel{?}{=} \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta \checkmark$$

23) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \frac{2 + \sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \frac{2 + \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta}}$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \left(2 + \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right) \cdot \frac{\cos\theta\sin\theta}{1}$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 2\cos\theta\sin\theta + 1$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 \checkmark$$

24) $\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1 - \sin\theta}{1 - \sin\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$$

$$\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$$

$$\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} \checkmark$$

25) $\csc\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

$$\csc\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\csc^2\theta - 1}{\csc\theta + 1}$$

$$\csc\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{\csc\theta + 1}$$

$$\csc\theta - 1 = \csc\theta - 1 \checkmark$$

26) $1 - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$

$$(1 - \tan^2\theta)(1 + \tan^2\theta) \stackrel{?}{=} \sec^2\theta(2 - \sec^2\theta)$$

$$\sec^2\theta(1 - \tan^2\theta) \stackrel{?}{=} \sec^2\theta(1 + 1 - \sec^2\theta)$$

$$\sec^2\theta(1 - \tan^2\theta) = \sec^2\theta(1 - \tan^2\theta) \checkmark$$

27) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

$$\sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

28)
$$(\csc\theta-\cot\theta)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\ \checkmark$$

29)
$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta+\sin\theta\csc\theta$$
$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta+\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$
$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta+1$$
$$\csc^2\theta = \csc^2\theta\ \checkmark$$

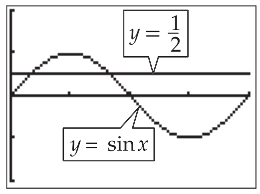
30)
$$\frac{\sec\theta-\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta-\cos\theta$$
$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta}-\frac{\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta-\cos\theta$$
$$\frac{1}{\csc\theta}-\frac{1}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta-\cos\theta$$
$$\sin\theta-\cos\theta = \sin\theta-\cos\theta\ \checkmark$$

31)
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta-\tan^2\theta$$
$$1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta+1-\tan^2\theta$$
$$1 = 1\ \checkmark$$

32)
$$\sec\theta-\cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$$
$$\tan\theta\sin\theta = \tan\theta\sin\theta\ \checkmark$$

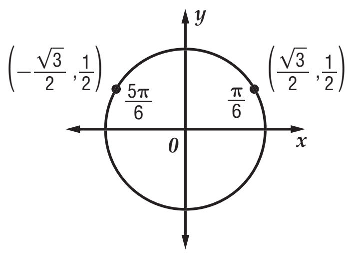
39
$$\sec^2(-\theta)-\tan^2(-\theta) = \frac{1}{\cos^2(-\theta)}-\frac{\sin^2(-\theta)}{\cos^2(-\theta)}$$
$$= \frac{1-\sin^2(-\theta)}{\cos^2(-\theta)}$$
$$= \frac{\cos^2(-\theta)}{\cos^2(-\theta)}$$
$$= 1$$

53b يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y=\frac{1}{2}$ ، $y=\sin x$ عند النقاط $x=\frac{5\pi}{6}$ ، $x=\frac{\pi}{6}$ ، على الفترة $[0, 2\pi)$.



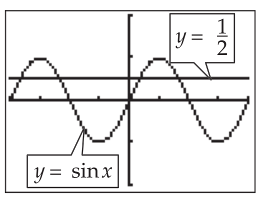
$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

53c



53d يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y=\frac{1}{2}$ ، $y=\sin x$ عند النقاط

$\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{7\pi}{6}$ ، $-\frac{11\pi}{6}$ ، على الفترة $[-2\pi, 2\pi)$



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

53e إجابة ممكنة: بما أن الجيب دالة دورية، تكون حلول المعادلة هي $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ، $x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$ ، حيث n عدد صحيح.

60) إذا استعملنا متطابقة فيثاغورس الأولى

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

وإذا قسمنا كل حد فيها على $\cos^2\theta$ يمكننا أن نبرهن على أن $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$.

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

وإذا قسمنا كل حد في المتطابقة $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ على $\sin^2\theta$ يمكننا أن نبرهن على أن $\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$.

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$$

الدرس 1-3 ، ص 22-27

30)
$$F=\frac{W(\sin A+\mu\cos A)}{\cos A-\mu\sin A}$$
$$=\frac{W(\sin A+\tan\theta\cos A)}{\cos A-\tan\theta\sin A}$$
$$=\frac{W\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\tan\theta\cos A}{\cos A}\right)}{\frac{\cos A}{\cos A}-\frac{\tan\theta\sin A}{\cos A}}$$
$$=\frac{W(\tan A+\tan\theta)}{1-\tan A\tan\theta}$$
$$=W\tan(A+\theta)$$

31 a) افرض أن X هي نقطة نهاية القطعة المستقيمة التي طولها 8 in .

$$\sin(m\angle ABC)$$
$$=\sin(m\angle BAX+m\angle XAC)$$
$$=\sin(m\angle BAX)\cos(m\angle XAC)+\cos(m\angle BAX)\sin(m\angle XAC)$$
$$=\frac{8\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{8}{10}+\frac{8}{16}\cdot\frac{6}{10}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{10}+\frac{3}{10}$$
$$=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

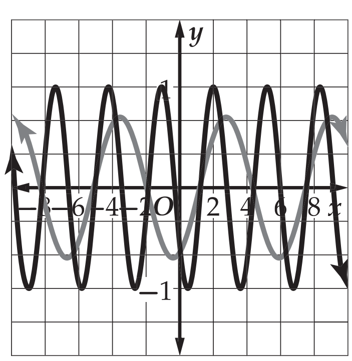
b) افرض أن X هي نقطة نهاية القطعة المستقيمة التي طولها 8 in.

$$\cos(m\angle BAC)$$
$$=\cos(m\angle BAX+m\angle XAC)$$
$$=\cos(m\angle BAX)\cos(m\angle XAC)-$$
$$\sin(m\angle BAX)\sin(m\angle XAC)$$
$$=\frac{8}{16}\cdot\frac{8}{10}-\frac{8\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{6}{10}$$
$$=\frac{4}{10}-\frac{3\sqrt{3}}{10}$$
$$=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$$

c)
$$\cos(m\angle BAC)=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$$
$$m\angle BAC=\cos^{-1}\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{10}\right)$$
$$\approx 96.9^\circ$$

d) لأن $m\angle BAC\neq 90^\circ$ ، فإن المثلث الناتج ليس قائم الزاوية.

33b)



33c) لا؛ مثال معاكس $\sin(30^\circ+45^\circ)\neq\sin 30^\circ+\sin 45^\circ$

فالطرف الأيمن يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.5731$. وبما أن قيمة جيب أية زاوية لا يمكن أن تكون أكبر من 1، فإن هذه الجملة الرياضية لا بد أن تكون خاطئة.

34)
$$\sin(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{\tan A+\tan B}{\sec A\sec B}$$
$$\sin(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}$$
$$\sin(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A\cos B}}$$
$$\sin(A+B)\stackrel{?}{=}\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}\right)\cos A\cos B$$
$$\sin(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{\sin A\cos B+\sin B\cos A}{\cos A\cos B}\cos A\cos B$$
$$\sin(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{1}$$
$$\sin(A+B)=\sin(A+B)\ \checkmark$$

35)
$$\cos(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{1-\tan A\tan B}{\sec A\sec B}$$
$$\cos(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}$$
$$\cos(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{1-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{1}{\cos A\cos B}}$$
$$\cos(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\cos A\cos B}\cdot\cos A\cos B$$
$$\cos(A+B)\stackrel{?}{=}\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{1}$$
$$\cos(A+B)=\cos(A+B)\ \checkmark$$

36)
$$\sec(A-B)\stackrel{?}{=}\frac{\sec A\sec B}{1+\tan A\tan B}$$
$$\sec(A-B)\stackrel{?}{=}\frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}$$
$$\sec(A-B)\stackrel{?}{=}\frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}$$
$$\sec(A-B)\stackrel{?}{=}\frac{\frac{1}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$
$$\sec(A-B)\stackrel{?}{=}\frac{1}{\cos A\cos B}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$
$$\sec(A-B)\stackrel{?}{=}\frac{1}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$
$$\sec(A-B)\stackrel{?}{=}\frac{1}{\cos(A-B)}$$
$$\sec(A-B)=\sec(A-B)\ \checkmark$$

(37 $\sin(A+B)\sin(A-B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$

$$(\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin A\cos B)^2 - (\cos A\sin B)^2 \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A\sin^2 B - \cos^2 A\sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) - \sin^2 B(\sin^2 A + \cos^2 A) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin^2 A)(1) - (\sin^2 B)(1) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B \checkmark$$

(40

$$\cot(A+B) = \frac{1}{\tan(A+B)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}}$$

$$= \frac{1 - \tan A\tan B}{\tan A + \tan B}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\cot A}\cdot\frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}}$$

$$= \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot A\cot B}\cdot\frac{\cot A\cot B}{\cot B + \cot A}$$

$$= \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

(41

$$d = \sqrt{(\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2}$$

$$d^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$

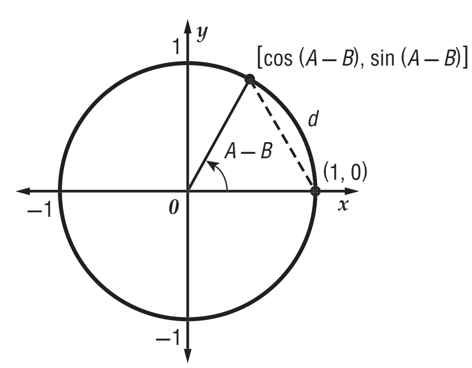
$$d^2 = (\cos^2 A - 2\cos A\cos B + \cos^2 B) + (\sin^2 A - 2\sin A\sin B + \sin^2 B)$$

$$d^2 = \cos^2 A + \sin^2 A + \cos^2 B + \sin^2 B - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$$

$$d^2 = 1 + 1 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$$

$$d^2 = 2 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B = 2 - 2\cos(A-B)$$

والآن، أوجد قيمة d^2 عندما يكون قياس الزاوية $A-B$ في الوضع القياسي على دائرة الوحدة، كما يظهر في الشكل أدناه.



اختبار منتصف الفصل، ص 28

(11

$$\cot^2\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\csc^2\theta = \csc^2\theta \checkmark$$

(12

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\tan\theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

(13

$$\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} (1+\cos\theta)\sec\theta$$

$$\frac{\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} (1+\cos\theta)\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$

$$\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta} + 1$$

$$\frac{1}{\cos\theta} + 1 = \frac{1}{\cos\theta} + 1 \checkmark$$

(14

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(1-\sin\theta)$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) = \tan\theta(1-\sin\theta) \checkmark$$

(15b بما أن $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{12}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{12}{9}$، $\cot\theta = \frac{12}{9}$، لذا فالطرفان متساويان.

(16 $$\tan^2\theta+1 \stackrel{?}{=} \frac{\tan\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\tan\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sec^2\theta = \sec^2\theta \checkmark$$

(17 $$\frac{\sin\theta\cdot\sec\theta}{\sec\theta-1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)\cot\theta$$

$$\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta+1}\cdot\frac{\sin\theta\cdot\sec\theta}{\sec\theta-1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)\cot\theta$$

$$\frac{\sin\theta\cdot\sec\theta(\sec\theta+1)}{\sec^2\theta-1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)\cot\theta$$

$$\frac{\sin\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}(\sec\theta+1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)\cot\theta$$

$$\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\sec\theta+1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)\cot\theta$$

$$\frac{\tan\theta(\sec\theta+1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)\cot\theta$$

$$\frac{\sec\theta+1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)\cot\theta$$

$$\frac{\sec\theta+1}{1}\cdot\frac{1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta+1)\cot\theta$$

$$(\sec\theta+1)\cot\theta = (\sec\theta+1)\cot\theta \checkmark$$

(18 $$\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \tan^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta = \sin^2\theta\cdot\tan^2\theta \checkmark$$

(19 $$\cot\theta(1-\cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\cot\theta(1-\cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\cot\theta(1-\cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\cdot\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$\cot\theta(1-\cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\cdot\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$\cot\theta(1-\cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$\cot\theta(1-\cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta)$$

$$\cot\theta(1-\cos\theta) = \cot\theta(1-\cos\theta) \checkmark$$

(25 $$\cos 30^\circ\cos\theta+\sin 30^\circ\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta \checkmark$$

الدرس 4-1 ، ص 35-29

(12 $-\frac{4\sqrt{5}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}}{6}, \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}{6}$

(13 $\frac{240}{289}, -\frac{161}{189}, \frac{5\sqrt{34}}{34}, -\frac{3\sqrt{34}}{34}$

(14 $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}$

15

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = 1-\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\sin^2\theta = \frac{24}{25}$$

$$\sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن

$$\sin\theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$$

$$= 1-2\left(\frac{24}{25}\right)$$

$$= -\frac{23}{25}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

إذا كانت θ بين 270° و 360° ، فإن $\frac{\theta}{2}$ بين 135° و 180°. لذلك ،

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}$$

إذا كانت θ بين 270° و 360° ، فإن $\frac{\theta}{2}$ بين 135° و 180°. لذلك ،

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

(16 $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}$

(17 $-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

(24
$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$$
$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta} \cdot \frac{\tan\theta}{\tan\theta}$$
$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta - \tan^2\theta}$$
$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$
$$\tan 2\theta = \tan 2\theta \checkmark$$

(25
$$1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sec\theta + \sin\theta}{\sec\theta}$$
$$\stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta}{\frac{1}{\cos\theta}}$$
$$\stackrel{?}{=} \frac{\frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$
$$\stackrel{?}{=} \frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}.\cos\theta$$
$$\stackrel{?}{=} 1 + \sin\theta\cos\theta$$
$$\stackrel{?}{=} 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta \checkmark$$

(26
$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$
$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$
$$\frac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$
$$\frac{\sin\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2} \checkmark$$

(27
$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\theta}{2} \checkmark$$

(30 إذا كانت $\theta = 45° - \alpha$
$$d = \frac{v^2\sin 2(45° + \alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2\sin(90° + 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90°\cos 2\alpha + \cos 90°\sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1\cdot\cos 2\alpha + 0\cdot\sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2\cos 2\alpha}{g}$$

إذا كانت $\theta = 45° - \alpha$
$$d = \frac{v^2\sin 2(45° - \alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2\sin(90° - 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90°\cos 2\alpha - \cos 90°\sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1\cdot\cos 2\alpha - 0\cdot\sin 2\alpha)}{g}$$
$$= \frac{v^2\cos 2\alpha}{g}$$

(37 كلاهما خطأ؛ حيث طرح علي الجذور التربيعية بطريقة غير صحيحة، كما استعمل سلمان متطابقة نصف الزاوية على نحو غير صحيح، ولكنه أخطأ في إيجاد قيمة $\cos 30°$ في المتطابقة فكتبها $\frac{1}{2}$ بدلاً من $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(39
$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta)$$
$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$
$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

يمكنك أن تجد البديل لـ $\cos 2\theta$ باستعمال التعويض في التعبير $\cos^2\theta - \sin^2\theta$.

عوّض $1 - \sin^2\theta$ بدلاً من $\cos^2\theta$.
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta$$
ثم بسّط لتجد أنّ:
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

عوّض $1 - \cos^2\theta$ بدلاً من $\sin^2\theta$ لتجد أنّ:
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$$
ثم بسّط لتجد أنّ:
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

(40 المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية $1 - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta$

بالتعويض $\frac{A}{2}$ بدلاً من θ ، A بدل 2θ. $1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \cos A$

بحلّ بالنسبة لـ $\sin^2\frac{A}{2}$. $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$

بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية $2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

بالتعويض $\frac{A}{2}$ بدلاً من θ ، A بدلاً من 2θ. $2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \cos A$

بحلّ بالنسبة لـ $\cos^2\frac{A}{2}$. $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$

بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

(42 إذا أعطيت فقط قيمة $\cos\theta$، فإن $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها. وإذا أعطيت فقط قيمة $\sin\theta$ ، فإن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها. وإذا أعطيت كلتا القيمتين $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، فإن $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ هي الأفضل.

(57

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} 1 + \cos\theta$$

$$2 \pm \left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\right) \stackrel{?}{=} 1 + \cos\theta$$

$$2\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) \stackrel{?}{=} 1 + \cos\theta$$

$$1 + \cos\theta = 1 + \cos\theta \checkmark$$

(58

$$\tan^2\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right) \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \checkmark$$

الدرس 5-1 ص 42-37

7

$$\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta$$

$$\cos 2\theta + 15\sin\theta - 8 = 0$$

$$1 - 2\sin^2\theta + 15\sin\theta - 8 = 0$$

$$-2\sin^2\theta + 15\sin\theta - 7 = 0$$

$$(-2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 7) = 0$$

$-2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 7 = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ أو $\sin\theta = 7$

ولأن $-1 \le \sin\theta \le 1$ ، فإن

$$\theta = 30°, 150°$$

9

$$4\sin^2\theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \text{ or } \sin\theta = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ or } -\frac{5\pi}{6} \text{ or } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ or } \frac{5\pi}{6}$$

∴ جميع الحلول هي :

$$\theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ or } \theta = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\epsilon z$$

11

$$\cos 2\theta \sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin\theta - 2\sin^3\theta = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin^3\theta - \sin\theta + 1 = 0$$

ليكن $x = \sin\theta$

$$\Rightarrow 2x^3 - x + 1 = 0$$

ولهذه المعادلة التكعيبية جذر حقيقي واحد هو العدد -1

$$\Rightarrow \sin\theta = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

12

$$\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$$

بتربيع الطرفين $\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2$

$$\Rightarrow 1 + \sin\theta = 2$$

$$\Rightarrow \sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 4k\pi$$

14

$$\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$$

بالتربيع $\Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos\theta}{2} = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\theta = 2 - 4\cos\theta + 2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{or } \cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ or } \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \text{ or } 2\pi$$

∴ الحلول هي : $0 + 2\pi k \text{ or } \frac{\pi}{3} + 4\pi k \text{ or } \frac{5\pi}{3} + 4\pi k,\ k\epsilon z$

لا حظ أن طول دورة $\sin\frac{\theta}{2}$ هو 4π

21a

$$d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$$

$$10.5 = 3\sin\frac{2\pi}{265}t + 12$$

$$-1.5 = 3\sin\frac{2\pi}{265}t$$

$$-0.5 = \sin\frac{2\pi}{265}t$$

$$\frac{2\pi}{265}t = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t \approx 213$$

أو $\frac{2\pi}{265}t = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t \approx 335$

وهذا يعني أنه سوف يكون هناك 10.5h في النهار لليومين اللذين ترتيبهما 213، 335 بعد 21 مارس.

213 يوم بعد 21 مارس هو 20 أكتوبر.

335 يوم بعد 21 مارس هو 19 فبراير.

21b الأيام من 19 فبراير إلى 20 أكتوبر سيكون في كلٍّ منها طول النهار 10.5 ساعاتٍ على الأقل ، حيث يزداد طول النهار في كل يوم عن اليوم السابق حتى 20 أكتوبر

27

$$\cos 8\theta = 1$$

$$\Rightarrow 8\theta = 0 \text{ or } 8\theta = 2\pi$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ or } \theta = \frac{\pi}{4}$$

لاحظ أن طول دورة $\cos 8\theta$ هو $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

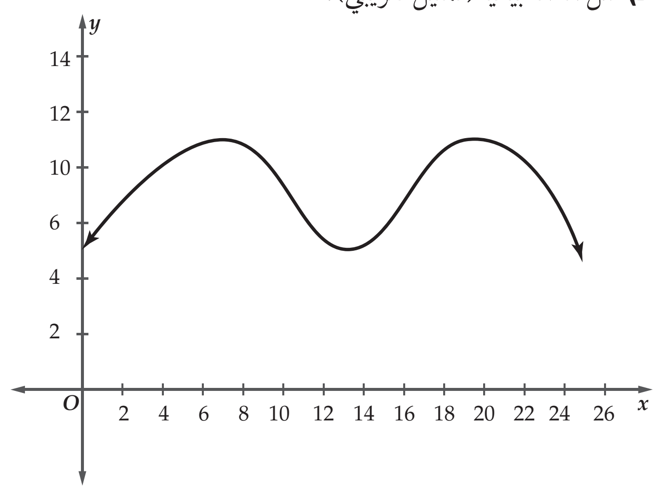
$$\therefore \theta = 0 + k\frac{\pi}{4},\ k\epsilon z$$

49 أكبر قيمة لدالة sin تساوي 1

أكبر قيمة للدالة المعطاة: $\therefore y = 3(1) + 8 = 11$

a) أي أن أكبر / أقصى عمق للنهر هو 11 m .

b) مثل الدالة بيانيًّا (تمثيل تقريبي).



للدالة قيمة عظمى تساوي (11)، عندما $x = 7$ ، $x = 19$ وهنا ترتبط كلٌّ من القيمتين (7, 19) بالساعة السابعة

$7 \rightarrow 7.00$ a.m (صباحًا)

$19 \rightarrow 7.00$ p.m (مساءًا)

51

$$\Rightarrow 2\sin^2\theta + (\sqrt{2} - 1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\theta + (\sqrt{2} - 1)\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta - 2\sin\theta - \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin\theta + \sqrt{2})(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin\theta + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{or } 2\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$\therefore$ جميع الحلول هي :

$$\theta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon z$$

57

$$D = 0.5 \sin(6.5x) \sin(2500t)$$
$$0.01 = 0.5 \sin(6.5 \cdot 500) \sin(2500t)$$
$$0.01 = 0.5 \sin(3250) \sin(2500t)$$
$$0.1152 \approx \sin(2500t)$$
$$\text{Sin}^{-1}(0.1152) \approx 2500t$$
$$6.6152 \approx 2500t$$
$$0.0026 \approx t$$

70)

$$\cos(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin\theta$$
$$\cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$$
$$0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$$
$$\sin\theta = \sin\theta \checkmark$$

71)

$$\sin(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$$
$$\sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$$
$$1 \cdot \cos\theta - 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$$
$$\cos\theta - 0 \stackrel{?}{=} \cos\theta$$
$$\cos\theta = \cos\theta \checkmark$$

72)

a)

$$\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} \stackrel{?}{=} \frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta}$$

$$\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{v^2\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{2g\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$$

b)

$$h = \frac{(110)^2\sin^2 80}{2(9.8)} = 598.73 \text{ m}$$

دليل الدراسة والمراجعة ص 43-46

30)

$$\sin(\theta + 90) \stackrel{?}{=} \cos\theta$$
$$\sin\theta\cos 90° + \cos\theta\sin 90° \stackrel{?}{=} \cos\theta$$
$$(\sin\theta)(0) + (\cos\theta)(1) \stackrel{?}{=} \cos\theta$$
$$\cos\theta = \cos\theta \checkmark$$

31)

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$\sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$(-1)\cos\theta - (0)\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$$

32)

$$\tan(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} \tan\theta$$
$$\frac{\tan\theta - \tan\pi}{1 + \tan\theta\tan\pi} \stackrel{?}{=} \tan\theta$$
$$\frac{\tan\theta - 0}{1 + (\tan\theta)(0)} \stackrel{?}{=} \tan\theta$$
$$\frac{\tan\theta}{1} \stackrel{?}{=} \tan\theta$$
$$\tan\theta = \tan\theta \checkmark$$

33) $\sin 2\theta = \frac{24}{25}, \cos 2\theta = \frac{7}{25}, \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

34) $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}, \cos 2\theta = \frac{7}{8}, \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{4},$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{4 - \sqrt{15}}}{4}$$

35) $\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}, \cos 2\theta = -\frac{1}{9}, \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6},$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

36a) $c^2 = 90^2 + 90^2, c^2 = 8100 + 8100,$

$$c^2 = 16200, c = 90\sqrt{2}$$

36b)

$$\sin 45° = \frac{90}{90\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

36c)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \sin\frac{90}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 90}{2}},$$

$$\sin\frac{90}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اختبار الفصل ص (47)

10)

$$\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$$

$$\sec\theta = \sec\theta \checkmark$$

11)

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \checkmark$$

12)

$$(\tan\theta + \cot\theta)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$$

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$$

$$\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$$

$$\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2}\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$$

$$\sec^2\theta\csc^2\theta = \csc^2\theta\sec^2\theta \checkmark$$

13)

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\sec\theta} + \frac{\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$\cos\theta + 1 = 1 + \cos\theta \checkmark$$

14)

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \csc\theta + \cot\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \checkmark$$

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (49)

	الدرس 2-1 ثلاث حصص	الدرس 2-2 ثلاث حصص	الدرس 2-3 ثلاث حصص	الدرس 2-4 حصتان
العنوان	**الدوال**	**تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات**	**الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات**	**القيم القصوى ومتوسط ومُعدَل التغيّر**
الأهداف	• وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية . • تعريف الدوال، وحساب قيمها وإيجاد مجالاتها.	• استعمال التمثيل البياني؛ لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها ومداها، ومقطعها y ، وأصفارها. • استكشاف تماثل منحنيات الدوال، وتحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية.	• استعمال النهايات؛ للتحقق من اتصال دالة، وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة. • استعمال النهايات؛ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.	• تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة، متزايدة، ثابتة ،متناقصة، وتحديد القيم العظمى والصغرى لها. • إيجاد متوسط مُعدَل التغيّر للدالة.
المفردات الأساسية	الصفة المميزة للمجموعة، رمز الفترة، الدالة، رمز الدالة المتغير المستقل، المتغير التابع، الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة، المجال المناسب.	الأصفار، الجذور، التماثل حول مستقيم، التماثل حول نقطة، الدالة الزوجية، الدالة الفردية.	الدالة المتصلة، النهاية، الدالة غير المتصلة (المنفصلة) ، انفصال لا نهائي، الانفصال القفزي، الانفصال النقطي، الانفصال القابل للإزالة، الانفصال غير القابل للإزالة، سلوك طرفي التمثيل البياني.	المتزايد، المتناقص، الثابت، العظمى، الصغرى، القصوى، متوسط مُعدَل التغيّر، القاطع.
تمثيلات متعددة	ص (57)	ص (66)	ص (77)	
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (9) . دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (10) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (11) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ص (12) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• السبورة التفاعلية	• التقنية والتمثيل البياني	• أدوات التمثيل البياني	• الجداول الإلكترونية
تنويع التعليم	ص (52, 57)	ص (61, 63)	ص (72, 73, 76)	ص (84, 87)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (88)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تحليل الدوال

الخطة الزمنية		
التدريس	مراجعة وتقويم	المجموع
(18) حصة	(2) حصة	(20) حصة

الدرس 2-5 ثلاث حصص	الدرس 2-6 حصتان	الدرس 2-7 حصتان
الدوال الأم والتحويلات الهندسية	**العمليات على الدوال وتركيب دالتين**	**العلاقات والدوال العكسية**
• تعرّف الدوال الأم، ووصفها، وتمثيلها بيانيًا. • تعرّف التحويلات الهندسية للدوال الأم، وتمثيلها بيانيًا.	• إجراء العمليات على الدوال. • إيجاد تركيب الدوال.	• استعمال التمثيلات البيانية للدوال؛ لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تُمثّل دالة. • إيجاد الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.
الدالة الأم، الدالة الثابتة، الدالة المحايدة، الدالة التربيعية، الدالة التكعيبية، دالة الجذر التربيعي، دالة المقلوب، دالة القيمة المطلقة، الدالة الدرجية، دالة أكبر عدد صحيح، التحويل الهندسي، الإزاحة (الانسحاب)، الانعكاس، التمدد .	تركيب دالتين.	العلاقة العكسية، الدالة العكسية، دالة واحد لواحد.
ص (97)	ص (103)	ص (112)
مصادر الفصل 2 • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (14) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية دون ضمن فوق • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 2** •دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (15) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 4 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق
• الآلة الحاسبة البيانية	• الجداول الإلكترونية	• الآلة الحاسبة البيانية
ص (92, 94, 97)	ص (100,101, 103, 104)	ص (109, 112)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (118 - 113)
- اختبار الفصل، ص (119)

الفصل 2

التقويم والمعالجة

التقويم	التشخيص	المرجع	إرشادات المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 2**			
	التهيئة للفصل الثاني، ص (49)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (49)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة، تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! (الخطوة 4)، التقويم اختبارات قصيرة زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب كتاب الطالب دليل المعلم دليل المعلم دليل المعلم مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1 الفصل 2 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (88) اختبار منتصف الفصل برنامج بناء الاختبارات	كتاب الطالب مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1 الفصل 2 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 2، ص(118-113) اختبار الفصل، ص (119) برنامج بناء الاختبارات زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 الفصل 2 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 2**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد اختبارات الإجابة الحرة اختبار المفردات اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	مصادر الفصل

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

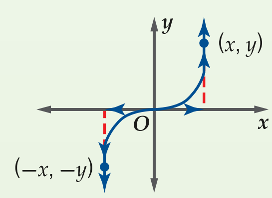
المتعلمون اللغويون اطلب إلى الطلبة اختيار مناطق سياحية كوجهة لرحلة. وأعطهم وقتًا من 5 إلى 10 دقائق؛ لكتابة مخطط للرحلة، ثم اطلب إليهم تعيين دوال ترتبط بكل نشاط. فمثلًا؛ إذا اقترحوا استعمال أنابيب للتنفس تحت الماء، فإن تكلفة هذه الأنابيب يمكن تمثيلها كدالة في الزمن، واطلب إليهم تعيّين الدالة جبريًا، وتمثّيلها بيانيًا.

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثلاثية، أو رباعية. واطلب إلى كل مجموعة كتابة أربع دوال يتضمن كل منها عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على بطاقات مرقمة. وكتابة اسئلة تتعلق بمجال الدالة، وأصفارها، وسلوك طرفي تمثيلها البياني، ونقاط عدم الاتصال (الانفصال). والدالة الأم والدالة العكسية. اجمع البطاقات، ثم اخلطها بشكل عشوائي. تختار كل مجموعة بطاقة عشوائيًّا، لتُجيب عن الاسئلة جميعها قبل أن يقوم المعلم بالإجابة عليها معهم .

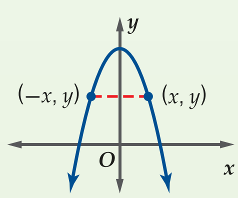
البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية، ثم اكتب ثلاث دوال أو أكثر على السبورة، على أن يكون من بينها دالة زوجية ودالة فردية على الأقل. واطلب إلى كل طالب تمثيل الدالة نفسها بيانيًّا مرتين ، ثم وضع إحدى النسختين للدالة فوق الأخرى؛ ليختبر إن كانت الدالة زوجية أم فردية أو ليست كذلك. واطلب إليهم قلب التمثيل البياني العلوي حول المحور y ، فإذا كانت متماثلة حول المحور y، تكون الدالة زوجية، ثم اطلب إليهم إعادة التمثيلين البيانيين إلى وضعهما الأصلي، و تدوير التمثيل البياني العلوي حول نقطة الأصل ، للتأكد إن كانت الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، فعندئذٍ تكون الدالة فردية.

دالة فردية



دالة زوجية



البديل 3 فوق المتوسط فوق

قسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية ، واطلب إلى كل مجموعة إعداد خطة درس لطلبة السنة القادمة تعالج مفهومًا رياضيًّا يعدّ تحديًّا لهم، بحيث يتضمن كل درس ما يأتي:

- مقدمة إلى المفهوم تتضمن رؤية وأفكار لاستعمال التقنيات.
- عدة أمثلة تؤدي إلى معالجة المفهوم بصورة شاملة.
- لعبة أو نشاط.

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 2

مواضيع ذات صلة من الجبر 2

- تعيين مجموعات جزئية مختلفة من الأعداد.
- تمثيل المعادلات بيانيًّا.
- دراسة أنواع مختلفة من المعادلات وتمثيلاتها البيانية.
- تعيين الخصائص الأساسية للمنحنيات مثل مقطع المحور y، والقيم القصوى (الصغرى والعظمى)، والأصفار.

الفصل 2

- تعيين دوال وتحديد المجال، والمدى، ومقطع المحور y، والأصفار لها.
- دراسة الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني، والنهايات، والقيم القصوى لدالة.
- حساب معدلات التغير لدوال غير خطية.
- تعيين الدالة الأم والتحويلات الهندسية.
- إجراء عمليات على الدوال، وتعيّين دالة التركيب، وإيجاد الدالة العكسية.

ما بعد الفصل 2

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- دراسة معدل التغير عند نقطة على منحنى الدالة.
- دراسة كيفية اختلاف معدل التغير عندما تتحرك نقطة على منحنى الدالة.

نظرة على الدروس

2-1 الدوال

كل دالة لها مجال، وقد يكون هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

يمكن وصف المجال باستعمال الصفة المميزة للمجموعة أو رمز الفترة. والمجال الذي يمكن وصفه بالصفة المميزة للمجموعة قد يكون مجموعة الأعداد الحقيقية R، أو مجموعة الأعداد الصحيحة Z، أو مجموعة الأعداد الطبيعية N.

2-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

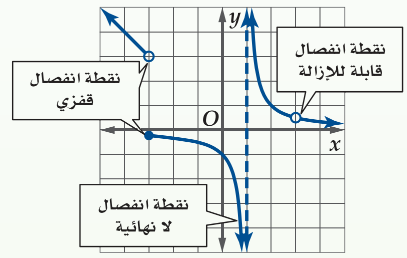
يُظهر التمثيل البياني للدوال أو العلاقات خصائص مهمة تتضمن ما يأتي:

- المجال: مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير المستقل.
- المدى: مجموعة قيم المتغير التابع.
- مقطع المحور y: النقطة / النقاط التي يقطع المنحنى عندها المحور y.
- الأصفار: النقطة / النقاط التي يقطع المنحنى عندها المحور x.
- الدوال الزوجية: دوال متماثلة حول المحور y.
- الدوال الفردية: دوال متماثلة حول نقطة الأصل.
- محور التماثل: المستقيم الذي إذا طُوي نصفا المنحنى حوله، فإنهما يتطابقان تمامًا.
- نقطة التماثل: النقطة التي إذا دار المنحنى حولها بزاوية قياسها $180°$، يظهر المنحنى وكأنه لم يتغيّر.

تحليل الدوال

2-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

نهاية الداله هي قيمة y عندما تقترب x من جهتي اليمين واليسار من قيمة محددة. وتزودنا النهايات بمعلومات حول الاتصال، والشكل أدناه يوضح أنماط الانفصال المختلفة.



- انفصال لا نهائي: تقترب النهاية من المالانهاية.
- انفصال قفزي: تختلف النهاية من اليمين عنها من اليسار.
- انفصال قابل للإزالة: تكون الدالة متصلة عدا نقاط محددة على المنحنى.

2-4 القيم القصوى ومتوسط مُعدّل التغيّر

يوفر التمثيل البياني طريقة سريعة لفهم العلاقة بين متغيرات مختلفة، وهذا يتضمن إيجاد القيم العظمى والصغرى (المحلية والمطلقة)، وعند هذه النقاط تتغير العلاقة بين المتغيرين من تزايد إلى تناقص أو من تناقص إلى تزايد.

إضافة إلى ذلك، فإن متوسط معدّل التغير بين نقطتين هو ميل الخط المستقيم المار بهما.

2-5 الدوال الأم والتحويلات الهندسية

يمكن تحويل الدوال الأم بسحب تمثيلها البياني إلى الأعلى أو إلى الأسفل، أو إلى اليسار أو إلى اليمين ، كما يمكن إيجاد صورة الدالة بالانعكاس حول المحور x، وتوسّع منحنى الدالة أو تضيّقه. بالنسبة للدالة $g(x) = a f[(bx + c)] + d$ ، تُمثّل قيمة $|a|$ التوسّع أو التضييق الرأسي، وتمثل قيمة b التضييق أو التوسّع الأفقي، كما تُمثّل قيمة c الانسحاب إلى اليسار أو إلى اليمين، وتُمثّل قيمة d الانسحاب إلى الأعلى، أو إلى الأسفل، وتحدد إشارة a إذا كان منحنى الدالة معكوسًا حول المحور x.

وتتضمن الدوال الأم في هذا الدرس الدوال الثابتة، المحايدة، التربيعية، التكعيبية، دالة المقلوب، القيمة المطلقة، وأكبر عدد صحيح.

2-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تُجرى عمليات حسابية على الدوال كما هو الحال على الأعداد ، إذ يمكن جمع الدوال، وطرحها، وضربها. ويمكن قسمة الدوال بشرط ألاّ يكون المقام صفرًا.

كما يمكن إجراء عملية تركيب الدوال، حيث تستعمل العناصر من مدى الدالة الأولى (قيم y) كعناصر لمجال الدالة الثانية (قيم x). فمثلًا؛ إذا كان $f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 1$ ، فإن:

$[f \circ g](x) = f(g(x)) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

2-7 العلاقات والدوال العكسية

منحنى الدالة العكسية هو انعكاس لمنحنى الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$ ، ويكون معكوس الدالة نفسه دالة إذا حققت الدالة الأصلية اختبار الخط الأفقي.

يمكن إيجاد الدالة العكسية جبريًّا كما يأتي:

- كتابة الدالة كمعادلة.
- استبدال المتغيّر x بالمتغير y في المعادلة.
- حلّ المعادلة بالنسبة إلى y .
- تعويض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y .

الفصل 2

ملاحظات

مشروع الفصل

أسلوب العمل

يستعمل الطلبة ما تعلموه لإيجاد قيم الدوال.

- اطلب إليهم اختيار دالة من اهتماماتهم، فمثلًا ؛ قد يرصد الطلبة الّذين يهتمون بكرة القدم، عدد الأهداف التي سُجلت عبر الزمن خلال بطولة ما.
- عندما يقرر الطلبة ماهية الدالة التي سوف يكتشفونها، اطلب إليهم جمع البيانات اللازمة لكتابة قاعدتها.
- اطلب إلى الطلبة تمثيل الدالة بيانيًا، وتحديد مجالها، مداها، قيمها القصوى، مقطع المحور y ، أصفارها. واطلب إليهم كتابة المعاني العملية لهذه القيم.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد الدالة العكسية الخاصة بدالة كل منهم إن وجدت. وكتابة فائدتها، ثم تحديد مجال الدالة العكسية، ومناقشة دلالتها في سياق المسألة.

المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: يقال لعلاقتين بأنهما متعاكستان، إذا وفقط إذا كان (b, a) ينتمي إلى إحدى العلاقتين، فإن (a, b) ينتمي إلى العلاقة الأخرى.

مثال: العلاقة العكسية لـ $f(x) = x^2 + 1$ هي $y = \pm\sqrt{x - 1}$

سؤال: ما العلاقة بين منحنى دالة ومنحنى الدالة العكسية لها؟ منحنى الدالة ومنحنى الدالة العكسية لها متماثلان حول المستقيم $y = x$.

الفصل 2

تحليل الدوال
Analyzing Functions

فيما سبق

درست تحليل الدوال من تمثيلاتها البيانية.

والآن

الأفكار العامة

- أستكشف تماثل منحنيات الدوال.
- أبحثُ الاتصال، وأجدُ متوسط تغيّر الدالة.
- أستعملُ النهايات، لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.
- أجدُ معكوس الدالة جبريًا، وهندسيًّا.

لماذا ؟

إدارة أعمال تستعملُ الدوال في عالم الأعمال، والتجارة لتحليل التكلفة ، والتنبؤ بالمبيعات، وحساب الأرباح، وتوقّع التكاليف، وتقدير الانخفاض في القوة الشرائية ... إلخ.

قراءة سابقة كوّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

قراءة سابقة

شجع الطلبة على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة للفصل الثاني

التهيئة للفصل الثاني

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد: (مهارة سابقة)

للأسئلة 1–6 انظر الهامش

1) $x > -3$
2) $x \leq -2$
3) $x \leq -5$
4) $x > 1$
5) $7 \geq x$
6) $-4 < x$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y: (مهارة سابقة)

7) $y - 3x = 2$ **$y = 2 + 3x$**
8) $y + 4x = -5$ **$y = -5 - 4x$**
9) $2x - y^2 = 7$ **$y = \pm\sqrt{2x - 7}$**
10) $y^2 + 5 = -3x$ **$y = \pm\sqrt{-3x - 5}$**
11) $9 + y^3 = -x$ **$y = \sqrt[3]{-x - 9}$**
12) $y^3 - 9 = 11x$ **$y = \sqrt[3]{11x + 9}$**

13) **حلوى:** يستعملُ صانع حلوى المعادلة $12D = n$، حيث D عدد العبوات الكرتونية من الحلوى، و n العدد الكلي من قطع الحلوى التي تم بيعها. كم عبوة كرتونية من الحلوى تم بيعها، إذا كان عدد قطع الحلوى المبيعة 306 قطع؟ (مهارة سابقة)

13) $D = \frac{n}{12}$، 25.5 عبوة كرتونية

أوجد قيمة كل من التعابير الآتية عند القيمة المعطاة (مهارة سابقة)

14) $3y - 4, y = 2$ **2**
15) $2b + 7, b = -3$ **1**
16) $x^2 + 2x - 3, x = -4a$ **$16a^2 - 8a - 3$**
17) $5z - 2z^2 + 1, z = 5x$ **$-50x^2 + 25x + 1$**
18) $-4c^2 + 7, c = 7a^2$ **$-196a^4 + 7$**
19) $2 + 3p^2, p = -5 + 2n$ **$12n^2 - 60n + 77$**

20) **درجات الحرارة:** تُستعملُ المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ للتحويل بين درجات الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي، حيث تمثّل C الدرجات السيليزية و F الدرجات الفهرنهايتية، إذا كانت درجة الحرارة 73°F، فأوجد درجة الحرارة السيليزية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. (مهارة سابقة) **22.8°C**

البديل 2

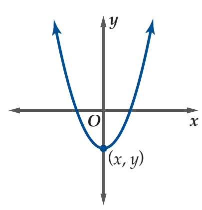
أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المفردات العامة

زمن الفترة	ص 51	interval notation
الدالة	ص 51	function
رمز الدالة	ص 53	function notation
الأصفار	ص 60	zeros
الجذور	ص 60	roots
الدالة الزوجية	ص 63	even function
الدالة الفردية	ص 63	odd function
النهاية	ص 68	limit
سلوك طرفي التمثيل البياني	ص 72	end behavior
متزايد	ص 79	increasing
متناقص	ص 79	decreasing
ثابت	ص 79	constant
عظمى	ص 81	maximum
صغرى	ص 81	minimum
قصوى	ص 81	extrema
قاطع	ص 83	secant line
الدالة الأم	ص 89	parent function
التحويل الهندسي	ص 90	transformation
الانعكاس	ص 92	reflection
التمدد	ص 93	dilation
تركيب	ص 99	composition

مراجعة المفردات

القطع المكافئ (parabola) التمثيل البياني للدالة التربيعية هو قطع مكافئ



الميل (slope) نسبة التغيّر في الإحداثي y إلى التغيّر في الإحداثي x.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر معالجة لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين.

فاختر أحد المصدرين الآتيين:

دليل المعلم مشروع الفصل، ص (48)

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

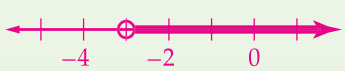
إذا أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،

فاختر المصدر الآتي:

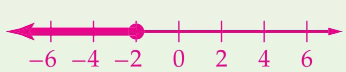
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

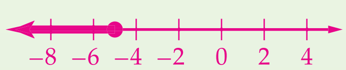
1)



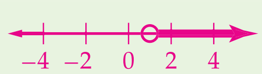
2)



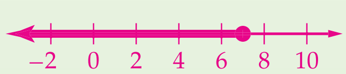
3)



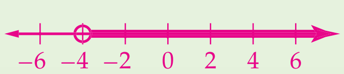
4)



5)



6)



تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلبة عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل 2؛ لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

2-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

حَلّ أنظمة من المعادلات باستعمال خصائص الأعداد الحقيقية.

الدرس 2-1

وَصْفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعرّف الدوال وحساب قيمها وإيجاد مجالها.

ما بعد الدرس 2-1

تعيين كل من مدى الدالة، ومقطع المحور y، وأصفارها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- أعط مثالاً على متغيرين يعطي الزيادة في أحدهما زيادة في الآخر.
  إجابة ممكنة: زيادة طول أرض الغرفة يعطي زيادة في مساحتها.
- أعط مثالاً على متغيرين تعطي الزيادة في أحدهما نقصاناً في الآخر.
  إجابة ممكنة: زيادة التكاليف تعطي نقصًا في الأرباح.
- هل يمكن أن تعطي الزيادة في أحد المتغيرين زيادة ونقصانًا في المتغير الآخر؟ نعم. إجابة ممكنة: زيادة الإنتاج لتغطية الطلب في السوق يزيد الربح، لكن زيادة الإنتاج أكثر من طلب السوق يؤدي إلى نقصان الربح .

وَصْفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال 1 يُبيّن كيفية التعبير عن مجموعات من الأعداد بالصفة المُميّزة للمجموعة.

2-1 الدوالّ
Functions

فيما سبق

درست استعمال رموز المجموعة للدلالة على العناصر، والمجموعات، والمجموعات الجزئية، والمتممة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات الأساسية

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

الدالة معرّفة بأكثر من قاعدة
piecewise-defined function

المجال المناسب
relevant domain

www.obeikaneducation.com

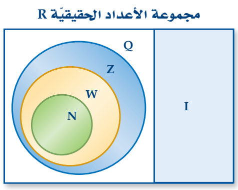
لماذا؟

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا، فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك. لذا، يمكنك تخفيض قيمة فاتورتك والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن، والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي مجموعة الأعداد الحقيقية

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
I	الأعداد غير النسبية	π ، $\sqrt{3} = 1.73205...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$



يمكن وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة** لكتابة المجموعة، إذ تستعملُ الصفة المميزة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز | حيث ، ويقرأ الرمز ∈ ينتمي إلى أو عنصر في .

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

الأعداد x حيث ... | x لها هذه الخصائص... | x ينتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة.

مثال 1 استعمال الصفة المميزة

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة:

a) $\{8, 9, 10, 11, ...\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \ge 8, x \in W\}$ وتقرأ مجموعة الأعداد x حيث x أكبر من أو تساوي 8 ، x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 ، وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

تأكد

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة:

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ **1B)** $x \le -3$ **1C)** $-1 \le x \le 5$

$\{x \mid x \ge 1, x \in N\}$ $\{x \mid x \le -3, x \in R\}$ $\{x \mid -1 \le x \le 5, x \in R\}$

مصادر الدرس 2-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (52)	• تنويع التعليم ، ص (52)	• ص (57)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (9) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

قراءة الرياضيات

غير محدودة تسمى الفترة غير محدودة، إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون توقف .

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيستعملُ الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان " (" أو ") " للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. وأما الرمزان "$-\infty$" ويقرأ سالب مالانهاية، أو "∞" ويقرأ موجب مالانهاية فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة: المتباينة	فترات محدودة: رمز الفترة	فترات غير محدودة: المتباينة	فترات غير محدودة: رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

مثال 2 استعمال رمز الفترة

عبّر عن كل مجموعة مما يأتي على صورة فترة:

a) $-8 < x \le 16$ المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $(-8, 16]$

b) $x < 11$ المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $(-\infty, 11)$

c) $x \le -16$ أو $x > 5$ المتباينة باستعمال رمز الفترة تصبح $(-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

$\cup$ تقرأ اتحاد

تأكد

عبّر عن كل مجموعة مما يأتي على صورة فترة:

2A) $-4 \le y < -1$ $[-4, -1)$

2B) $a \ge -3$ $[-3, \infty)$

2C) $x > 9$ أو $x < -2$ $(-\infty, -2) \cup (9, \infty)$

تحديد الدوال تذكّر بأن **العلاقة** هي قاعدة للربط بين كميتين، بحيث ترتبط عناصر المجال (X) مع عناصر المجال المقابل (Y)، وتتضمن المجموعة Y جميع عناصر **المدى** ، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة.

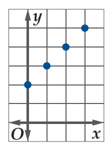
1) **لفظيًّا :** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المجال المقابل.

مثلًا، يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه بمقدار 2 من المجال المقابل.

2) **عدديًّا :** جدول من القيم، أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المجال المقابل (قيمة y).

مثلًا، $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًّا :** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.



4) **جبريًّا :** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x، y لكل زوج من الأزواج المرتبة.

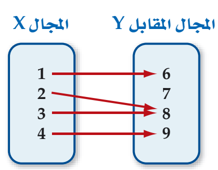
مثلًا، $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي: الدالة

التعبير اللفظي الدالة f من X إلى Y أو $(f: X \to Y)$، هي علاقة تربط كل عنصر x من المجال X بعنصر واحد فقط y من المجال المقابل Y.

مثال العلاقة من X إلى Y الممثّلة في المخطط المجاور هي دالة.
حيث المجموعة X هي مجال الدالة.
المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة Y مدى الدالة.
المدى $= \{6, 8, 9\}$.
أي أن مدى الدالة هو مجموعة جزئية من مجالها المقابل.



وَصْفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال 2 يُبيّن كيفية التعبير عن مجموعات من الأعداد باستعمال رمز الفترة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المُميّزة.

a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
$\{x \mid 2 \le x \le 7, x \in N\}$

b) $x > -17$.
$\{x \mid x > -17, x \in R\}$

c) المضاعفات الموجبة للعدد 7.
$\{x \mid x = 7n, n \in N\}$

2 عبِّر عن كل مجموعة مما يأتي على صورة فترة:

a) $-2 \le x \le 12$
$[-2, 12]$

b) $x > -4$ $(-4, \infty)$

c) $x < 3$ أو $x \ge 54$
$(-\infty, 3)$ أو $[54, \infty)$

التركيز في المحتوى الرياضي

رمز الفترة يُستعمل الرمزان "(" أو ")" عندما لا يكون طرف الفترة أحد عناصرها، في حين يُستعمل الرمزان "["أو"]" عندما يكون طرف الفترة أحد عناصرها. لاحظ أن (a,a) و $[a,a)$ و $(a, a]$ تُمثّل المجموعة الخالية، في حين تُمثّل $[a, a]$ المجموعة $\{a\}$.

تحديد الدوال

مثال 3 يُبيّن كيفية تحديد العلاقات التي تُمثّل دوالَّ.

مثال إضافي

3 حدِّد إذا كانت العلاقة المعطاة في كلٍّ مما يأتي تُمثّل دالة أو لا:

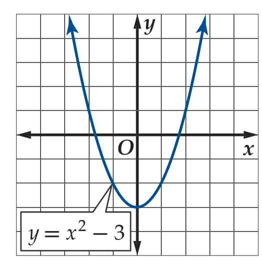
a) تُمثّل قيم المدخلات x طول الطالب بالبوصات، وقيم المخرجات y عدد الكتب التي يمتلكها الطالب. ليست دالة؛ لأنه ربما ترتبط أكثر من قيمة لِـ y بقيمة واحدة لِـ x.

b)

x	y
1	−1
1	1
4	−2
4	2
9	−3

ليست دالة، لأن القيمتين $2, -2$ من y ترتبطان بالقيمة 4 من x.

c)



دالة؛ لأن أي خط رأسي يقطع التَّمثيل البياني في نقطة واحدة فقط.

d) $x = 3y^2$

ليست دالة؛ لأن أكثر من قيمة لِـ y ترتبط بقيمة واحدة لِـ x.

كما أن بإمكاننا تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسيًّا لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي.

إرشادات للدراسة

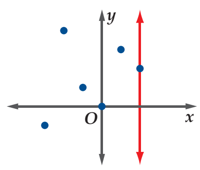
جدولة إذا قطع الخط الرأسي التَّمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن إحدى قيم x ترتبط بأكثر من قيمة من قيم y، كما يوضح الجدول أدناه:

x	y
−2	−4
3	−1
3	4
5	6
7	9

مفهوم أساسي — اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي تُمَثِّل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة، إذا لم يقطع أي خط رأسي التَّمثيل البياني بأكثر من نقطة.

نموذج



مثال 3 — تحديد العلاقات التي تمثل دوالّ

حدِّد إذا كانت العلاقة المعطاة في كل مما يأتي تمثّل دالة أو لا:

a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

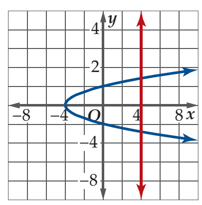
كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة لـ y، إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد، لذا، فإن العبارة تصف y كدالَّة في x.

b)

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة فقط لـ y. وعليه، فإن الجدول يمثّل y كدالة في x.

c)



يقطع المستقيم الرأسي $x = 4$ المنحنى بأكثر من نقطة. وعليه، فإنه لا يمثّل y كدالَّة في x.

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت العلاقة تمثّل y كدالة في x، حلّ المعادلة بالنسبة إلى y.

$$y^2 - 2x = 5 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$y^2 = 5 + 2x \quad \text{بإضافة } 2x \text{ إلى الطرفين}$$

$$y = \pm\sqrt{5 + 2x} \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي}$$

لا تمثّل هذه المعادلة y كدالة في x؛ لأن كل قيمة لـ x أكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين من y، واحدة موجبة، وأخرى سالبة.

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y تعلم أنه لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لـ y بأكثر من قيمة لـ x، كما في مثال 3b.

✓ تأكد

حدِّد إذا كانت العلاقة المعطاة في كل مما يأتي تمثّل دالة أو لا:

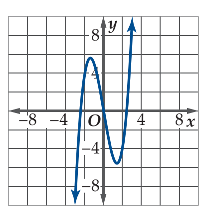
3A) تمثّل قيم x رمز المنطقة، أما قيم y فتمثّل رقم هاتف في تلك المنطقة. ليست دالة

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

ليست دالة

3C)



دالة

3D) $3y + 6x = 18$ دالة

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قسّم طلبة الصف إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية، واطلب إليهم إعطاء دالتين وعلاقتين لا تُمثّلان دوال، ثم اطلب إليهم تَّمثيل العلاقات الأربع بيانيًّا على السبورة التفاعلية؛ لتوضيح أي منها تُمثّل دوالَّ. لاحظ أن العلاقات التي لا تُمثّل دوالَّ تُمثّل بشكل انتشار.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الطبيعيون اطلب إلى الطلبة تسمية ثلاثة أشياء لكل منها وجه واحد على الأقل على شكل مربع، واطلب إليهم تدوين معلومات عن طول ضلع المربع ومساحته، ثم انقل هذه البيانات على السبورة، وتحدَّ الطلبة بالبحث عن دالة تُمثّل العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته. $A(s) = s^2$

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة**، ويُقرأ (f of x)، ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x فإننا نكتب $y = f(x)$

المعادلة	الدالة المرتبطة بالمعادلة
$y = -6x$	$f(x) = -6x$

تمثّل x أي قيمة من قيم المجال، وتسمى **متغيرًا مستقلًا**. وتمثّل y أي قيمة من قيم المدى، وتُسمى **متغيرًا تابعًا**.

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $g(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

a) $g(6)$

لإيجاد $g(6)$ ، عوّض 6 مكان x في الدالة $g(x) = x^2 + 8x - 24$.

$g(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$g(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$ بتعويض 6 مكان x

$= 36 + 48 - 24$ بالتبسيط

$= 60$ بالتبسيط

b) $g(-4x)$

$g(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$g(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$ بتعويض $-4x$ مكان x

$= 16x^2 - 32x - 24$ بالتبسيط

c) $g(5c + 4)$

$g(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$g(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24$ بتعويض $(5c + 4)$ مكان x

$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$ بفك الأقواس $(5c + 4)^2$ و $8(5c + 4)$

$= 25c^2 + 80c + 24$ بالتبسيط

تأكد

إذا كانت $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

4A) $f(12)$ $\frac{27}{121}$

4B) $f(6x)$ $\frac{12x + 3}{36x^2 - 12x + 1}$

4C) $f(-3a + 8)$ $\frac{-6a + 19}{9a^2 - 42a + 49}$

إذا لم يذكر مجال الدالة، فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ونستثني منه القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا، أو تجعل ما تحت الجذر الزوجي عددًا سالبًا.

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

حدّد مجال كل من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \frac{2 + x}{x^2 - 7x}$

يكون التعبير $\frac{2 + x}{x^2 - 7x}$ غير معرّف، إذا كان المقام صفرًا، وبحلّ المعادلة $x^2 - 7x = 0$ ، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x = 0$ و $x = 7$. وعليه، يكون مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$ و $x = 7$ ، أو $\{x \mid x \neq 0, x \neq 7, x \in R\}$.

b) $g(t) = \sqrt{t - 5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب ليس عددًا حقيقيًّا، فيجب أن تكون $t - 5 \geq 0$ ، أي أن مجال الدالة g هو كل الأعداد الحقيقية t ، حيث $t \geq 5$ ، أو المجال هو $[5, \infty)$.

الربط مع تاريخ الرياضيات

ليونارد أويلر (1707–1783)
عالم رياضيات سويسري، كتب أكثر من 800 بحث في الرياضيات، وأول من استعمل رمز الدالة $f(x)$.

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلًا، $f(x) = \sqrt{x - 5}$ و $g(t) = \sqrt{t - 5}$ يُعبران عن الدالة نفسها.

تحديد الدوال

مثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد قيمة دالة عند نقطة معطاة.

مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد مجال الدالة جبريًا.

مثالان إضافيان

4 إذا كان $f(x) = x^2 - 2x - 8$ ، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

a) $f(3)$ -5

b) $f(-3d)$ $9d^2 + 6d - 8$

c) $f(2a - 1)$ $4a^2 - 8a - 5$

5 حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $g(x) = \sqrt{4x - 1}$ $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

b) $h(t) = \frac{3t^2}{t^2 - 1}$ $\{t \mid t \neq -1, 1, t \in R\}$

c) $f(x) = \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 3}}$ $\left\{x \middle| x > \frac{3}{2}, x \in R\right\}$

$h(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - 9}}$ (c

هذه الدالة معرّفة عندما يكون $3x - 9 > 0$. وعليه، فإن مجال h هو $(3, \infty)$.

✓ تأكد

حدّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

5A) $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$ $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, \infty)$

5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$ $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

5C) $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$ $(-3, \infty)$

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوالّ المعرّفة بأكثر من قاعدة**.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 & , \quad 63 < x < 66 \\ 3x - 132 & , \quad 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 & , \quad x > 68 \end{cases}$$

أوجد أكبر معدل لطول الطفل في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $h(67)$

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$؛ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ بتعويض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ بالتبسيط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 in ، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 in.

b) $h(72)$

بما أن 72 أكبر من 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$.

$h(x) = 2x - 66$ تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ بتعويض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ بالتبسيط

بناءً على هذه الإجابة ، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 in، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 in .

✓ تأكد

6) **سرعة:** إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطى بالدالة المعرفة بأكثر من قاعدة أدناه، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \quad 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \quad 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

أوجد سرعة المركبة عند الزمن المُعطى في كل مما يأتي:

6A) $v(5)$ 20 mi/h

6B) $v(15)$ 60 mi/h

6C) $v(245)$ 30 mi/h

إرشادات للدراسة

المجال المناسب هو جزء من المجال يناسب الموقف المُعطى. فمثلًا، إذا كانت لديك دالة متغيرها المستقل هو الطول، فليس من المعقول أن يكون لديك طول سالب. وعليه، يكون المجال المناسب في هذه الحالة الأعداد التي تكون أكبر من أو تساوي صفرًا.

تحديد الدوال

مثال 6 يُبيّن كيفية إيجاد قيمة دالة معرفة بأكثر من قاعدة عند نقطة معطاة.

مثال إضافي

6 **مالية:** تُبيّن الدالة الآتية المعرفة بأكثر من قاعدة معدل سعر المتر المربع الواحد بالدينار البحريني من الأراضي التجارية الأستثمارية بدلالة المساحة الكلية للأرض a .

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a - 1000}{40} + 60 , & 1000 \le a < 2600 \\ \frac{-(a - 2600)}{100} + 90 , & 2600 \le a < 4000 \\ \frac{a - 4000}{25} + 80 , & a \ge 4000 \end{cases}$$

أوجد معدل سعر المتر المربع الواحد في a , b :

a) مساحة الأرض $4000\,m^2$.
BD 80

b) مساحة الأرض $3200\,m^2$.
BD 84

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 35-1 للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع إذا احتاج الطلبة إلى مساعدة لحَلّ التمرين 9، فاكتب المتتالية الآتية :

$5(1), 5(2), 5(3), \ldots.$

يُوضّح هذا أن قيم n هي $1, 2, 3, \ldots$ أو جميع الأعداد الطبيعية.

تنبيه!

خطأ شائع ذكّر الطلبة بقاعدتين أساسيتين تتعلقان بالتمارين 31-26 وهما:

1) المقام لا يساوي صفرًا.

2) لا يوجد حَلّ حقيقي للجذر التربيعي لعدد سالب.

اكتشف الخطأ إجابة عبدالله على التمرين 51 أغفلت عناصر من المجال. لذا ذكّر الطلبة بأن قيم x التي لا تنتمي إلى مجال الدالة هي التي تجعل المقام صفرًا.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل مجموعة مما يأتي بدلالة الصفة المميزة، وعلى صورة فترة إن أمكن: (المثالان 1, 2) للتمارين 1-10 انظر ملحق الإجابات

1) $x > 50$
2) $x < -13$
3) $x \leq -4$
4) $\{-4, -3, -2, -1, \ldots\}$
5) $-31 < x \leq 64$
6) $x < -19$ أو $x > 21$
7) $x \geq 67$ أو $x \leq 61$
8) $x \leq -45$ أو $x > 86$
9) المضاعفات الموجبة للعدد 5
10) $x \geq 32$

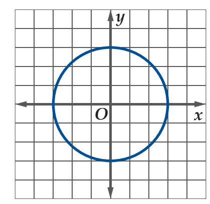
حدّد إذا كانت العلاقات الآتية تمثل y كدالة في x : (مثال 3)

11) المتغير المستقل x يمثّل رقم حساب في بنك، والمتغير y يمثّل الرصيد في الحساب. **دالة**

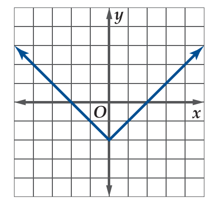
12) **ليست دالة**

x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

13) $\frac{1}{x} = y$ **دالة**
14) $x^2 = y + 2$ **دالة**
15) $\sqrt{48y} = x$ **دالة**
16) $\frac{x}{y} = y - 6$ **ليس دالة**

17) 

ليست دالة

18) 

دالة

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 4)

19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$
a) $g(9)$ **310**
b) $g(3x)$ $\mathbf{18x^2 + 54x - 14}$
c) $g(1 + 5m)$ $\mathbf{50m^2 + 110m + 6}$

20) $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$
a) $h(4)$ **−207**
b) $h(-2y)$ $\mathbf{24y^3 + 12y + 9}$
c) $h(5b + 3)$ $\mathbf{-375b^3 - 675b^2 - 435b - 90}$

21) $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$ انظر ملحق الإجابات
a) $f(-6)$
b) $f(4t)$
c) $f(3 - 2a)$

22) $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$ انظر ملحق الإجابات
a) $g(-2)$
b) $g(5x)$
c) $g(8 - 4b)$

23) $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$
a) $g(-2)$ **3**
b) $g(3m)$ $\mathbf{3 + \sqrt{9m^2 - 4}}$
c) $g(4m - 2)$ $\mathbf{3 + 4\sqrt{m^2 - m}}$

24) $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$
a) $t(-4)$ $\mathbf{20\sqrt{6}}$
b) $t(2x)$ $\mathbf{10|x|\sqrt{6}}$
c) $t(7 + n)$ $\mathbf{5|7 + n|\sqrt{6}}$

25) **أجهزة سمعية رقمية :** إذا علمت أن مبيعات شركة أجهزة سمعية رقمية خلال خمس سنوات تعطى بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث t الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول المجاور. (مثال 4)

السنة	المبيعات بمئات الدنانير
1	1
2	3
3	14
4	74
5	219

a) أوجد $f(1)$ **9 مئات الدنانير**

b) أوجد $f(5)$ **213 مئات الدنانير**

c) هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنوات الأولى، أو في السنوات الأخيرة؟ برّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

حدّد مجال كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 5) للتمارين 26-31 انظر ملحق الإجابات

26) $f(x) = \frac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$
27) $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$
28) $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$
29) $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$
30) $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$
31) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 1}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	51، 52، 54 – 70
ضمن المتوسط	37، 38، 39، 41 – 49 فردي، 50 – 52، 54 – 70
فوق المتوسط	36 – 70

إرشادات للمعلم الجديد

العلاقات والدوال في التمرينين 48 ، 49، يمكن الكشف عن العلاقات التي تُمثّل دوالّ بسرعة، وذلك بتعيين أزواج مرتبة للعلاقة، لذا، فإنه لا حاجة لتمثيل كل علاقة بيانيًّا.

إجابات :

32) نعم، إجابة ممكنة؛ لأن الطول لايكون سالبًا. ومجال الدالة هو $[0, \infty)$.

36) دالة، لا يقطع الخط الرأسي المنحنى في أكثر من نقطة.

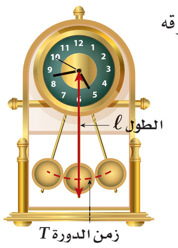
37) ليست دالة؛ لأن الخط الرأسي (المحور y) يقطع التمثيل البياني في النقطتين $(0, 0)$, $(0, -4)$.

40) $-5, -5, 0$.

41) $\sqrt{a}\ , \sqrt{a+h}\ , \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

---

32) **فيزياء :** إذا كان T زمن الدورة الذي يستغرقه بندول ساعة لإتمام دورة واحدة، ويعطى بالقاعدة $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ طول البندول، و 9.8 تسارع (عجلة) الجاذبية الأرضية بالمتر لكل ثانية مربعة. فهل تمثّل القاعدة دالة في ℓ؟ إذا كانت كذلك فحدّد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبيّن السبب. (مثال 5) انظر الهامش



أوجد $f(-5)$ و $f(12)$ لكل دالة من الدوال الآتية: (مثال 6)

33) $f(x) = \begin{cases} -4x+3 & , \quad x < 3 \\ -x^3 & , \quad 3 \le x \le 8 \\ 3x^2+1 & , \quad x > 8 \end{cases}$ **23, 433**

34) $f(x) = \begin{cases} -15 & , \quad x < -5 \\ \sqrt{x+6} & , \quad -5 \le x \le 10 \\ \frac{2}{x}+8 & , \quad x > 10 \end{cases}$ **$1, 8\frac{1}{6}$**

35) **دخل :** إذا كانت الدالة T تُمثّل المبلغ (بالدولار) الذي تتقاضاه شركة توزيع لأجهزة هاتف محمول معطاة بالعلاقة:

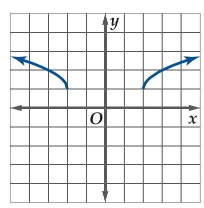
$$T(x) = \begin{cases} 2.1x & , \quad 0 \le x \le 7000 \\ 5000 + 2.4x & , \quad 7000 < x \le 20000 \\ 8000 + 3x & , \quad 20000 < x \le 80000 \end{cases}$$

حيث تمثّل x عدد الأجهزة الموزَّعة، فأوجد $T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$.

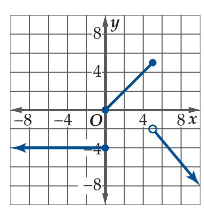
14700 , 29000 , 158000

باستعمال اختبار الخط الرأسي، حدِّد إذا كان كل من التّمثيلين أدناه يُمثِّل دالة. أجب بنعم أو لا، وفسِّر إجابتك. للتمرينين 36, 37 انظر الهامش

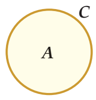
36)



37)



38) **هندسة :** يمثّل الشكل أدناه دائرة مساحة سطحها A ، ومحيطها C .



a) اكتب المساحة بوصفها دالة في المحيط. $A = \dfrac{C^2}{4\pi}$

b) أوجد $A(4), A(0.5)$. **1.27, 0.02**

c) ما تأثير زيادة المحيط في المساحة؟
كلما ازداد المحيط ازدادت المساحة

39) **محاسبة :** تتناقص قيمة بعض المعدات أو الآلات مع مرور الزمن. وتستعملُ طريقة الخط المستقيم لحساب هذا التناقص. افترض أن $v(t) = 10440 - 290t$ تمثّل قيمة آلة تصوير، حيث t الزمن بالأشهر. حدّد المجال المناسب لهذه الدالة.
المجال = $\{t \mid 0 \le t \le 36, t \in N\}$

أوجد $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f(a)$, $f(a+h)$، حيث $h \neq 0$ لكل مما يأتي:

للتمارين 40-47 انظر الهامش

40) $f(x) = -5$ **41)** $f(x) = \sqrt{x}$

42) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ **43)** $f(x) = x^2 - 6x + 8$

44) $f(x) = -14x + 6$ **45)** $f(x) = x^3 + 9$

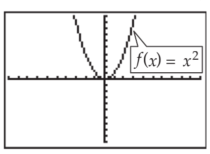
46) $f(x) = 5x^2$ **47)** $f(x) = x^3$

اختبر إذا كانت المعادلة المعطاة في كلٍّ من التمرينين الآتيين تمثّل دالة في x أو لا، وبرّر إجابتك. للتمرينين 48, 49 انظر ملحق الإجابات

48) $x = |y|$ **49)** $x = y^3$

50) **تمثيلات متعددة :** سوف تستقصي في هذا التمرين مدى دالة معينة.

a) **تمثيل بياني :** استعمل آلة حاسبة بيانيّة لتمثيل $f(x) = x^n$ بيانيًّا لكل قيم n من 1 إلى 6.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

انظر ملحق الإجابات

b) **جدولة :** تنبَّأ بمدى كل دالة من الدوال التي مثّلتها في الفرع a ، واعرضه في جدول يتضمن قيم n والمدى المرتبط بكل منها.

c) **تعبير لفظي :** خمّن مدى الدالة f عندما يكون n زوجيًّا.

d) **تعبير لفظي :** خمّن مدى الدالة f عندما يكون n فرديًّا.

---

42) $\dfrac{1}{a+4}\ , \dfrac{1}{a+h+4}\ , \dfrac{-1}{a^2+ah+8a+4h+16}$

43) $a^2-6a+8,\ a^2+2ah+h^2-6a-6h+8,\ 2a-6+h$

44) $-14a+6,\ -14a-14h+6,\ -14$

45) $a^3+9\ ,\ a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+9,\ 3a^2+3ah+h^2$

46) $5a^2\ ,\ 5a^2+10ah+5h^2\ ,\ 10a+5h$

47) $a^3\ ,\ a^3+3a^2h+3ah^2+h^3\ ,\ 3a^2+3ah+h^2$

مسائل مهارات التفكير العليا

51) اكتشف الخطأ: أراد كلّ من عبد اللّه وسلمان تحديد مجال $f(x)=\frac{2}{x^2-4}$. فأجاب عبد اللّه بأن المجال هو: $(-\infty,-2)\cup(1,1)\cup(2,\infty)$. على حين أجاب سلمان بأن المجال هو $\{x \mid x\neq -2, x\neq 2, x\in R\}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك. **انظر الهامش**

52) اكتب مجال $f(x)=\frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ باستعمال الفترات والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟ **انظر ملحق الإجابات**

53) تحدٍّ: إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1)=1, G(2)=2, G(3)=3$ و $G(x+1)=\frac{G(x-2)\,G(x-1)+1}{G(x)}$ لكل $x\geq 3$، فأوجد $G(6)$. $\frac{4}{7}$

تبرير: أي العبارات الآتية التي تصف الدالة من X إلى Y صحيحة؟ وأيها خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة، فأعد كتابتها لتصبح صحيحة:

54) يرتبط كل عنصر من X بعنصر واحد من Y. **صحيحة**

55) يرتبط كل عنصر من Y بعنصر واحد من X. **للتمرينين 55,56 انظر الهامش**

56) لا يرتبط عنصران أو أكثر من X بالعنصر نفسه من Y.

57) لا يرتبط عنصران أو أكثر من Y بالعنصر نفسه من X. **صحيحة**

اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد الدالة من خلال:

58) عبارة لفظية تُبيّن العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى.

59) مجموعة أزواج مرتبة. **للتمارين 58-61 انظر الهامش**

60) جدول قيم.

61) تمثيل بياني.

62) معادلة. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-1) **للتمارين 64-69 انظر ملحق الإجابات**

63) $\frac{\csc^2\theta-\cot^2\theta}{\cos\theta}$

64) $4\left(\sec^2\theta-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (الدرس 5-1)

65) $3\cos 2\theta-5\cos\theta=1$

66) $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$

67) $\sin^2\theta+\cos 2\theta-\cos\theta=0$

68) $\tan^2\theta+\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})\tan\theta$

تدريب على اختبار معياري

69) أيٌّ من الدوال الآتية مداها $\{y \mid y\leq 0, y\in R\}$؟ **A**

A) $f(x)=-x^2$

B) $f(x)=x^2$

C) $f(x)=-x^2+1$

D) $f(x)=x^2+1$

70) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة $h(x)=\frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$؟ **C**

A) $x\neq 5$

B) $x\geq\frac{3}{2}$

C) $x\geq\frac{3}{2}, x\neq 5$

D) $x\neq\frac{3}{2}$

4 التقويم

بطاقة خروج: اعط الطلبة التمرين الآتي: إذا كانت $f(x)=\frac{-4x}{\sqrt{x^2-1}}$، فأوجد قيمة $f(3)$، واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

إجابات:

51) سلمان؛ إجابة ممكنة: المجال هو: $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$ أو $\{x \mid x\neq -2, x=2, x\in R\}$

55) خطأ؛ إجابة ممكنة: ليس بالضرورة أن يرتبط كل عنصر من Y بعنصر مختلف من X.

56) خطأ؛ إجابة ممكنة: العنصران أو أكثر من X قد يرتبطان بالعنصر نفسه من Y.

58) إجابة ممكنة: تكون العلاقة دالة إذا ارتبطت كل قيمة x من المجال (مدخلة) بقيمة y واحدة فقط من المدى (مخرجة).

59) إجابة ممكنة: إذا ارتبط كل عنصر من المجال (إحداثي x) في مجموعة الأزواج المرتبة بعنصر واحد مختلف من المدى (إحداثي y) تكون العلاقة دالة.

60) إجابة ممكنة: إذا ارتبطت كل قيمة لـ x في الجدول بقيمة واحدة مختلفة لـ y تكون العلاقة دالة.

61) إجابة ممكنة: إذا قطع أي مستقيم رأسي منحنى العلاقة في نقطة واحدة فقط فإنها تكون دالة.

62) إجابة ممكنة: إذا ارتبطت كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y بعد حَلّ المعادلة بالنسبة لـ y تكون العلاقة دالة.

تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات صغيرة، وإيجاد مثالين على دالتين مجال كلّ منهما هو: $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,\infty)$.

إجابات ممكنة: $g(x)=\frac{x-4}{x^2+2x-3}$ ، $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$.

2-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

تعيين الدوال .

الدرس 2-2

استعمال التَّمثيل البياني؛ لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطع المحور y، وأصفارها.

استكشاف تماثل منحنيات الدوال، وتحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

ما بعد الدرس 2-2

استكشاف الاتصال، وسلوك نهاية الدالة والنهايات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- إذا مُثِّلت دالة الربح/ الخسارة من بيع x من الوحدات بمستقيم قطع المحور x عند 200، فماذا يعني ذلك؟ يبدأ الربح بعد بيع 200 وحدة.

2-2 تحليل التَّمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

Analyzing Graphs of Functions and Relations

فيما سبق

درست الدوال وكيفية حساب قيمها عند قيمة معينة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أستعملُ التَّمثيل البياني؛ لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y، وأصفارها.
- أستكشف تماثل منحنيات الدوال، وأحدِّد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المفردات الأساسية

الأصفار
zeros

الجذور
roots

التماثل حول مستقيم
line symmetry

التماثل حول نقطة
point symmetry

الدالة الزوجية
even function

الدالة الفردية
odd function

www.obeikaneducation.com

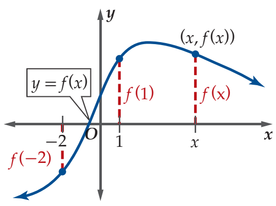
لماذا؟

تولي الدول أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك في الميزانية المخصصة له. فمثلاً، يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بملايين الدنانير) لإحدى الدول خلال الفترة (2001 – 2009) م بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07 ,\ 1 \le x \le 8$$

حيث يُمثّل x رقم السنة منذ 2001 م . والتَّمثيل البياني لهذه الدالة يساعدك على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

تحليل التَّمثيل البياني للدالة التَّمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ حيث x أحد عناصر مجال f. وبمعنى آخر، فإن التَّمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. وعليه، تكون القيمة المطلقة للدالة مساوية للمسافة الرأسية المتجهة من النقطة x على المحور x إلى منحنى الدالة كما هو موضح في الشكل المجاور.



يُستعملُ التَّمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقريب قيم الدالة.

مثال 1 من واقع الحياة تقريب قيم الدوال

صحة : معتمدًا على التَّمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" :

a) قدّر قيمة المخصصات سنة 2007 م، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

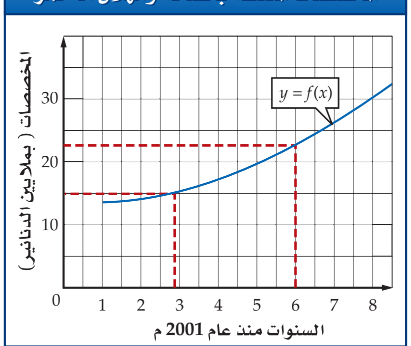
السنة 2007 م هي السنة السادسة بعد 2001 م، لذا، تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليون دينار تقريبًا. وعليه، تكون المخصصات سنة 2007 م هي 23 مليون دينار تقريبًا.

وللتحقق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا، يُعدُّ التقريب 23 مليون دينار باستعمال التَّمثيل البياني معقولاً.

المخصصات المتعلقة بالصحة والهلال الأحمر



b) قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليون دينار، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

يُبيِّن التَّمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليون دينار عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3. لذا، تكون المخصصات 15 مليون دينار في سنة 2004 م . وللتحقق جبريًّا، أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.56543(3) + 14.07 = 15.4149$$

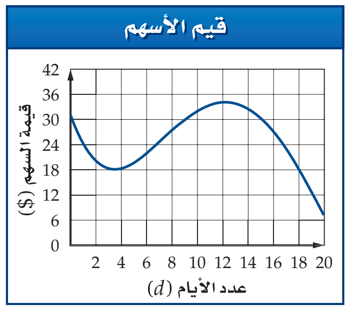
لذا، تُعدُّ السنة التقريبية 2004 م معقولة.

مصادر الدرس 2-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (61)	• تنويع التعليم ، ص (61)	• تنويع التعليم ، ص (63)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة ، • كتاب التمارين ، ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (10) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	•كتاب التمارين ، ص (10) •تدريبات المسائل اللفظية •تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

✓ تأكد

1) **أسهم:** تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فكانت قيمة السهم تُعطى بالقاعدة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$ ، حيث $v(d)$ قيمة السهم بالدولار في اليوم d.



1B) في اليوم صفر، وبين اليومين التاسع والعاشر، وبين اليومين الخامس عشر والسادس عشر.

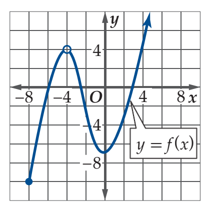
1A) اعتمد التَّمثيل البياني؛ لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا. **$32**

1B) اعتمد التَّمثيل البياني؛ لتقدير الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم $30 . ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

لا يقتصر استعمال التَّمثيل البياني للدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها، حيث يُعدُّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدِّد بنقطة أو دائرة.

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f و مداها باستعمال التَّمثيل البياني المجاور .



المجال:

- تدل النقطة $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f.
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود.

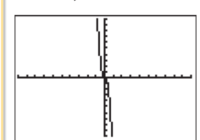
مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة يكون المجال هو $\{x \mid -8 \le x, x \ne -4, x \in R\}$.

المدى:

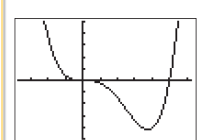
إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10 ، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x . لذا، فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

إرشادات للدراسة

اختيار التدريج المناسب
اختر تدريجًا مناسبًا للمحور x ؛ لتتمكن من رؤية منحنى الدالة بوضوح .
لاحظ اختلاف تمثيل $f(x) = x^4 - 20x^3$ أدناه.



محور x: $[-10, 10]$
محور y: $[-10, 10]$

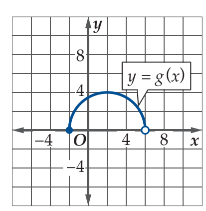


محور x: $[-15, 25]$ ، كل مسافة تمثل 4 وحدات
محور y: $[-20000, 20000]$ ، كل مسافة تمثل 4000 وحدة

✓ تأكد

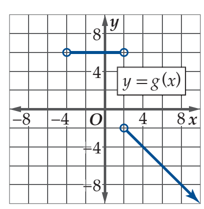
أوجد مجال الدالة و مداها باستعمال التَّمثيلين البيانيين أدناه:

2A)



المدى $= [0, 4]$, المجال $= [-2, 6]$

2B)



المدى $= (-\infty, -2) \cup [6]$, المجال $= (-4, 2) \cup (2, \infty)$

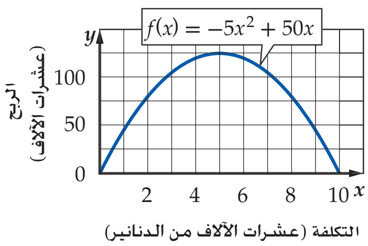
- التَّمثيل البياني لزمن ماراثون مع زمن الاستراحة السابقة للسباق الذي قد يزيد يومين أو ينقص عنه. إذا مثّل زمن السباق المتغيّر التابع وزمن الاستراحة المتغير المستقل، فماذا يعني ذلك؟ يكون أسرع وقت للماراثون عندما يكون وقت الاستراحة يومين. إذا زاد وقت الاستراحة على يومين أو قلّ، فإن زمن السباق يزيد.

✓ التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **إعلان:** إذا كانت العلاقة بين أرباح شركة كبرى وتكلفة التسويق x مقدّرة بعشرات الآلاف من الدنانير معطاةً بالدالة: $f(x) = -5x^2 + 50x$ ، ومُمثّلة بالشكل أدناه، فأجب عمّا يأتي:



a) استعمل التَّمثيل البياني؛ لتقدير ربح الشركة، إذا كانت التكلفة BD 30000. وتحقق من إجابتك جبريًّا.
BD 1050000

b) استعمل التَّمثيل البياني؛ لتقدير التكلفة، إذا كان الربح BD 1250000. وتحقق من إجابتك جبريًّا.
BD 50000

التعليم باستعمال التقنيات

التقنية والتَّمثيل البياني اطلب إلى الطلبة تتبع مسار منحنى الدالة بتحريك مؤشر الفأرة على المنحنى لرؤية الإحداثيات في أثناء الحركة، تقدم هذه التقنية إلى الطلبة تغذية راجعة آنية حول تقديراتهم لقيم الدالة.

تحليل التَّمثيل البياني للدالة

مثال 1 يُبيّن كيفية تقدير قيم الدالة باستعمال التَّمثيل البياني.

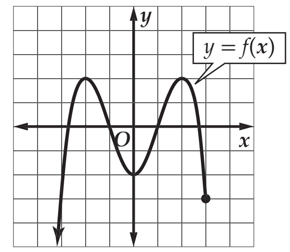
مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد مجال دالة، ومداها باستعمال التَّمثيل البياني.

تحليل التَّمثيل البياني للدالة

مثال 3 يُبيِّن كيفية إيجاد مقطع المحور y لدالة من التَّمثيل البياني .

مثالان إضافيان

2 أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التَّمثيل البياني أدناه.

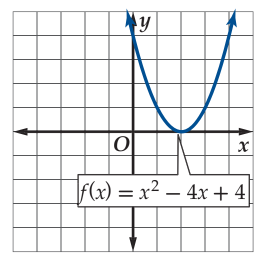


المجال = $(-\infty, 3]$

المدى = $(-\infty, 2]$

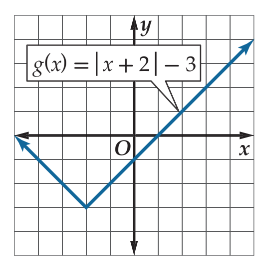
3 استعمل التَّمثيل البياني لكلٍّ دالة من الدالتين الآتيتين أدناه؛ لإيجاد قيمة تقريبية لمقطع المحور y، ثم أوجده جبريًّا.

a)



4

b)



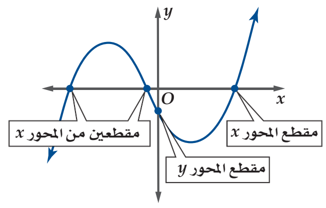
-1

تسمى النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x ، أو المحور y المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على مقطع المحور x بتعويض $y = 0$ ، وللحصول على مقطع المحور y فإننا نعوض $x = 0$. وبشكل عام، فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع المحور x ، وقد يكون هناك مقطع المحور x واحد أو أكثر، أما بالنسبة لمقطع المحور y فهناك مقطع واحد على الأكثر.

إرشادات للدراسة

كتابة المقاطع

يمكن كتابة مقطع المحور y على صورة زوج مرتب $(0, y)$ ، ويمكن كتابة المقطع x على الصورة $(x, 0)$.

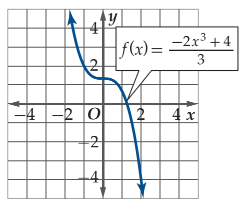


ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نجد $f(0)$.

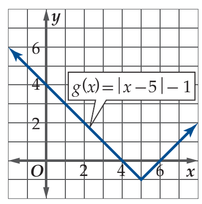
مثال 3 إيجاد مقطع المحور y

استعمل التَّمثيل البياني لكل دالة من الدالتين أدناه؛ لإيجاد قيمة تقريبية لمقطع المحور y ، ثم أوجده جبريًّا:

a)



b)



التقدير من التَّمثيل البياني

يتضح من الشكل أعلاه، أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا. وعليه، فإن مقطع المحور y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

الحل جبريًّا

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3 + 4}{3} = \frac{4}{3}$$

أي أن مقطع المحور y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$

التقدير من التَّمثيل البياني

يتضح من الشكل أعلاه، أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$. وعليه، فإن مقطع المحور y هو 4 .

الحل جبريًّا

أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0 - 5| - 1 = 4$$

أي أن مقطع المحور y هو 4 .

إرشادات للدراسة

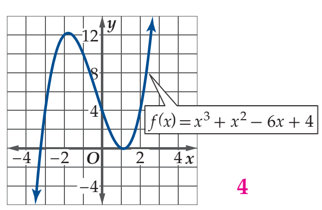
تسمية المحورين في التَّمثيل البياني

عندما تُسمى المحورين في التَّمثيل البياني، فإن المتغير الذي يدل على المجال يكون على المحور x، والمتغير الذي يدل على المدى يكون على المحور y. وستستعمل في هذا الكتاب متغيرات كثيرة لكل من المجال والمدى. وللسهولة سيبقى المحور الأفقي x والرأسي y .

✓ تأكد

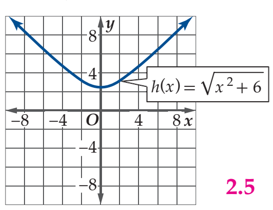
استعمل التَّمثيل البياني لكل دالة من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية لمقطع المحور y ، ثم أوجده جبريًّا:

3A)



4

3B)



2.5

تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f ، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

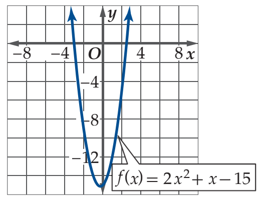
التركيز في المحتوى الرياضي

تمثيل الدوال يُعطي التَّمثيل البياني والجبري للدوال كمًّا كبيرًا من المعلومات عن العلاقة بين المتغيرين.

- يقدم التَّمثيل البياني معلومات سهلة عن القيم العظمى، والقيم الصغرى(القصوى)، وأصفار الدوال، ومقاطع المحور y.
- تُعطي معادلة الدالة القيم الفعلية للدالة.

مثال 4 إيجاد الأصفار

استعمل التَّمثيل البياني المجاور لـ $f(x) = 2x^2 + x - 15$ ؛ لتقريب أصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.



التقدير من التَّمثيل البياني

يتضح من الشكل أن المقطعين للمحور x هما $-3, 2.5$ تقريبًا.
لذا ، فإن صفري الدالة f هما $-3, 2.5$.

الحل جبريًّا

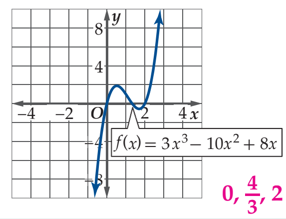
بوضع $f(x) = 0$	$2x^2 + x - 15 = 0$	
بالتحليل	$(2x - 5)(x + 3) = 0$	
خاصية الضرب الصفري	$2x - 5 = 0$ أو	$x + 3 = 0$
بحَل كل معادلة	$x = 2.5$ أو	$x = -3$

أي أن صفري الدالة f هما $-3, 2.5$.

✓ تأكد

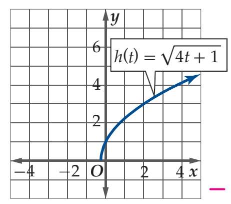
استعمل التَّمثيلين البيانيين أدناه؛ لتقريب أصفار الدالة، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا :

(4A



$0, \frac{4}{3}, 2$

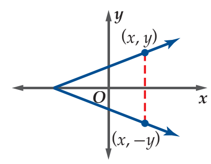
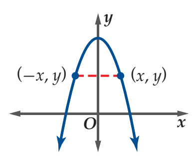
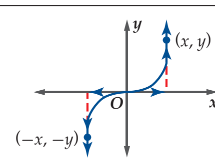
(4B



$-\frac{1}{4}$

التماثل يوجد للتمثيل البياني للعلاقات نوعان من التماثل، **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم بحيث ينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** بحيث إذا دوّر المنحنى بزاوية قياسها °180 حول النقطة، فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأهم أنواع التماثل:

مفهوم أساسي اختبارات التماثل

اختبار التَّمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون منحنى العلاقة متماثلًا حول المحور x ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على المنحنى ، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا .		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .
يكون منحنى العلاقة متماثلًا حول المحور y ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على المنحنى ، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا .		إذا كان تعويض $-x$ مكان x ، يعطي معادلة مكافئة .
يكون منحنى العلاقة متماثلًا حول نقطة الأصل ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على المنحنى ، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا .		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

إرشادات للدراسة

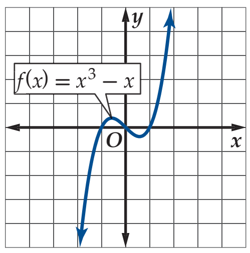
تماثل العلاقات والدوال
يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

تحليل التَّمثيل البياني للدالة

مثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد أصفار دالة من التَّمثيل البياني.

مثال إضافي

4 استعمل التَّمثيل البياني أدناه لِـ $f(x) = x^3 - x$ ؛ لتقريب أصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا. $-1, 0, 1$



إرشادات للمعلم الجديد

إيجاد القيم باستعمال التَّمثيل البياني

عند استعمال التَّمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمها، يجب على الطلبة استعمال مسطرة تمتد مع كلا المحورين ؛ لتسهيل عملية إيجاد القيم بدقة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون اطلب إلى الطلبة البحث عن متغيرات مستقلة وغير مستقلة ضمن اهتماماتهم، ثم اطلب إليهم وصف هذه المتغيرات، وتحديد مجال واقعي للدالة المكوّنة منها ومداها. فمثلًا؛ أن المجال الذي فيه أعداد سالبة مناسب لدرجات الحرارة ولكنه غير مناسب للزمن المحدد لإجراء مباراة، ثم اطلب إليهم تَّمثيل الدوال التي حصلوا عليها.

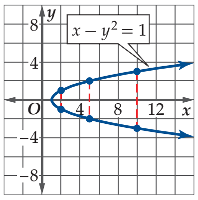
مـثال 5 اختبار التماثل

استعمل التَّمثيل البياني لكل من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. وتحقق من الإجابة عدديًّا، ثم جبريًّا.

إرشادات للدراسة

التماثل
من الممكن أن يكون للتمثيل البياني الواحد أكثر من نوع تماثل.

a) $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًا

يتضح من التَّمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.

التحقق عدديًا

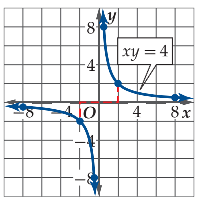
يُبيّن الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x.

x	2	2	5	5	10	10
y	1	-1	2	-2	3	-3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

التحقق جبريًا

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

b) $xy = 4$



التحليل بيانيًا

يتضح من التَّمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.

التحقق عدديًا

يُبيّن الجدول أدناه وجود تماثل حول نقطة الأصل.

x	-8	-2	-0.5	0.5	2	8
y	-0.5	-2	-8	8	2	0.5
(x, y)	(−8, −0.5)	(−2, −2)	(−0.5, −8)	(0.5, 8)	(2, 2)	(8, 0.5)

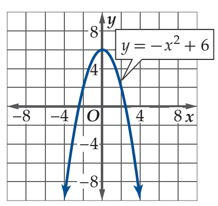
التحقق جبريًا

بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

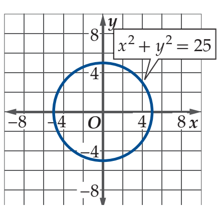
تأكد للتدريبين **5A, 5B** انظر الهامش

استعمل التَّمثيل البياني لكل من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. وتحقق من الإجابة عدديًّا، ثم جبريًّا.

5A)



5B)



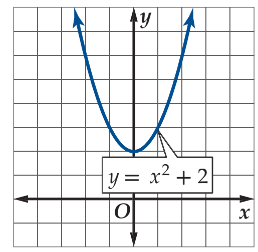
التماثل

مثال 5 يُبيّن كيفية اختبار تماثل منحنيات الدوال حول مستقيم وحول نقطة.

مثال إضافي

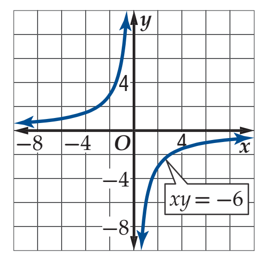
5 استعمل التَّمثيل البياني لكلٍّ من المعادلتين الآتيتين؛ لاختبار التماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. وتحقق من الإجابة عدديًّا ثمَّ جبريًّا.

a)



متماثل حول المحور y

b)



متماثل حول نقطة الأصل

إجابات (تأكد):

5A) يتضح من التَّمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y، لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع على المنحنى نفسه.

التحقق عدديًّا

يُبيّن الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور y:

x	-3	3	-2	2
y	-3	-3	2	2
(x, y)	(−3, −3)	(3, −4)	(−2, 2)	(2, 2)

التحقق جبريًّا

بما أن المعادلة $y = -(-x)^2 + 6$ تكافئ $y = -x^2 + 6$، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

5B) يتضح من التَّمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.

التحقق عدديًّا

x	4	4	3	3	0	0
y	3	-3	4	-4	5	-5
(x, y)	(4, 3)	(4, −3)	(3, 4)	(3, −4)	(0, 5)	(0,−5)

التحقق جبريًّا

بما أن المعادلة $x^2 + (-y^2) = 25$ تكافئ $x^2 + y^2 = 25$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

وهو متماثل حول المحور y أيضًا؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع على المنحنى نفسه.

التحقق عدديًّا

x	3	-3	4	-4	5	-5
y	4	4	3	3	0	0
(x, y)	(3, 4)	(−3, 4)	(4, 3)	(−4, 3)	(5, 0)	(−5,0)

التحقق جبريًّا

بما أن المعادلة $(-x^2) + y^2 = 25$ تكافئ $x^2 + y^2 = 25$، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

وهو متماثل حول نقطة الأصل، لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.

التحقق عدديًّا

x	-5	-4	-3	3	4	5
y	0	-3	-4	4	3	0
(x, y)	(−5, 0)	(−4,−3)	(−3,−4)	(3, 4)	(4, 3)	(5,0)

التحقق جبريًّا

بما أن المعادلة $(-x^2) + (-y^2) = 25$ تكافئ $x^2 + y^2 = 25$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

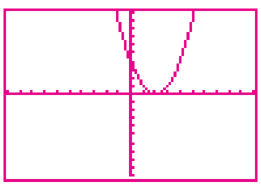
الدوال الزوجية والفردية

مثال 6 يُبيّن كيفية اختبار دالة من حيث كونها زوجية أو فردية.

مثال إضافي

6 مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، وحلّل التَّمثيل البياني؛ لتحدد ما إذا كانت الدالة زوجية أو فردية أو ليست أيًّا منهما، ثم تحقق جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية، فصف تماثل منحنى الدالة.

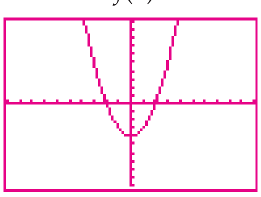
a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

الدالة ليست زوجية وليست فردية.

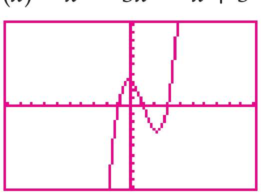
b) $f(x) = x^2 - 4$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

الدالة زوجية، تماثل حول المحور y.

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

الدالة ليست زوجية وليست فردية.

يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط، أو حول نقطة الأصل فقط. لذا، فإن هذه الدوال تُسمى بأسماء خاصة.

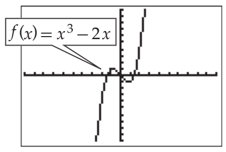
مفهوم أساسي: الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. وحلّل التَّمثيل البياني؛ لتحدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أو فردية أو ليست أيًّا منهما، ثم تحقق من ذلك جبريًّا.

a) $f(x) = x^3 - 2x$



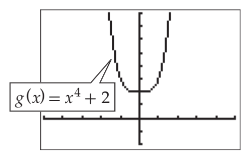
$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

يُظهر التَّمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، وعليه فهي دالة فردية. تحقّق من ذلك جبريًّا.

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^3 - 2(-x) && \text{بتعويض } -x \text{ مكان } x\\
&= -x^3 + 2x && \text{بالتبسيط}\\
&= -(x^3 - 2x) && \text{خاصية التوزيع}\\
&= -f(x) && \text{الدالة الأصلية } f(x) = x^3 - 2x
\end{aligned}
$$

أي أن الدالة فردية ؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

b) $g(x) = x^4 + 2$



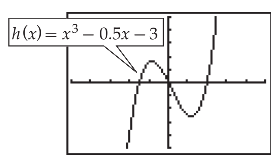
$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

يُظهر التَّمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y، وعليه فهي دالة زوجية. تحقّق من ذلك جبريًّا.

$$
\begin{aligned}
g(-x) &= (-x)^4 + 2 && \text{بتعويض } -x \text{ مكان } x\\
&= x^4 + 2 && \text{بالتبسيط}\\
&= g(x) && \text{الدالة الأصلية } g(x) = x^4 + 2
\end{aligned}
$$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $g(-x) = g(x)$.

c) $h(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$



$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

يُظهر التَّمثيل البياني أن الدالة قد تكون متماثلة حول نقطة الأصل، ويوحي ذلك بأنها دالة فردية. تحقّق من ذلك جبريًّا.

$$
\begin{aligned}
h(-x) &= (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x) && \text{بتعويض } -x \text{ مكان } x\\
&= -x^3 - 0.5x^2 + 3x && \text{بالتبسيط}
\end{aligned}
$$

بما أن $-h(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$ ، فإن $h(-x) \neq -h(x)$ وكذلك $h(-x) \neq h(x)$. لذا ، فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

إرشادات للدراسة

الدوال الزوجية والدوال الفردية

قد تُظهر لك بعض التَّمثيلات البيانية تماثلًا والحقيقة غير ذلك ، لذا ، عليك التأكد من التماثل جبريًا في كل مرة .

✓ تأكد للتدريبين 6A, 6C انظر ملحق الإجابات

مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. وحلّل التَّمثيل البياني؛ لتحدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أو فردية أو ليست أيًّا منهما، ثم تحقق من ذلك جبريًّا.

6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ **6B)** $g(x) = 4\sqrt{x}$ **6C)** $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

تنويع التعليم

فوق

المتعلمون السمعيون اطلب إلى الطلبة الاطلاع على مخطط نبضات قلب لأحد المرضى، ثم اطلب إليهم وصف التماثل (إن وجد) ، وهل الدالة زوجية أو فردية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–30 للتأكد من مدى فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لحَلّ تمرين

المسطرة عندما يستعمل الطلبة التَّمثيل البياني؛ لتقدير قيم الدالة في التمارين 4–1، ذكّرهم باستعمال مسطرة للحصول على إجابات دقيقة.

إجابات :

6) المجال $=\{x \mid x \in R\}$،
المدى $=[-3, \infty)$

7) المجال $=(-4, 4]$،
المدى $=[-1, 6]$

8) المجال $=[-5, \infty)$،
المدى $=[-2, \infty)$

9) المجال $=(-\infty, 7]$ ،
المدى $=\{-1\} \cup (1, \infty)$

10a) إجابة ممكنة: النحاس:
$\{x \mid -150 \leq x \leq 150, x \in R\}$
$\{y \mid y = 1.75\}$، الألومنيوم
$\{x \mid -150 \leq x \leq 150, x \in R\}$
$\{y \mid 0.6 \leq y \leq 1.5, y \in R\}$، الزنك
$\{x \mid -150 \leq x \leq 150, x \in R\}$
$\{y \mid 0.4 \leq y \leq 1.25, y \in R\}$، الفولاذ
$\{x \mid -150 \leq x \leq 150, x \in R\}$
$\{y \mid 0.2 \leq y \leq 1.75, y \in R\}$

10b) إجابة ممكنة: النحاس 1.75J تقريبًا، الألومنيوم 1.2J تقريبًا، الزنك 0.5J تقريبًا، الفولاذ 1.5J تقريبًا

2 a) يتضح من التَّمثيل البياني أن قيمة الدالة عند $x=-8$ تساوي 10 تقريبًا.

لإيجاد $g(-8)$ نعوِّض عن x بـ 8 كما يأتي:

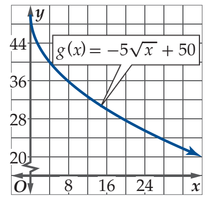
$$g(x) = |x| + 2$$
$$g(-8) = |-8| + 2$$
$$= 8 + 2$$
$$= 10$$

تدرب وحل المسائل

استعمل التَّمثيل البياني لكل دالة من الدوال الآتية؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة كلما لزم ذلك. (مثال 1)

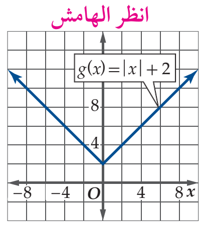
انظر الهامش 2

1)



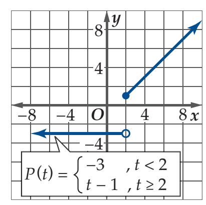
a) $g(6)$ **37.75** b) $g(12)$ **32.68** c) $g(19)$ **28.21**

2)



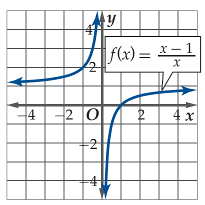
a) $g(-8)$ b) $g(-3)$ c) $g(0)$

3)



a) $P(-6)$ **−3** b) $P(2)$ **1** c) $P(9)$ **8**

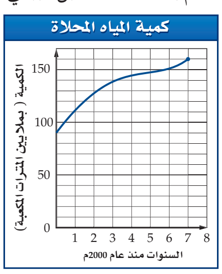
4)



a) $f(-3)$ **$\frac{4}{3}$** b) $f(0.5)$ **−1** c) $f(0)$ **غير معرفة**

5) مياه: إذا كانت كمية المياه المحلاة في إحدى محطات تحلية المياه (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (2007 م – 2000 م) معطاة بالدالة $f(x)=0.0509x^4-0.3395x^3-2.28x^2+25.35x+88.27$ ، حيث x رقم السنة منذ عام 2000 م . (مثال 1)

a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 2004 م باستعمال التَّمثيل البياني للدالة. **145 مليون متر مكعب تقريبًا**

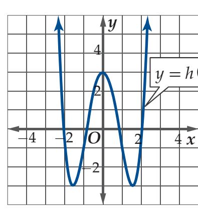


b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 2004 م جبريًّا، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. **144.5 مليون متر مكعب**

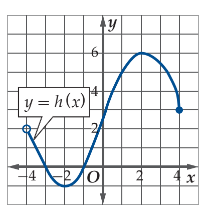
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التَّمثيل البياني للدالة، وتحقق من إجابتك جبريًّا. **2002**

استعمل التَّمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي؛ لإيجاد كلٍّ من مجال الدالة ومداها: (مثال 2) للتمارين 9-6 انظر الهامش

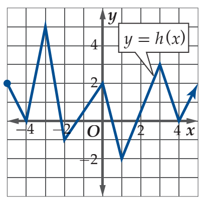
6)



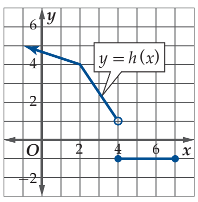
7)



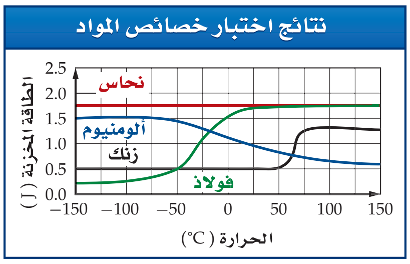
8)



9)



10) هندسة : أُجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أُخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. إذا كانت الطاقة المخزنة أوالممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضّح في الشكل أدناه: (مثال 2)

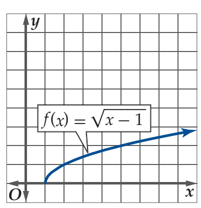


a) اكتب المجال والمدى لكل دالة. للفرعين a, b انظر الهامش

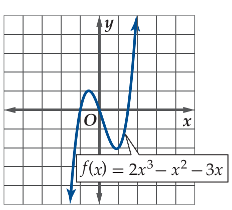
b) استعمل التَّمثيل البياني؛ لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند 0°C .

استعمل التَّمثيل البياني؛ لكل دالة من الدوال الآتية ؛ لإيجاد قيمة تقريبية لمقطع المحور y ، وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا: (المثالان 3, 4) للتمارين 14-11 انظر ملحق الإجابات

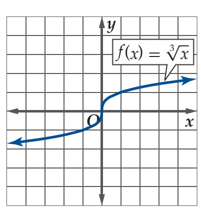
11)



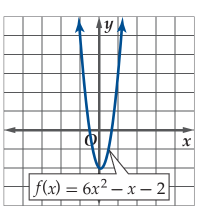
12)



13)



14)



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	55–79 ،49–53
ضمن المتوسط	31–34، 41 ، 42 ، 43–47 فردي، 49–53، 55–79
فوق المتوسط	31–79

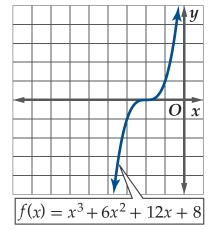
b) يتضح من التَّمثيل البياني أن قيمة الدالة عند $x=-3$ تساوي 5 تقريبًا. لإيجاد $g(-3)$ نعوِّض عن x بـ 3– كما يأتي:

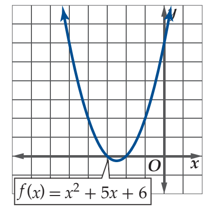
$$g(-3) = |-3| + 2$$
$$= 3 + 2$$
$$= 5$$

c) يتضح من التَّمثيل البياني أن قيمة الدالة عند $x=0$ تساوي 2 تقريبًا. لإيجاد $g(0)$ نعوِّض عن x بـ 0 كما يأتي:

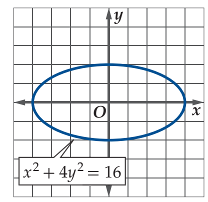
$$g(0) = |0| + 2$$
$$= 0 + 2$$
$$= 2$$

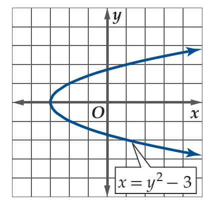
للتمرينين 15,16 انظر الهامش

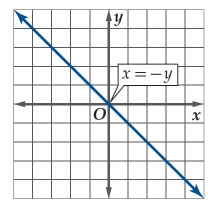
15)


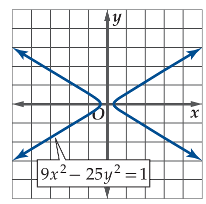
16)


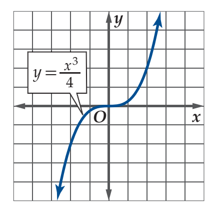
استعمل التَّمثيل البياني لكل معادلة من المعادلات الآتية؛ لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. دعّم إجابتك عدديًا، ثم تحقّق منها جبريًا. (مثال 5) للتمارين 17-24 انظر ملحق الإجابات

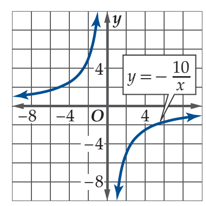
17)


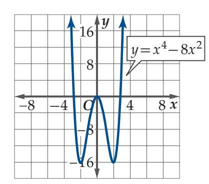
18)


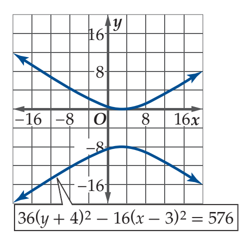
19)


20)


21)


22)


23)


24)


للتمارين 25-30 انظر ملحق الإجابات

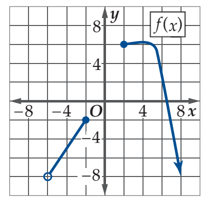
آلة حاسبة بيانية: استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية، ثم حلّل منحناها؛ لتحديد نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًا. (مثال 6)

25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$ 26) $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$

27) $g(x) = \sqrt{x + 6}$ 28) $h(x) = |8 - 2x|$

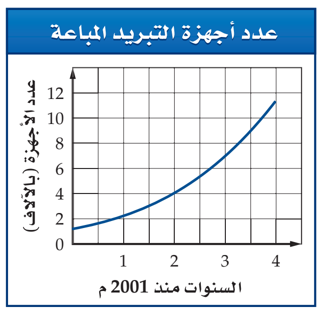
29) $f(x) = |x^3|$ 30) $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

31) استعمل التَّمثيل البياني للدالة f ؛ لتقدير قيمها المطلوبة:



a) $f(-2)$ **-2**
b) $f(-6)$ **غير معرفة**
c) $f(0)$ **غير معرفة**

32) **أجهزة تبريد:** إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرًا بالآلاف خلال الفترة 2005 م – 2001 م يُعطى بـ $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$ ، حيث x رقم السنة منذ 2001 م . للفروع a-d انظر الهامش



a) اكتب المجال المناسب للدالة، ثم قرّب مداها .

b) استعمل التَّمثيل البياني أعلاه؛ لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة 2003 م، ثم أوجد ذلك جبريًا.

c) استعمل التَّمثيل البياني؛ لتقدير قيمة مقطع المحور y للدالة ، ثم أوجده جبريًا. ماذا يمثّل مقطع المحور y ؟

d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار ، وفسّر معناها. وإذا كانت الإجابة لا، فوضح السبب.

إجابات :

15) مقطع المحور y هو 8 ، صفر الدالة هو -2
$0 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$0 = (x + 2)(x + 2)(x + 2)$
$x + 2 = 0$
$x = -2$

16) مقطع المحور y هو 6 ، صفرا الدالة هما -3 وَ -2
$0 = x^2 + 5x + 6$
$0 = (x + 2)(x + 3)$
$x + 2 = 0$ أو $x + 3 = 0$
$x = -2$ أو $x = -3$

32 a) المجال $= \{x \mid 0 \le x \le 4, x \in R\}$
المدى هو
$\{y \mid 1200 \le y \le 11200, y \in R\}$

b) بيانيًا: إجابة ممكنة: يظهر من التمثيل البياني أن قيمة الدالة عند $x = 2$ تساوي 4.5 تقريبًا، وتعني أن عدد الأجهزة المبيعة سنة 2003م يساوي 4500 جهاز تقريبًا.
جبريًا: عدد الأجهزة المبيعة سنة 2003م هو قيمة الدالة عندما $x=2$ ، أو
$h(2) = 0.5\,(2)^2 + 5.2\,(2) + 1.2$
$= 4.2$

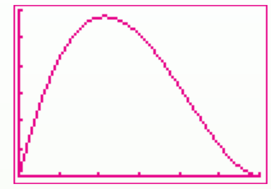
أي أن عدد الأجهزة المبيعة سنة 2003 م يساوي 4200 جهاز.

c) بيانيًا: إجابة ممكنة: يظهر من التمثيل البياني أن المنحنى يقطع المحور y عندما $y = 1.1$ ، ويعني ذلك أن عدد الأجهزة المبيعة عام 2001م هو 1100 جهاز تقريبًا.
جبريًا: لإيجاد مقطع المحور y، أوجد $h(0) = 1.2$.

d) لا يوجد لهذه الدالة أصفار، لأنه لكل سنة من سنوات المجال يوجد عدد من الأجهزة المبيعة.

إجابات :

(34a



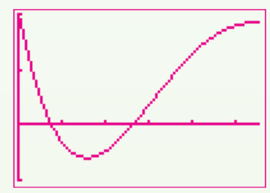
[0, 6] scl: 1 by [0, 360] scl: 60

(34b المجال $= \{x \mid 0 \leq x \leq 6, x \in W\}$ ، يبقى مسكّن الألم في الدم من صفر إلى $6h$.

(39 المجال $= (-8, -4] \cup (-2, \infty)$
المدى $= (-6, \infty)$

(40 المجال $=$
$(-\infty, -6] \cup (0, 5) \cup (8, 10)$
المدى $= (-\infty, 8) \cup \{10\}$

(41a



[0, 11] scl: 2 by [−0.5, 1] scl: 0.5

(41b المجال $= \{x \mid 0 \leq x \leq 11, x \in W\}$
المدى $= \{y \mid -0.5 \leq y \leq 1, y \in R\}$

(41c 1.04، إجابة ممكنة: يُمثّل مقطع المحور y نسبة التغيّر الأولية في الأسعار.

(41d 1.5, 5.2، تُمثّل الأصفار أو الشهر الذي تكون فيه نسبة التغيّر صفرًا.

(33 **دوال:** إذا كانت $f(x) = x^n$ ، فأجب عن التمارين الآتية:

a) استعمل الآلة الحاسبة البيانية، لتمثيل $f(x)$ بيانيًا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \leq n \leq 6$ ، حيث $n \in N$.

b) اكتب المجال والمدى لكل دالة. للفروع a-d انظر ملحق الإجابات

c) صف التماثل لكل دالة.

d) تنبّأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$ ، ومداها، وتماثلها، ثم برّر إجابتك.

(34 **صيدلة:** إذا كان عدد المليجرامات من مسكّن الألم الموجود في الدم بعد x ساعة من تناول جرعة دواء يُعطى بالدالة :
$f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$
للفرعين a, b انظر الهامش

a) استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل الدالة بيانيًا .

b) اكتب المجال المناسب للدالة، وبرّر إجابتك.

c) ما أكبر عدد من المليجرامات من مسكّن الألم يكون موجودًا في الدم وفق هذه الدالة؟ 346 mg تقريبًا

آلة حاسبة بيانية: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًا، وحدّد أصفارها، ثم تحقق من أصفار الدالة جبريًا: للتمارين 35 – 38 انظر ملحق الإجابات.

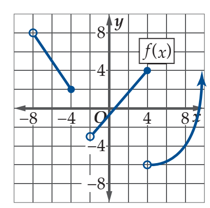
(35 $f(x) = \frac{4x - 1}{x}$ (36 $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x + 3}$

(37 $h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$ (38 $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$

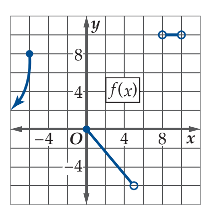
للتمارين 41-39 انظر الهامش

استعمل التّمثيل البياني للدالة f ؛ لإيجاد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي:

(39



(40



(41 **أسهم:** افرض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة : للفروع a-d انظر الهامش
$p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$
حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير .

a) استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل الدالة بيانيًا.

b) عيّن المجال المناسب للدالة، ثم قدّر مداها.

c) استعمل التّمثيل البياني للدالة؛ لتقريب قيمة مقطع المحور y ، وماذا يمثّل؟

d) أوجد أصفار الدالة ، ووضّح معناها.

(42 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا التمرين مدى قيم $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ عندما تؤول x إلى العدد 2.

a) **جدولة:** انقل الجدول أدناه إلى دفترك. وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	−100	−1000	غير معرف	1000	100

للفروع a-d انظر ملحق الإجابات

b) **تحليل:** معتمدًا على جدولك، ما القيمة (القيم) التي تقترب منها الدالة عندما تؤول x إلى العدد 2 ؟

c) **تمثيل بياني:** مثّل الدالة بيانيًا. وهل يؤكد التّمثيل البياني تخمينك في الفرع b ؟ برّر إجابتك.

d) **تعبير لفظي:** خمّن القيمة التي تؤول إليها الدالة من خلال التّمثيل البياني في الفرع c ، ووضح أي تناقض يظهر في التّمثيل.

آلة حاسبة بيانية: مثّل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا. وحدّد إذا كانت الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك. للتمارين 48-43 انظر ملحق الإجابات

(43 $h(y) = y^5 - 17y^3 + 16y$ (44 $f(x) = x^2 - x - 6$

(45 $h(x) = x^6 + 4$ (46 $f(g) = g^9$

(47 $g(y) = y^4 + 8y^2 + 81$ (48 $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مثّل بيانيًا بحيث تحقق الشروط في كل مما يأتي:

(49 تمرّ بالنقاط $(-8, 1), (-5, 2), (-4, 4), (-3, 8)$ ، ومتماثلة حول المحور y . للتمارين 54-49 انظر ملحق الإجابات

(50 تمرّ بالنقاط $(0, 0), (2, 6), (3, 12), (4, 24)$ ، ومتماثلة حول المحور x .

51 تمرّ بالنقاط $(-1, -3), (-2, -9), (-3, -18)$ ، ومتماثلة حول نقطة الأصل.

(52 تمرّ بالنقاط $(4, -16), (6, -12), (8, -8)$ ، وزوجية.

(53 **اكتب:** وضّح لماذا يمكن أن يكون للدالة 0 أو 1 أو أكثر من المقاطع x ، على حين يوجد لها مقطع y واحد على الأكثر.

(54 **تحدٍّ:** حدّد مجال $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 - 12x}$ ومداها، وبرّر إجابتك ، وتحقّق منها بيانيًا.

تبرير: حدّد أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خاطئة. برِّر إجابتك.
للتمارين 55-58 انظر ملحق الإجابات

55) مدى $f(x) = nx^2$ ، حيث n عدد صحيح هو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

56) مدى $f(x) = \sqrt{nx}$ ، حيث n عدد صحيح هو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

57) كل الدوال الفردية متماثلة حول المحور $y = -x$.

58) إذا دارت دالة زوجية $180°n$ حول نقطة الأصل، حيث n عدد صحيح، فإنها تبقى زوجية.

تبرير: إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدّد إذا كانت $b(x)$ فردية، أو زوجية، أو ليست أيًّا منهما، أو لا يمكن تحديدها. برِّر إجابتك.
للتمارين 59-63 انظر ملحق الإجابات

59) $b(x) = a(-x)$

60) $b(x) = -a(x)$

61) $b(x) = [a(x)]^2$

62) $b(x) = a(|x|)$

63) $b(x) = [a(x)]^3$

تبرير: هل يمثّل المنحنى بحسب التماثل المعطى دالة دائمًا أو أحيانًا أو لا يمثّل دالة؟ برِّر إجابتك. للتمارين 64-67 انظر ملحق الإجابات

64) متماثل حول المستقيم $x = 4$

65) متماثل حول المستقيم $y = 2$

66) متماثل حول كل من المحورين x, y .

67) **اكتب:** وضّح لماذا لا تكون العلاقة المتماثلة حول المحور x دالة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتي: (الدرس 2-1)

68) $g(x) = x^2 - 10x + 3$

a) $g(2)$ $\quad -13$

b) $g(-4x)$ $\quad 16x^2 + 40x + 3$

c) $g(1 + 3n)$ $\quad 9n^2 - 24n - 6$

69) $p(x) = \dfrac{2x^3 + 2}{x^2 - 2}$

a) $p(3)$ $\quad 8$

b) $p(x^2)$ $\quad \dfrac{2x^6+2}{x^4-2}$

c) $p(x + 1)$ $\quad \dfrac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 4}{x^2 + 2x - 1}$

70) $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$

a) $h(-9)$ $\quad 119$

b) $h(3x)$ $\quad 18x^2 + 12x - 7$

c) $h(2 + m)$ $\quad 2m^2 + 12m + 9$

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي: (الدرس 1-3)
للتمارين 71-73 انظر الهامش

71) $\cos 255°$

72) $\cos(-150°)$

73) $\sin(-300°)$

أوجد القيمة الفعلية لكل مما يأتي مستعملًا المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: (الدرس 1-4) للتمارين 74-77 انظر الهامش

74) $\cos 165°$

75) $\sin 22\frac{1}{2}°$

76) $\cos 157.5°$

77) $\sin \frac{7\pi}{8}$

تدريب على اختبار معياري

78) ما القيمة الفعلية لِـ $\sin 345°$ ؟ **B**

A) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

B) $\dfrac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

C) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

D) $\dfrac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

79) ما مدى $f(x) = x^2 + 1$ ، إذا كان مجالها $-2 < x < 3$ ؟ **D**

A) $5 < y < 9$

B) $5 < y < 10$

C) $1 < y < 9$

D) $1 < y < 10$

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اكتب الخطوات اللازمة؛ لاختبار الدالة من حيث كونها زوجية، أو فردية، أو غير ذلك.

1) إذا كان $f(-x) = f(x)$، فإن الدالة زوجية.

2) إذا كان $f(-x) = -f(x)$، فإن الدالة فردية.

3) إذا كان $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$، فإن الدالة ليست زوجية، وليست فردية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 1–2 , 2–2 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 2 .

إجابات :

71) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

72) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

73) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

74) $-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

75) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

76) $-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

77) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، و $g(x)$ دالة فردية، وكان $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ، فهل $h(x)$ دالة زوجية أم فردية أم ليست أيًّا منهما؟ وضح إجابتك. دالة فردية؛ لأن:
$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x)$.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-3

إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال التَّمثيل البياني للدالة.

الدرس 2-3

استعمال النهايات؛ للتحقق من اتصال دالة، وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.

استعمال النهايات؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني للدالة.

ما بعد الدرس 2-3

إيجاد القيم القصوى لدالة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟". واختبار منحنى الدالة.

اسأل:

- أوجد الحد الأدنى للخصم عند الشراء بقيمة BD 400 .
  BD 20 تقريبًا.
- أوجد الحد الأدنى للخصم عند الشراء بقيمة BD 1200 .
  BD 80 .

2-3 الاتصال وسلوك طرفي التَّمثيل البياني والنهايات

Continuity, End Behavior, and Limits

فيما سبق

درست كيفية إيجاد المجال والمدى باستعمال التَّمثيل البياني للدالة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أستعمل النهايات ؛ للتحقق من اتصال دالة ، وأطبق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات ؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني للدالة.

المفردات الأساسية

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة (المنفصلة)
discontinuous function

انفصال لا نهائي
infinite discontinuity

الانفصال القفزي
jump discontinuity

الانفصال النُقطي
point discontinuity

الانفصال القابل للإزالة
removable discontinuity

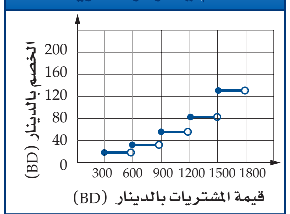
الانفصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التَّمثيل البياني
end behavior

www.obeikaneducation.com

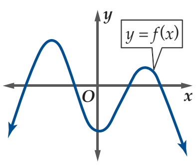
لماذا ؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التَّمثيل البياني المجاور. يتضح من التَّمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



الاتصال تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه ، يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ ، هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

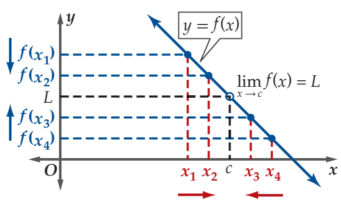


$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

مفهوم أساسي — النهايات

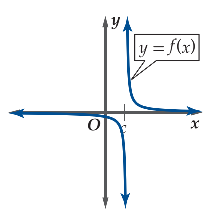
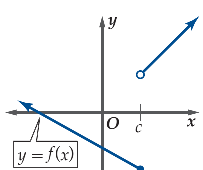
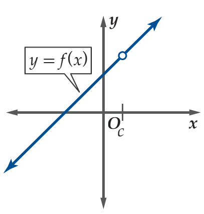
التعبير اللفظي إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من عدد وحيد L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

بالرموز نقول: إن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ ، وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .



إن اختبار **عدم اتصال (انفصال) دالة** من التَّمثيل البياني لها يساعد على فهم المعنى الجبري للاتصال. و فيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي — أنواع (الانفصال)

للدالة **انفصال لا نهائي** عند $x = c$، إذا تزايدت قيم الدالة، أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.	للدالة **انفصال قفزي** عند $x = c$ ، إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c من اليمين موجودة ، وكانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c من جهة اليسار موجودة، ولكنهما غير متساويتين.	للدالة **انفصال نُقطي** عند $x = c$ ، إذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة في مجالها باستثناء النقطة $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (ο) .
مثال 	**مثال** 	**مثال** 

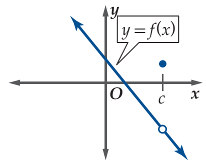
مصادر الدرس 2-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (72, 73)	• تنويع التعليم ، ص (72)	• تنويع التعليم ، ص (76)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة ، • كتاب التمارين ، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية ،	• دليل الدراسة والمعالجة ، • كتاب التمارين ، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية ، • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (11) • تدريبات المسائل اللفظية ، • تدريبات إثرائية
مصادر أخرى	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

إرشادات للدراسة

النهايات إن وجود قيمة لـ $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية لـ $f(x)$ عندما تقترب x من c.

يسمى الانفصال النُقطي **انفصالًا قابلًا للإزالة**؛ لأنه يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.



يصنّف كلٌّ من الانفصال اللانهائي ، والانفصال القفزي على أنهما **انفصالان غير قابلين للإزالة** ؛ لأن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة الانفصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة ، أي تزداد الدالة أو تتناقص بلا حدود.

تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

ملخص المفهوم **اختبار الاتصال**

يقال: إن $f(x)$ متصلة عند $x = c$ ، إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين . أي أن $\lim_{x \to c} f(x)$ لها وجود.
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

مثال 1 **التحقق من الاتصال عند نقطة**

ابحث في اتصال $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ عند $x = 2$. وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة في اختبار الاتصال.

1) هل $f(2)$ لها وجود؟

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ لها وجود؟

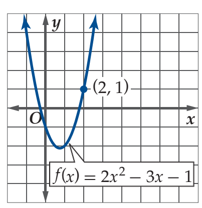
كوّن جدولًا يُبيّن قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبيّن الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

3) هل $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

تُقدّر قيمة $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 3x - 1)$ بالعدد 1 ، وبما أن $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $f(x)$ متصلة عند $x = 2$. ويوضّح التّمثيل البياني لـ $f(x)$ في الشكل المجاور اتصال الدالة عند $x = 2$.



تأكد

ابحث في اتصال كل من الدالتين الآتيتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

1A) $f(x) = x^3$ ؛ $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ فالدالة متصلة عند $x = 0$

1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} &, x < 0 \\ x &, x \geq 0 \end{cases}$ انظر الهامش

- ماذا تعني الدوائر الصغيرة المظللة والمفتوحة على التَّمثيل البياني؟ تعني الدوائر المظللة أن النقطة تنتمي إلى الدالة، وتعني الدوائر المفتوحة أن النقطة لا تنتمي إلى الدالة.

الاتصال

المثالان 2 , 1 يُبيّنان كيفية تحديد نقاط الاتصال ونقاط عدم الاتصال (الانفصال) للدوال.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 ابحث في اتصال الدالة $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$ عند $x = \frac{1}{2}$. وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ لها وجود

3) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$

أي أن الدالة متصلة عند $x = \frac{1}{2}$

التركيز في المحتوى الرياضي

غير محدد وغير معرف نقول إن القيمة غير محددة بمعنى أنه لا يمكن تحديد قيمتها. وسنعتبر في هذا الكتاب أن "غير معرفة" تعني أنها ليس لها وجود.

إجابة (تأكد):

1B) الدالة غير متصلة عند $x = 0$ ؛ لأن $f(x)$ تقترب من $-\infty$ عندما تقترب x من 0 من جهة اليسار، و $f(x)$ تقترب من 0 عندما تقترب x من 0 من جهة اليمين.

أي أن:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

إذا لم يتحقّق أي من شروط الاتصال عند نقطة معينة تكون الدالة غير متصلة عند تلك النقطة. إن اختبار اتصال الدالة يساعدك على تحديد نوع الانفصال عند تلك نقطة.

مثال 2 تعيين نقاط الانفصال

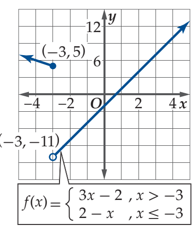
ابحث في اتصال كل من الدالتين الآتيتين عند قيم x المعطاة. وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال ، و إذا كانت الدالة غير متصلة، فبيّن نوع الانفصال هل هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

a) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \ x>-3\\ 2-x & , \ x\le -3\end{cases}$ عند $x=-3$.

1) $f(-3)$ معرّفة ؛ لأن $f(-3)=5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7



يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، على حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 ، لذا، $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ ليس لها وجود. إذن $f(x)$ غير متصلة عند $x=-3$، ويكون لـ $f(x)$ انفصالًا قفزيًّا عند $x=-3$. ويوضّح التَّمثيل البياني لـ $f(x)$ في الشكل المجاور انفصال الدالة عند $x=-3$.

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=-3$, $x=3$.

1) $f(-3)=\dfrac{0}{0}$, $f(3)=\dfrac{6}{0}$ القيمتان غير معرّفتين، أي أن $f(3)$, $f(-3)$ غير موجودتين. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند كل من $x=-3$, $x=3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3.

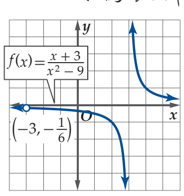
x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)\approx -0.167$ أو $-\frac{1}{6}$.

ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين. وعليه، فإن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ليس لها وجود.



3) $f(x)$ منفصلة عند $x=-3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير معرّفة، وبما أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ موجودة، فإن الانفصال قابل للإزالة عند $x=-3$. ولـ $f(x)$ انفصال لانهائي عند $x=3$ ؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح التَّمثيل البياني في الشكل المجاور هذا السلوك.

✓ تأكد

ابحث في اتصال كل من الدالتين الآتيتين عند قيم x المعطاة. وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال ، و إذا كانت الدالة غير متصلة فبيّن نوع الانفصال هل هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة. للفرعين 2A, 2B انظر الهامش

2A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ عند $x=0$.

2B) $f(x)=\begin{cases}5x+4 & , \ x>2\\ 2-x & , \ x\le 2\end{cases}$ عند $x=2$.

مثال إضافي

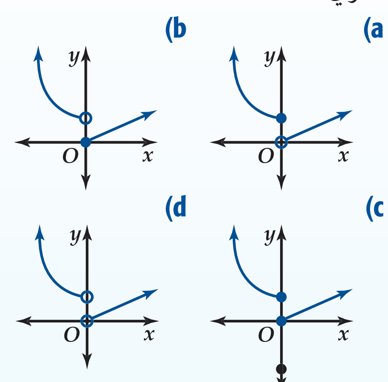
2 ابحث في اتصال كلٍّ من الدالتين الآتيتين عند قيم x المعطاة. و برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيّن نوع الانفصال، هل هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ عند $x=1$
$f(x)$ غير متصلة عند $x=1$ ، والانفصال لا نهائي.

b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ عند $x=2$
$f(x)$ غير متصلة عند $x=2$ ، والانفصال قابل للإزالة.

التركيز في المحتوى الرياضي

الاتصال أنواع اخرى من الانفصال القفزي.



أما التَّمثيل بالفرع **d**: فلا يُمثّل انفصالًا قفزيًّا لأنه ليس دالة.

وبالمثل إذا كان الانفصال قابلًا للإزالة، فيمكن أن تكون الدالة معرّفة عند نقطة الانفصال، وقد لا تكون.

إجابات (تأكد):

2A) $f(x)$ منفصلة عند $x=0$؛ لأن $f(0)$ غير معرفة، ولأن $f(x)$ تتزايد دون توقف عندما تقترب x من 0. إذن، $f(x)$ لها نقطة انفصال لا نهائي عند $x=0$.

2B) $f(x)$ منفصلة عند $x=2$؛ لأن $f(x)$ تقترب من 0 عندما تقترب x من 2 من اليسار وتقترب من 14 عندما تقترب x من 2 من اليمين. إذن، $f(x)$ لها نقطة انفصال قفزي عند $x=2$.

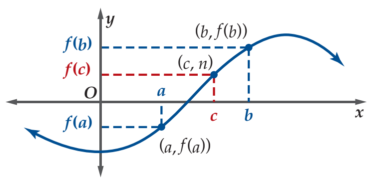
التعليم باستعمال التقنيات

أدوات التَّمثيل البياني توفر أدوات التَّمثيل البياني مثل الآلة الحاسبة البيانية، والبرامج المحوسبة طرقًا سهلة وسريعة؛ لاستكشاف خصائص الدوال. لذا، اطلب إلى الطلبة استعمال أدوات التَّمثيل البياني؛ لمعرفة كيفية تغيّر النهايات لدوال نهاياتها موجودة.

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة.

نظرية **نظرية القيمة المتوسطة**

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت $a < b$، ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$، فإنه يوجد عدد c، بحيث $a < c < b$ و $f(c) = n$.

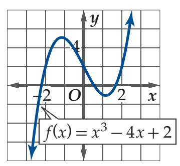


نتيجة : موقع صفر الدالة إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت $f(a)$ ، $f(b)$ مختلفتين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c ، بحيث $a < c < b$ ، و $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .

مثال 3 تقريب أصفار الدالة عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لِـ $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50



بما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين $-3, -2$ ، أي يوجد صفر للدالة في الفترة $-3 < x < -2$. لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$، والفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على وجود أصفار حقيقية للدالة في هاتين الفترتين. ويوضح التَّمثيل البياني لِـ $f(x)$ في الشكل المجاور هذه النتيجة.

✓ تأكد

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

3A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3, [-6, 4]$ **$(1, 2), (0, 1), (-5, -4)$**

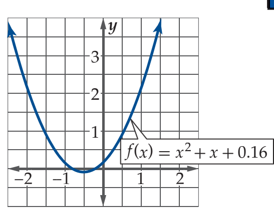
3B) $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}, [-3, 4]$ **$(-3, -2), (2, 3)$**

إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًا لصفر الدالة الحقيقي. أمّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

مثال 4 تقريب أصفار الدالة دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لِـ $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16



لاحظ أن قيم الدالة لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عند $x = 0$. لذا، فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0 . مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.

يقطع التَّمثيل البياني للدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$.
لذا ، فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

✓ تأكد

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

4A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1, [-5, 5]$ **$(-1, 0)$**

4B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14, [0, 4]$ **$(1, 2)$**

إرشاد تقني

قد يُظهر التَّمثيل البياني للدالة صفر واحد، لذا، اختر التدريج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.

تقريب أصفار الدوال المتصلة

المثالان 3 وَ 4 يُبيّنان كيفية تقريب أصفار الدالة في فترة معطاة.

مثالان إضافيان

3 حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينهما الأصفار الحقيقة لِـ $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ في الفترة $[-2, 2]$.

يوجد للدالة صفران حقيقيان ؛ في الفترة $-1 < x < 0$ ، والفترة $1 < x < 2$.

4 حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لِـ $f(x) = x^3 + 2x + 5$ في الفترة $[-2, 2]$.

يوجد للدالة صفر واحد في الفترة $-2 < x < -1$.

إرشادات للمعلم الجديد

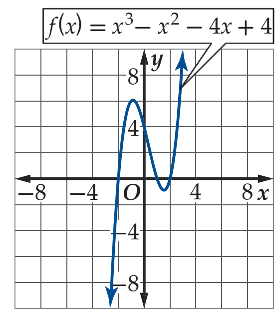
تغيّر الإشارة وضح للطلبة أن الدالة $f(x) = (x - 1)^2$ لا تغيّر إشارتها عند عددين صحيحين متتاليين ، في حين أنه يوجد للدالة صفر مكرر عند $x = 1$.

سلوك طرفي التَّمثيل البياني

مثال 5 يُبيّن كيفية معرفة سلوك طرفي التَّمثيل البياني للدالة عندما تقترب $f(x)$ من المالانهاية.

مثال إضافي

5 استعمل التَّمثيل البياني لِـ $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

وَ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

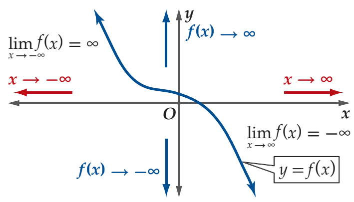
قراءة الرياضيات

النهايات يقرأ التعبير $\lim_{x \to \infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. ويقرأ التعبير $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

سلوك طرفي التَّمثيل البياني يصف **سلوك طرفي التَّمثيل البياني** سلوك الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

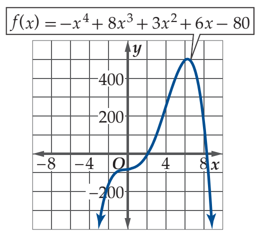
سلوك طرف التَّمثيل البياني من اليمين	سلوك طرف التَّمثيل البياني من اليسار
$\lim_{x \to \infty} f(x)$	$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

أحد إمكانات سلوك طرفي التَّمثيل البياني، هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية، أو سالب ما لانهاية على الترتيب.



مثال 5 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التَّمثيل البياني لِـ $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا

يتضح من التَّمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$، وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًّا

كوِّن جدولًا؛ لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	-80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزِّز ما توصلنا إليه من التَّمثيل البياني.

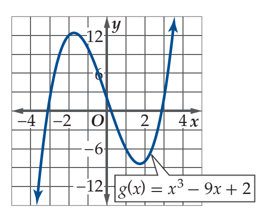
إرشادات للدراسة

في المثال 5، حسبت قيم تقريبيّة لـ $f(x)$؛ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الفعليّة لـ $f(x)$. وبالمثل في المثال 6.

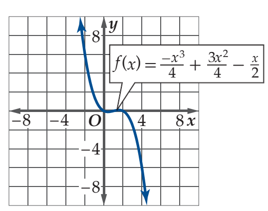
✓ تأكد

استعمل التَّمثيل البياني للدوال في كل مما يأتي؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

5A)



5B)



5A) يتضح من التَّمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$، فإنَّ $f(x) \to -\infty$. وعندما $x \to \infty$، فإنَّ $f(x) \to \infty$. أي أنَّ: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

5B) يتضح من التَّمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$، فإنَّ $f(x) \to \infty$. وعندما $x \to \infty$، فإنَّ $f(x) \to -\infty$. أي أنَّ: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

تنويع التعليم

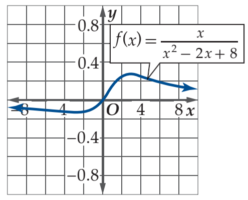
دون ضمن

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة تطوير قواعد عامة لتَمثيل الدوال أو تذكّرها، واطلب إليهم اختبار قواعدهم بتَمثيل بعض الدوال دون استعمال أدوات التَّمثيل، ثم باستعمالها، و اطلب إليهم التفكير فيما يحدد خطوط التقارب الرأسية والأفقية.

لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو $-\infty$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، على حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 6 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التَّمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ ؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني ، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا

يوضِّح التَّمثيل البياني أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، وأن $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

التعزيز عدديًّا

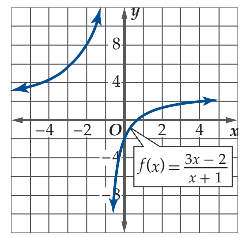
x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01		0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to 0$ ، وعندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التَّمثيل البياني.

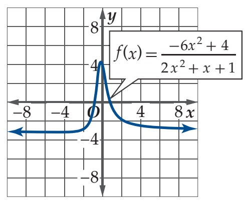
تأكد

استعمل التَّمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني لكلٍّ منهما ، ثم عزز إجابتك عدديًّا.

(6A



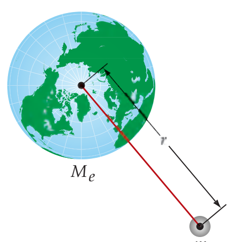
(6B



إن معرفة سلوك طرفي التَّمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

مثال 7 من واقع الحياة سلوك طرفي التَّمثيل البياني

فيزياء: تُعطَى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GM_e m}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجاذبية الأرضية، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضيةلجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟



المطلوب من المسألة وصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني لـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r بدرجة كبيرة، أي إيجاد $\lim\limits_{r \to \infty} U(r)$.

وبما أن كلًّا من G, m, M_e ثابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا

وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر. لذا ، فإن $\lim\limits_{r \to \infty} U(r) = 0$. وعليه، إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة ، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

تأكد 7) عندما تستمر سرعة جزيئات الغاز في التزايد، فإن الضغط الديناميكي يؤول إلى ∞ .

7) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$ ، حيث ρ (تقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

6A) يتضح من التَّمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإنَّ $f(x) \to 3$. وعندما $x \to \infty$ ، فإنَّ $f(x) \to 3$. أي أنَّ: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$.

6B) يتضح من التَّمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإنَّ $f(x) \to -3$. وعندما $x \to \infty$ ، فإنَّ $f(x) \to -3$. أي أنَّ: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$.

الربط مع واقع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ؛ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h.

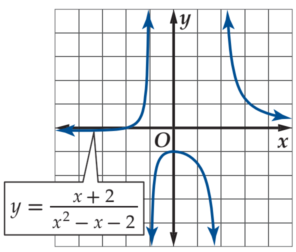
المصدر: The Mechanical Universe

سلوك طرفي التَّمثيل البياني

المثالان 6 و 7 يبينان كيفية معرفة سلوك طرفي التَّمثيل البياني للدالة عندما تقترب $f(x)$ من قيمة محددة.

مثالان إضافيان

6 استعمل التَّمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 2}$ ؛ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

7 **فيزياء:** دالة تماثُل الطاقة هي $E = \frac{x^2 + y^2}{2}$. إذا كانت قيمة y ثابتة، فماذا يحدث لقيم دالة تماثل الطاقة عندما تتناقص قيم x ؟

$\lim\limits_{x \to -\infty} E = \infty$

تنويع التعليم

دون

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات صغيرة؛ لعمل شبكة مربعات على ورقة كبيرة، واطلب إليهم تدريج المحورين من -50 إلى 50 ، ثم اطلب إليهم اختيار دالة من الدرس غير متصلة (منفصلة) ، ومثّل نقاطها عند كل مضاعفات الخمسة على المحور x ، وكذلك اختيار دالة أخرى نهايتها محددة ، ومثّل مجموعة من نقاطها. واطلب إليهم وصفْ عدم الاتصال، وسلوك طرفي التَّمثيل البياني للدوال باستعمال تمثيلاتها البيانية.

خطوط التقارب الأفقية والرأسية

مثال 8 يُبيِّن كيفية إيجاد مجال الدالة النسبية وخطوط تقاربها الأفقية والرأسية.

مثال إضافي

8 أوجد المجال وخطوط التقارب الأفقية والرأسية(إن وجدت)لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{8x+2}{3-2x}$

المجال = $\{x \mid x \neq \frac{3}{2}, x \in R\}$،

خط تقارب رأسي $x = \frac{3}{2}$

خط تقارب أفقي $y = -4$

b) $g(x) = \dfrac{x^2-9}{2x-3}$

المجال = $\{x \mid x \neq \frac{3}{2}, x \in R\}$

خط التقارب الرأسي $x = \frac{3}{2}$ ، لا

يوجد خطوط تقارب أفقية.

3 التدريب

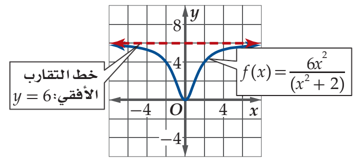
التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–31 للتأكد من مدى فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

مفهوم أساسي — خطوط التقارب الأفقية والرأسية

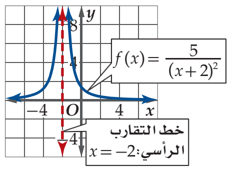
التعبير اللفظي يكون المستقيم $y = c$ خط تقارب أفقي للتمثيل البياني لـ f إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$.

مثال



التعبير اللفظي يكون المستقيم $x = c$ خط تقارب رأسي للتمثيل البياني لـ f إذا كان $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$.

مثال



قراءة الرياضيات

رمز النهاية يقرأ التعبير $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ على النحو: نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار، ويقرأ التعبير $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ على النحو: نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين.

مثال 8 إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية

أوجد المجال، وخطوط التقارب الأفقية والرأسية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$

خطوة 1 أوجد المجال.

تكون الدالة غير معرّفة عند الأصفار الحقيقية للمقام، وبما أن المقام يصبح صفرًا عندما $x = 3$ ، فإن مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $x = 3$.

خطوة 2 أوجد خطوط التقارب (إن وجدت).

تأكد من وجود أو عدم وجود خطوط التقارب الرأسية.

حدّد إذا كانت $x = 3$ نقطة انفصال لا نهائي، وذلك بإيجاد النهاية عندما تقترب x من 3 من اليمين ومن اليسار.

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−69	−699	−6999	غير معرّفة	7001	701	71

لأن $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \infty$ ، فإن $x = 3$ يكون خط تقارب رأسي للدالة f.

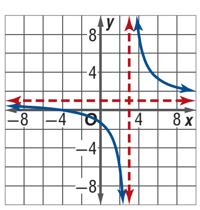
تأكد من وجود أو عدم وجود خطوط التقارب الأفقية.

استعمل الجدول أدناه لتختبر سلوك طرفي التَّمثيل البياني للدالة $f(x)$.

x	−10000	−1000	−100	0	100	1000	10000
$f(x)$	0.9993	0.9930	0.9320	−1.33	1.0722	1.0070	1.0007

يبيّن الجدول أعلاه أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. لذا، فإن $y = 1$ يكون خط تقارب أفقي للدالة f.

التحقق إن التَّمثيل البياني المجاور لـ $f(x)$ يدعم النتائج التي تم التوصل إليها. ✓



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	43، 44، 46–64
ضمن المتوسط	33، 35–37 فردي، 39 – 59، 46 – 64
فوق المتوسط	32 – 64

تنبيه!

خطأ شائع في التمارين 37-35 قد ينسى الطلبة وضع أقواس حول كثيرات الحدود عند إدخال الدوال إلى الآلة الحاسبة البيانية. لذا، ذكّرهم بضرورة وضع الأقواس للحصول على تَمثيل بياني صحيح.

b) $g(x) = \frac{8x^2+5}{4x^2+1}$

خطوة 1 أصفار المقام جميعها تخيلية. لذا ، فإن مجال g هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة جميعها.

خطوة 2 لأن مجال g هو مجموعة الأعداد الحقيقية جميعها فإنه لا توجد خطوط تقارب رأسيَّة.

باستعمال القسمة تجد أن :

$$g(x) = \frac{8x^2+5}{4x^2+1} = 2 + \frac{3}{4x^2+1}$$

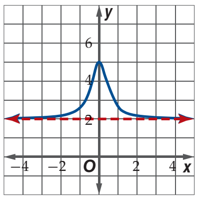
وكلما زادت $|x|$ ، فإن المقدار الموجب $4x^2+1$ تزداد قيمته ،

وبالتالي تنقص قيمة المقدار $\frac{1}{4x^2+1}$ ويقترب من العدد 0. لذا ، فإن :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 2 + 0 = 2$$

لذا، فإن $y = 2$ يكون خط تقارب أفقي للدالة g.

التحقق يمكنك أن تستعمل جدول قيم، لتعزِّز إجابتك. والتَّمثيل البياني لِـ $g(x)$ أدناه ، يدعم أيضًا النتائج التي تم التوصل إليها. ✓



تأكد

أوجد المجال، وخطوط التقارب الأفقية والرأسية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي:

8A) $m(x) = \frac{15x+3}{x+5}$ **8B)** $h(x) = \frac{x^2-x-6}{x+4}$

8A) المجال= $\{x \mid x \neq -5, x \in R\}$

خط التقارب الرأسي $x = -5$

خط التقارب الأفقي $y = 15$

8B) المجال= $\{x \mid x \neq -4, x \in R\}$

خط التقارب الرأسي $x = -4$

لاتوجد خطوط تقارب أفقية.

الدرس 3-2 الاتصال وسلوك طرفي التَّمثيل البياني والنهايات 75

تنبيه!

أخطاء شائعة في التمرين 41 فرع c، قد يحدث لبس عند الطلبة بأنه يوجد للدالة عدة متغيرات، لذا ذكّرهم بأن x هو المتغير المستقل الوحيد وأن a, b, c, d ثوابت.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدهم تحليل التَّمثيلات البيانية للعلاقات، والدوال على فهم الاتصال والسلوك النهائي للدالة.

إجابات :

1) الدالة معرفة عند $x=-5$، تؤول قيم الدالة إلى 4.58 عندما تقترب x من -5 من الجهتين، $f(-5)=4.58$. الدالة متصلة عند $x=-5$.

2) الدالة معرفة عند $x=8$، تؤول قيم الدالة إلى 3.61 عندما تقترب x من 8 من الجهتين، $f(8)=3.61$. الدالة متصلة عند $x=8$.

3) للدالة انفصال قابل للإزالة عند $x=-6$، الدالة معرفة عند $x=6$ تقترب قيم الدالة إلى 0 عندما تقترب x إلى 6 من الجهتين، $h(6)=0$. الدالة متصلة عند $x=6$

4) للدالة انفصال لانهائي عند $x=1$

5) للدالة انفصال قابل للإزالة عند $x=4$، للدالة انفصال لا نهائي عند $x=1$، قيم الدالة تقترب من $\frac{1}{3}$ عندما تقترب x من 4 من الجهتين.

6) للدالة انفصال لا نهائي عند $x=0$، الدالة معرفة عند $x=6$، تقترب قيم الدالة من 0 عندما تقترب x من 6 من الجهتين، $h(6)=0$. الدالة متصلة عند $x=6$.

7) للدالة انفصال قفزي عند $x=-6$، $f(x)$ تقترب من -25 عندما تقترب x من -6 من جهة اليسار، وتقترب من 8 عندما تقترب x من -6 من جهة اليمين.

تدرب وحل المسائل

ابحث في اتصال الدوال الآتية عند قيم x المعطاة. وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منفصلة فحدّد نوع الانفصال هل هو انفصال لانهائي، أو انفصال قفزي، أو انفصال قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

للتمارين 1-7 انظر الهامش

1) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$، عند $x=-5$.

2) $f(x)=\sqrt{x+5}$، عند $x=8$.

3) $h(x)=\frac{x^2-36}{x+6}$، عند $x=-6$ و $x=6$.

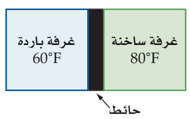
4) $g(x)=\frac{x}{x-1}$، عند $x=1$.

5) $h(x)=\frac{x-4}{x^2-5x+4}$، عند $x=1$ و $x=4$.

6) $h(x)=\frac{x(x-6)}{x^3}$، عند $x=0$ و $x=6$.

7) $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & , x\le -6 \\ -x+2 & , x>-6 \end{cases}$، عند $x=-6$.

8) **فيزياء:** غرفتان يفصل بينهما حائط درجتا حرارتهما مختلفتان. تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط حسب العلاقة $f(w)=\frac{7.4}{w}$، حيث $f(w)$ كمية الحرارة بالواط، و w سمك الحائط بالمتر. (المثالان 1,2)



a) ابحث في اتصال الدالة عند $w=0.4$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. للفروع a-c انظر ملحق الإجابات

b) حدّد نقاط الانفصال للدالة (إن وجدت)، وما نوعها؟

c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع b.

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة من الدوال الآتية في الفترة المعطاة: (المثالان 3, 4)

9) $f(x)=x^3-x^2-3, [-2,4]$ [1, 2]

10) $g(x)=-x^3+6x+2, [-4,4]$ [−3, −2], [−1, 0], [2, 3]

11) $f(x)=2x^4-3x^3+x^2-3, [-3,3]$ [−1, 0], [1, 2]

12) $g(x)=\frac{x^2+3x-3}{x^2+1}, [-4,3]$ [−4, −3], [0, 1]

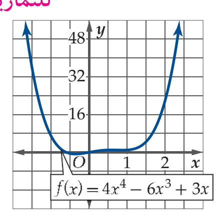
13) $h(x)=\frac{x^2+4}{x-5}, [-2,4]$ لا توجد أصفار للدالة في الفترة المعطاة

14) $g(x)=\sqrt{x^3+1}-5, [0,5]$ [2, 3]

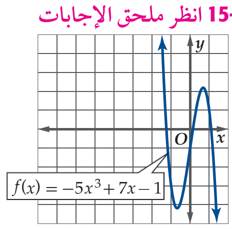
استعمل التَّمثيل البياني لكلٍّ من الدوال أدناه؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (المثالان 5, 6)

للتمارين 15-20 انظر ملحق الإجابات

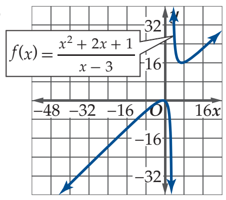
15)



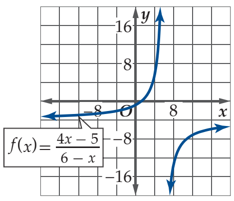
16)



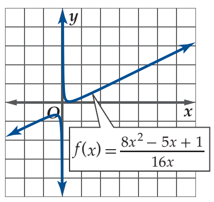
17)



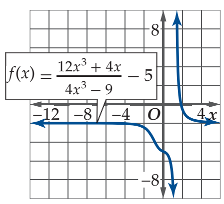
18)



19)



20)



21) **كيمياء:** يُستعملُ العامل المساعد؛ لزيادة معدل التفاعل الكيميائي في تجربة كيميائية ما. إذا أُعطي معدل التفاعل R بـ $R(x)=\frac{0.5x}{x+12}$، حيث x تركيز المحلول (mg/L)، فأجب عما يأتي: (مثال 6)

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

b) صف سلوك طرفي التَّمثيل البياني في هذه التجربة، وماذا يعني؟ عزِّز إجابتك عدديًّا.

استعمل التبرير المنطقي لتحديد نهاية كل دالة من الدوال الآتية، عندما تقترب x من $+\infty$. وبرِّر إجابتك. (مثال 7)

للتمارين 22-27 انظر ملحق الإجابات

22) $q(x)=-\frac{24}{x}$

23) $f(x)=\frac{0.8}{x^2}$

24) $m(x)=\frac{4+x}{2x+6}$

25) $c(x)=\frac{5x^2}{x^3+2x+1}$

26) $k(x)=\frac{4x^2-3x-1}{11x}$

27) $g(x)=x^4-9x^2+\frac{x}{4}$

أوجد المجال، ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت) لكل مما يأتي، برّر إجابتك: (مثال 8) للتمارين 28-30 انظر ملحق الإجابات

28) $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2-4}$

29) $h(x)=\frac{x^3-8}{x+4}$

30) $g(x)=\frac{x-6}{(x+3)(x+5)}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد قيم كل من m , b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة.

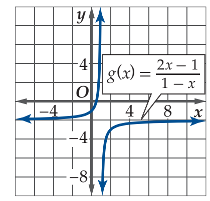
$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & , x\le 0 \\ mx+b & , 0<x<1 \\ x^2 & , x\ge 1 \end{cases}$$

إجابة ممكنة: $m=1, b=0$.

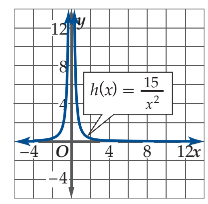
31) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بـ $E(m) = \frac{p^2}{2m}$ ، حيث p الزخم (كمية التحرك)، و m كتلة الجسم. إذا وُضع رمل في سيارة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ **(مثال 7)** انظر الهامش

استعمل كلًّا من التَّمثيلين البيانيين أدناه؛ لتحديد قيمة (قيم) x التي تكون الدالة عندها منفصلة، وعيّن نوع الانفصال، ثم استعمل المنحنى؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني. برِّر إجابتك. للتمرينين **33 ,32** انظر الهامش

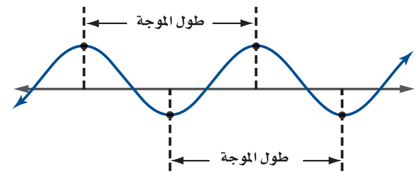
32)



33)



34) **فيزياء:** تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجه λ (تُقرأ لامدا)، و يُسمى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f.



للفرعين **a, b** انظر ملحق الإجابات

وتصف $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8 \text{m/sec}$ تقريبًا.

a) مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

b) استعمل المنحنى؛ لوصف سلوك طرفي التَّمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًا.

c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط الانفصال.
لا، يوجد انفصال لانهائي عند $\lambda = 0$

آلة حاسبة بيانية: مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم ابحث في اتصالها. وإذا كانت منفصلة، فعيّن نوع الانفصال، وَ صِف نقاطه، ثم صف سلوك طرفي التَّمثيل البياني، وعيّن أصفار الدالة إن وجدت. للتمارين **35-37** انظر ملحق الإجابات

35) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

36) $h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

37) $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

آلة حاسبة بيانية: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، وَصِف سلوك طرفي التَّمثيل البياني، وعزِّز إجابتك عدديًّا.

38) $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

39) $f(x) = \frac{16x^2}{x^2 + 15x}$

للتمرينين **39 ,38** انظر ملحق الإجابات

40) **أعمال:** بدأ حمد مشروعًا تجاريًا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة القميص الواحد BD 3، وتكلفة المعدات اللازمة BD 4000، فأجب عما يأتي: للفروع **a—c** انظر ملحق الإجابات

a) اكتب دالة تُبيّن معدّل، تكلفة القميص الواحد على صورة دالة بعدد القمصان المبيعة n.

b) استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل الدالة.

c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المبيعة، فكم سيصبح معدل تكلفة القميص الواحد؟

41) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا التمرين النهايات.
افرض أن $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ ، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان.

a) **جدولة:** افرض أن $c = 1$ ، و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d ، ثم اكتب الدالة في كل حالة، و أكمل الجدول أدناه: للفرعين **b, c** انظر ملحق الإجابات

$c = 1$				
a	b	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
−1	5	7	−1	−1
9	−6	8	9	9

b) **جدولة:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، ومجموعة فيها $a = c$، ثم اكتب كل دالة، وكوِّن جدولًا كما في الفرع **a**.

c) **تحليل:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من $-\infty$ ، و $+\infty$.

42) **آلة حاسبة بيانية:** مثّل 6 دوال مختلفة على الصورة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ بيانيًّا، حيث n, a, b أعداد صحيحة غير سالبة. للفرعين **a, b** انظر ملحق الإجابات

a) خمّن سلوك طرفي التَّمثيل البياني عندما تكون n عددًا زوجيًا موجبًا، ثم عزِّز إجابتك بالتَّمثيل البياني.

b) خمّن سلوك طرفي التَّمثيل البياني عندما تكون n عددًا فرديًا موجبًا ، ثم عزِّز إجابتك بالتَّمثيل البياني.

إجابات:

31) إجابة ممكنة: عندما تتزايد كتلة الجسم، فإن طاقة السيارة الحركية تقترب من 0.

32) للدالة نقطة انفصال لا نهائي عند $x = 1$. عندما $x \to \mp\infty$ ، فإن $g(x) \to -2$.

33) للدالة $h(x)$ نقطة انفصال لانهائي عند $x = 0$ ؛ لأنه عندما تقترب x من 0 من جهتي اليمين واليسار، فإن $h(x) \to \infty$ ، ولأن $h(0)$ غير معرفة.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$h(x)$	1500	150,000	1.5×10^7		1.5×10^7	150,000	1500

يتضح من سلوك طرفي التَّمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $h(x) \to 0$.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: بيِّن ما إذا كان لكلٍّ من الدالتين أدناه انفصال لانهائي، أو قفزي، أو انفصال قابل للإزالة عند $x = 0$. وبرّر إجابتك. انظر الهامش

43) $f(x) = \frac{x^5 + x^6}{x^5}$ 44) $f(x) = \frac{x^4}{x^5}$

45) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة. انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a &, \quad x \geq 3 \\ bx + a &, \quad -3 < x < 3 \\ -b - x &, \quad x \leq -3 \end{cases}$$

تبرير: أوجد $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ في كلٍّ من الحالات الآتية، وبرّر إجابتك.

46) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة زوجية. للتمارين 46-49 انظر الهامش

47) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة فردية.

48) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول نقطة الأصل.

49) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول المحور y .

50) **اكتب:** أعطِ مثالًا على دالة لها انفصال قابل للإزالة، ثم بيِّن كيف يمكن إزالته . كيف تؤثر إزالة الانفصال في الدالة؟

انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتمثيل كلٍّ من الدوال الآتية بيانيًّا، وتقدير أصفارها، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا: (الدرس 2-2)

51) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ للتمارين 51-53 انظر ملحق الإجابات

52) $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

53) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

حدّد مجال كل من الدوال الآتية: (الدرس 1-2) للتمارين 54-56 انظر الهامش

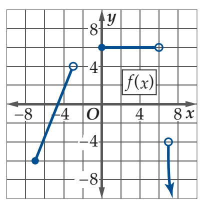
54) $f(x) = \frac{4x + 6}{x^2 + 3x + 2}$

55) $g(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 10}$

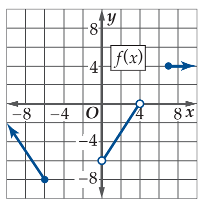
56) $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$

استعمل التَّمثيلين البيانيين أدناه للدالة f ؛ لإيجاد كل من مجالها ومداها. (الدرس 2-2) للتمرينين 57, 58 انظر الهامش

57)



58)



اكتب كل مجموعة مما يأتي بدلالة الصفة المميزة، وعلى صورة فترة إن أمكن: (الدرس 1-2) للتمارين 59-62 انظر الهامش

59) $8 < x < 99$

60) $\{-0.25, 0, 0.25, ...\}$

61) $x \geq 100$ أو $x < 0$

62) جميع مضاعفات العدد 8 الموجبة

تدريب على اختبار معياري

63) ما قيمة b التي تجعل $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 &, \quad x \neq 1 \\ bx - 3 &, \quad x = 1 \end{cases}$

متصلة عند $x = 1$ ؟ C

A 1

B 3

C 5

D 7

64) حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$ في الفترة $[3, 8]$ ؟ **[6, 7]**

إجابات:

43) انفصال قابل للإزالة. إجابة ممكنة: بما أن الدالة متصلة دائمًا ما عدا عند $x = 0$ ؛ لوجود فجوة، فإن الانفصال قابل للإزالة.

44) انفصال لا نهائي. إجابة ممكنة: للدالة انفصال لا نهائي ؛ لأنه عندما تقترب x من 0 من الجهتين، تؤول قيم الدالة إلى ∞ أو $-\infty$.

46) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$، سلوك طرفي التَّمثيل البياني للدالة عند $-\infty$ يجب أن يكون مشابهًا لسلوكها عند ∞ للدالة الزوجية.

47) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ، سلوك طرفي التَّمثيل البياني للدالة عند $-\infty$ يجب أن يكون معاكسًا لسلوكها عند ∞ للدالة الفردية.

48) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، لأن $(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$ في التماثل حول نقطة الأصل.

49) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ، لأن $f(x) = f(-x) = y$ في التماثل حول المحور y .

54) المجال = $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, \infty)$

55) المجال = $(-\infty, 1-\sqrt{11}) \cup (1-\sqrt{11}, 1+\sqrt{11}) \cup (1+\sqrt{11}, \infty)$

56) المجال = $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

57) المجال = $[-7, -3) \cup [0, 6) \cup (7, \infty)$

58) المجال = $(-\infty, -6] \cup (0, 4) \cup [7, \infty)$

59) $\{x | 8 < x < 99, x \in \mathbf{R}\}$، $(8, 99)$

60) $\{x | x = 0.25n, n \geq -1, n \in R\}$

61) $\{x | x \geq 100$ أو $x < 0, x \in R\}$، $(-\infty, 0) \cup [1000, \infty)$

62) $\{x | x = 8n, n \in \mathrm{N}\}$

2-4 القيم القصوى ومتوسط مُعدّل التغيّر

Extrema and Average Rates of Change

فيما سبق

درست كيفية إيجاد قيم الدوال.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، ثابتة، متناقصة، وأحدّد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط مُعدّل التغيّر للدالة.

المفردات الأساسية

المتزايد increasing

المتناقص decreasing

الثابت constant

العظمى maximum

الصغرى minimum

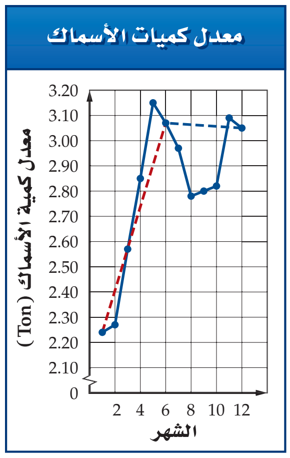
القصوى extrema

متوسط مُعدّل التغيّر average rate of change

القاطع secant line

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



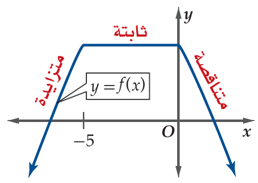
يُبين التّمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في إحدى الدول خلال عام 2009 م .

يتضح من التّمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر يناير إلى شهر مايو، ثم تناقص إلى شهر أغسطس، وبقي ثابتًا تقريبًا إلى شهر أكتوبر، ثم تزايد مرة أخرى إلى شهر نوفمبر، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري نوفمبر وديسمبر.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 Tons وذلك في شهر مايو .

يُبيّن ميل كل من الخطين المنقطين الأحمر والأزرق أن كمية الأسماك تتناقص أكثر في النصف الأول من 2009 م عنها في النصف الثاني من العام نفسه.

التزايد والتناقص خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.



ففي الشكل المجاور إذا تتبعت منحنى $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

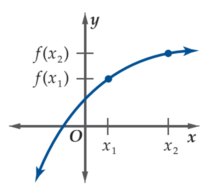
- $f(x)$ متزايدة على الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة على الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة على الفترة $(0, \infty)$

يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة جبريًّا كما يلخصه المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي — الدوال المتزايدة، المتناقصة والثابتة

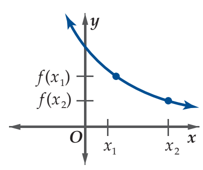
التعبير اللفظي تكون الدالة f متزايدة على فترة ما، إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

بالرموز f متزايدة على فترة معينة ⇔ لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



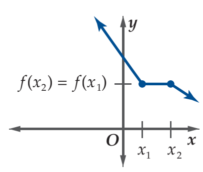
التعبير اللفظي تكون الدالة f متناقصة على فترة ما، إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

بالرموز f متناقصة على فترة معينة ⇔ لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



التعبير اللفظي تكون الدالة f ثابتة على فترة ما، إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

بالرموز f ثابتة على فترة معينة ⇔ لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



2-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4

إيجاد قيم الدوال .

الدرس 2-4

تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، ثابتة، متناقصة. وتحديد القيم العظمى والصغرى لها.

إيجاد متوسط معدّل التغيرُّ للدالة.

ما بعد الدرس 2-4

تَمثيل الدوال الأم ووصفها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل :

- ما المواقف التي تُفَضّل فيها الدوال المتزايدة على الدوال المتناقصة؟ إجابة ممكنة: تزايد درجات الاختبار مع الزمن، والتزايد في المبيعات السنوية.
- عمل أحد رجال الأعمال على تحسين أداء مصنعه بعدما تراجعت أرباحه. إذا أثمر هذا التحسن خلال الأشهر يونيو، ويوليو، وأغسطس، فمتى يتغيّر منحنى دالة الربح من التناقص إلى التزايد؟ إجابة ممكنة: خلال يونيو، ويوليو، وأغسطس، أو بعدها بفترة قصيرة.
- إذا تذبذبت معدلات الإيراد الشهرية لأحد المصانع بين الزيادة والنقصان خلال السنة الأخيرة. فكيف تحسب مقدار متوسط التغيّر خلال شهرين؟ أجد مقدار التغير بين شهرين، ثم أقسم على 2.

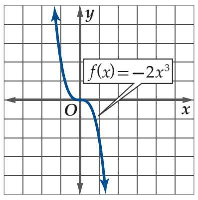
مصادر الدرس 2-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (84)	• تنويع التعليم ، ص (84)	• تنويع التعليم ، ص (87)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة. • كتاب التمارين ، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين ، ص (12) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية
مصادر أخرى	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مثـال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التَّمثيل البياني لكل دالة من الدالتين أدناه؛ لتحديد الفترات (قرِّب إلى أقرب 0.5 وحدة) التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة، ثم عزز إجابتك عدديًا.

a) $f(x) = -2x^3$



التحليل بيانيًا

يُبيِّن التَّمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x. لذا، فإن الدالة متناقصة على $(-\infty, \infty)$.

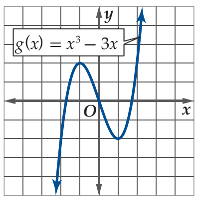
التعزيز عدديًا

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يُوضِّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x، تتناقص قيم $f(x)$، وهذا يعزّز ما توصَّلنا إليه من التَّمثيل البياني.

b) $g(x) = x^3 - 3x$



التحليل بيانيًا

يُبيِّن التَّمثيل البياني أن f متزايدة على الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة على الفترة $(-1, 1)$، و متزايدة على الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًا

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$

x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$f(x)$	-1298	-702	-322	-110	-18	2

$(-1, 1)$

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x)$	2	1.375	0	-1.375	-2

$(1, \infty)$

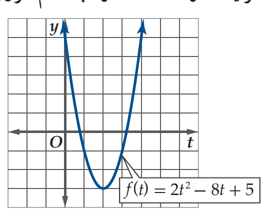
x	1	3	5	7	9	11
$f(x)$	-2	18	110	322	702	1298

توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1، فإن $f(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1، فإن $f(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1، فإن $f(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التَّمثيل البياني.

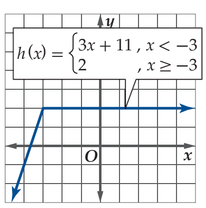
تأكد

استعمل التَّمثيل البياني لكل دالة من الدالتين أدناه؛ لتحديد الفترات (قرِّب إلى أقرب 0.5 وحدة) التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة، ثم عزز إجابتك عدديًا. للتدريبين 1A, 1B انظر ملحق الإجابات

1A)



1B)



على حين يستعمل التَّمثيل البياني لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة، ويمكن تعزيز ذلك عدديًا، إلا أننا نحتاج إلى حساب التفاضل؛ لإثبات صحة هذه الخصائص.

تنبيه!

فترات لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة. لذلك لا يستعمل القوسين (،) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

إرشادات للدراسة

الدوال المتزايدة المتناقصة الثابتة إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة لكل قيم x في مجالها تسمى دالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة على الترتيب. الدالة في المثال 1a دالة متناقصة بينما الدالة في المثال 1b لا يمكن تصنيفها على أنها متزايدة أو متناقصة ؛ لأنها متزايدة على فترة ومتناقصة على أخرى.

التزايد والتناقص

مثال 1 يُبيِّن كيفية إيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة.

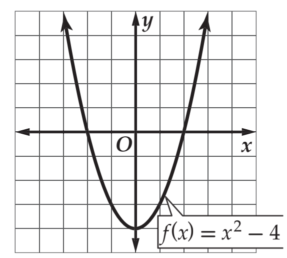
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

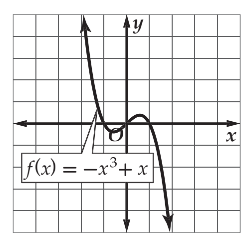
1 استعمل التَّمثيل البياني لكل دالة من الدالتين أدناه؛ لتحديد الفترات (قرِّب إلى أقرب 0.5 وحدة) التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة، ثم عزّز إجابتك عدديًا.

a) $f(x) = x^2 - 4$



$f(x)$ متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة على الفترة $(0, \infty)$.

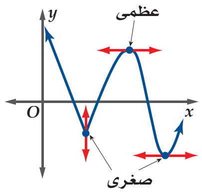
b) $f(x) = -x^3 + x$



$f(x)$ متناقصة على الفترة $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$، ومتزايدة على الفترة $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

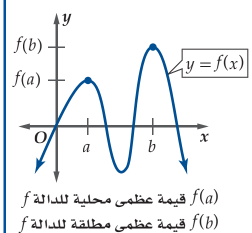
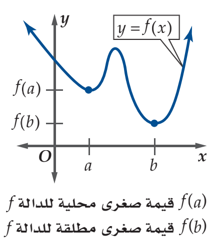
80 الفصل 2 تحليل الدوال

لاحظ أن النقاط التي تُغيِّر الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة، أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى نقاطًا حرجة. ويكون المماس المرسوم لمنحنى الدالة عند هذه النقاط إما أفقيًا ، أو عموديًا (أي أن ميله صفر أو غير معرّف) ويدل على وجود قيمة **عظمى**، أو **صغرى** للدالة.



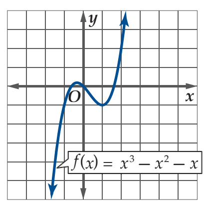
يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

مفهوم أساسي — القيم القصوى المحلية والمطلقة

		النموذج
التعبير اللفظي	إذا وجدت قيمة للدالة ، وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيت قيمةَ عظمى محلية.	
بالرموز	تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f، إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.	$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
التعبير اللفظي	إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها ، سُمّيَت قيمة عظمى مطلقة.	$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f
بالرموز	تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f ، إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.	
التعبير اللفظي	إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة ، سُمّيَت قيمةَ صغرى محلية.	
بالرموز	تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f ، إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.	$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
التعبير اللفظي	إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة، وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها ، سُمّيَت قيمةَ صغرى مطلقة.	$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f
بالرموز	تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f ، إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \leq f(x)$.	

مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها

قرّب قيم x التي يكون لِـ $f(x)$ عندها قيم قصوى إلى أقرب 0.5 وحدة ، و قيم الدالة عندها ، وبيِّن نوع القيم القصوى ، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا

يوضّح التَّمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1. لاحظ كذلك أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًّا

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقّع أن يكون عندها قيمة قصوى ، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

بما أن $f(-1) < f(-0.5)$ ، $f(-0.5) > f(0)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ ، فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0.13 يُعد معقولًا.

إرشادات للدراسة

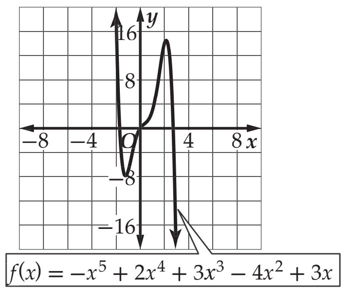
قصوى محلية يُستعمل مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

القيم القصوى المحلية، والمطلقة

الأمثلة 4-2 تُبيّن كيفية إيجاد القيم القصوى المحلية، والمطلقة، واستعمالها.

مثال إضافي

2 قرّب قيم x التي يكون لِـ $f(x)$ عندها قيم قصوى إلى أقرب 0.5 وحدة، وبيّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.



صغرى محلية عند $x = -1$

عظمى محلية عند $x = 2$. لا يوجد قيم قصوى مطلقة.

التركيز في المحتوى الرياضي

القيم القصوى المحلية والمطلقة

ترتبط القيم الصغرى المحلية أو العظمى المحلية بفترة، وقد تجد أن للدالة أكثر من قيمة صغرى أو عظمى محلية، لكن القيم الصغرى المطلقة والعظمى المطلقة لا ترتبط بفترة، بل هي قصوى مطلقة على المجال كله، ويوجد للدالة على الأكثر قيمة صغرى مطلقة واحدة وقيمة عظمى مطلقة واحدة.

إرشادات للمعلم الجديد

المماسات سيتم دراسة ميل المماس لمنحنى الدالة عند قيم محددة لاحقًا في الفصل الثالث.

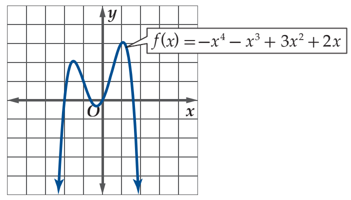
بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(1.5)$، $f(1) < f(0.5)$، فيوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$. وبما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يُعد معقولًا.

وبما أن $f(-100) < f(1)$، $f(100) > f(-0.5)$، فهذا يعزّز تخميننا بأنه لا يوجد قيم قصوى مطلقة.

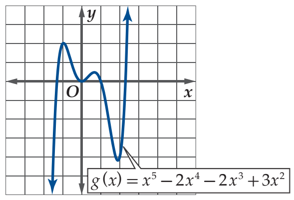
تأكـد

قدّر قيم x التي يكون لـ $f(x)$ عندها قيم قصوى إلى أقرب 0.5 وحدة، وقيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

2A)



2B)

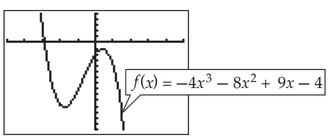


نحتاج إلى حساب التفاضل؛ لاختبار تزايد الدالة وتناقصها، و نحتاج إليه أيضًا؛ لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة. كما تُستعمل الآلة الحاسبة البيانيّة؛ لتحديد مواقع القيم القصوى، وإيجاد قيمها.

مـثال 3 استعمال الآلة الحاسبة البيانيّة لتقريب القيم القصوى

آلة حاسبة بيانيّة: أوجد قيمًا تقريبية إلى أقرب جزء من مئة للقيم القصوى المحلية، والقصوى المطلقة لِـ $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ (إن أمكن)، وعيّن قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

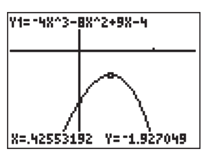
مثّل الدالة بيانيًّا واختر التدريج المناسب حسب الحاجة؛ لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.



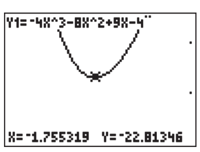
$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-30, 10]$ scl: 4

يوضّح التَّمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$، أما سلوك طرفي التَّمثيل البياني فيدلّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اختر Min ، Max في الآلة الحاسبة البيانيّة، تجد أن القيمة الصغرى المحلية تُقدَّر بـ -22.81 عند $x = -1.76$، وتُقدَّر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 عند $x = 0.43$.



$[-0.9, 1.6]$ scl: 1 by $[-7.3, 2.7]$ scl: 4



$[-3, 0.5]$ scl: 1 by $[-28, -18]$ scl: 4

تأكـد

آلة حاسبة بيانيّة: أوجد قيمًا تقريبية إلى أقرب جزء من مئة للقيم القصوى المحلية، والقصوى المطلقة لكل من الدالتَين الآتيتين (إن أمكن)، وعيِّن قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

3A) $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

3B) $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

2A) يوضح التَّمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 2 عند $x = -1.5$. كما توجد قيمة صغرى محلية عند $x = -0.5$، وقيمة عظمى مطلقة مقدارها 3 عند $x = 1$.

2B) يوضح التَّمثيل البياني أن للدالة $g(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 2 عند $x = -1$، وقيمة صغرى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$، وقيمة عظمى محلية مقدارها 0.5 عند $x = 0.5$، وقيمة صغرى محلية مقدارها -4 عند $x = 2$. وسلوك طرفي التَّمثيل البياني يدل على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

إرشاد تقني

ضبط عند البحث عن القيم العظمى والصغرى تأكد من اختيار التدريج المناسب، لتتمكن من رؤية منحنى الدالة كاملًا.

3A) قيمة عظمى مطلقة: $(-0.42, 8.04)$

3B) قيمة عظمى محلية: $(-0.12, 5.06)$. وقيمة صغرى محلية: $(1.45, 1.24)$.

مثال إضافي

3 آلة حاسبة بيانية: أوجد قيمًا تقريبية إلى أقرب جزء من مئة للقيم القصوى المحلية، والقصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^4 - 5x^2 - 2x + 4$. وعيِّن قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

قيمة عظمى محلية مقدارها 4.20 عند $x = -0.20$ تقريبًا، قيمة صغرى محلية 0.80 عند $x = -1.49$ تقريبًا، وأخرى -5.51 عند $x = 1.67$ تقريبًا.

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية إن استعمال خصائص الجداول الإلكترونية يوفر طريقة سريعة وسهلة لعمل الجداول. لذا، اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات صغيرة، واستعمال الجداول الإلكترونية لعمل جداول قيم؛ لإيجاد القيم الصغرى والعظمى المحلية.

إن البحث عن الحل الأمثل (إيجاد القيم القصوى) هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة المثلى.

الربط مع واقع الحياة

تشير بعض الدراسات الحديثة أن شرب عصير البرتقال قد يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

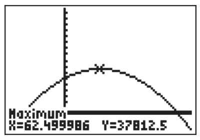
مثال 4 من واقع الحياة — تطبيقات القيم القصوى

زراعة: افترض أنه يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد. إذا كان عدد أشجار البرتقال 75 شجرة. وإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين، فكم شجرة إضافية يجب زراعتها؛ للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب $P(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان	=	عدد الأشجار في البستان	•	إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال
$P(x)$	=	$(75 + x)$	•	$(400 - 2x)$

المطلوب إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان، أو القيمة العظمى للدالة P. لذا، مثِّل الدالة بيانيًا باستعمال الآلة الحاسبة البيانيّة، ثم استعمل max؛ لإيجاد قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة عظمى.



يُبيِّن التَّمثيل البياني المجاور وجود قيمة عظمى للدالة هي 37812.5، وتكون عند $x \approx 62.5$. لذا، يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 شجرة جديدة تقريبًا، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال.

تأكد

$r \approx 1.83\,\text{in}\,,\ h \approx 1.83\,\text{in}$

4) **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى، مساحة سطحها الكلية $10\pi\,\text{in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس، وارتفاعه اللّذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

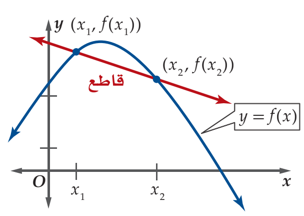
متوسط التغيّر تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل متوسط تغير ثابت. إلا أن هذا المعدل يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ أن الميل يختلف باختلاف النقاط. لذا، فإننا نتحدثُ عن متوسط مُعدّل تغيّر الدالة بين أي نقطتين.

مفهوم أساسي — متوسط مُعدّل التغيّر

التعبير اللفظي متوسط مُعدّل التغيّر بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المارّ بَين هاتين النقطتين.

هندسيًا يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة **قاطعًا**، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}.

بالرموز متوسط مُعدّل تغيّر الدالة f في الفترة $[x_1, x_2]$ هو $m_{sec} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$



إذا كان متوسط مُعدّل التغيّر على فترة موجبًا، فإن الدالة تكون متزايدة على الفترة. وأما إذا كان سالبًا، فإن الدالة تكون متناقصة على الفترة.

مثال إضافي

4 وقود اقتصادي: أعلنت إحدى شركات السيارات أن خزان وقود سيارة جديدة يكفي لنقل السائق وثلاثة ركاب مسافة 360 mi، وفي أثناء بحثك في الإنترنت وجدت أن المسافة بالميل التي تقطعها هذه السيارة لكل خزان مملوء بالوقود هي: $f(x) = -4x^2 + 44x + 240$، حيث $x + 55$، سرعة السيارة بالميل لكل ساعة. ما سرعة السيارة التي تجعل المسافة التي تقطعها السيارة لكل خزان وقود أكبر ما يمكن؟ وما المسافة المقطوعة في هذه الحالة؟

المسافة المقطوعة أكبر ما يمكن عندما تكون السرعة 60.5 mi/h تقريبًا.

المسافة المقطوعة 361 mi.

التركيز في المحتوى الرياضي

متوسط معدّل التغيّر إيجاد متوسط معدّل التغيّر بين نقطتين لدالة غير خطية يماثل إيجاد ميل مستقيم، لاحظ أن التغيّر بين نقطتين للدوال غير الخطية يتغيّر بتغيّر النقطتين. عند حساب ميل المستقيم أوجد $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

وعند حساب متوسط معدّل التغيّر لدالة أوجد $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

متوسط معدّل التغير

المثالان 5 و 6 يبينان كيفية إيجاد متوسط معدّل التغير.

مثالان إضافيان

5 أوجد متوسط التغير لـ $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ في كل من الفترتين الآتيتين:

a) $[-3, -1]$ 12

b) $[2, 5]$ -10

6 **الجاذبية:** إذا كانت المسافة المقطوعة للأجسام الساقطة على سطح القمر يُعبّر عنها بالقاعدة $d(t) = 2.7t^2$، حيث d المسافة بالأقدام و t الزمن بالثواني. فأوجد متوسط السرعة لجسم ساقط في كل من الفترتين الآتيتين:

a) 1 sec إلى 2 sec. 8.1 ft/sec

b) 2 sec إلى 3 sec. 13.5 ft/sec

مثال 5 إيجاد متوسط مُعدّل التغيّر

أوجد متوسط معدل التغير لـ $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل أدناه في كلٍّ من الفترتين المعطاتين:

a) $[-2, -1]$

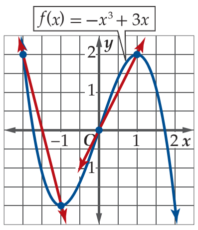
استعمل صيغة الميل؛ لإيجاد متوسط مُعدّل التغيّر للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ بتعويض -1 بدلًا من x_2، -2 بدلًا من x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ بتعويض $f(-1)$، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$ بالتبسيط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4.



b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ بتعويض 1 بدلًا من x_2، 0 بدلًا من x_1

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$ بتعويض $f(1)$، $f(0)$

أي أن متوسط مُعدّل التغيّر للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.

تأكد

أوجد متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$ 6

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$ -220

يُستعملُ متوسط معدل التغير في تطبيقات حياتية كثيرة، ومنها متوسط السرعة r لجسم يقطع مسافة d في زمن مقداره t.

الربط مع واقع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمَّى السرعة الحديّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديّة (120-150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة

المصدر: الموسوعة العالمية MSN

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد متوسط السرعة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تُعطى بـ $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد متوسط السرعة في كل من الفترتين المعطاتين:

a) من 0 sec إلى 2 sec

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ بتعويض 2 بدلًا من t_2، 0 بدلًا من t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32 \text{ ft/sec}$$ بتعويض $d(2)$، $d(0)$، وبالتبسيط

متوسط مُعدّل تغيّر الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/sec، وهذا يعني أن متوسط سرعة الجسم في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/sec.

b) من 2 sec إلى 4 sec

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ بتعويض 4 بدلًا من t_2، 2 بدلًا من t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ بتعويض $d(4)$، $d(2)$، وبالتبسيط

متوسط مُعدّل تغيّر الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/sec، وهذا يعني أن متوسط سرعة الجسم في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/sec.

إرشادات للدراسة

التغيُّر متوسط السرعة عبارة عن خارج قسمة التغيُّر في المسافة $d(t_2) - d(t_1)$ على التغيُّر في الزمن $t_2 - t_1$.

تأكد 6) -4 ft/sec، تتناقص سرعة الجسم المتوسطة في الفترة من 0.5 sec إلى 1 sec.

6) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، إذا كان ارتفاع الجسم عن سطح الأرض يُعطى بـ $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذف الجسم، و $d(t)$ المسافة التي يقطعها الجسم. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد متوسط سرعة الجسم في الفترة من 0.5 sec إلى 1 sec. برّر إجابتك.

تنويع التعليم

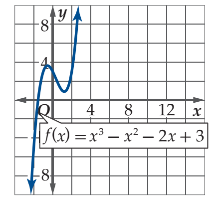
دون ضمن

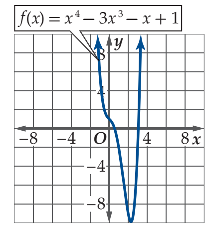
المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن صور لجبال من الطبيعة يظهر فيها منحنى خط الأفق، ثم اطلب إلى كلٍّ منهم تحديد هذا المنحنى في الصور التي أحضروها، وتعيين القيم العظمى المحلية والمطلقة لمنحنى الأفق.

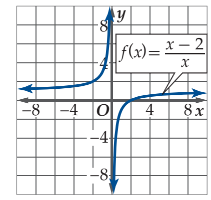
تدرب وحل المسائل

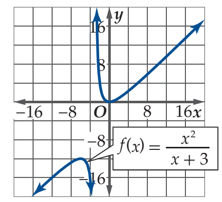
استعمل التَّمثيل البياني لكل دالة من الدوال أدناه؛ لتحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة (قرِّب إلى أقرب 0.5 وحدة)، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (مثال 1)

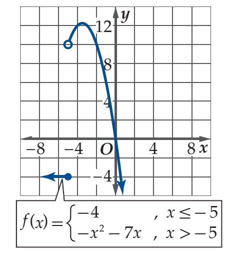
للتمارين 6–1 انظر الهامش

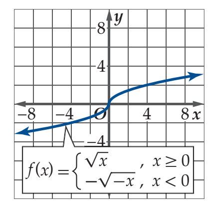
(1


(2


(3


(4


(5


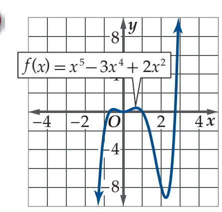
(6


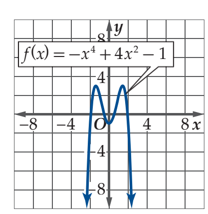
7) **كرة سلة :** يُعطى ارتفاع كرة سلة عن سطح الأرض في الرمية الحرة بـ $f(t)=-64.4t^2+48.3t+5$، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. (مثال 2)

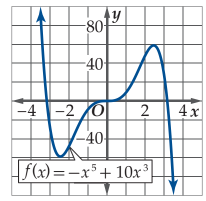
a) مَثِّل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش

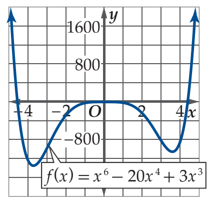
b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. 14 ft

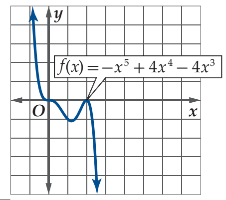
قرِّب قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال أدناه عندها قيم قصوى إلى أقرب 0.5 وحدة، و قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (مثال 2) للتمارين 13–8 انظر ملحق الإجابات

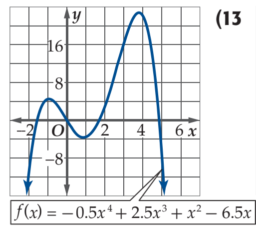
(8


9


(10


(11


(12


(13


آلة حاسبة بيانية : أوجد قيمًا تقريبية إلى أقرب جزء من مئة للقيم القصوى المحلية والقصوى المطلقة لكل دالة مما يأتي (إن أمكن)، وعيّن قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3)

للتمارين 19–14 انظر الهامش

(14 $g(x)=-2x^3+7x-5$

(15 $f(x)=x^4-2x^2+5x$

(16 $f(x)=-x^5+3x^2+x-1$

(17 $g(x)=x^6-4x^4+x$

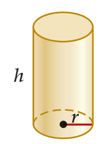
(18 $f(x)=0.008x^5-0.05x^4-0.2x^3+1.2x^2-0.7x$

(19 $f(x)=0.025x^5-0.1x^4+0.57x^3+1.2x^2-3.5x-2$

(20 **هندسة :** أوجد كلًّا من طول نصف قطر الأسطوانة، وارتفاعها في الشكل أدناه؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة). (مثال 4)

$r = 2.6$ in

$h = 2.6$ in



مساحة السطح الجانبي + مساحة سطح القاعدة تساوي $20.5\pi in^2$

أوجد متوسط مُعدّل التغيّر لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة. (مثال 5)

(21 $g(x)=3x^2-8x+2,\ [4, 8]$ **28**

(22 $f(x)=3x^4-2x^2+6x-1,\ [5, 9]$ **4430**

(23 $f(x)=-2x^4-5x^3+4x-6,\ [-1, 5]$ **−309**

(24 $h(x)=-x^5-5x^2+6x-9,\ [3, 6]$ **−2550**

(25 $f(x)=\frac{x-3}{x},\ [5, 12]$ **0.05**

(26 $f(x)=\sqrt{x+8},\ [-4, 4]$ **0.183**

التقويم التكويني

استعمل التمارين 27–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع في التمرينين 20 وَ 36، قد يحاول الطلبة إيجاد دالة بمتغير مستقل واحد، لذا ذكّرهم بأن استعمال نظام من المعادلات وطريقة التعويض يقلص عدد المتغيرات المستقلة.

إجابات:

1) f متزايدة على الفترة $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة على الفترة $(-0.5, 1)$، ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$.

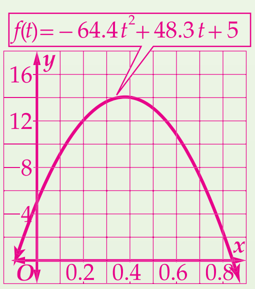
2) f متناقصة على الفترة $(-\infty, 2.5)$، ومتزايدة على الفترة $(2.5, \infty)$.

3) f متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة على الفترة $(0, \infty)$.

4) f متزايدة على الفترة $(-\infty, -6)$، ومتناقصة على الفترة $(-6, -3)$، ومتناقصة على الفترة $(-3, 0)$، ومتزايدة على الفترة $(0, \infty)$.

5) f ثابتة على الفترة $(-\infty, -5)$، ومتزايدة على الفترة $(-5, -3.5)$، ومتناقصة على الفترة $(-3.5, \infty)$.

6) f متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

(7a


تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

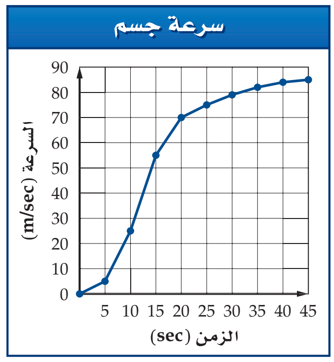
المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	45 – 43، 64 – 48
ضمن المتوسط	36 – 28، 35 – 31 فردي، 38، 39، 42، 45 – 43، 64 – 48
فوق المتوسط	64 – 28

27) **طقس:** إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما مُعطى بـ f : $f(x) = -0.5455\,x^2 + 7.09x + 21.45$، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلًا $x = 1$ تمثّل شهر يناير، فأوجد متوسط مُعدّل التغير لكلٍّ من الفترتين الآتيتين، وبرِّر إجابتك. **(مثال 6)**

a) من إبريل إلى مايو **2.2 °C**

b) من يوليو إلى نوفمبر **−2.7 °C**

28) استعمل التَّمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات $[5, 15]$, $[15, 20]$, $[25, 45]$. **5 ، 3 ، 0.5**

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية. **انظر الهامش**

29) **تكنولوجيا:** تبين لفريق بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يُعطى بـ $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$، حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بالدنانير. **انظر الهامش**

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) ما السعر الأمثل للشريحة الواحدة، و الذي يعطي أكبر ربح؟

c) ما ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأمثل؟

مثل بيانيًّا الدالة f في كل حالة مما يأتي: **للتمارين 30–35 انظر ملحق الإجابات**

30) $f(x)$ متصلة ومتزايدة.

31) $f(x)$ متصلة ومتناقصة.

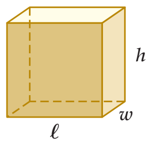
32) $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x .

33) $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x .

34) $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $x < -2$، و متناقصة لجميع قيم $x > -2$.

35) $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$، و متزايدة لجميع قيم $x > 0$.

36) **صندوق:** يرغب سالم بعمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه $3024\,ft^3$. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن. وضِّح إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**



حدِّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت وبيِّن نوعها:

37) $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ **(3,5)، صغرى**

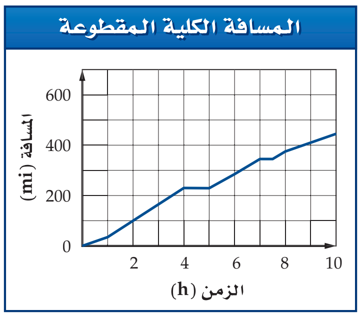
38) $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$ **(−5,−1)، عظمى**

39) $f(x) = -4|x-22| + 65$ **(22,65)، عظمى**

40) $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$ **(0,6)، عظمى**

41) $f(x) = x^3 + x$ **لايوجد قيم قصوى**

42) **سفر:** قام عبد اللّه بتسجيل المسافة الكلية التي قطعتها عائلته في إحدى الرحلات كل ساعة ، ومثّلها بيانيًّا. أعطِ أسبابًا توضِّح اختلاف متوسط مُعدّل التغيّر، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟ **انظر ملحق الإجابات**



مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مثِّل بيانيًّا الدالة f في كلٍّ مما يأتي: **للتمرينين 44 ، 43 انظر ملحق الإجابات**

43) متصلة
متزايدة على $(-\infty, 4)$
ثابتة على $[4, 8]$
متزايدة على $(8, \infty)$
$f(5) = 3$

44) لها نقطة انفصال لانهائي عند $x = -2$
متزايدة على $(-\infty, -2)$
متزايدة على $(-2, \infty)$
$f(-6) = -6$

إجابات:

14) عظمى محلية عند $(1.08, 0.04)$، وصغرى محلية عند $(-1.08, -10.04)$.

15) صغرى مطلقة عند $(-1.38, -7.08)$.

16) عظمى محلية عند $(1.11, 2.12)$، صغرى محلية عند $(-0.17, -1.08)$.

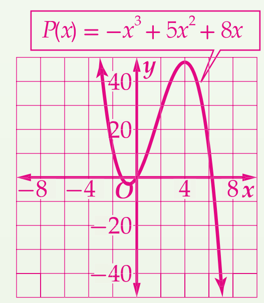
17) عظمى محلية عند $(0.41, 0.30)$، وصغرى محلية عند $(1.62, -7.85)$، وصغرى مطلقة عند $(-1.64, -11.12)$.

18) عظمى محلية عند $(2.49, 1.45)$، $(-3.72, 14.23)$، وصغرى محلية عند $(0.32, -0.11)$ ، $(5.90, -6.83)$.

19) عظمى محلية عند $(-1.66, 3.43)$، وصغرى محلية عند $(0.93, -3.82)$.

28b) تتزايد سرعة الجسم أو يتسارع الجسم في الفترات الثلاث، وأسرع معدّل تسارع للجسم في الفترة $[5, 15]$. ويبطئ التسارع في الفترة $[25, 45]$، لكن تبقى سرعة الجسم في تزايد .

29a)



29b) 400 BD.

29c) 48 BD.

86 الفصل 2 تحليل الدوال

45) **تبرير:** f دالة متصلة لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$، ومتزايدة عندما $x > c$. صِف سلوك الدالة عندما تزداد x لتقترب من c. وبرِّر إجابتك. **للتمارين 45–49 انظر ملحق الإجابات**

46) **تحدٍّ:** إذا كانت g دالة متصلة، وكان $g(a) = 8$، $g(b) = -4$، فأعط وصفًا لقيمة $g(c)$، حيث $a < c < b$. برِّر إجابتك.

47) **تحدٍّ:** استعمل الآلة الحاسبة البيانيّة؛ لتمثيل $f(x) = \sin x$ بيانيًّا، ثم صف القيم القصوى المحلية للدالة.

48) **تبرير:** أوجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$، $(b, f(b))$، إذا كانت $f(x)$ ثابتة في الفترة (a, b). برِّر إجابتك.

49) **اكتب:** صف متوسط مُعدّل تغيّر الدالة إذا كانت متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة في فترة معينة.

مراجعة تراكمية

ابحث في اتصال كل دالة من الدوال الآتية عند قيمة (قيم) x المعطاة، معتمدًا على اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منفصلة، فبيِّن نوع الانفصال، هل هو لانهائي، أو قفزي أو قابل للإزالة. (الدرس 2-3)
للتمارين 50–52 انظر الهامش

50) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}\ ,\ x = -3$

51) $f(x) = \sqrt{x + 1}\ ,\ x = 3$

52) $h(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}\ ;\ x = -5\ ,\ x = 5$

مثّل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا، مستعملًا الآلة الحاسبة البيانيّة، ثم حدّد ما إذا كانت الدالة زوجية، أو فردية، أو غير ذلك. وتحقّق من إجابتك جبريًّا، و إذا كانت الدالة زوجية، أو فردية، فصف تماثل منحنى الدالة. (الدرس 2-2) **للتمارين 53–55 انظر الهامش**

53) $f(x) = |x^5|$

54) $f(x) = \frac{x + 8}{x - 4}$

55) $g(x) = \frac{x^2}{x + 3}$

اكتب مجال كل دالة من الدوال الآتية: (الدرس 2-1)

56) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5}$ $\{x | x \neq \pm\sqrt{5}\ ,\ x \in R\}$

57) $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

58) $h(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 7}}$ $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$

صف سلوك طرفي التّمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 2-3)

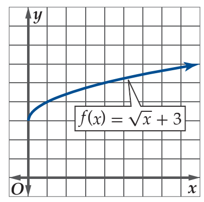
59) $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$ **للتمارين 59–61 انظر ملحق الإجابات**

60) $g(x) = \frac{x^2 + 5}{7 - 2x^2}$

61) $h(x) = \left|(x - 3)^2 - 1\right|$

62) استعمل التّمثيل البياني للدالة أدناه، لإيجاد مقطع المحور y، وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا. (الدرس 2-2)

انظر ملحق الإجابات



تدريب على اختبار معياري

63) ما النقطة التي يكون عندها لـ $f(x) = -(x + 2)^2 - 1$ قيمة قصوى محلية؟ **B**

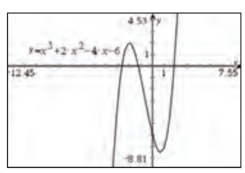
A $(-1, -2)$

B $(-2, -1)$

C $(1, -2)$

D $(-2, 1)$

64) يوجد لـ $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ قيمة عظمى محلية، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تقع عندها هذه القيم. **C**



A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

C عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة وصف كيفية الربط بين درس اليوم و الدرس اللاحق حول الدوال الأم والتحويلات الهندسية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 4–2 , 3–2، بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 2.

إجابات

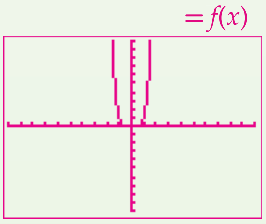
50) الدالة معرفة عند $x = -3$، وتقترب من 2.65 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، و $f(-3) = 2.65$. لذا ، فهي متصلة عند $x = -3$.

51) الدالة معرفة عند $x = 3$، وتقترب قيمة الدالة من 2 عندما تقترب x من 3 من الجهتين، و $f(3) = 2$. لذا ، فإن الدالة متصلة عند 3.

52) للدالة نقطة انفصال قابلة للإزالة عند $x = -5$، ومعرفة عند $x = 5$، وتقترب من 0 عندما تقترب x من 5 من الجهتين، أي أن $h(5) = 0$. إذن ، فهي متصلة عند $x = 5$.

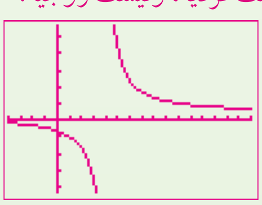
53) دالة زوجية، متماثلة حول المحور y

$$f(-x) = \left|(-x)^5\right| = x^5 = f(x)$$



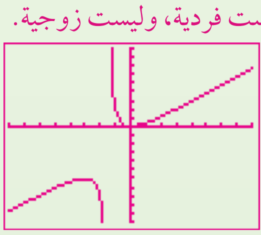
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

54) ليست فردية، وليست زوجية.



[−4, 16] scl: 1 by [−13, 17] scl: 3

55) ليست فردية، وليست زوجية.



[−16, 16] scl: 2 by [−22, 18] scl: 2

تنويع التعليم

فوق

توسّع ماذا يحدث لميل القاطع عندما تقترب النقطتان اللتان تحددان القاطع قربًا كافيًا من القيمة العظمى المحلية؟ وما علاقة القاطع في هذه الحالة مع مماس منحنى الدالة عند نقطة القيمة العظمى المحلية؟
يقترب القاطع من الخط الأفقي ويقترب ميله من 0. عندما يقترب القاطع من نقطة القيمة العظمى المحلية قربًا كافيًا، فإنه يصبح مماسًا لمنحنى الدالة.

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات
التقويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

إجابات

6b) $[0, 6.35]$، إجابة ممكنة: الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا، وارتفاع الكرة لا يجب أن يكون سالبًا في هذه الحالة.

7) المجال $= [0, \infty)$، والمدى $= [0, \infty)$

8) المجال $= \{x | x \in R\}$، والمدى $= \{y | y \in Z\}$

9) مقطع المحور y: 0، الأصفار: $0, 4, -4$

10) مقطع المحور y 5، صفر الدالة هو 25 .

11) حول المحور x، حول المحور y، حول نقطة الأصل.

12) حول نقطة الأصل.

13) غير متصلة؛ لأن الدالة غير معرّفة عند $x = 5$.

14) متصلة؛ لأن الدالة معرفة عند $x = 5$، وتقترب قيمة الدالة من 2.5 عندما تقترب x من 5 من الجهتين، $f(5) = 2.5$.

15) يتضح من سلوك طرفي التَّمثيل البياني أن: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$.

16) يتضح من سلوك طرفي التَّمثيل البياني أن: $f(x) \to 5$ عندما $x \to \infty$، $f(x) \to 5$ عندما $x \to -\infty$.

18) f متناقصة على $(-\infty, 3)$، ومتزايدة على $(3, \infty)$.

19) f متزايدة على $(-\infty, -2)$، ومتناقصة على $(-2, 1.5)$، ومتزايدة على $(1.5, \infty)$.

الفصل 2

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-2 إلى 4-2

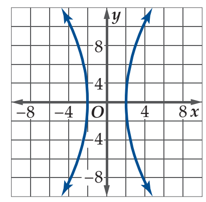
أي من العلاقات الآتية تمثّل y على أنها دالة في x؟ (الدرس 1-2)

1) $3x + 7y = 21$ دالة

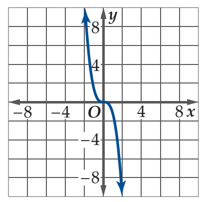
2) دالة

x	y
-1	-1
1	3
3	7
5	11
7	15

3) ليست دالة



4) دالة



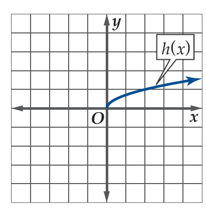
5) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ x & , x \ge 2 \end{cases}$، فأوجد $f(2)$. 2 (الدرس 1-2)

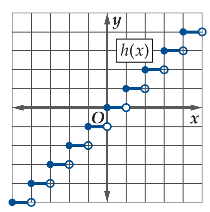
6) **كرة قدم:** يُعطى ارتفاع كرة قدم عن سطح الأرض عند ضربها من قبل حارس مرمى بـ $h(t) = -8t^2 + 50t + 5$، حيث h ارتفاع الكرة بالأقدام، و t الزمن بالثواني. (الدرس 1-2)

a) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 sec. 83ft

b) ما المجال المناسب لهذه الدالة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

استعمل التمثيلين البيانيين أدناه للدالة h؛ لإيجاد مجالها ومداها. (الدرس 2-2) للأسئلة 7-12 انظر الهامش

7) 

8) 

أوجد مقطع المحور y، والأصفار لكلٍّ من الدالتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

9) $f(x) = x^3 - 16x$

10) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$

اختبر تماثل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين حول المحور x، والمحور y، و نقطة الأصل. (الدرس 2-2)

11) $x^2 + y^2 = 9$

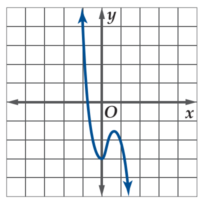
12) $xy = 4$

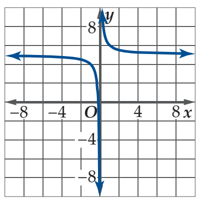
اختبر اتصال كل من الدالتين الآتيتين عند $x = 5$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. (الدرس 3-2) للأسئلة 16-13 انظر الهامش

13) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

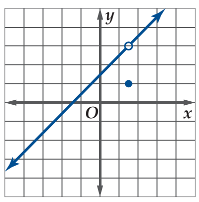
14) $f(x) = \frac{x^2}{x+5}$

صف سلوك طرفي كلٍّ من التمثيلين البيانيين أدناه، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 3-2)

15) 

16) 

17) **اختيار من متعدد:** ما نوع نقطة الانفصال للدالة الممثّلة في الشكل أدناه عند $x = 3$؟ (الدرس 3-2) C



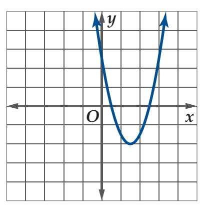
A غير معرف

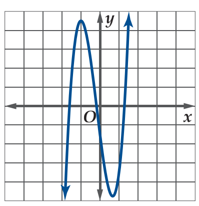
B لانهائي

C قفزي

D قابل للإزالة

استعمل التمثيل البياني لكل دالة أدناه؛ لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة (قرِّب إلى أقرب 0.5 وحدة)، عزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 4-2) للسؤالين 18, 19 انظر الهامش

18) 

19) 

20) **فيزياء:** إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تُعطى بـ $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد متوسط السرعة في الفترة $[0, 3]$. (الدرس 4-2) 48ft/sec

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-2 , 2-2 , 3-2 , 4-2	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمراجعة
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (48)	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

2-5 ملاحظات الدرس

2-5 الدوال الأم والتحويلات الهندسية
Parent Functions and Transformations

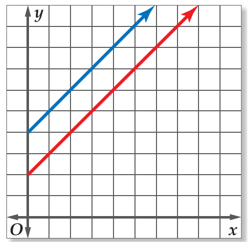
فيما سبق
درست التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أتعرف الدوال الأم، وأصفها وأمثلها بيانيًا.
- أتعرف التحويلات الهندسية للدوال الأم، وأمثلها بيانيًا.

المفردات الأساسية
الدالة الأم
parent function
الدالة الثابتة
constant function
الدالة المحايدة
identity function
الدالة التربيعية
quadratic function
الدالة التكعيبية
cubic function
دالة الجذر التربيعي
square root function
دالة المقلوب
reciprocal function
دالة القيمة المطلقة
absolute value function
الدالة الدرجية
step function
دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function
التحويل الهندسي
transformation
الإزاحة (الانسحاب)
translation
الانعكاس
reflection
التمدد
dilation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل (الخط الأزرق) وبعد (الخط الأحمر) الاستشارة. هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

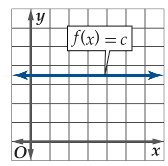


الدوال الأم عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها (تمثيلاتها البيانية) بصفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الأم** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها؛ لإيجاد باقي دوال العائلة.

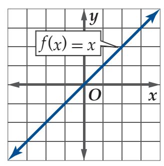
ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الأم الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية، ودوال كثيرات الحدود.

مفهوم أساسي: الدوال الأم للدوال الخطية و دوال كثيرات الحدود

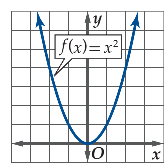
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّلُ بمستقيم أفقي.



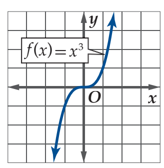
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



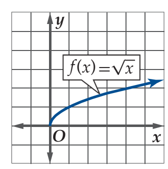
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



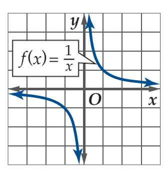
كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي، ودوال المقلوب.

مفهوم أساسي: الدالة الأم لكلٍ من دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة:
$$f(x) = \sqrt{x}\,, x \geq 0$$



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة:
$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5
تحليل التَّمثيل البياني للدوال.

الدرس 2-5
تعرّف الدوال الأم، ووصفها، وتَمثيلها بيانيًا.
تعرّف التحويلات الهندسية للدوال الأم، وتمثيلها بيانيًا.

مابعد الدرس 2-5
اجراء عمليات على الدوال، وتركيب الدوال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- ما أوجه الشبه والاختلاف بين الدالتين $f(x) = x$ و $g(x) = x + 2$؟
المستقيمان لهما الميل نفسه، والدالة $g(x)$ ناتجة عن انسحاب $f(x)$ وحدتين إلى أعلى.
- صف أثر قيم a المختلفة في الدالة $f(x) = x + a$. تعمل قيم a في انسحاب المستقيم إلى أعلى أو إلى أسفل بمقدار a من الوحدات.
- ما أوجه الشبه والاختلاف بين الدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 2$؟
الدالتان لهما التمثيل البياني نفسه، الدالة $g(x)$ ناتجة عن انسحاب $f(x)$ وحدتين إلى أعلى.

مصادر الدرس 2-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص . (94 ، 92)	• تنويع التعليم ص (94 ، 92)	• تنويع التعليم ص (97 ، 94)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ص (13) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الدوال الأم

مثال 1 يُبيّن كيفية وصف الخصائص المهمة للدالة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 صف خصائص منحنى الدالة الأم $f(x)=\frac{1}{x}$، من حيث المجال، والمدى، ومقطع المحور x، ومقطع المحور y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التَمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.
المجال والمدى $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$، ومنحنى الدالة لا يقطع المحور x، ولا يقطع المحور y، وهو متماثل حول نقطة الأصل. لذا، فالدالة فردية. المنحنى متصل عند جميع قيم المجال، وتوجد نقطة انفصال لا نهائية عند $x=0$. الدالة متناقصة على فترتي المجال.

دالة القيمة المطلقة هي أيضًا إحدى الدوال الأم.

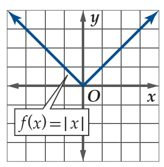
مفهوم أساسي **الدالة الأم لدالة القيمة المطلقة**

التعبير اللفظي يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x)=|x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V، وتعرف كما يأتي:

$$f(x)=\begin{cases}-x & , \ x<0\\ x & , \ x\geq 0\end{cases}$$

أمثلة $|-5|=5,\ |0|=0,\ |4|=4$

نموذج



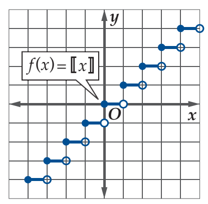
أما **الدالة الدرجية** فهي دالة معرَّفة بأكثر من قاعدة، يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي **الدالة الأم لدالة أكبر عدد صحيح**

التعبير اللفظي يُرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x)=[\![x]\!]$، وتعرَّف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

أمثلة $[\![-4]\!]=-4\ ,\ [\![-1.5]\!]=-2\ ,\ [\![\frac{1}{3}]\!]=0$

نموذج



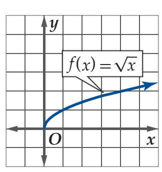
باستعمال ما تعلمته في الدروس السابقة، فإنه يمكنك وصف خصائص كل دالة من الدوال الأم. ممّا يساعدك على تعرُّف منحنيات دوال أكثر تعقيدًا من العائلة نفسها وتحليلها.

مثال 1 **وصف خصائص الدالة الأم**

صِفْ خصائص منحنى الدالة الأم $f(x)=\sqrt{x}$ المبينة في الشكل أدناه من حيث المجال، والمدى، ومقطع المحور x، ومقطع المحور y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، و فترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي في الشكل أدناه هي :

- مجال الدالة $[0,\infty)$، ومداها $[0,\infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$.
- المنحنى غير متماثل. لذا، فإن الدالة ليست زوجية، ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x=0$، وتكون $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
- المنحنى متزايد على الفترة $(0,\infty)$.



تأكد

1) صِفْ خصائص منحنى الدالة الأم $f(x)=|x|$ من حيث المجال، والمدى، ومقطع المحور x، ومقطع المحور y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، و فترات التزايد والتناقص.

(1 المجال $=\{x\,|\,x\in R\}$ ، المدى $=\{y|y\geq 0, y\in R\}$، للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$، والمنحنى متماثل حول المحور y. لذا؛ الدالة زوجية، والمنحنى متصل عند جميع قيم المجال، ومتناقص على الفترة $(-\infty,0)$ ومتزايد على الفترة $(0,\infty)$، ويبدأ المنحنى عند $x=0$ ، وينتهي بـ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$، و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

التحويلات الهندسية تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الأم. فبعضُ التحويلات تُغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى، وتسمى تحويلات غير قياسية .

التعليم باستعمال التقنيات

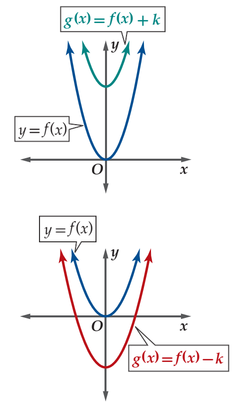
الآلة الحاسبة البيانية اطلب إلى الطلبة استعمال الحاسبة البيانية، وكتابة المَعْلَمات في الدالة الأم بشكل صحيح مثل الدالة الثابتة، التربيعية، التكعيبية وهكذا. على أن يلاحظوا أثر تغير كل معْلَمَة. وبعد أن يكملوا ملاحظاتهم عليهم مقارنتها بملاحظات زملائهم.

الإزاحة (الانسحاب) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو أسفل، على حين ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار.

مفهوم أساسي — الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

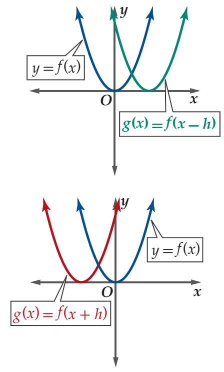
الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$، هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$، هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.

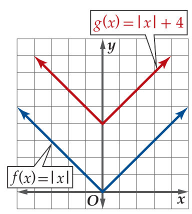


مثال 2 — انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الأم $f(x) = |x|$ ؛ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

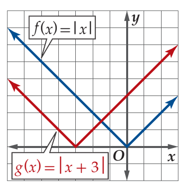
a) $g(x) = |x| + 4$

هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$. وعليه، فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل المجاور.



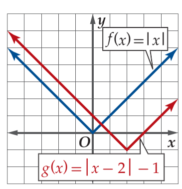
b) $g(x) = |x + 3|$

هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$، أو $g(x) = f[x - (-3)]$. وعليه، فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل المجاور.



c) $g(x) = |x - 2| - 1$

هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$. وعليه، فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ، ووحدة واحدة إلى الأسفل كما في الشكل المجاور.



تأكد

استعمل منحنى الدالة الأم $f(x) = x^3$ ؛ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا: للتدريبات 2A-2C انظر الهامش

2A) $h(x) = x^3 - 5$ **2B)** $h(x) = 8 + x^3$ **2C)** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

إرشاد تقني

الانسحاب يمكنك إجراء انسحاب لمنحنى دالة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. تحت Y= ، ضع معادلة في Y1. تحرك إلى المستقيم Y2 ، ثم اضغط الأزرار: VARS ▶ ENTER ENTER . هذا سوف يضع Y1 في المستقيم Y2. ادخل عددًا لسحب الدالة. اضغط GRAPH . ستجد أنه تم رسم المعادلتين على الشاشة نفسها.

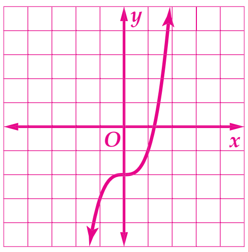
التحويلات الهندسية

مثال 2 يُبيّن كيفية تَمثيل التحويلات الهندسية.

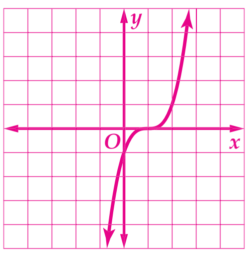
مثال إضافي

2 استعمل منحنى الدالة الأم $f(x) = x^3$ ؛ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

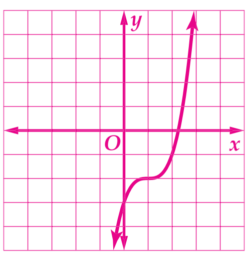
a) $g(x) = x^3 - 2$



b) $g(x) = (x - 1)^3$

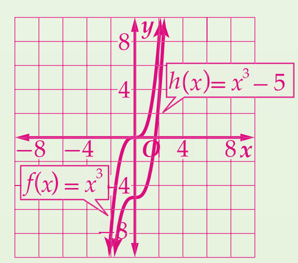


c) $g(x) = (x - 1)^3 - 2$

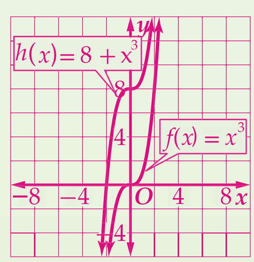


إجابات (تأكد):

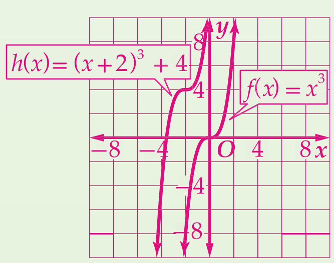
2A)



2B)



2C)

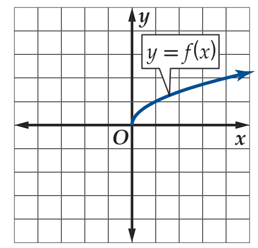


التحويلات الهندسية

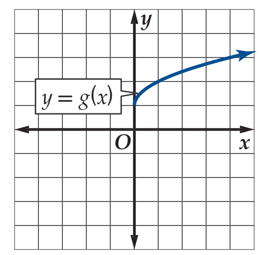
مثال 3 يُبيّن كيفية وصف الدالة، وعلاقتها بالدالة الأم، وكتابة معادلة الدالة بعد التحويل.

مثال إضافي

3 صف العلاقة بين منحنى $f(x) = \sqrt{x}$ في الشكل أدناه ومنحنى $g(x)$ ، في كلِّ شكل أدناه، ثم اكتب معادلة $g(x)$.

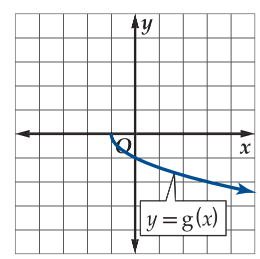


(a



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

(b



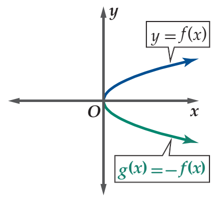
منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة واحدة إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x . $g(x) = -\sqrt{x+1}$.

من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس**، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي — الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

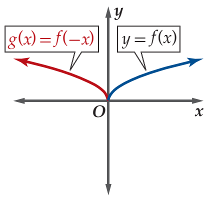
الانعكاس حول المحور x

منحنى $g(x) = -f(x)$، هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور x .

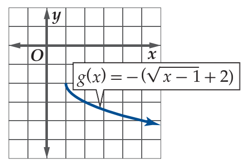


الانعكاس حول المحور y

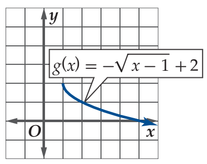
منحنى $g(x) = f(-x)$، هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y .



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.



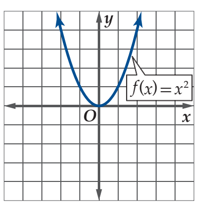
انسحاب لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين، ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .



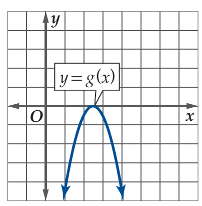
انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

مثال 3 — كتابة معادلات التحويل

صف العلاقة بين منحنى $f(x) = x^2$ في الشكل المجاور، ومنحنى $g(x)$ في كلِّ شكل أدناه، ثم اكتب معادلة $g(x)$.

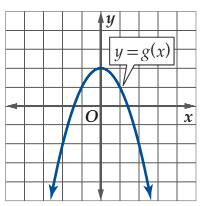


(a



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x ، أي أن $g(x) = -(x-5)^2$.

(b

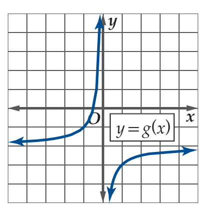


منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

تأكد

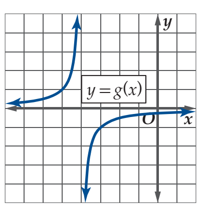
صف العلاقة بين منحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ ، ومنحنى $g(x)$ في كلِّ شكل أدناه، ثم اكتب معادلة $g(x)$.

(3A



منحنى $g(x) = -\frac{1}{x} - 2$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين إلى الأسفل.

(3B



منحنى $g(x) = -\frac{1}{x+4}$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ حول المحور x ، ثم انسحاب 4 وحدات إلى اليسار.

92 الفصل 2 تحليل الدوال

تنويع التعليم

دون — ضمن

المتعلمون البصريون اطلب إلى الطلبة عمل ملصقات يعرضون فيها الدوال الأم الثماني التي تم دراستها في هذا الدرس ، وكيفية إجراء التحويلات الهندسية عليها.

التركيز في المحتوى الرياضي

التحويلات الهندسية للدوال عند إجراء انسحاب أو انعكاس لمنحنى الدالة ، تحصل على الشكل نفسه ، لكن إذا حصل تمدّد لمنحنى الدالة ، فإنك تحصل على شكل مختلف. من منظور هندسي ، يحافظ الانسحاب والانعكاس لمنحنيات الدوال على شكلها. لذا، فالصورة مطابقة لمنحنى الدالة الأم ، في حين لا يحافظ التمدّد على الشكل. لذا، فالصورة لا تشبه منحنى الدالة الأم.

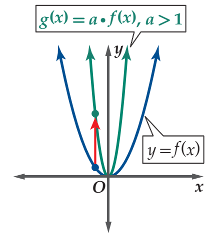
التمدّد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضييق (ضغط)، أو توسِعة (مطّ) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

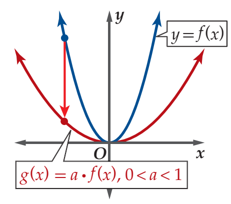
مفهوم أساسي — التمدّد الرأسي والتمدّد الأفقي

التمدّد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى $g(x) = a\,f(x)$، هو:

- توسّع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

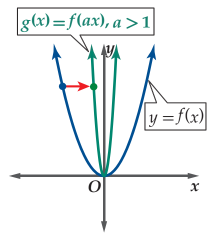


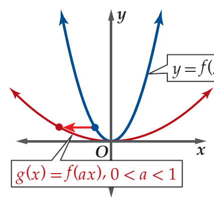


التمدّد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى $g(x) = f(ax)$، هو:

- تضييق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسّع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$





إرشادات للدراسة

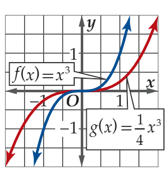
التمدّد يظهر التمدّدان متشابهين أحيانًا مثل المَطّ الرأسي والتضييق الأفقي. لذا، يصعب وصف التمدّد الذي طُبِّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الأم.

مثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

عيِّن الدالة الأم f للدالة g في كل مما يأتي، ثم صفّ العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه.

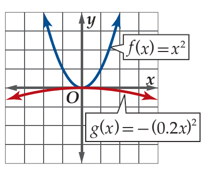
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى $g(x)$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}\,f(x)$ و $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(0.2x)^2$

منحنى $g(x)$ هو توسّع أفقي، ثم انعكاس حول المحور x لمنحنى $f(x) = x^2$ ؛ لأن $g(x) = -(0.2x)^2 = -f(0.2x)$ و $0 < 0.2 < 1$.



تأكد للتدريبين **4A, 4B** انظر الهامش

عيّن الدالة الأم f للدالة g في كل مما يأتي، ثم صفّ العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه.

4A) $g(x) = [\![x]\!] - 4$ **4B)** $g(x) = \frac{15}{x} + 3$

يمكنك تمثيل الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة بيانيًّا باستعمال التحويلات الهندسية التي درستها .

التحويلات الهندسية

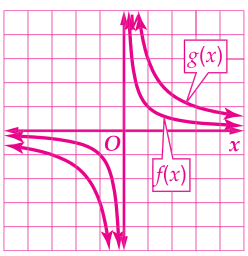
مثال 4 يُبيّن كيفية وصف التَمثّيل البياني للدالة بعد التحويل.

مثال إضافي

4 عيّن الدالة الأم f للدالة g في كلٍّ مما يأتي، ثمَّ صِف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه.

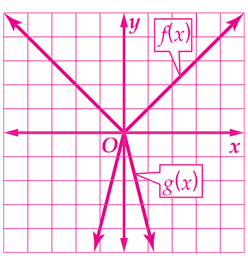
a) $g(x) = \frac{3}{x}$

منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ بمعامل مقداره 3.



b) $g(x) = -|4x|$

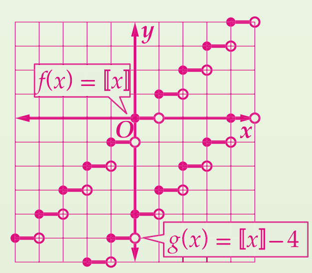
منحنى $g(x)$ هو تضيق أفقي لمنحنى $f(x) = |x|$ بمعامل مقداره 4، ثم انعكاس له حول المحور x .



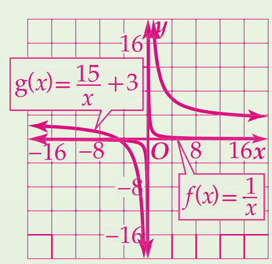
إجابات (تأكد):

4A) $f(x) = [\![x]\!]$،

منحنى $g(x)$ يمثل إزاحة لمنحنى $f(x)$ بمقدار 4 وحدات إلى أسفل.



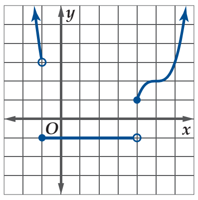
4B) $f(x) = \frac{1}{x}$ ، منحنى $g(x)$ توسّع رأسي معامله 15 وحدة، ثمَّ انسحاب إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات لمنحنى $f(x)$.



مثال 5 تمثيل الدوال المعرَّفة بأكثر من قاعدة بيانيًا

مثّل بيانيًا

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & , \quad x<-1\\ -1 & , \quad -1\le x<4\\ (x-5)^3+2 & , \quad x\ge 4\end{cases}$$



في الفترة $(-\infty, -1)$، مثِّل الدالة $y=3x^2$.

في الفترة $[-1, 4)$، مثِّل الدالة الثابتة $y=-1$.

في الفترة $[4, \infty)$ مثِّل الدالة $y=(x-5)^3+2$.

ضع دائرة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$، ونقطةً عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$؛ لأن $f(-1)=-1$ و $f(4)=1$.

تأكد للتدريبين 5A, 5B انظر الهامش

مثّل كلًا من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

5A) $g(x)=\begin{cases}x-5 & , x\le 0\\ x^3 & , 0<x\le 2\\ \frac{2}{x} & , x>2\end{cases}$

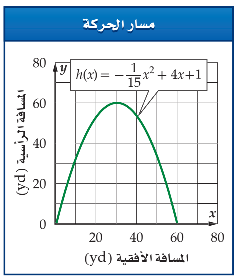
5B) $h(x)=\begin{cases}(x+6)^2 & , \quad x<-5\\ 7 & , -5\le x\le 2\\ |4-x| & , \quad x>2\end{cases}$

يمكنك استعمال التحويلات الهندسية التي تعلمتها على الدوال التي تمثِّل مواقف من واقع الحياة.

الربط مع واقع الحياة

حقق منتخب البحرين الوطني لكرة القدم المركز الثاني في دورة كأس الخليج العربي أربع مرات، في الدورات الأولى والسادسة والحادية عشرة والسادسة عشرة.

مثال 6 من واقع الحياة التحويلات الهندسية على الدوال



كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها مُعطى بِـ: $h(x)=-\frac{1}{15}x^2+4x+1$ ، حيث $h(x)$ يمثِّل ارتفاع الكرة باليارده عن سطح الأرض، وتمثِّل x المسافة الأفقية باليارده التي تقطعها الكرة، حيث $x=0$ ترتبط بخط منتصف الملعب .

صفْ التحويلات التي تمت على الدالة الأم $f(x)=x^2$ للحصول على $h(x)$.

أعد كتابة الدالة؛ لتصبح على الصورة $h(x)=a(x-h)^2+k$ باستعمال إكمال المربع.

$h(x)=-\frac{1}{15}x^2+4x+1$ — الدالة الأصلية

$=-\frac{1}{15}(x^2-60x)+1$ — بتحليل $-\frac{1}{15}x^2+4x$

$=-\frac{1}{15}(x^2-60x+900)+1+\frac{1}{15}(900)$ — بإكمال المربع

$=-\frac{1}{15}(x-30)^2+61$ — بكتابة $x^2-60x+900$ على صورة مربع كامل، والتبسيط

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب:

انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

تأكد

6) كهرباء: إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير ، الّذي يمر بجهاز DVD تُعطى بالدالة $I(x)=\sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة (Watt) ، والمقاومة كانت تساوي $11\,\Omega$.

A) صفْ التحويلات التي تمت على الدالة الأم $f(x)=\sqrt{x}$ للحصول على $I(x)$. اتساع أفقي

B) إذا كانت مقاومة مصباح $15\,\Omega$، فاكتب دالة تصف مرور التيار خلال المصباح. $I(x)=\sqrt{\frac{x}{15}}$

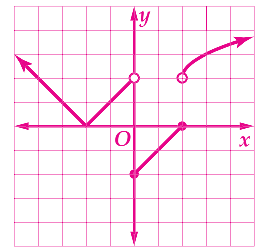
التحويلات الهندسية

مثال 5 يبيّن كيفية تَمثيل الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة بيانية.

مثالان إضافيان

5 مثّل بيانيًا:

$$f(x)=\begin{cases}|x+2|\,, x<0\\ |x|-2\,, 0\le x\le 2\\ \sqrt{x-2}+2\,, x>2\end{cases}$$



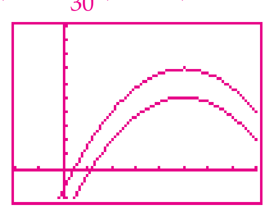
6 مدينة الألعاب: يتخذ جزء من سكة حديد العجلة الدوّارة في مدينة الألعاب شكل منحنى الدالة: $g(x)=\frac{-x^2}{30}+\frac{10x}{3}-\frac{100}{3}$ ، حيث تُمثّل $g(x)$ ارتفاع السكة عن سطح الأرض بالياردات ، و x المسافة الأفقية بالياردة من نقطة انطلاق القطار على العجلة.

a) صِفْ التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الأم $f(x)=x^2$ للحصول على $g(x)$.

منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ مسحوبًا 50 وحدة إلى اليمين، و 50 وحدة إلى أعلى ، وتضيق رأسيّ، وانعكاس حول المحور x .

b) إذا قرر مصممو سكة الحديد رفع أعلى نقطة فيها لتصبح على 70 yd عن سطح الأرض ، فأعد كتابة $g(x)$ للتوافق مع هذا التعديل ، ثم مثّل الدالتين بيانيًا على المستوى نفسه مستعملًا الآلة الحاسبة البيانية.

$g(x)=-\frac{1}{30}(x-50)^2+70$



[−20, 80] scl: 10 by [−20, 100] scl: 10

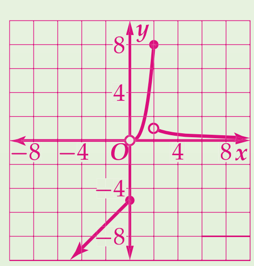
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

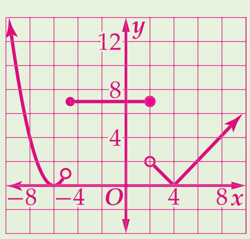
المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات؛ لتحديد إن كانت مجموعات من الدوال لها تماثلات تشابه تماثلات الدوال الأم. وشجعهم على استعمال الحاسوب أو الآلة الحاسبة البيانية؛ لاختبار تخميناتهم حول التماثل.

إجابات (تأكد):

5A)



5B)



تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

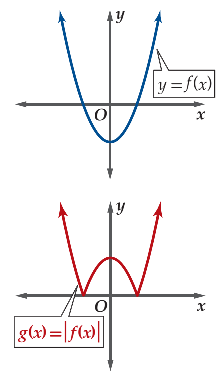
إرشاد تقني

تحويلات القيمة المطلقة
يمكنك التحقق من أثر التحويل الهندسي على منحنى القيمة المطلقة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. ويمكنك أيضًا تمثيل كلا الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه .

مفهوم أساسي — التحويلات الهندسية على دوال القيمة المطلقة

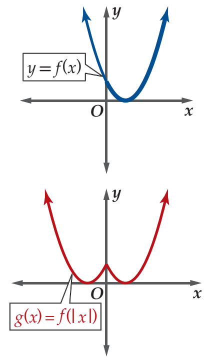
$g(x) = |f(x)|$

يعكس هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه.



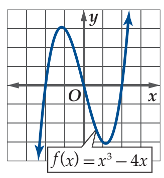
$g(x) = f(|x|)$

يُغيِّر هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ، ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .



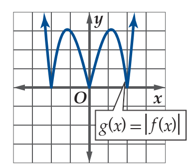
مثال 7 — وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

استعمل منحنى $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل المجاور؛ لتمثيل منحنى كل من الدالتين الآتيتين.



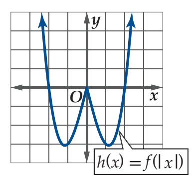
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$.
لذا ، يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ، ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

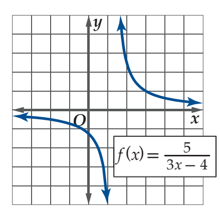
ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y ، انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y .



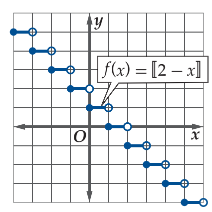
تأكد للتدريبين 7A, 7B انظر الهامش

استعمل منحنى $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل منحنى كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$.

7A)



7B)

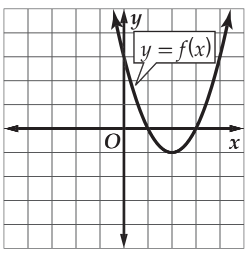


التحويلات الهندسية

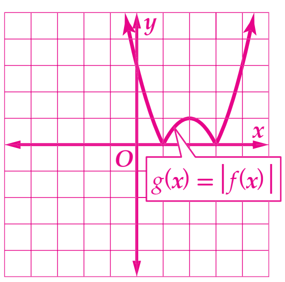
المثالان 6 , 7 يُبيِّنان كيفية استعمال التحويلات الهندسية للدوال، ووصفها، وتَمثِّلها.

مثال إضافي

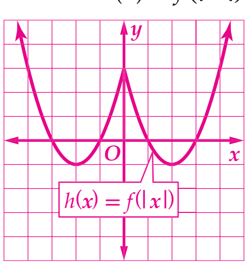
7 استعمل منحنى $f(x) = x^2 - 4x + 3$ المُبيّن في الشكل أدناه؛ لتمثيل منحنى كلٍّ من الدالتين الآتيتين:



a) $g(x) = |f(x)|$

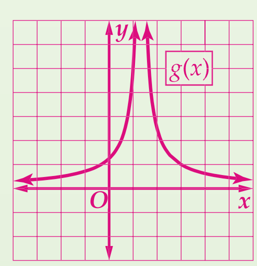


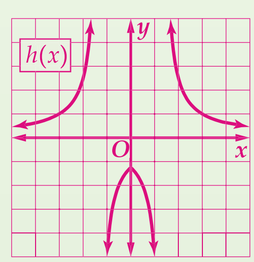
b) $h(x) = f(|x|)$



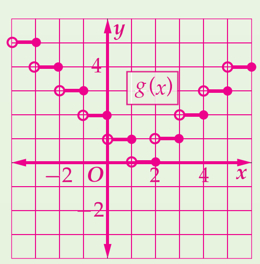
إجابة (تأكد):

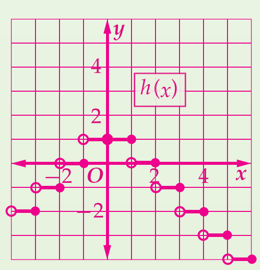
7A)





7B)





3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 25–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه

خطأ شائع في التمرينين 24, 25 قد يجد بعض الطلبة صعوبة في معرفة التغيرات التي تسببها القيمة المطلقة. لذا، اقترح عليهم تَمثيل منحنى الدالة دون قيمة مطلقة، ثم إجراء الانعكاس على أجزاء من منحنى الدالة في المحور المناسب.

إجابات:

1) المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى = $\{y \mid y \in z\}$. يقطع المنحنى المحور y عند (0.0) ويقطع المحور x عند $\{x \mid 0 \leq x < 1, x \in R\}$. لا يوجد لمنحنى الدالة تماثلات، أي أنها ليست فردية وليست زوجية. للدالة انفصال قفزي عندما $\{x \mid x \in z\}$.
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ الدالة ثابتة عندما $\{x \mid x \notin z\}$. متزايدة عند $\{x \mid x \in z\}$.

2) المجال = $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$ المدى = $\{y \mid y \neq 0, y \in R\}$. المنحنى لا يقطع أيًا من المحورين، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل. لذا، الدالة فردية ، للدالة انفصال لا نهائي عند $x = 0$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. الدالة متناقصة على $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

3) المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى = $\{y \mid y \in R\}$. المنحنى يقطع المحورين عند (0.0) ، المنحنى متماثل حول نقطة الأصل. لذا الدالة فردية ومتصلة. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ، الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

4) المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$. يقطع المنحنى المحورين عند (0.0) المنحنى متماثل حول المحور y. لذا، الدالة زوجية، ومتصلة. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ، الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ ، ومتزايدة على الفترة $(0, \infty)$.

تدرب وحل المسائل

اكتب خصائص كل دالة من الدوال الأم الآتية: المجال ، المدى، مقطع المحور x ، مقطع المحور y ، التماثل، الاتصال ، سلوك طرفي التمثيل البياني، فترات التزايد والتناقص. (مثال 1) للتمارين 6-1 انظر الهامش

1) $f(x) = [\![x]\!]$ 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 3) $f(x) = x^3$

4) $f(x) = x^2$ 5) $f(x) = c$ 6) $f(x) = x$

استعمل منحنى الدالة الأم $f(x) = \sqrt{x}$؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين الآتيتين: (مثال 2) للتمارين 20-7 انظر ملحق الإجابات

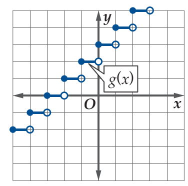
7) $g(x) = \sqrt{x-4}$ 8) $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

استعمل منحنى الدالة الأم $f(x) = \frac{1}{x}$؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

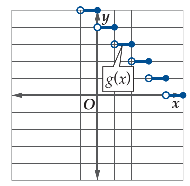
9) $g(x) = \frac{1}{x} + 4$ 10) $g(x) = \frac{1}{x+7} - 4$

صِف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [\![x]\!]$ و $g(x)$ في كلٍّ شكل أدناه ، ثم اكتب معادلة $g(x)$. (مثال 3)

11)

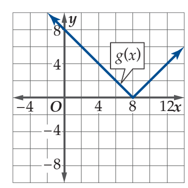


12)

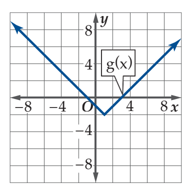


صِف العلاقة بين منحنيي $f(x) = |x|$ و $g(x)$ في كلٍّ شكل أدناه ، ثم اكتب معادلة $g(x)$. (مثال 3)

13)



14)



اكتب الدالة الأم f للدالة g في كلٍّ مما يأتي، وصِف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما في مستوى إحداثي واحد . (مثال 4)

15) $g(x) = 3|x| - 4$ 16) $g(x) = \frac{4}{x+1}$

17) $g(x) = 2[\![x - 6]\!]$ 18) $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$

مثِّل منحنى كلٍّ من الدالتين بيانيًّا: (مثال 5)

19) $f(x) = \begin{cases} -x^2 , & x < -2 \\ 3 , & -2 \leq x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 , & x \geq 7 \end{cases}$

20) $g(x) = \begin{cases} x + 4 , & x < -6 \\ \frac{1}{x} , & -6 \leq x < 4 , \ x \neq 0 \\ 6 , & x \geq 4 \end{cases}$

انظر ملحق الإجابات

21) **أسعار:** يُبيّن الجدول أدناه سعر سلعة منذ سنة 1990 م حتى 2010 م . استعمل هذه البيانات؛ لتمثيل دالة درجية. (مثال 5)

السنة	1990	1993	1997	2001	2003	2004	2008	2009	2010
السعر (BD)	25	29	32	33	34	37	39	41	42

22) **أعمال:** قدَّمت شركة هواتف محمولة عرضًا لمشتركي شبكتها، بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًّا مقداره BD 2، ويدفع BD 0.02 مقابل كل دقيقة اتصال، إن تكلفة هذا العرض تُعطى بِـ $c(x) = 2 + 0.02x$ ، حيث x عدد دقائق الاتصال. (مثال 6)

a) صِف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الأم $f(x) = x$؛ لتمثيل الدالة $c(x)$. انظر ملحق الإجابات

b) إذا قدَّمت الشركة عرضًا آخر، بحيث يدفع المشترك فيه BD 3 شهريًّا، ويدفع BD 0.01 عن كل دقيقة اتصال ، فاكتب الدالة التي تصفّ تكلفة هذا العرض. $c(x) = 3 + 0.01x$

c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟ نعم، 100 min

23) **فيزياء:** إذا علمت أن طاقة الوضع المرونية في نابض ما تُعطَى بالدالة $E(x) = 4x^2$ ، حيث تُقاس الطاقة E بالجول، وتُقاس المسافة x بالمتر. صفّ التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الأم $f(x) = x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$. (مثال 6) توسع رأسي

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي؛ لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|$ ، $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (مثال 7) للتمرينين 24, 25 انظر ملحق الإجابات

24) $f(x) = \frac{2}{x}$ 25) $f(x) = \sqrt{x+2} - 6$

اكتب الدالة الناتجة عن إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الأم في كل من التمرينين الآتيين:

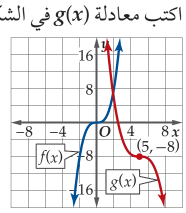
26) $f(x) = \frac{1}{x}$، انسحاب 5 وحدات إلى أعلى، و 7 وحدات إلى اليسار، وتوسّع رأسي معامله 2. انظر ملحق الإجابات

27) $f(x) = [\![x]\!]$، انعكاس حول المحور x، و انسحاب 4 وحدات إلى الأسفل ، وتوسّع رأسي معامله 3. $g(x) = -3[\![x]\!] - 4$

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تُعطى بِـ : $g(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$، حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية، و a تسارع (عجلة) الجسم. صفّ التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الأم $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي: للتمرينين 28, 29 انظر ملحق الإجابات

28) $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$ 29) $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$

30) اكتب معادلة $g(x)$ في الشكل أدناه .



$g(x) = -(x-5)^3 - 8$

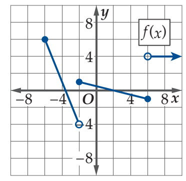
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	33–36، 38–47
ضمن ضمن المتوسط	26–32 زوجي ، 33–36 ، 38–47
فوق فوق المتوسط	26–47

5) المجال = $\{x \mid x \in R\}$، المدى = $\{y \mid y = c, c \in R\}$. إذا كان $c = 0$ فيقطع المنحنى المحور x عند عدد لانهائي من النقاط. وعدا ذلك ، فالمنحنى لا يقطع المحور x، يقطع المنحنى المحور y عند النقطة $(0, c)$، والدالة متماثلة حول المحور y . لذا، فهي زوجية ومتصلة. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = c$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ ، وثابتة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

6) المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى = $\{y \mid y \in R\}$. يقطع المنحنى المحورين عند $(0, 0)$. المنحنى متماثل حول نقطة الأصل. لذا، الدالة فردية ومتصلة. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

31) استعمل منحنى $f(x)$ في الشكل المجاور؛ لتمثيل منحنى
$g(x) = 0.25f(x) + 4$
انظر ملحق الإجابات



32) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا التمرين بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:

- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$ للفرعين b, c انظر الهامش

a) **جدولة:** اختر ثلاث قيم لـ a، وأكمل الجدول أدناه:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a)+g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
−4	15	13	2	2
15	262	63	325	325

b) **تعبير لفظي:** ما العلاقة بين $f(x)$ ، $g(x)$ ، $h(x)$؟

c) **جبري:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع b جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

للتمارين 39-33 انظر ملحق الإجابات

33) **اكتشف الخطأ:** وَصَف كلٌ من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى $g(x) = [\![x + 4]\!]$. فقال محمد: إنه تم إزاحة منحنى الدالة الأم 4 وحدات إلى اليسار، وقال عبد الله: إنه تم إزاحتها 4 وحدات إلى أعلى. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

34) **تبرير:** إذا كانت $f(x)$ دالة فردية، وكانت $g(x)$ انعكاسًا لـ $f(x)$ حول المحور x، و $h(x)$ انعكاسًا لـ $g(x)$ حول المحور y، فما العلاقة بين $f(x)$, $h(x)$؟ برِّر إجابتك.

تبرير: تحقّق ما إذا كانت كل من العبارتين الآتيتين صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو ليست صحيحة أبدًا. وبرِّر إجابتك.

35) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية ، فإن $f(x) = |f(x)|$

36) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية ، فإن $f(-x) = -|f(x)|$

37) **تحدٍّ:** صِفّ التحويلات الهندسية التي تمت على $f(x) = \sqrt{x}$ للوصول إلى دالة يمر منحناها بالنقطة $(-2, -6)$.

38) **تبرير:** وضِّح الفرق بين التوسُّع الرأسي بمعامل مقداره 4 ، والتوسُّع الأفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$. ما النتيجة النهائية بعد إجراء كلٍّ من التحويلين الهندسيين على الدالة نفسها؟

39) **اكتب:** وضِّح أهمية الترتيب في تحويلات الانعكاس والانسحاب.

مراجعة تراكمية

أوجد متوسط معدّل التغير لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة: (الدرس 4-2)

40) $g(x) = -2x^2 + x - 3 , [-1, 3]$ -3

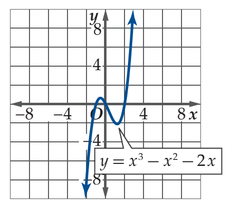
41) $g(x) = x^2 - 6x + 1 , [4, 8]$ 6

حدِّد سلوك طرف التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين عندما تقترب x من ما لانهاية ، وبرِّر إجابتك. (الدرس 3-2) انظر الهامش

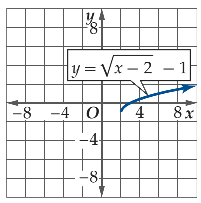
42) $f(x) = \frac{0.5}{x^2}$ **43)** $p(x) = \frac{x+2}{x-3}$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمة كلٍّ من مقطع المحور y ، والأصفار إلى أقرب جزء من مئة كلما لزم ذلك لكل دالة من الدوال الآتية، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا. (الدرس 2-2) انظر الهامش

44)

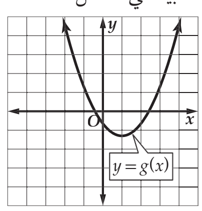


45)



تدريب على اختبار معياري

46) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة المبيَّنة في الشكل أدناه؟



A $(0,\infty)$
B $(-\infty,+\infty)$
C $(-\infty,1)$
D $(1,\infty)$
D

47) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2+8}{2}$ ؟ B

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$ **C** $\{y \mid y \geq 0\}$
B $\{y \mid y \geq 4\}$ **D** $\{y \mid y \leq 0\}$

تنبيه

اكتشف الخطأ في التمرين 33 كلا التفسيرين صحيح، اطلب إلى الطلبة التحقق من ذلك بسحب الدالة الأصلية 4 وحدات إلى أعلى، ثم كلفهم بسحب الدالة الأصلية 4 وحدات إلى اليسار، سيلاحظون أن النتيجة واحدة في الحالتين.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة وصف العلاقة بين الدالة $g(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 4$ ، ودالتها الأم على ورقة، واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x) = x^2$ بالانعكاس حول المحور x ، ويتبعه انسحاب بمقدار 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أعلى، وتضييق بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$.

إجابات:

32b) إجابة ممكنة: $h(x)$ تمثل مجموع الدالتين $g(x)$ ، $f(x)$.

32c) $h(x) = f(x) + g(x)$
$$x^2 + 6x + 10 \stackrel{?}{=} x^2 + 2x + 7 + 4x + 3$$
$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 10$$

42) 0، إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$, تتناقص قيمة الكسر لتؤول $f(x)$ إلى 0.

43) 1؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$, تقترب الدالة من $\frac{x}{x}$. لذا، فإن قيم $p(x)$ تؤول إلى 1.

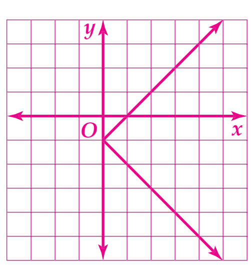
44) مقطع المحور y هو 0 ، الأصفار $-1, 0, 2$
$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x(x+1)(x-2) = 0$$
$$x = 0 \text{ أو } x + 1 = 0 \text{ أو } x - 2 = 0$$
$$x = 0 \text{ أو } x = -1 \text{ أو } x = 2$$

تنويع التعليم

فوق

توسّع مثّل الدالة $|y+1| = x$ بيانيًّا، ثم صِفْ علاقتها بالدالة $y = |x|$.

منحنى هذه الدالة هو تدوير لمنحنى الدالة $y = |x|$ بزاوية قياسها 90° مع اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ، ثم إزاحة وحدة واحدة إلى الأسفل.



47) المنحنى لا يقطع المحور y، صفر الدالة هو 3
$$0 = \sqrt{x-2} - 1$$
$$1 = \sqrt{x-2}$$
$$1^2 = x - 2$$
$$1 + 2 = x$$
$$x = 3$$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-6

ايجاد قيم الدوال.

الدرس 2-6

إجراء العمليات على الدوال، وإيجاد تركيب الدوال.

ما بعد الدرس 2-6

إيجاد معكوس العلاقات والدوال العكسية جبريًا وبيانيًا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- إذا تم بيع منتجين بمتوسط شهري مختلف، فكيف يمكنك المقارنة بين المعدلين؟ طرح مبيعات أحد المنتجين من مبيعات الآخر.
- تهتم شركة بالنسبة الشهرية بين عدد البيوت التي تم بيعها والبيوت المعروضة للبيع، فما العبارة التي تدل على هذه النسبة؟ قسمة عدد البيوت التي تم بيعها على عدد البيوت المعروضة للبيع.
- قام بيولوجي بدراسة الأثر على عدد الفئران كدالة في العشب على عدد طيور البوم . كيف يمكن للبيولوجي دراسة الأثر المركب بين عدد الفئران و عدد البوم؟ دراسة عدد طيور البوم كدالة لعدد الفئران.

2-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

Function Operations and Composition of Functions

فيما سبق

درست إيجاد قيم الدوال.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجري العمليات على الدوال.
- أجدُ تركيب الدوال.

المفردات الأساسية

تركيب دالتين

composition of functions

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من جامعة البحرين عام 2010-2009 م 63000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 300000 كتاب.

إذا كانت $A(t)$ ، $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة، وعدد الكتب المستعارة على الترتيب، و t تمثّل السنة منذ عام 2010-2009 م ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يُعطى بالدالة $A(t) - B(t)$ لأي سنة t.

العمليات على الدوال تعلمت في السنوات السابقة إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الأعداد الحقيقية، وستتعلمُ في هذا الدرس إجراءَ العمليات نفسها على الدوال.

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f ، g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نُعرِّف عمليات الجمع، الضرب، الطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين كما يأتي:

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f ، g ، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مثال 1 العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x$ ، $g(x) = \sqrt{x+2}$ ، $h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم أوجد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2+4x) + (\sqrt{x+2})$$
$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$. لذا، فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f و g وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f-h)(x)$

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (x^2+4x) - (3x-5)$$
$$= x^2 + 4x - 3x + 5$$
$$= x^2 + x + 5$$

مجال كل من f ، h هو $(-\infty, \infty)$.
لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c) $(f \cdot h)(x)$

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$$
$$= (x^2+4x)(3x-5)$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x$$
$$= 3x^3 + 7x^2 - 20x$$

مجال كل من f ، h هو $(-\infty, \infty)$.
لذا، فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f ، h هو $(-\infty, \infty)$، ولكن $x = 0$ و $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا. لذا، فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq -4, x \in R\}$.

مصادر الدرس 2-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (101)	• تنويع التعليم ، ص (103)	• تنويع التعليم ،(103, 104)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين ، ص (14) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

تأكد للتدريبين 1A, 1B انظر الهامش

أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A) $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **1B)** $f(x) = x^2 - 6x - 8, g(x) = \sqrt{x}$

تركيب الدوال تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ ، والدالة التربيعية $y = x^2$. لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

إرشادات للدراسة

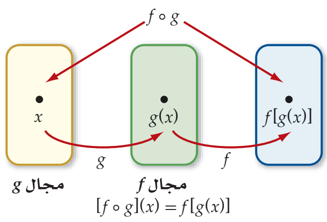
العمليات على الدوال وتركيب دالتين
يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

مفهوم أساسي تركيب دالتين

يعرَف تركيب الدالة f مع الدالة g كما يأتي:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$.

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g ، والتي تكون صورها $g(x)$ موجودة في مجال f .



تُقرأ الدالة $f \circ g$ ، f تركيب g ، أو f بعد g ، حيث تُطبَّق الدالة g أولاً ، ثم الدالة f .

مثال 2 تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x - 4$ ، فأوجد كلًا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x - 4)$	$g(x) = x - 4$
$= (x-4)^2 + 1$	بتعويض $(x-4)$ بدلًا من x في $f(x)$
$= x^2 - 8x + 16 + 1$	بالتبسيط
$= x^2 - 8x + 17$	

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف $g \circ f$
$= g(x^2 + 1)$	$f(x) = x^2 + 1$
$= (x^2 + 1) - 4$	بتعويض (x^2+1) بدلًا من x في $g(x)$
$= x^2 - 3$	بالتبسيط

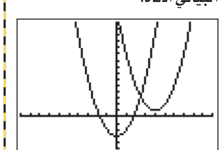
c) $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة المقدار الجبري $[f \circ g](x)$ الذي حصلت عليه في الفرع a عندما $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ بتعويض 2 بدلًا من x في $x^2 - 8x + 17$

تنبيه!

ترتيب الدوال في التركيب
في معظم الأحيان $f \circ g$ و $g \circ f$ دالتان مختلفتان. بمعنى آخر أن تركيب الدوال ليس إبداليًا. لاحظ في مثال 2 أن $[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$ لكن $[g \circ f](x) = x^2 - 3$ وهما دالتان مختلفتان. انظر التمثيل البياني أدناه.



$[-10, 10]$ scl: 1
$[-5, 15]$ scl: 1

تأكد **2A)** $-3x^2 + 16, -9x^2 - 6x + 4, -11$ **2B)** $6x^2 + 24x + 20, 6x^2 - 2, 146$

أوجد $[f \circ g](x)$ ، $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](3)$ للدالتين f ، g في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$ **2B)** $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

العمليات على الدوال

مثال 1 يبيّن كيفية جمع، طرح، ضرب وقسمة دالتين.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم .

مثال إضافي

1 إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$ ، $g(x) = 3x - 4$ ، $h(x) = -2x^2 + 1$ ، فأوجد الدالة، وحدّد مجالها في كل مما يأتي:

a) $(f+g)(x)$
$(f+g)(x) = x^2 + x - 4$
المجال $= (-\infty, \infty)$

b) $(f-h)(x)$
$(f-h)(x) = 3x^2 - 2x - 1$
المجال $= (-\infty, \infty)$

c) $(f \cdot g)(x)$
$(f \cdot g)(x) = 3x^3 - 10x^2 + 8x$
المجال $= (-\infty, \infty)$

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$
$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{-2x^2 + 1}{x^2 - 2x}$
المجال $= \{x | x \neq 0, x \neq 2, x \in \mathbf{R}\}$

تركيب الدوال

المثالان 2 , 3 يُبيّنان كيفية تركيب دالتين وإيجاد ناتج التركيب بوجود قيود على مجالها.

إجابات (تأكد):

1A) $(f+g)(x) = x - 4 + \sqrt{9 - x^2}$, المجال $= [-3, 3]$, $(f-g)(x) = x - 4 - \sqrt{9 - x^2}$, المجال $= [-3, 3]$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{9 - x^2} - 4\sqrt{9 - x^2}$, المجال $= [-3, 3]$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{9 - x^2}}$, المجال $= (-3, 3)$

1B) $(f+g)(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$, المجال $= [0, \infty)$, $(f-g)(x) = x^2 - 6x - 8 - \sqrt{x}$, المجال $= [0, \infty)$ z

$(f \cdot g)(x) = x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$, المجال $= [0, \infty)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 6x - 8}{\sqrt{x}}$, المجال $= (0, \infty)$

بما أن مجال كل من f، g في مثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g، فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

أوجد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالات الآتية:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد $f \circ g$، فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$. لذا، فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. وعليه، يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] \qquad \text{تعريف } f \circ g$$
$$= f(x^2 - 9) \qquad x^2 - 9 = g(x)$$
$$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8} \qquad \text{بتعويض } x^2 - 9 \text{ بدلًا من } x \text{ في } f(x)$$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. لاحظ أن القيود على مجال $f \circ g$ هي القيود نفسها على مجالي f، g. وعليه، يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

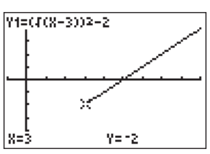
b) $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$، فإننا نجد قيم $g(x)$، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$ ونطرح منها 2. لذا، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$. نجد الآن $[f \circ g](x)$.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] \qquad \text{تعريف } f \circ g$$
$$= f(\sqrt{x - 3}) \qquad g(x) = \sqrt{x - 3}$$
$$= (\sqrt{x - 3})^2 - 2 \qquad \text{بتعويض } \sqrt{x - 3} \text{ بدلًا من } x \text{ في } f(x)$$
$$= x - 3 - 2 = x - 5 \qquad \text{بالتبسيط}$$

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$. لذا، فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$، ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

التحقق استعمل الآلة الحاسبة البيانية لاختبار الإجابة. ادخل الدالة $y = (\sqrt{x - 3})^2 - 2$. يُظهر التمثيل جزءًا من المستقيم $y = x - 5$. استعمل الإمكانات المتاحة في الآلة الحاسبة البيانية TRACE لمساعدتك على تحديد مجال $f \circ g$، والّذي يبدأ عند $x = 3$، ويمتد إلى ∞.



$[-1, 9]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

✓ تأكد

أوجد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالات الآتية:

3A) $f(x) = \sqrt{x + 1}, g(x) = x^2 - 1$

3B) $f(x) = \frac{5}{x}, g(x) = x^2 + x$

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين

من المهم تعرف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي تفكيك الدالة على صورة دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h، فإنك توجد دالتين (f, g مثلًا)، بحيث يكون تركيب الدالتين f, g هو h.

3A) إجابة ممكنة:
$[f \circ g](x) = |x|$،
المجال = $\{x \mid x \in R\}$

3B) إجابة ممكنة:
$[f \circ g](x) = \frac{5}{x^2 + x}$،
المجال = $\{x \mid x \neq 0$ أو $x \neq -1, x \in R\}$

مثالان إضافيان

2 إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 1$، $g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}}$، فأوجد كلاً مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = 2x$

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = \sqrt{2x^2 - \frac{1}{2}}$

c) $[f \circ g](2)$

$[f \circ g](2) = 4$

3 أوجد مجال الدالة $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ في الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$، $g(x) = (x - 1)^2$.

المجال = $\{x \mid x \geq 2, x \leq 0, x \in R\}$،

$[f \circ g](x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

المجال = $\{x \mid x < -1$ أو $x > 1, x \in R\}$،

$[f \circ g](x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1}$

التركيز في المحتوى الرياضي

تركيب الدوال عملية تركيب الدوال بشكل عام ليست إبدالية، لكن هناك بعض أزواج من الدوال يكون فيها $f(g(x)) = g(f(x))$. إذا كان $f(g(x)) = g(f(x)) = x$، فإن كلاً من f و g دالة عكسية للأخرى.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية، بحيث يفكر كل طالب بدالة ، ثم يعمل الطالبان معًا لإيجاد مجموع الدالتين والفرق بينهما، وحاصل ضربهما، وقسمتهما، ثم ناتج تركيبهما.

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية

اطلب إلى الطلبة استعمال الجداول الإلكترونية، واختر أحد أمثلة الدرس، واطلب إليهم أيضاً العمل في مجموعات لعمل قائمة بالمدخلات (المجال)، والمخرجات (المدى) للدالة الأولى ، ثم اطلب إليهم استعمال مدى هذه الدالة مجالاً للدالة الثانية. وعليهم إبراز أية قيود على مجال الدالة المركبة على الجداول الإلكترونية.

مثال 4 تفكيك دالة مركبة

أوجد دالتين f ، g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

لاحظ أن h هو الجذر التربيعي للدالة $x^3 - 4$. لذا، فإننا نختار $g(x) = x^3 - 4$ ، $f(x) = \sqrt{x}$. أي أنه يمكننا كتابة h على صور تركيب للدالتين f ، g.

$$h(x) = \sqrt{x^3 - 4} = \sqrt{g(x)} = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

b) $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

$h(x) = 2x^2 + 20x + 50$ لاحظ أن h قابلة للتحليل

$= 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$ بالتحليل إلى العوامل

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2$ ، $g(x) = x + 5$

$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

✅ تأكد

أوجد دالتين f ، g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

4A) $h(x) = x^2 - 2x + 1$ $g(x) = (x-1), f(x) = x^2$

4B) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$ $g(x) = (x+7), f(x) = \dfrac{1}{x}$

مثال 5 من واقع الحياة استعمال تركيب دالتين

مؤثرات حركية: تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة أبعادها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دوالَّ تعطي مساحة سطح المستطيل A كدالة في عرض المستطيل L ، وعرض المستطيل بعد t sec .

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل، لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة L + 40 . أي أن مساحة سطح المستطيل $A(L) = L(L + 40) = L^2 + 40L$ ، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في 1 sec ، إذن $L(t) = 20 + 15t$ ، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$

b) أوجد $A \circ L$ ، وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$ تعريف $A \circ L$

$= A(20 + 15t)$ $L(t) = 20 + 15t$

$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$ بتعويض $(20 + 15t)$ بدلًا من L في $A(L)$

$= 225t^2 + 1200t + 1200$ بالتبسيط

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة سطح المستطيل كدالة في الزمن t.

c) كم من الوقت نحتاج لتصبح مساحة سطح المستطيل 3 أضعاف مساحة سطحه الأصلية؟

مساحة سطح المستطيل الأصلي 60×20 وتساوي 1200 بكسل. تكون مساحة سطح المستطيل 3 أضعاف مساحة سطحه الأصلية عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. حُلّ المعادلة بالنسبة إلى t لتجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. بما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال $L(t)$، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة سطح المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 sec تقريبًا.

✅ تأكد

5) **أعمال:** أعلن محل تجاري عن تخفيض مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 10 BD من ثمن الحاسوب. للفروع A-C انظر الهامش

A) عبِّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

B) أوجد $[c \circ d](x)$، $[d \circ c](x)$. ماذا تعني كلٌّ منهما؟

C) أيُّ التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ برّر إجابتك.

الربط مع واقع الحياة

مؤثرات حركية

يعمل المصممون في العديد من الأعمال ؛ لتصميم صور متحركة تستعمل في التلفاز ، وألعاب الفيديو. لذا ، يجب أن يكون مصممو الرسوم فنانين ، وأغلبهم يتلقى تدريبًا في كليات متخصصة.

تركيب الدوال

مثال 4 يُبيّن كيفية تفكيك دالة مركبة.

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال تركيب دالتين.

مثالان إضافيان

4 أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة I(x) = x.

a) $h(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

إجابة ممكنة: $g(x) = x + 2$ ، $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $h(x) = 3x^2 - 12x + 12$

إجابة ممكنة: $g(x) = x - 2$ ، $f(x) = 3x^2$

5 **رسوم متحركة:** صمم رسّام صورةً على شكل دائرة طول نصف قطرها 25 بكسل. ثم بدأ بزيادة طول نصف القطر بمقدار 10 بكسل في الثانية.

a) أوجد دالتين تُعطي مساحة سطح الدائرة A كدالة في نصف القطر R ، ونصف القطر بعد t sec.

$R(t) = 25 + 10t, A(R) = \pi R^2$

b) أوجد $A \circ R$، وماذا تُمثّل هذه الدالة؟

$A \circ R = 100\pi t^2 + 500\pi t + 625\pi$، الدالة تُمثّل مساحة سطح الدائرة كدالة في الزمن.

c) ما الوقت اللازم لتصبح مساحة الدائرة أربعة أضعاف مساحة سطحها الأصلي؟ 2.5sec

إجابات (تأكد):

5A) $c(x) = x - 10$ ، $d(x) = 0.85x$

5B) $[c \circ d](x) = 0.85x - 10,$ $[d \circ c](x) = 0.85x - 8.5$

$[c \circ d](x)$ تُمثل سعر الحاسوب بالاستفادة من الخصم أولًا ثم القسيمة، $[d \circ c](x)$ تُمثل سعر الحاسوب بالاستفادة من القسيمة أولًا ثم الخصم.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون الحركيون قسّم الطلبة إلى مجموعات عدد عناصرها من 2 إلى 4. واكتب الأعداد الصحيحة من 10− إلى 10 على بطاقات رقمية منفصلة. واطلب إلى أحدهم القيام بدور استقبال للدالة الأولى في الدالة المركبة ، ويقوم باقي الطلبة بتمرير البطاقات الرقمية إلى موظف الاستقبال الذي يقوم بدوره برفض البطاقة أو قبولها اعتمادًا على كون ر قم البطاقة عنصرًا من مجال الدالة الأولى أو لا. وبعد المراجعة يقوم طالب آخر بدور موظف استقبال للدالة الثانية. يمكن للطلبة تطبيق هذه الطريقة؛ لتحديد مجال الدالة المركبة.

5C) إجابة ممكنة: الاستفادة من الخصم أولًا ثم القسيمة أو $[c \circ d](x)$ يجعل السعر أقل. فمثلاً، إذا أراد طالب شراء حاسوب سعره BD 100 ، فإنه يدفع BD 75 إذا استفاد من الخصم أولاً، ثم القسيمة ، ويدفع BD 76.5 ، إذا استفاد من القسيمة أولًا ثم الخصم.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–32 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع في التمارين 12–21 إذا وجد الطلبة الدالة المركبة بشكل خطأ بسبب التعويض غير الصحيح ، فأكد لهم بأن الدالة الثانية تعوض في الدالة الأولى.

خطأ شائع في التمارين 23–30، ذكّر الطلبة بأنه يوجد عدة حلول للمسألة الواحدة، لمساعدتهم على التحقق من صحة حلولهم، لذا اطلب إليهم إيجاد الدالة المركبة وطريقة إيجادها.

إجابات:

22 a) $\{v \mid 0 \le v < c, v \in R\}$؛ لا يمكن أن تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة الضوء c؛ لأنك تحصل على $\frac{100}{0}$، وهي كمية غير معرفة. كذلك لا تكون v أكبر من c؛ لأنك تحصل على عدد سالب تحت الجذر التربيعي، وهذه كمية غير معرفة ، وأخيرًا لا تكون السرعة أقل من صفر؛ لأن السرعة (speed) لا يمكن أن تكون سالبة.

b)

$$m(10) = \frac{100}{\sqrt{1-\frac{10^2}{(3\times10^8)^2}}} = 100\text{ kg},$$

$$m(10000) = \frac{100}{\sqrt{1-\frac{10000^2}{(3\times10^8)^2}}}$$

$$= 100.0000001\text{ kg},$$

$$m(1000000) = \frac{100}{\sqrt{1-\frac{1000000^2}{(3\times10^8)^2}}}$$

$$= 100.0005556\text{ kg}$$

c) عندما تزداد قيمة v تؤول $m(v)$ إلى ∞.

d) إجابة ممكنة: $m(v) = f(g(v))$، حيث $g(v) = 1 - \frac{v^2}{c^2}$، $f(x) = \frac{100}{\sqrt{x}}$

تدرب وحل المسائل

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين f، g في كلٍّ مما يأتي، و أوجد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1) **للتمارين 1-10 انظر ملحق الإجابات**

1) $f(x) = x^2 + 4$، $g(x) = \sqrt{x}$

2) $f(x) = 8 - x^3$، $g(x) = x - 3$

3) $f(x) = x^2 + 5x + 6$، $g(x) = x + 2$

4) $f(x) = x^2 + x$، $g(x) = 9x$

5) $f(x) = x - 7$، $g(x) = x + 7$

6) $f(x) = \frac{6}{x}$، $g(x) = x^3 + x$

7) $f(x) = \frac{x}{4}$، $g(x) = \frac{3}{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$، $g(x) = 4\sqrt{x}$

9) $f(x) = \sqrt{x+8}$، $g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

10) $f(x) = \sqrt{x+6}$، $g(x) = \sqrt{x} - 4$

11) **فيزياء:** إذا دُفع جسم على سطح الأرض تؤثر فيه قوتان هما قوة دفع الشخص F_p للجسم، وقوة الاحتكاك F_f. إذا كانت W الشغل بالجول، F القوة بالنيوتن، و d مقدار إزاحة الجسم بالمتر، فإن الدالة $W_p = F_p d$ تصف الشغل الناتج عن الدفع، والدالة $W_f = F_f d$ تصف الشغل الناتج عن الاحتكاك. و تكون الزيادة في طاقة حركة الجسم مساوية للفرق بين الشغل الذي يبذله الشخص W_p، والشغل الناتج عن الاحتكاك W_f . أوجد الشغل النهائي الناتج من دفع شخص لصندوق مسافة 50 m بقوة مقدارها 95 N واحتكاك قوته 55 N. (مثال 1) **200 N.m**

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](6)$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 2) **للتمارين 12-15 انظر ملحق الإجابات**

12) $f(x) = 8 - x^2$، $g(x) = x^2 + x + 1$

13) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$، $g(x) = -5x + 6$

14) $f(x) = x^2 - 16$، $g(x) = x^2 + 7x + 11$

15) $f(x) = 2 + x^4$، $g(x) = -x^2$

أوجد مجال $f \circ g$ ، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 3) **للتمارين 16-21 انظر ملحق الإجابات**

16) $f(x) = \frac{1}{x+1}$، $g(x) = x^2 - 4$

17) $f(x) = \frac{2}{x-3}$، $g(x) = x^2 + 6$

18) $f(x) = \sqrt{x+4}$، $g(x) = x^2 - 4$

19) $f(x) = \frac{5}{x}$، $g(x) = \sqrt{6-x}$

20) $f(x) = -\frac{4}{x}$، $g(x) = \sqrt{x+8}$

21) $f(x) = \sqrt{x+5}$، $g(x) = x^2 + 4x - 1$

22) **نسبية:** في النظرية النسبية $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر لكل ثانية، و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية، وكتلته الأصلية 100 kg . (مثال 4) **للفروع a-d انظر الهامش**

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد $m(10)$, $m(10000)$, $m(1000000)$.

c) صف سلوك الدالة $m(v)$ عندما تصبح v كبيرة جدًّا.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد دالتين f ، g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، على ألا تكون أيّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كل ممايأتي: (مثال 4) **للتمارين 23-30 انظر ملحق الإجابات**

23) $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

24) $h(x) = \frac{6}{x+5} - 8$

25) $h(x) = |4x + 8| - 9$

26) $h(x) = [\![-3(x-9)]\!]$

27) $h(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

28) $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

29) $h(x) = \frac{8}{(x-5)^2}$

30) $h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

31) **ميكانيكا الكم:** يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته m كيلوجرام، يتحرك بسرعة v متر لكل ثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$ ، حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$. **للفرعين b, d انظر ملحق الإجابات**

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25 kg بدلالة سرعته. $f(v) = \frac{h}{25v}$

b) هل يوجد قيود على مجال الدالة؟ برِّر إجابتك.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 m/sec ، فأوجد طول الموجة بدلالة h . $\lambda = \frac{h}{200}$

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

32) **وظائف:** يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات، ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على BD 300000 . افترض $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$ ، حيث x قيمة المبيعات. (مثال 5)

a) إذا كانت x تزيد على BD 300000 ، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أو بالدالة $h[f(x)]$؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته BD 450000 في تلك السنة. **BD 6000**

أوجد دالتين f ، g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ لكلٍّ مما يأتي، على ألا تكون أي من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$. **للتمارين 33-36 انظر الهامش**

33) $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

34) $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

35) $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

36) $h(x) = \frac{x^2-4}{x} + \frac{3x-5}{5x}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	1–64، 69، 71–80
ضمن المتوسط	33–45 فردي، 46–58 زوجي ، 61–64، 69، 71–80
فوق المتوسط	33–80

32a) $h[f(x)]$، تحسب العمولة بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

33) $f(x) = x - \frac{4}{x^2+1}$، $g(x) = \sqrt{x-1}$

34) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9x}{7}$، $g(x) = -7x$

35) $f(x) = \frac{x-4}{2x-9} + \sqrt{\frac{4}{x-4}}$،
$g(x) = x + 4$

36) $f(x) = \frac{x^2-4x}{x-2} + \frac{3x-11}{5x-10}$،
$g(x) = x + 2$

أوجد $f(x+1)$, $f(-6)$, $f(0.5)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك:

للتمارين 37-39 انظر الهامش

37) $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6, g(x) = x + 4$

38) $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}, g(x) = 2x$

39) $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ لكل مما يأتي:

40) $f(x) = x + 8$
$g(x) = x^2 - 6$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

41) $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 - 3$
$h(x) = \frac{1}{x}$

انظر ملحق الإجابات

41) $[f \circ g \circ h](x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2}$

42) إذا كانت $f(x) = x + 2$ ، فأوجد $g(x)$ في كل مما يأتي:

a) $(f+g)(x) = x^2 + x + 6$ $\quad g(x) = x^2 + 4$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$ $\quad g(x) = 4x + 8$

43) إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $[f \circ g](x) = |6x|$ $\quad g(x) = 9x^2$

b) $[g \circ f](x) = 200x + 25$ $\quad g(x) = 50x^2 + 25$

44) إذا كان $f(x) = 4x^2$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $[f \cdot g](x) = x$ $\quad g(x) = \frac{1}{4x}$

b) $[f \cdot g](x) = 4x$ $\quad g(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

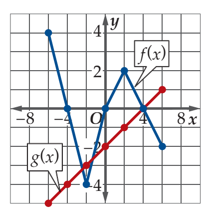
45) **استثمار:** تقوم شركة باستثمار أموال زبائنها بالتجارة، بحيث يتم حساب الأرباح كل 3 شهور. ويدخل المبلغ الجديد كرأس مال في الشهور الثلاث التالية وهكذا. إذا كان x رأس المال الأصلي، فإن رأس المال المتوقّع بعد مرور 3 أشهر هو $I(x) = 1.016x$.

a) أوجد $[I \circ I](x)$, $[I \circ I \circ I](x)$, $[I \circ I \circ I \circ I](x)$.

b) ماذا يمثّل تركيب الدوال؟ للفرعين a, b انظر الهامش

c) ما النسبة المئوية المتوقّعة للربح السنوي؟ 6.6% تقريبًا

باستعمال منحنيي الدالتين f ، g الممثلين في الشكل أدناه، أوجد :



46) $(f+g)(2)$ $\quad 1$

47) $(f-g)(-6)$ $\quad 9$

48) $(f \cdot g)(4)$ $\quad 0$

49) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ $\quad \frac{4}{3}$

50) $(f \circ g)(-4)$ $\quad 0$

51) $(g \circ f)(6)$ $\quad -3$

للتمارين 52-55 انظر الهامش

أوجد دوال f, g, h ، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

52) $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

53) $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

54) $a(x) = \frac{3}{(x-3)^2 + 4}$

55) $a(x) = \frac{4}{(\sqrt{x} + 3)^2 + 1}$

أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد القيود الإضافية على مجال دالة التركيب:

للتمارين 56-59 انظر ملحق الإجابات

56) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
$g(x) = \sqrt{x+4} + 3$

57) $f(x) = \sqrt{x+6}$
$g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

58) $f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

59) $f(x) = \frac{6}{2x+1}$
$g(x) = \frac{4}{4-x}$

60) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين سوف تستقصي معكوس الدالة. انظر ملحق الإجابات

a) **جبري:** أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول الآتي:

$f(x)$	$g(x)$
$x + 3$	$x - 3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

b) **تعبير لفظي:** صِفّ العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

c) **تمثيل بياني:** مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم محور الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.

d) **تعبير لفظي:** خمّن معادلة محور الانعكاس.

e) **تحليل:** ماالدالة الأم التي تساوي كلًّا من $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$؟

f) **تحليل:** أوجد $g(x)$ ، بحيث يكون: $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(x) = x - 6$ $\quad g(x) = x + 6$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$ $\quad g(x) = 3x$

c) $f(x) = x^5$ $\quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

d) $f(x) = 2x - 3$ $\quad g(x) = \frac{x+3}{2}$

إجابات:

37) $f(0.5) = -0.75, f(-6) = 22,$
$f(x+1) = x^2 + 4x + 1$

38) $f(0.5) = 8.7, f(-6) = 11.6,$
$f(x+1) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x+1} - 2x - \frac{7}{3}$

39) $f(0.5) = 2.4, f(-6) = 650.9,$
$f(x+1)$
$= \sqrt{-x} + 18x^2 + 36x + 18 - \frac{\sqrt{2}}{x+1}$

45a) $[I \circ I](x) \approx 1.0323x,$
$[I \circ I \circ I](x) \approx 1.0488x,$
$[I \circ I \circ I \circ I](x) \approx 1.0656x$

45b) تُمثّل الدوال المركبة ربح الشخص بعد 6 أشهر، 9 أشهر، وسنة واحدة.

52) $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x} + 4,$
$h(x) = x - 7$

53) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 + 8,$
$h(x) = x - 5$

54) $f(x) = \frac{3}{x}, g(x) = x^2 + 4,$
$h(x) = x - 3$

55) $f(x) = \frac{4}{x+1}, g(x) = x^2,$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلبة استعمال المكتبة، أو الإنترنت؛ لإيجاد أمثلة تطبيقية على استعمال العمليات على الدوال وتركيبها. بعد تحديد الأمثلة، عليهم تطوير أمثلة من واقع الحياة خاصة بهم على أن يقوم كل منهم بتكوّين مثال باستعمال إحدى العمليات ، ومثال آخر باستعمال تركيب الدوال.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة الكتابة حول ما تعلموه في الدرس 5 – 2 عن الدوال الأم والتحويلات الهندسية عليها، وكيف ساعدتهم هذه المعلومات في العمليات على الدوال.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 6–2، 5–2، بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 2 .

إجابات:

65) إجابة ممكنة: $f(x) = \sqrt{x}$.

66) إجابة ممكنة: $f(x) = x + 6$

67) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{1}{x}$

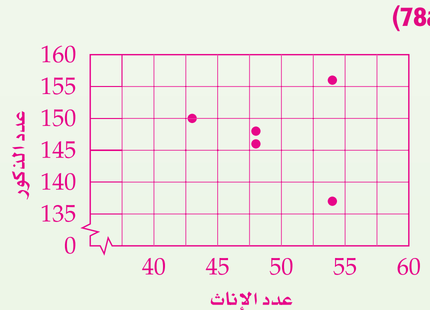
68) إجابة ممكنة: $f(x) = |x|$

72) $(0, 4)$ عظمى محلية، $(1, 3)$ صغرى محلية.

73) $(1.29, 1.3)$ عظمى محلية، $(-1.29, -7.3)$ صغرى محلية.

74) $(-0.75, -2.11)$ صغرى مطلقة.

78a)



78b) المدى = $\{137, 146, 148, 150, 156\}$
المجال = $\{43, 48, 54\}$

78c) لا، ترتبط القيمتين 48 وَ 54 من المجال بقيمتين من المدى.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: في كلٍّ مما يأتي، حدّد فيما إذا كانت الدالة $(f \circ g)(x)$ زوجية، أو فردية، أو غير ذلك، أو أن المعلومات غير كافية للحكم.

61) f, g دالتان فرديتان. **فردية**

62) f, g دالتان زوجيتان. **زوجية**

63) f زوجية، g فردية. **فردية**

64) f فردية، g زوجية. **زوجية**

تحدٍّ: في كل مما يأتي، أوجد دالة f لا تساوي الدالة $I(x) = x$ بحيث تحقق الشرط المعطى. **للتمارين 65-68 انظر الهامش**

65) $(f \cdot f)(x) = x$

66) $\left(\frac{f}{f}\right)(x) = x$

67) $[f \circ f](x) = x$

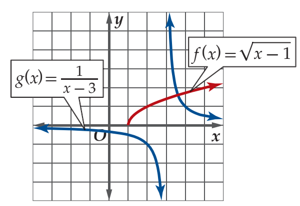
68) $[f \circ f \circ f](x) = x$

للتمارين 69-71 انظر ملحق الإجابات

69) **تبرير:** حدّد فيما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو ليست صحيحة أبدًا. ووضّح إجابتك.
"إذا كانت f دالة جذر تربيعي، و g دالة تربيعية، فإن $f \circ g$ دالة خطية."

70) **تحدٍّ:** أوجد مجال الدالة $[f \circ g \circ h](x)$ إذا كانت:
$f(x) = \frac{1}{x-2}$ ، $g(x) = \sqrt{x+1}$ ، $h(x) = \frac{4}{x}$

71) **اكتب:** كيف تجد مجال $[f \circ g](x)$ باستعمال الشكل أدناه.



مراجعة تراكمية

للتمارين 72-74 انظر الهامش

أوجد مقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة القيم القصوى المحلية، والمطلقة لكلٍّ من الدوال الآتية، ثم عيِّن قيم x التي تقع عندها هذه القيم (الدرس 4-2)

72) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

73) $g(x) = -x^3 + 5x - 3$

74) $f(x) = x^4 + x^3 - 2$

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة من الدوال الآتية في الفترة المعطاة: (الدرس 3-2)

75) $g(x) = 2x^5 - 2x^4 - 4x^2 - 1, [-1, 3]$ **1.73**

76) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 4}, [-3, 3]$ **−1.73 , 1.73**

77) $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 3x}, [1, 5]$ **2.41**

78) **علاقة:** في إحصائية أُجريت لعدد الموظفين من الجنسين في إحدى الشركات لعدة أعوام متتالية، كانت نتائجها: (الدرس 1-2)

السنة	2004	2005	2006	2007	2008
عدد الإناث (x)	48	54	54	48	43
عدد الذكور (y)	146	156	137	148	150

a) مثّل البيانات التي تربط عدد الإناث بعدد الذكور والموجودة في الجدول بيانيًّا. **للفروع a-c انظر الهامش**

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.

c) هل تمثّل هذه العلاقة دالة؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار معياري

79) إذا كانت $h(x) = 2(x-5)^2$ ، $g(x) = x^2 + 9x + 21$ ، فإن $h[g(x)]$ تساوي: **B**

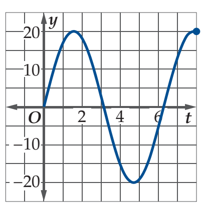
A $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$

B $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

C $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$

D $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

80) **سؤال ذو إجابة مطوّلة:** يمثّل الشكل المجاور منحنى التغيّر في درجة حرارة مادة بالنسبة للزمن t، حيث $0 \le t \le 8$.



a) يمثّل المنحنى دالة. وضح السبب.

b) اكتب مجال الدالة ومداها.

c) إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية 25°C، فأوجد قيمة تقريبية لدرجة حرارة المادة عند $t = 7$.

d) ادرس تماثل الدالة، وعيِّن أصفارها، ثم حدِّد فيما إذا كانت الدالة زوجية أو فردية، أو غير ذلك.

e) هل الدالة متصلة عند $t = 2$؟ وضِّح ذلك.

f) حدِّد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، والفترات التي تكون فيها متناقصة.

g) أوجد قيمة تقريبية لمعدل التغيّر في الفترة [2, 5].

h) ما أهمية الإجابة التي حصلت عليها في الفقرتين f، g في هذه المسألة؟ **للفروع a-h انظر ملحق الإجابات**

تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة استعمال دالة واحدة؛ لإيجاد تركيب الدالة مع نفسها حيث تُسمى هذه العملية التكرار. وإذا كانت $f(x)$ دالة، و x_0 قيمة ابتدائية، فعندئذٍ تُسمَّى $f(x_0) = x_1$ التكرار الأول، وتُسمى $f(f(x_0)) = f(x_1) = x_2$ التكرار الثاني وهكذا، اطلب إلى كل طالب إيجاد التكرار الثالث لدالته.

2-7 العلاقات والدوال العكسية
Inverse Relations and Functions

فيما سبق

درست إيجاد تركيب دالتين.

والآن

- أستعملُ التمثيلات البيانية للدوال ؛ لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تمثّل دالة.
- أجِدُ الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا.

المفردات الأساسية

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

دالة واحد لواحد
one-to-one function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول حديقة ألعاب بسعرها، بينما يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	6
السعر (BD)	0.5	1	1.5	2	2.5

الجدول B

السعر (BD)	0.5	1	1.5	2	2.5
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

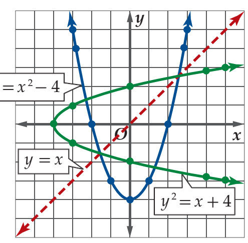
الدالة العكسية العلاقة في الجدول A تمثِّل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B . يقال: إن العلاقة A **علاقة عكسية** للعلاقة B إذا وفقط إذا كان (b, a) موجودًا في إحدى العلاقتين، فإن (a, b) موجود في الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع.

فمثلًا :

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$y^2 = x + 4$ أو $x = y^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات، ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالًا. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سُميت **الدالة العكسية لـ f**، ويُرمز لها بالرمز f^{-1}. لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسيّ، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار، فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

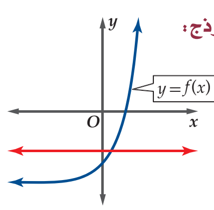
يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

مفهوم أساسي **اختبار الخط الأفقي**

التعبير اللفظي يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل مستقيم أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال بما أنه لا يوجد مستقيم يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} لها وجود.

نموذج:



2-7 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-7

إيجاد تركيب دالتين .

الدرس 2-7

استعمال التمثيلات البيانية للدوال؛ لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تُمثّل دالة.
إيجاد الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

ما بعد الدرس 2-7

تحليل التَمثيلات البيانية لدوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل :

- ما الدالة التي تعطي مساحة المربع؟ $A(s) = s^2$
- إذا كان طول ضلع مربع 5 وحدات، فأوجد مساحة سطحه. 25 وحدة مربعة.
- اكتب دالة؛ لحساب طول ضلع المربع. إذا عُلمت مساحة سطحه، ثم أوجد طول ضلع مربع مساحة سطحه 100 وحدة مربعة. $S = \sqrt{A}$, 10
- اكتب دالة لحساب المسافة. إذا كانت السرعة ثابتة والزمن متغيراً ، ثم اكتب دالة لإيجاد الزمن، إذا كانت المسافة متغيرة والسرعة ثابتة. المسافة: $d = f(t) = rt$ ، الزمن: $t = f(d) = \frac{d}{r}$

مصادر الدرس 2-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (109)	• تنويع التعليم ، ص (109)	• تنويع التعليم ، ص (112)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (15) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الدوال العكسية

مثال 1 يُبيّن كيفية التأكد من وجود معكوس لعلاقة ما بيانياً.

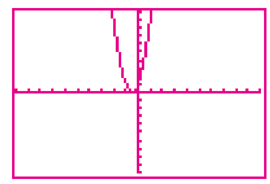
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي؛ لتحديد إن كانت الدالة العكسية لها وجود أم لا؟

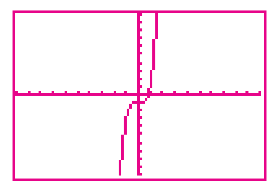
a) $y = 4x^2 + 4x + 1$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

لا

b) $f(x) = x^5 + x^3 - 1$



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

نعم

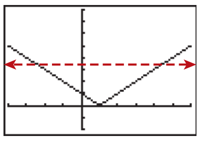
تنبيه!

اختبار الخط الأفقي عند استعمال الآلة الحاسبة البيانية اختبر بدقة المواقع التي يفشل فيها اختبار الخط الأفقي باستعمال Zoom In, Zoom Out، أو اضبط الشاشة للتأكد.

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانيّة، ثم طبق اختبار الخط الأفقي؛ لتحديد إن كانت الدالة العكسية لها وجود أو لا .

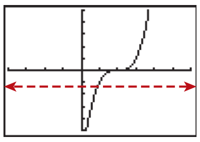
a) $f(x) = |x - 1|$



$[-4, 6]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه ، فإن f^{-1} ليس لها وجود.

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



$[-4, 6]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

يوضّح التمثيل البياني للدالة g في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} لها وجود.

تأكد

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانيّة، ثم طبق اختبار الخط الأفقي؛ لتحديد إن كانت الدالة العكسية لها وجود أو لا .

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$ نعم

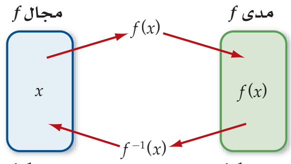
1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$ لا

إيجاد الدالة العكسية إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة واحد لواحد**؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y ، ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x.

إذا كانت الدالة واحدًا لواحد، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ، ومدى f مساويًا لمجال f^{-1} .

قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية يجب ألّا يحدث لُبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا ، فإننا نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي إيجاد الدالة العكسية

خطوة 1 تحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة، بالتحقق من أنها واحد لواحد بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

خطوة 2 ضع y مكان $f(x)$ ، ثم بدّل موقعي x ، y .

خطوة 3 أوجد y بدلالة x ، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

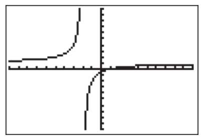
خطوة 4 اذكر أية شروط على مجال f^{-1} ، وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1} ، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1} .

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f . لذا، عليك دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1} .

مثـال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن مستعملًا التمثيل البياني أدناه، وحدِّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب ليس لها وجود.

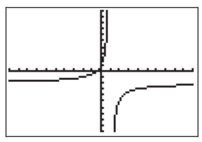
a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقّق اختبار الخط الأفقي. لذا، فإن f دالة واحد لواحد. وعليه، فإنها قابلة للعكس. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. أوجد f^{-1} .

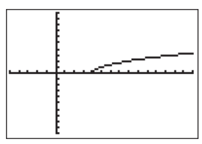
الدالة الأصلية	$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$
بتعويض y بدلًا من $f(x)$	$y = \dfrac{x-1}{x+2}$
بالتبديل بين x ، y	$x = \dfrac{y-1}{y+2}$
بضرب كلا الطرفين في $(y+2)$ ، ثم تطبيق خاصية التوزيع	$xy + 2x = y - 1$
بوضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد	$xy - y = -2x - 1$
خاصية التوزيع	$y(x-1) = -2x - 1$
بالحَل بالنسبة لـ y	$y = \dfrac{-2x-1}{x-1}$
بتعويض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y، لاحظ أن $x \neq 1$	$f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يظهر من التمثيل البياني أن مجال الدالة f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ، ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان مدى و مجال f^{-1} على الترتيب. لذا، لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1} .

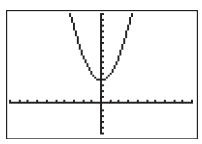
b) $f(x) = \sqrt{x-4}$



[−5, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقّق اختبار الخط الأفقي. لذا ، فإن الدالة f واحد لواحد. وعليه، فإنها قابلة للعكس. مجال الدالة f هو $[4, \infty)$ ، ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1} .

الدالة الأصلية	$f(x) = \sqrt{x-4}$
بتعويض y بدلًا من $f(x)$	$y = \sqrt{x-4}$
بالتبديل بين x ، y	$x = \sqrt{y-4}$
بتربيع كلا الطرفين	$x^2 = y - 4$
بالحَل بالنسبة إلى y	$y = x^2 + 4$
بتعويض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y	$f^{-1}(x) = x^2 + 4$



[−10, 10] scl: 1 by [−5, 15] scl: 1

يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$ ، ومداها $[4, \infty)$. وعليه، فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًا لمدى f وهو $[0, \infty)$. والآن يصبح مجال f ومداها مساويين لمدى f^{-1} ومجالها على الترتيب. لذا، فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ، ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.

✓ تأكد

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدِّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب ليس لها وجود.

2A) $f(x) = -16 + x^3$ $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$

2B) $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$ $\quad f^{-1}(x) = -\dfrac{7}{x-1}, x \neq 1$

2C) $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$ $\quad$ ليس لها وجود

قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس
يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية لها وجود دالة قابلة للعكس.

إيجاد الدوال العكسية

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد الدالة العكسية جبريًا.

مثال إضافي

2 في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب ليس لها وجود.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ ، f^{-1} لها وجود ، $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

b) $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ ، f^{-1} لها وجود، ومجالها $[0, \infty)$، $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{4} + 1$

التعليم باستعمال التقنيات

الآلة الحاسبة البيانية
قسِّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، بحيث تستعمل كل مجموعة آلة حاسبة بيانية واحدة، على أن يقوم أحدهما باختيار دالة لها معكوس ويقوم الثاني بتَمثيلها، فإذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي. يقوم الطالب الأول بإيجاد الدالة العكسية جبريًا، ويقوم الثاني بتَمثيلها؛ للتحقق من أنها هي ومعكوسها متماثلان حول المستقيم $y = x$. اطلب إلى المجموعات أن تتبادل الأدوار فيما بينها، ويتعين على كل منها أن تجد أربع دوال لكلّ منها معكوس.

يلغي عمل الدالة العكسية f^{-1} عمل الدالة f والعكس صحيح. لذا ، فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي **تركيب الدوال ودوالها العكسية**

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} ، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$

لاحظ أن تركيب الدالتين f و f^{-1} هو الدالة المحايدة . وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

مثـال 3 إثبات أن كل دالة تمثّل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًّا أن كلًا من $f(x) = \frac{6}{x-4}$ ، $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

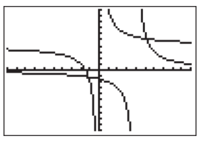
أثبت أن $f[g(x)] = x$ ، $g[f(x)] = x$.

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right) \qquad f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right)$$

$$= \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 \qquad = \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4}$$

$$= x - 4 + 4 = x \qquad = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ ، فإن كلًّا من $f(x), g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. يؤكّد التمثيل البياني المجاور هذا الحل، حيث ينتجُ منحنى $f(x)$ من انعكاس منحنى $g(x)$ حول المحور $y = x$ ، وبالمثل بالنسبة للدالة g .



[−15, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تأكد

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثّل دالة عكسية للأخرى في كلّ مما يأتي:

(3A $f(x) = 18 - 3x$ ، $g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

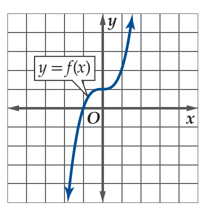
(3B $f(x) = x^2 + 10, x \geq 0$ ، $g(x) = \sqrt{x - 10}$

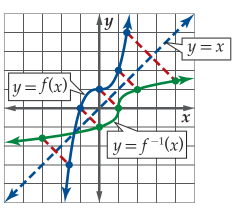
من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًّا لمعظم دوال الواحد لواحد، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

مثـال 4 إيجاد الدالة العكسية بيانيًا

استعمل التمثيل البياني للدالة f في الشكل أدناه؛ لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثّل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيِّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة f حول المستقيم $y = x$.





(3A

$f(g(x)) = 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right)$

$= 18 - 18 + x$

$= x$,

$g(f(x)) = 6 - \frac{18 - 3x}{3}$

$= 6 - 6 + x$

$= x$

(3B

$f(g(x)) = \left(\sqrt{x - 10}\right)^2 + 10$

$= x - 10 + 10$

$= x$,

$g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 10 - 10}$

$= x$

إرشادات للدراسة

الدالة العكسية والقيم القصوى يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا، وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. إذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية، فإن الدالة لا تحقق اختبار الخط الأفقي، وعليه فلا تكون دالة واحد لواحد.

إيجاد الدوال العكسية

مثال 3 يُبيِّن كيفية التحقق من أن دالتين متعاكستان.

مثال 4 يُبيِّن كيفية إيجاد معكوس دالة هندسيًا.

مثالان إضافيان

3 أثبت جبريًّا أن كلًّا من $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ ، $g(x) = \frac{3}{2}(x - 2)$ دالة عكسية للأخرى.

$f(g(x)) = f\left(\frac{3}{2}(x - 2)\right)$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}(x - 2)\right) + 2)$

$= x - 2 + 2$

$= x$

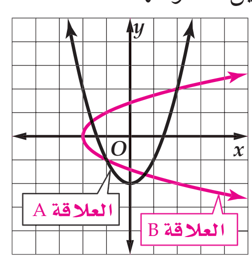
$g(f(x)) = g\left(\frac{2}{3}x + 2\right)$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x + 2 - 2\right)$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right)$

$= x$

4 استعمل التمثيل البياني للعلاقة A لتمثيل معكوسها.



التركيز في المحتوى الرياضي

اختبار الخط الأفقي التَّمثيل البياني للدالة العكسية هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$. وبما أن اختبار الخط الرأسي يختبر إن كانت العلاقة دالة أو لا، فيمكن إيجاد صورة الخط الرأسي بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. وصورة ناتج هذا الانعكاس هو خط أفقي يمكن استعماله في اختبار إن كان للدالة معكوس.

إيجاد الدوال العكسية

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال الدوال العكسية.

مثال إضافي

5 **صناعة:** تتكون التكلفة الكلية لصناعة نوع من السيارات من تكلفة ثابتة مقدارها BD 9600 ، وتكلفة متغيرة مقدارها BD 80 عن كلٍّ سيارة يتم صنعها. أي أن التكلفة الكلية $f(x)$ لصناعة x من السيارات يُعبر عنها بالدالة: $f(x) = 9600 + 80x$.

a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ لها وجود، ثم أوجدها.
تحقق الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي. $f^{-1}(x) = \frac{x - 9600}{80}$

b) ماذا تُمثّل كلٌّ من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟ تُمثل x التكلفة الكلية، بينما تُمثل $f^{-1}(x)$ عدد السيارات.

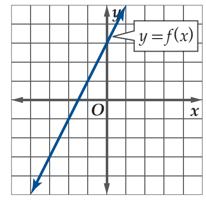
c) ما القيود المفروضة على مجال $f(x)$، ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضح إجابتك.
يجب أن يكون مجال $f(x)$ الأعداد الصحيحة غير السالبة. ومجال $f^{-1}(x)$ من مضاعفات 80 وأكبر من 9600.

d) أوجد عدد السيارات إذا كانت التكلفة الكلية BD 21600.
150 سيارة.

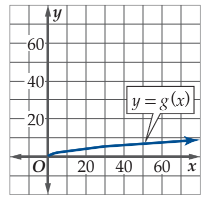
✓ **تأكد** للتدريبين 4A, 4B انظر الهامش

استعمل التمثيل البياني أدناه لكل دالة؛ لتمثيل الدالة العكسية.

4A)

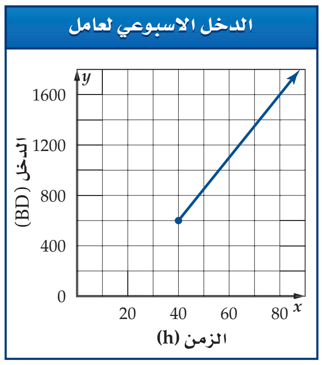


4B)



مثال 5 من واقع الحياة — استعمال الدالة العكسية

أعمال يتقاضى شخص BD 1.6 عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات من 40 h إلى 105 h، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره BD 2.4 عن كل ساعة إضافية تزيد على 40 h عمل. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بـ $f(x) = 64 + 2.4(x - 40)$.



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ لها وجود ، ثم أوجدها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 64 + 2.4x - 96$ أو $f(x) = 2.4x - 32$. يحقق منحنى الدالة f اختبار الخط الأفقي. لذا، فإن $f(x)$ دالة واحد لواحد. وعليه، فتكون دالتها العكسية لها وجود. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 2.4x - 32$ الدالة الأصلية

$y = 2.4x - 32$ بتعويض y بدلًا من $f(x)$

$x = 2.4y - 32$ بالتبديل بين x، y

$x + 32 = 2.4y$ بإضافة 32 إلى كلا الطرفين

$y = \frac{x + 32}{2.4}$ بالحل بالنسبة إلى y

$f^{-1}(x) = \frac{x + 32}{2.4}$ بتعويض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

b) ماذا تمثّل كل من x، $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالدينار، و تمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 h . والحد الأعلى 105 h . لذا، فإن مجال $f(x)$ هو [40, 105].
وبما أن $f(40) = 64$ ، $f(105) = 220$، فإن مدى $f(x)$ هو [64, 220] ، وهو مجال $f^{-1}(x)$.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في الأسبوع الأخير إذا كان دخله BD 76.

$f^{-1}(76) = \frac{76 + 32}{2.4} = 45$ ، أي أن الشخص عمل 45 h في الأسبوع الأخير.

✓ **تأكد**

5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه، إذا خصّص منها BD 180 شهريًّا لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بـ $f(x) = 0.2(0.65x - 180)$.

A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ لها وجود ، ثم أوجدها.
B) ماذا تمثّل كل من x، $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟
C) حدِّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$، إن وجدت. برِّر إجابتك.
D) إذا وفّر أحمد BD 50 في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

5A) يحقق منحنى الدالة اختبار الخط الأفقي. لذا، فإن $f(x)$ دالة واحد لواحد، وبذلك تكون دالتها العكسية موجودة، $f^{-1}(x) = \frac{x + 36}{0.13}$.

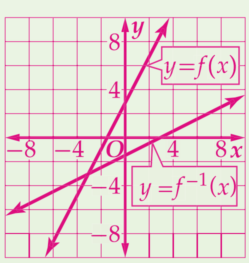
5B) في الدالة العكسية تمثل x مقدار التوفير الشهري، $f^{-1}(x)$ الراتب الشهري.

5C) $x \ge 276.9$

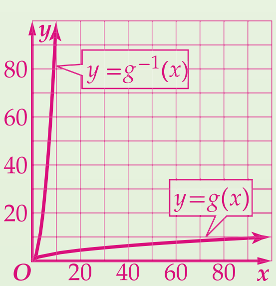
5D) BD 661.538 تقريبًا

إجابات (تأكد):

4A)



4B)



تنويع التعليم

دون — ضمن

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة تمثيل الدالة المحايدة $f(x) = x$ على مستوى إحداثي كبير مستعملين ألوانًا واضحة، ثم اطلب إليهم تعيين نقاط من الدالة $f(x) = x^3$ عند قيم x الآتية: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. ومن ثم تمثيل الدالة العكسية بإيجاد هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. واطلب إليهم عمل جدول بقيم الدالتين، واستعماله؛ لتفسير سبب استبدال المتغيرين x ، y بالخطوة الأولى في الدالة الأصلية عند إيجاد الدالة العكسية جبريًّا.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–32 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع قد يخطئ بعض الطلبة في إيجاد $f^{-1}(x)$ باعتبارها $\frac{1}{f(x)}$. لذا ذكّرهم بأن f^{-1} رمز وليس متغيرًا مرفوعًا للأس -1، بمعنى آخر، f^{-1} هي معكوس الدالة f في حين أن $\frac{1}{f}$ مقلوب f.

خطأ شائع في المسائل 20–26 ساعد الطلبة على استعمال التعويض وإجراء عمليات الاختصار بتذكيرهم باستعمال الأقواس على نحوٍ صحيح عند التعويض.

إجابات:

9) ليس لها وجود

10) ليس لها وجود

11) $f^{-1}(x) = x^2 - 8, x \geq 0$

12) ليس لها وجود

13) ليس لها وجود

14) $g^{-1}(x) = \frac{6}{1-x}, x \neq 1$

15) $f^{-1}(x) = 8 - \frac{36}{x^2}, x > 0$

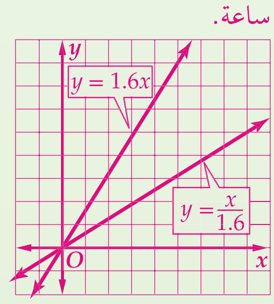
16) $g^{-1}(x) = -3 + \frac{49}{x^2}, x > 0$

17) $h^{-1}(x) = \frac{5x+4}{3x-1}, x \neq \frac{1}{3}$

18) ليس لها وجود

19a) $y = \frac{x}{1.6}$، y السرعة بالميل لكل ساعة، x السرعة بالكيلو متر لكل ساعة.

19b)



تدرب وحل المسائل

مثّل كلًا من الدوال الآتية بيانيًا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي؛ لتحديد إن كانت الدالة العكسية لها وجود أو لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$ لا

2) $y = x^2 - 16x + 64$ لا

3) $y = 3x - 8$ نعم

4) $y = 4$ لا

5) $y = \sqrt{x+4}$ نعم

6) $y = -4x^2 + 8$ لا

7) $y = \frac{8}{x+2}$ نعم

8) $y = \frac{1}{4}x^3$ نعم

للتمارين 9-18 انظر الهامش

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، وحدِّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب ليس لها وجود. (مثال 2)

9) $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$

10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$

11) $f(x) = \sqrt{x+8}$

12) $f(x) = \sqrt{6-x^2}$

13) $f(x) = |x-6|$

14) $g(x) = \frac{x-6}{x}$

15) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8-x}}$

16) $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$

17) $h(x) = \frac{x+4}{3x-5}$

18) $g(x) = |x+1| + |x-4|$

19) **سرعة:** تُعطى سرعة الجسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$، حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. (مثال 2)

a) أوجد الدالة العكسية لـ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

b) مَثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.

للفرعين a, b انظر الهامش

أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي: (مثال 3) للتمارين 20-26 انظر ملحق الإجابات

20) $f(x) = 4x + 9$ ، $g(x) = \frac{x-9}{4}$

21) $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$ ، $g(x) = \sqrt{\frac{5-x}{3}}$

22) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$ ، $g(x) = \sqrt{4x - 32}$

23) $f(x) = (x+8)^{\frac{3}{2}}$ ، $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$

24) $f(x) = 2x^3 - 6$ ، $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$

25) $f(x) = \frac{x-6}{x+2}$ ، $g(x) = \frac{2x+6}{1-x}$

26) $g(x) = \sqrt{x+8} - 4$ ، $f(x) = x^2 + 8x + 8, x \geq -4$

27) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بـ $f(x) = 0.5mx^2$، حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام، و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3) للفروع a-c انظر ملحق الإجابات

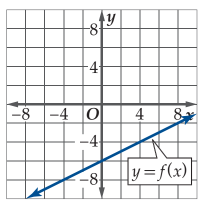
a) أوجد الدالة العكسية لـ $f(x)$. وماذا يعني كل متغير فيها؟

b) أثبت أن كلًّا من الدالتين f، والدالة التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.

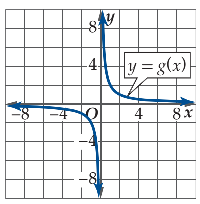
c) مَثّل كلًّا من $f(x)$ ، $f^{-1}(x)$ على الشاشة نفسها من الآلة الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم 1 kg .

استعمل التمثيل البياني أدناه لكل دالة؛ لتمثيل الدالة العكسية لها: (مثال 4) للتمارين 28-31 انظر ملحق الإجابات

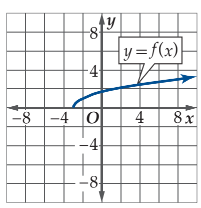
28)



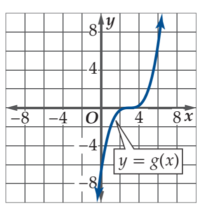
29)



30)



31)



32) **وظائف:** يعمل ياسين في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 42 BD في الأسبوع، ويتقاضى كذلك عمولة مقدارها 10% من قيمة المبيعات. أي أن دخله الأسبوعي يُعطى بـ $f(x) = 42 + 0.1x$. (مثال 5) للفروع a-d انظر ملحق الإجابات

a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ لها وجود ، ثم أوجدها.

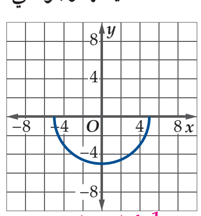
b) ماذا تمثّل كل من x ، $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

c) حدِّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ، إن وجدت. برّر إجابتك.

d) أوجد قيمة مبيعات ياسين في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 72 BD.

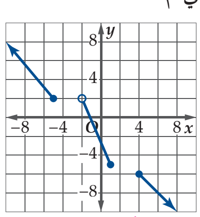
هل الدالة العكسية لها وجود في كلٍّ مما يأتي أم لا ؟

33)



f^{-1} ليس لها وجود

34)

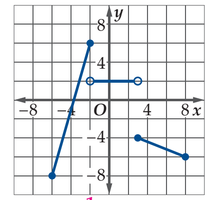


f^{-1} ليس لها وجود

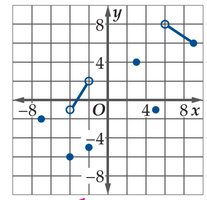
تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	53 –55 ، 57–65
ضمن المتوسط	33–39 فردي، 41–45 فردي، 46، 47، 49 ، 50–55 ، 57–65
فوق المتوسط	33–65

35) 

ليس لها وجود f^{-1}

36) 

لها وجود f^{-1}

كوِّن جدولاً للدالة f^{-1}، في كلٍّ مما يأتي، إن كانت لها وجود، وإن لم تكن كذلك فاذكر السبب. للتمارين 37-39 انظر الهامش

37)

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

38)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

39) **درجة الحرارة:** تُستعمل $f(x)=\frac{9}{5}x+32$؛ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل $k(x)=\frac{5}{9}(x+459.67)$؛ للتحويل من درجات الحرارة الفهرنهايتية إلى درجات الحرارة الكلفينية (المطلقة).

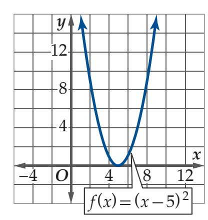
a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟ للفروع a-b انظر الهامش

b) أثبت أن كلاً من f، f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الآلة الحاسبة البيانية.

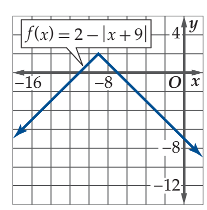
c) أوجد $(k\circ f)(x)$، واذكر ماذا تمثّل هذه الدالة؟

d) إذا كانت درجة الحرارة $60°C$، فأوجد درجة الحرارة الكلفينية (المطلقة) المقابلة.

ضع قيودًا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح واحدًا لواحد، ثم أوجد الدالة العكسية لها:

40) 

انظر ملحق الإجابات

41) 

انظر الهامش

إذا كانت الدالة f^{-1} لها وجود، فاكتب المجال والمدى لكل من f، f^{-1}: للتمارين 42-45 انظر الهامش

42) $f(x)=\sqrt{x-6}$

43) $f(x)=x^2+9$

44) $f(x)=\frac{3x+1}{x-4}$

45) $f(x)=\frac{8x+3}{2x-6}$

للفروع a-d انظر ملحق الإجابات

46) **أزهار:** تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة؛ لتزيين قاعة في إحدى المناسبات، فكان بإمكانها شراء قرنفل بسعر BD 0.3 للزهرة الواحدة، وشراء جوري بسعر BD 0.5 للزهرة الواحدة.

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة، ماذا يمثّل كل متغير فيها؟

c) أوجد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار BD 30.9، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f، f^{-1} في مستوى إحداثي واحد، واذكر أية قيود على المجال:

47) $f(x)=\begin{cases} x^2, & -4\ge x \\ -2x+5, & -4<x\end{cases}$ للتمرينين 47, 48 انظر ملحق الإجابات

48) $f(x)=\begin{cases} -4x+6, & -5\ge x \\ 2x-8, & -5<x\end{cases}$

49) **اتصالات:** أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن تخفيضات كما في الشكل أدناه. إذا كانت الشركة تخصم BD 5 من ثمن الجهاز، وتمنح تخفيضات بمقدار 10% من سعر الجهاز الأصلي، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي، إذا تم الخصم فقط. $r(x)=x-5$

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي، إذا تمت التخفيضات فقط. $d(x)=0.9x$

c) اكتب قاعدة تمثّل $T=r\circ d$ إذا تم التخفيض، ثم الخصم.

d) أوجد T^{-1}، وماذا تمثّل. للفرعين c,d انظر الهامش

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض والخصم BD 22، فكم يكون سعره الأصلي؟ BD 30

لكل زوج من الدوال الآتية أوجد:

$[f^{-1}\circ g^{-1}](x), [g^{-1}\circ f^{-1}](x), [f\circ g]^{-1}(x),$

$[g\circ f]^{-1}(x), [f\cdot g]^{-1}(x), [f^{-1}\cdot g^{-1}](x)$ للتمرينين 50, 51 انظر ملحق الإجابات

50) $f(x)=8x-4$، $g(x)=2x+6$

51) $f(x)=x^2+1$، $g(x)=\sqrt{x-4}$

تنبيه!

خطأ شائع في التمارين 39–37، قد يجد الطلبة صعوبة في التحقق من وجود دالة عكسية لعدم وجود التّمثيل البياني للدوال. لذا، اطلب إليهم تمثيل $f(x)$، وتطبيق اختبار الخط الأفقي.

إجابات:

37) f^{-1} لها وجود.

x	-4	0	3	5	9	13
$f^{-1}(x)$	-6	-4	-1	3	6	10

38) f^{-1} ليس لها وجود.

39a) $f^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ تُمثّل f^{-1} المعادلة المستعملة للتحويل من درجات فهرنهايتية إلى درجات سيليزية.

39b) $f[f^{-1}(x)]=\frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x-32)\right)+32$

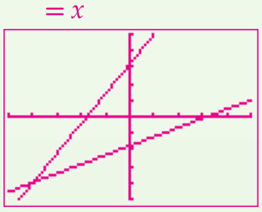
$=x-32+32$

$=x$

$f^{-1}[f(x)]=\frac{5}{9}\left(\left(\frac{9}{5}x+32\right)-32\right)$

$=\frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x\right)$

$=x$



[−50, 50] scl: 10 by [−50, 50] scl: 10

39c) $k[f(x)]=x+273.15$، تُمثّل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات سيليزية إلى درجات مطلقة (كلفن).

39d) 333.15 درجة مطلقة

41) إجابة ممكنة: $x\le -9, f^{-1}(x)=x-11$

42) الدالة f، المجال $=\{x \mid x\ge 6, x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\ge 0, y\in R\}$
الدالة f^{-1}، المجال $=\{x \mid x\ge 0, y\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\ge 6, x\in R\}$

43) f^{-1} ليس لها وجود.

44) الدالة f، المجال $=\{x \mid x\ne 4, x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\ne 3, x\in R\}$
الدالة f^{-1}، المجال $=\{x \mid x\ne 3, \in R\}$، المدى $=\{y \mid y\ne 4, x\in R\}$.

45) الدالة f، المجال $=\{x \mid x\ne 3, x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\ne 4, x\in R\}$.
الدالة f^{-1}، المجال $=\{x \mid x\ne 4, x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\ne 3, x\in R\}$.

49c) $T(x)=0.9x-5$

49d) $T^{-1}(x)=\frac{x+5}{0.9}$، تُمثّل الدالة العكسية السعر الأصلي للجهاز كدالة في سعر الجهاز بعد الخصم، وإجراء التخفيض.

52) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذا التمرين معكوس كل من الدالة الزوجية والدالة الفردية.
للفروع a-d انظر ملحق الإجابات
a) **تمثيل بياني:** مثّل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟
b) **تحليل:** ما النمط الذي يمكنك الحصول عليه بالنسبة لمعكوس الدالة الزوجية؟ أثبت ما حصلت عليه بالطريقة الجبرية أو انفِه.
c) **تمثيل بياني:** مثّل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال فردية. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟
d) **تحليل:** ما النمط الذي يمكنك الحصول عليه بالنسبة لمعكوس الدالة الفردية؟ أثبت ما حصلت عليه بالطريقة الجبرية أو انفِه.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفر عند 6 ولها دالة عكسية، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟
إجابة ممكنة: مقطع المحور y لـ $f^{-1}(x)$ هو 6

54) **اكتب:** وضّح بمثال القيود التي يجب فرضها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية، ولماذا تكون هذه القيود ضرورية؟
انظر ملحق الإجابات

55) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برّر إجابتك.
"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية."
انظر ملحق الإجابات

56) **تحدٍّ:** إذا كانت $f(x) = x^3 - ax + 8$ ، $f^{-1}(23) = 3$ ، فأوجد قيمة a. 4

57) **تبرير:** هل يوجد $f(x)$ تحقّق اختبار الخط الأفقي، وكذلك تحقّق المعادلتين $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ؟
انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

لكل زوج من الدوال الآتية، أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$ ، ثم اكتب مجال دالة التركيب: (الدرس 2-6) للتمرينين 58,59 انظر الهامش

58) $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = x + 4$

59) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$
$g(x) = x + 6$

استعمل منحنى الدالة الأم المعطاة، لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكل مما يأتي: (الدرس 2-5) للفروع a-c انظر الهامش

60) $f(x) = x^2$
a) $y = (0.2x)^2$
b) $y = (x-5)^2 - 2$
c) $y = 3x^2 + 6$

61) $f(x) = x^3$ للتمرينين 61,62 انظر الهامش
a) $y = x^3 + 3$
b) $y = -(2x)^3$
c) $y = 0.75(x+1)^3$

62) $f(x) = |x|$
a) $y = |2x|$
b) $y = |x - 5|$
c) $y = |3x + 1| - 4$

تدريب على اختبار معياري

63) أيُّ الدوال الآتية تمثِّل الدالة العكسية لـ $f(x) = \frac{3x-5}{2}$ ؟ A
A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$
B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$
C $g(x) = 2x + 5$
D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

64) إذا كانت $f(x) = \frac{4}{x} + 2$ ، فما قيمة $f^{-1}(4)$ ؟ C
A -3
B -2
C 2
D 3

65) إذا كانت $f(x) = x + 2$ ، $g(x) = \sqrt{x} + 5$ ، فما مدى $g(f(x))$ ؟ C
A $[-5, \infty]$
B $(-5, \infty)$
C $[5, \infty)$
D $(5, \infty)$

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة وصفْ كيفية التحقق من وجود دالة عكسية لدالة معطاة. استعمال اختبار الخط الأفقي.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 7–2 بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 2.

إجابات:

58) $[f \circ g] = x^2 + 8x + 7$ ، ومجالها هو $\{x \mid x \in R\}$.
$[g \circ f] = x^2 - 5$ ، ومجالها هو $\{x \mid x \in R\}$
59) $[f \circ g] = \frac{1}{2}x - 4$ ، ومجالها هو $\{x \mid x \in R\}$.
$[g \circ f] = \frac{1}{2}x - 1$ ، ومجالها هو $\{x \mid x \in R\}$
60a) توسّع أفقي بمعامل مقداره 5.
60b) انسحاب 5 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل.
60c) توسّع رأسي معامله 3، وانسحاب بمقدار 6 وحدات إلى أعلى.
61a) انسحاب 3 وحدات إلى أعلى، وانعكاس حول المحور x، للجزء من المنحنى الموجود تحت المحور x.
61b) انعكاس حول المحور x، وتضييق أفقي معامله $\frac{1}{2}$.
61c) انسحاب وحدة واحدة إلى اليسار، وتضييق رأسي معامله 0.75.
62a) تضييق أفقي معامله 2.
62b) انسحاب 5 وحدات إلى اليمين.
62c) تضييق أفقي معامله 3 ، وانسحاب 3 وحدات إلى أسفل.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: هل يوجد للدالة $f(x) = [\![x]\!]$ دالة عكسية؟ فسّر إجابتك. لا؛ لأن الدالة $f(x)$ لا تحقق اختبار الخط الأفقي. وعليه، فإنه يوجد عناصر في مجال معكوس $f(x)$ ترتبط بأكثر من عنصر في المدى.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدوال (الدرس 1–2)

- المجموعات الجزئية الشائعة من مجموعة الأعداد الحقيقية هي الأعداد الصحيحة، الأعداد النسبية، الأعداد غير النسبية، الأعداد الكلية، الأعداد الطبيعية.
- الدالة هي علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.
- يحقق التمثيل البياني للدالة اختبار الخط الرأسي.

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الدرس 2–2)

- قد تكون التمثيلات البيانية متماثلةً حول المحور y، المحور x، نقطة الأصل.
- الدالة الزوجية متماثلة حول المحور y، والدالة الفردية متماثلة حول نقطة الأصل.

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات (الدرس 3–2)

- إذا كانت قيم $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فنقول: إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c تساوي L. وتكتب $\lim_{x \to c} f(x) = L$.
- قد تكون الدالة منفصلةً، ونوع الانفصال هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغيّر (الدرس 4–2)

- تكون الدالة إما متزايدةً، أو متناقصةً، أو ثابتةً على فترات معينة.
- تتضمن القيم القصوى القيمة العظمى المحلية، والصغرى المحلية، والعظمى المطلقة، والصغرى المطلقة.
- يُعطى متوسط مُعدّل التغيّر بين نقطتين بالقاعدة:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

الدوال الأم والتحويلات الهندسية (الدرس 5–2)

تتضمن التحويلات الهندسية على الدالة الأم ما يأتي: الانسحاب، الانعكاس، التمدّد.

العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الدرس 6–2)

إن حاصل جمع، وطرح، وضرب، وقسمة، وتركيب أي دالتين ينتج دوالَّ جديدةً.

العلاقات والدوال العكسية (الدرس 7–2)

- تكون كلٌّ من العلاقتين A، B عكسية للأخرى إذا وفقط إذا وجد (b, a) في إحداهما، فإنه يوجد (a, b) في الأخرى.
- تكون كلٌّ من الدالتين f، f^{-1} عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x$ ، $f^{-1}[f(x)] = x$.

المفردات الأساسية

- الصفة المميزة للمجموعة ص 50
- رمز الفترة ص 51
- الدالة ص 51
- رمز الدالة ص 53
- المتغير المستقل ص 53
- المتغير التابع ص 53
- الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة ص 54
- المجال المناسب ص 54
- الأصفار ص 60
- الجذور ص 60
- التماثل حول مستقيم ص 61
- التماثل حول نقطة ص 61
- الدالة الزوجية ص 63
- الدالة الفردية ص 63
- الدالة المتصلة ص 68
- النهاية ص 68
- الدالة المنفصلة ص 68
- انفصال لا نهائي ص 68
- الانفصال القفزي ص 68
- الانفصال النقطي ص 68
- الانفصال قابل للإزالة ص 69
- انفصال غير قابل للإزالة ص 69
- سلوك طرفي التمثيل البياني ص 72
- الدالة المتزايدة ص 79
- الدالة المتناقصة ص 79
- الدالة الثابتة ص 79
- العظمى ص 81
- الصغرى ص 81
- القصوى ص 81
- متوسط معدل التغير ص 83
- القاطع ص 83
- الدالة الأم ص 89
- التحويل الهندسي ص 90
- الانسحاب ص 91
- الانعكاس ص 92
- التمدّد ص 93
- تركيب دالتين ص 99
- العلاقة العكسية ص 105
- الدالة العكسية ص 105
- دالة واحد لواحد ص 106

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فاستبدل المفردة التي تحتها خط بمفردة من القائمة أعلاه حتى تصبح الجملة صحيحة. للتمارين 10-1 انظر الهامش

1) تُعيّن الدالة لكل عنصر في مجالها عنصرًا واحدًا فقط في مداها.
2) التمثيلات البيانية المتماثلة حول نقطة يمكن تدويرها $180°$ بالنسبة إلى النقطة، فتبدو كأنها لم تتغير.
3) للدالة الفردية نقطة تماثل.
4) لا يتضمن منحنى الدالة المتصلة فجوةً أو انقطاعًا.
5) تصف نهاية الدالة الاقتراب من نقطة، وليس من الضروري الوصول إليها.
6) عندما تتناقص قيم $f(x)$ مع تزايد قيم x تسمى $f(x)$ دالةً متناقصةً.
7) تتضمن القيم القصوى لدالة قيمًا عظمى محليةً، أو صغرى محليةً.
8) انسحاب المنحنى عبارة عن صورة مرآة للمنحنى الأصلي حول مستقيم.
9) تحقق دالة واحد لواحد اختبار الخط الأفقي.
10) دالة واحد لواحد لها محور تماثل.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبات في حَلّ الأسئلة 1–10، فنبهم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

CRM اختبار المفردات في مصادر الفصل.

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة الحروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

إجابات:

1) صحيحة
2) صحيحة
3) صحيحة
4) صحيحة
5) خاطئة، سلوك طرفي التّمثيل البياني
6) صحيحة
7) صحيحة
8) خاطئة، انعكاس
9) صحيحة
10) خاطئة، دالة عكسية

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الدروس

2-1 الدوال (الصفحات 50–57)

حدّد إذا كانت كل من العلاقات الآتية تمثّل y على أنها دالة في المتغير x أو لا:

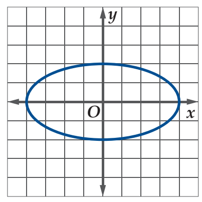
11) $3x - 2y = 18$ دالة

12) $y^3 - x = 4$ دالة

13) دالة

x	y
5	7
7	9
9	11
11	13

14) ليست دالة



إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x + 4$ ، فأوجد كلًّا من القيمتين الآتيتين:

15) $f(5)$ 14

16) $f(-3x)$ $9x^2 + 9x + 4$

اكتب مجال كل دالة من الدوال الآتية: للتمارين 17-20 انظر الهامش

17) $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$

18) $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

19) $h(a) = \frac{5}{a+5}$

20) $v(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

مثال 1

حدِّد إذا كانت $y^2 - 8 = x$ تمثّل y على أنها دالة في المتغير x أو لا.

حُلّ بالنسبة إلى y.

$y^2 - 8 = x$ الدالة الأصلية

$y^2 = x + 8$ بإضافة 8 للطرفين

$y = \pm\sqrt{x+8}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

هذه المعادلة لا تمثّل y على أنها دالة في المتغير x ؛ لأن كل قيمة لـ x أكبر من -8 ترتبط بقيمتين من قيم y.

مثال 2

إذا كانت $g(x) = -3x^2 + x - 6$ ، فأوجد $g(2)$.

عوّض 2 بدلًا عن x في التعبير $-3x^2 + x - 6$.

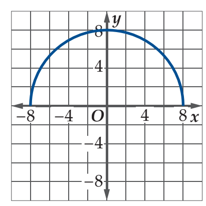
$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$ $x = 2$

$= -12 + 2 - 6 = -16$ بالتبسيط

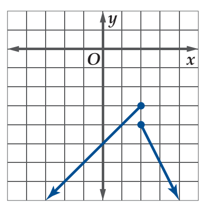
2-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الصفحات 58–67)

استعمل التمثيل البياني أدناه؛ لإيجاد مجال كل دالة ومداها:

21)



22)



أوجد مقطع المحور y ، والأصفار لكل دالة من الدوال الآتية: للتمارين 23-26 انظر الهامش

23) $f(x) = 4x - 9$

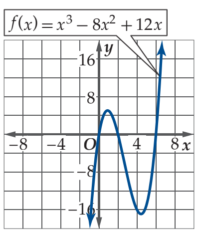
24) $f(x) = x^2 - 6x - 27$

25) $f(x) = x^3 - 16x$

26) $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

مثال 3

استعمل التمثيل البياني لـ $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ ؛ لإيجاد قيمة تقريبية لمقطع المحور y وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.



التقدير بيانيًا

يتضح من التمثيل البياني المجاور أن منحنى $f(x)$ يقطع المحور y عند $(0, 0)$. لذا، فإن مقطع المحور y هو 0 .

مقاطع المحور x (أصفار الدالة) تبدو قريبة من 6 ,2 ,0 .

الحل جبريًا

إيجاد مقطع المحور y ، أوجد $f(0)$.

$f(0) = 0^3 - 8 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0$

حلِّل المعادلة المرتبطة بالدالة إلى العوامل x لإيجاد أصفار الدالة.

$0 = x(x^2 - 8x + 12)$

$= x(x - 2)(x - 6)$

أصفار الدالة f هي 6 ,2 ,0 .

مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

بناء الاختبارات
التقـــويم

إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل من ص (112-113)، يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات؛ لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا، أو على الجزء من الفصل الذي ما زال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

إجابات:

17) المجال $=\{x | x \in R\}$

18) المجال $=\{x | x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

19) المجال $=\{a | a \neq -5, a \in R\}$

20) المجال $=\{x | x \neq \pm 2, x \in R\}$

21) المجال $=[-8, 8]$
المدى $=[0, 8]$

22) المجال $=\{x | x \in R\}$
المدى $=(-\infty, -3\}$

23) $-9, \frac{9}{4}$

24) $-27, -3, 9$

25) $0, 0, 4, -4$

26) $\sqrt{2} - 1, -1$

114 الفصل 2 تحليل الدوال

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

2-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات (الصفحات 68–78)

ابحث في اتصال الدوال الآتية عند قيم x المعطاة . وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال . وإذا كانت الدالة منفصلةً فبيّن نوع الانفصال هل هو لانهائي ، أو قفزي ، أو قابل للإزالة.

للتمارين 27-31 انظر الهامش

27) $f(x) = x^2 - 3x\ , x = 4$

28) $f(x) = \sqrt{2x - 4}\ , x = 1$

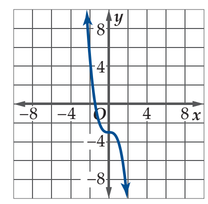
29) $f(x) = \dfrac{x}{x+7}\ , x = 0\ , x = 7$

30) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}\ , x = 2\ , x = 4$

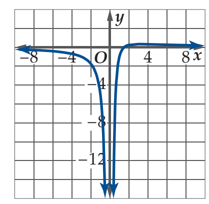
31) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1\ , & x < 1 \\ 2x\ , & x \geq 1 \end{cases}\ , x = 1$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه؛ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني . للتمرينين 32, 33 انظر الهامش

32)



33)



أوجد مجال كل دالة مما يأتي، وخطوط التقارب (إن وجدت). للتمارين 34-37 انظر الهامش

34) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$

35) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 25}$

36) $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x-5)^2(x+3)^2}$

37) $f(x) = \dfrac{(x-5)(x-2)}{(x+3)(x+9)}$

مثال 4

ابحث في اتصال $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ عند $x = 0$ ، $x = 4$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال . وإذا كانت منفصلةً فعيّن نوع الانفصال هل هو لانهائي ، أو قفزي ، أو قابل للإزالة.

$f(0) = -0.25$ ، لذلك f معرَّفة عند 0 . وتقترب قيم الدالة من -0.25 عندما تقترب x من 0 .

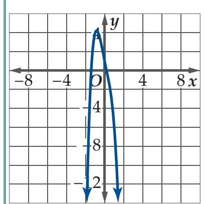
x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	-0.244	-0.249	-0.25	-0.251	-0.256

بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -0.25$ و $f(0) = -0.25$ ، فإن $f(x)$ متصلة عند $x = 0$.

بما أن f غير معرفة عند $x = 4$ ، فإن f منفصلة عند 4 ، وهو انفصال لا نهائي.

مثال 5

استعمل التمثيل البياني لِـ : $f(x) = -2x^4 - 5x + 1$ ؛ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني.



اختبر منحنى $f(x)$.

عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

مثال 6

أوجد مجال $f(x) = \dfrac{x+7}{x+1}$ ، وخطوط التقارب (إن وجدت).

خطوة 1 أوجد المجال

الدالة غير معرّفة عند صفر المقام $x = -1$. لذا، فإن مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء $x = -1$.

خطوة 2 أوجد خطوط التقارب (إن وجدت).

تأكد من وجود أو عدم وجود خطوط التقارب الرأسية. صفر المقام هو $x = -1$. لذا، فإن $x = -1$ خط تقارب رأسي .

تأكد من وجود أو عدم وجود خط تقارب أفقي. بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام، والكسر الدال على معاملي x هو $\frac{1}{1} = 1$ ، فإن $y = 1$ يكون خط تقارب أفقي .

إجابات:

27) متصلة عند $x = 4$ ، الدالة معرفة عند $x = 4$. تؤول الدالة إلى 4 عندما تؤول x إلى 4 من الجهتين، $f(4) = 4$.

28) غير متصلة عند $x = 1$ ، والدالة غير معرفة عند $x = 1$ ، الانفصال لانهائي.

29) متصلة عند $x = 0$ ، الدالة معرفة عند $x = 0$. تؤول الدالة إلى 0 عندما تقترب x إلى 0 من الجهتين ، $f(0) = 0$ ، متصلة عند $x = 7$ ، الدالة معرفة عند $x = 7$. الدالة تؤول إلى 0.5 عندما تؤول x إلى 7 من الجهتين ، $f(7) = 0.5$.

30) منفصلة عندما $x = 2$ ، غير معرفة عند $x = 2$ ، الانفصال لانهائي. الدالة منفصلة عند $x = 4$ ، الدالة معرفة عند $x = 4$. الدالة تؤول إلى $\frac{1}{3}$ عندما تقترب x إلى 4 من الجهتين، $f(4) = \frac{1}{3}$.

31) متصلة عند 1، الدالة معرفة عند $x = 1$ ، تؤول الدالة إلى 2 عندما تؤول x إلى 1 من الجهتين، $f(1) = 2$

32) يوضح التمثيل البياني أنه عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$ ؛ وعندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to \infty$.

33) يوضح التَمثيل البياني أنه عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to 0$ ، وعندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to 0$.

34) المجال $= \{ x | x \neq -4\ , x \in R \}$ ، $x = -4$ خط تقارب رأسي ، ولايوجد خطوط تقارب أفقية.

35) المجال $= \{ x | x \neq \pm 5\ , x \in R \}$ ، $x = -5$ ، $x = 5$ خط تقارب رأسي، $y = 1$ خط تقارب أفقي.

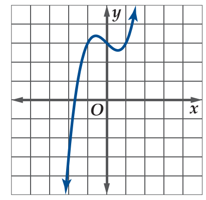
36) المجال $= \{ x | x \neq 5\ , x \neq -3\ , x \in R \}$ ، $x = 5$ ، $x = -3$ خطأ تقارب رأسي، $y = 0$ خط تقارب أفقي.

37) المجال $= \{ x | x \neq -3\ , x \neq -9\ , x \in R \}$ ، $x = -3$ ، $x = -9$ خطأ تقارب رأسي، $y = 0$ خط تقارب أفقي.

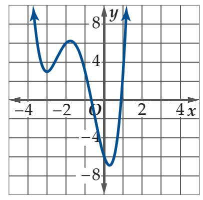
2-4 القيم القصوى ومتوسط معدّل التغيّر (الصفحات 79–87)

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه؛ لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة، أو ثابتة، ثم قدِّر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.

(38



(39



للتمرينين 39, 38 انظر الهامش

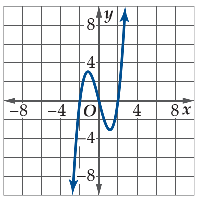
أوجد متوسط مُعدّل التغيّر لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

(40 $f(x) = -x^3 + 3x + 1, [0, 2]$ **−1**

(41 $f(x) = x^2 + 2x + 5, [-5, 3]$ **0**

مثال 7

استعمل التمثيل البياني لـ $f(x) = x^3 - 4x$؛ لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة، ثم قدِّر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.



الدالة متزايدة على $(-\infty, -1)$، متناقصة على $(-1, 1)$، ومتزايدة على $(1, \infty)$.

للدالة قيمة عظمى محلية عند $(-1, 3)$، وقيمة صغرى محلية عند $(1, -3)$.

2-5 الدوال الأم والتحويلات الهندسية (الصفحات 89–97)

للتمارين 47-42 انظر الهامش

أوجد الدالة الأم f من الدالة g لكل مما يأتي، وصِف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثّلهما في مستوى إحداثي واحد.

(42 $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$

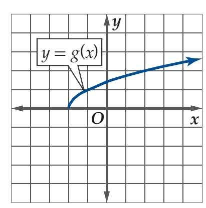
(43 $g(x) = -(x-6)^2 - 5$

(44 $g(x) = \frac{1}{2(x+7)}$

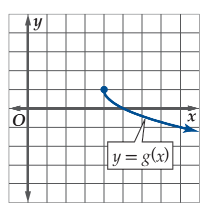
(45 $g(x) = \frac{1}{4}[\![x]\!] + 3$

صفّ العلاقة بين $f(x) = \sqrt{x}$، $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$.

(46

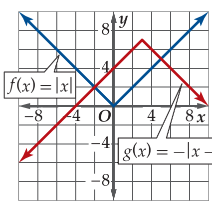


(47



مثال 8

أوجد الدالة الأم f من $g(x) = -|x-3| + 7$، وصفّ العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثلهما في مستوى إحداثي واحد.



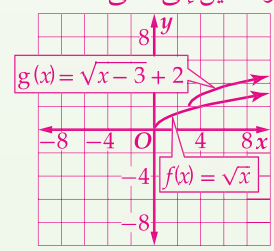
الدالة الأم لـ $g(x)$ هي $f(x) = |x|$. ينتج منحنى الدالة g من منحنى الدالة f بانعكاس حول المحور x، وانسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليمين، وانسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى.

إجابات:

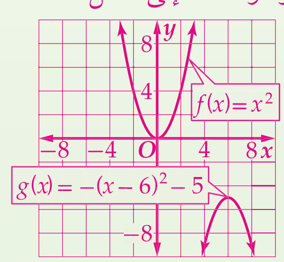
38) f متزايدة على الفترة $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة على الفترة $(-0.5, 0.5)$، ثم متزايدة على الفترة $(0.5, \infty)$. يوجد قيمة عظمى محلية عند $(-0.5, 3.5)$، وقيمة صغرى محلية عند $(0.5, 2.5)$.

39) f متناقصة على الفترة $(-\infty, -3)$، ومتزايدة على الفترة $(-3, -1.5)$، ومتناقصة على الفترة $(-1.5, 0.5)$، ومتزايدة على الفترة $(0.5, \infty)$، توجد قيمة صغرى محلية عند $(-3, 3)$، وقيمة عظمى محلية عند $(-1.5, 6)$، وأيضًا قيمة صغرى محلية عند $(0.5, -7)$.

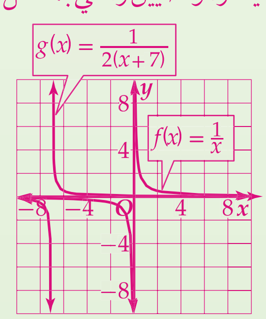
42) $f(x) = \sqrt{x}$، منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بالانسحاب 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى.



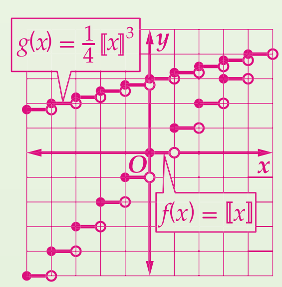
43) $f(x) = x^2$، منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانعكاس حول المحور x، وانسحاب 6 وحدات إلى اليمين، و5 وحدات إلى أسفل.



44) $f(x) = \frac{1}{x}$، منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانسحاب 7 وحدات إلى اليسار، وتضييق رأسي بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$.



45) $f(x) = [\![x]\!]$، منحنى $g(x)$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$ بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$ وانسحاب 3 وحدات.



46) ينتج منحنى $g(x)$، بانسحاب مقداره وحدتان إلى اليسار، $g(x) = \sqrt{x+2}$

47) ينتج منحنى $g(x)$ بانعكاس حول المحور x، وانسحاب 4 وحدات إلى اليمين، وانسحاب مقدارة وحدة واحدة إلى أعلى، $g(x) = -\sqrt{x-4} + 1$

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

2-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الصفحات 98–104)

للتمارين 48-51 انظر الهامش

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$، $g(x)$ فيما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

48) $f(x) = x + 3$
$g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

49) $f(x) = 4x^2 - 1$
$g(x) = 5x - 1$

50) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
$g(x) = 4x^2 - 3$

51) $f(x) = \frac{1}{x}$
$g(x) = \frac{1}{x^2}$

للتمارين 52-54 انظر الهامش

أوجد $[f\circ g](x), [g\circ f](x), [f\circ g](2)$ لكل دالتين من الدوال الآتية:

52) $f(x) = 4x - 11,\ g(x) = 2x^2 - 8$

53) $f(x) = x^2 + 2x + 8,\ g(x) = x - 5$

54) $f(x) = x^2 - 3x + 4,\ g(x) = x^2$

للتمرينين 55,56 انظر الهامش

اكتب مجال $f\circ g$ متضمناً أية قيود كلما لزم ذلك، ثم أوجد $f\circ g$.

55) $f(x) = \frac{1}{x-3}$
$g(x) = 2x - 6$

56) $f(x) = \sqrt{x-2}$
$g(x) = 6x - 7$

مثال 9

إذا كانت $f(x) = x^3 - 1\ ,\ g(x) = x + 7$، فأوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^3 - 1) + (x + 7)$$
$$= x^3 + x + 6$$

مجال $(f+g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (x^3 - 1) - (x + 7)$$
$$= x^3 - x - 8$$

مجال $(f-g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$
$$= (x^3 - 1)(x + 7)$$
$$= x^4 + 7x^3 - x - 7$$

مجال $(f\cdot g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3-1}{x+7}$$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$.

2-7 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات 105–112)

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي، ثم مثّل بيانيًّا الدالة ومعكوسها في المستوى الإحداثي نفسه. للتمارين 57-60 انظر ملحق الإجابات

57) $y = (x-4)^2$

58) $y = -4x + 8$

59) $y = 2\sqrt{x+3}$

60) $y = \frac{1}{x} - 3$

للتمارين 61-64 انظر ملحق الإجابات

مثّل كل دالة من الدوال الآتية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، واختبر ما إذا كان المعكوس يمثّل دالةً أو لا.

61) $f(x) = |x| + 6$

62) $f(x) = x^3$

63) $f(x) = -\frac{3}{x+6}$

64) $f(x) = x^3 - 4x^2$

مثال 10

أوجد معادلة معكوس $y = x^3 - 9$.

بدّل مكاني x، y لتحصل على المعادلة $x = y^3 - 9$، ثم حُلّ بالنسبة إلى y.

$$x = y^3 - 9$$
$$x + 9 = y^3$$
$$\sqrt[3]{x+9} = y$$

أي أن المعكوس هو $y = \sqrt[3]{x+9}$.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

إجابات:

48) $(f+g)(x) = 2x^2 + 5x - 3$،
المجال$=\{x \mid x \in R\}$
$(f-g)(x) = -2x^2 - 3x + 9$،
المجال$=\{x \mid x \in R\}$،
$(f\cdot g)(x) = 2x^3 + 10x^2 + 6x - 18$،
المجال$=\{x \mid x \in R\}$،
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2(x-1)}$،
المجال$=\{x \mid x \neq -3, 1, x \in R\}$

49) $(f+g)(x) = 4x^2 + 5x - 2$،
المجال$=\{x \mid x \in R\}$،
$(f-g)(x) = 4x^2 - 5x$،
المجال$=\{x \mid x \in R\}$،
$(f\cdot g)(x) = 20x^3 - 4x^2 - 5x + 1$،
المجال$=\{x \mid x \in R\}$،
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x^2-1}{5x-1}$،
المجال $= \left\{x \mid x \neq \frac{1}{5}, x \in R\right\}$

50) $(f+g)(x) = x^3 + 2x^2 + 2$،
المجال $= \{x \mid x \in R\}$،
$(f-g)(x) = x^3 - 6x^2 + 8$،
المجال$=\{x \mid x \in R\}$،
$(f\cdot g)(x) = 4x^5 - 8x^4 - 3x^3 + 26x^2 - 15$
المجال $= \{x \mid x \in R\}$،
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{4x^2 - 3}$،
المجال $= \left\{x \mid x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in R\right\}$

51) $(f+g)(x) = \frac{x+1}{x^2}$،
المجال$=\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$،
$(f-g)(x) = \frac{x-1}{x^2}$،
المجال$=\{x \mid x \neq 0\ x \in R\}$،
$(f\cdot g)(x) = \frac{1}{x^3}$،
المجال$=\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$،
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x$، المجال$=\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

52) $8x^2 - 43\ ,\ 32x^2 - 176x + 234\ ,\ -11$

53) $x^2 - 8x + 23,\ x^2 + 2x + 3\ ,\ 11$

54) $x^4 - 3x^2 + 4\ ,\ x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16,\ 8$

55) $[f\circ g](x) = \frac{1}{2x-9}$ ، المجال $= \{x \mid x \neq 3, \frac{9}{2}, x \in R\}$

56) $[f\circ g](x) = \sqrt{6x-9}$ ، المجال $= \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

تطبيقات ومسائل

للفروع a-c انظر الهامش

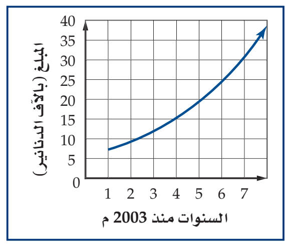
65) هواتف محمولة: قدَّمت إحدى شركات الاتصالات عرضًا على الهواتف المحمولة؛ بحيث يدفع المشترك BD 4 في الشهر مقابل 500 min مكالمات نهارية ، ويدفع المشترك BD 0.02 عن كل دقيقة نهارية تزيد على 500 min . (الدرس 1-2)

a) اكتب الدالة p للتكلفة الشهرية لإجراء مكالمات نهارية مدتها x دقيقة.

b) كم سيدفع مشترك إذا أجرى مكالمات نهارية مدتها 450 min ، 550 min؟

c) مثّل $p(x)$ بيانيًّا.

66) أعمال: يُبيّن التمثيل البياني أدناه الدخل الذي حققه متجر صغير في الفترة (2004 – 2010) م (الدرس 2-2)



a) قدِّر دخل المتجر سنة 2007 م **BD 15000**

b) قدِّر السنة التي حقّق فيها المتجر دخلًا مقداره BD 10000

2005 م

67) رواتب: بعد 5 سنوات من عمل وليد في إحدى الشركات تقاضى زيادةً على راتبه مقدارها BD 150 شهريًّا. هل الدالة التي تُمثّل راتب وليد متصلة أم لا؟ برّر إجابتك. (الدرس 3-2)

لا؛ إجابة ممكنة: في الوقت الذي ازداد فيه راتبه حصل انفصال قفزي.

68) كرة قدم: يُبيّن الجدول أدناه عدد الأهداف التي سجَّلها لاعب في خمسة مواسم كروية. (الدرس 4-2)

السنة	2003	2004	2005	2006	2007
عدد الأهداف	5	36	23	42	42

a) وضِّح لماذا يمثِّل عدد الأهداف عام 2005 م قيمةً صغرى محلية.
عدد الأهداف تتناقص ثم يزيد

b) افرض أن متوسط مُعدّل التغيّر لعدد الأهداف بين عامي 2007 و 2010 م يساوي 5 أهداف لكل عام، فكم هدفًا سجَّل اللاعب عام 2010 م ؟ **57 هدفًا**

69) فيزياء: رُمي حجر أفقيًّا من على حافة جرف، وكان مقدار سرعته معطى بـ $v(t)=\sqrt{(9.8t)^2+49}$ ، حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ السرعة بالمتر لكل ثانية. مثل بيانيًّا دالة السرعة خلال أول 6 sec من رمي الحجر. (الدرس 5-2) **انظر الهامش**

70) ثقافة مالية: أعلن أحد المحلات التجارية عن تقديم عرض للبيع على جهاز كهربائي يشمل الحصول على خصم مقداره BD 10 أولاً، ثم تخفيض نسبته 8.5% من السعر.
إذا كان سعر الجهاز الأصلي BD 55، فكم سيدفع المشتري ثمنًا للجهاز؟ (الدرس 6-2) **BD 48.83**

للفرعين a, b انظر الهامش

71) قياس: تذكر أن $1\text{ in}\approx 2.54\text{ cm}$ (الدرس 7-2)

a) اكتب دالة A ؛ لتحويل مساحة سطح مستطيل من in^2 إلى cm^2 .

b) أوجد $A^{-1}(x)$ ؛ لتحويل مساحة سطح مستطيل من cm^2 إلى in^2 .

مراجعة حَلّ المسائل

إذا احتاج الطلبة إلى تدريبات إضافية على حَلّ المسألة، فذكّرهم بخطوات حَلّ المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيداً من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقّع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقّع في مصادر الفصل 2، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل.

قبل الاختبار

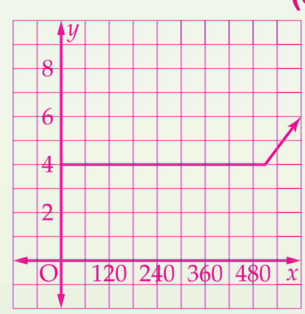
اطلب إلى الطلبة دراسة الصفحات (113-116) من دليل الدراسة والمراجعة؛ لمراجعة المواضيع، والمهارات الواردة في الفصل.

إجابات:

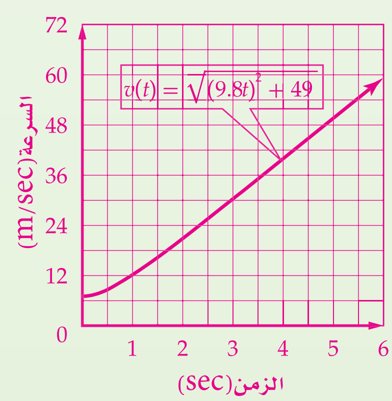
(65a
$$p(x)=\begin{cases}4\ ,\ 0\le x\le 500\\ 4+0.02(x-500)\ ,\ x>500\end{cases}$$

(65b 4 , 5

(65c



(69



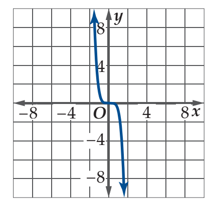
(71a $A(x)=6.4516x\ \text{cm}^2$

(71b $A^{-1}(x)=\frac{1}{6.4516}x\ \text{in}^2$

الفصل 2 اختبار الفصل

حدّد ما إذا كانت العلاقة المعطاة تمثّل y على أنها دالة في المتغير x لكلٍّ مما يأتي:

1) $x = y^2 - 5$ لا تُمثل دالة

2) 
دالة

3) $y = \sqrt{x^2 + 3}$ دالة

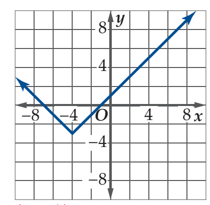
4) **موقف سيارات:** يتقاضى موقف للسيارات مبلغ 0.2 BD مقابل كل ساعة، أو جزء من ساعة ولمدة أقصاها 3 h، فإذا زادت المدة عن 3 ساعات، فإنه يتقاضى 1.3 BD عن المدة كلها.

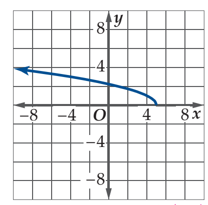
a) اكتب دالة c تمثّل تكلفة وقوف سيارة مدة x من الساعات.

b) أوجد $c(2.5)$. للفروع a – c انظر الهامش

c) عيِّن مجال $c(x)$، وبرّر إجابتك.

اكتب مجال كل دالة من الدالتين الممثلتين أدناه ومداها:

5) 

6) 

للسؤالين 5,6 انظر الهامش

أوجد مقطع المحور y، والأصفار لكل دالة من الدالتين الآتيتين:

7) $f(x) = 4x^2 - 8x - 12$ $-12, -1, 3$

8) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ $0, -3, -1, 0$

9) **اختيار من متعدد:** أي العلاقات الآتية متماثلة حول المحور x؟ D

A $-x^2 - yx = 2$

B $x^3y = 8$

C $y = |x|$

D $-y^2 = -4x$

حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 3$، وإذا كانت منفصلة فبيّن نوع الانفصال هل هو لا نهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

10) $f(x) = \begin{cases} 2x &, x < 3 \\ 9 - x &, x \geq 3 \end{cases}$ متصلة

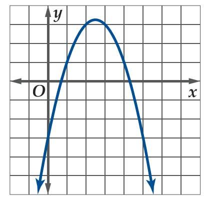
11) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$ غير متصلة ، انفصال قابل للإزالة

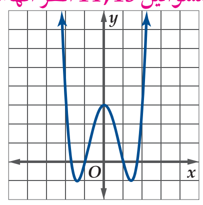
أوجد متوسط مُعدّل التغير لكل دالة من الدالتين الآتيتين في الفترة $[-2, 6]$:

12) $f(x) = -x^4 + 3x$ -157

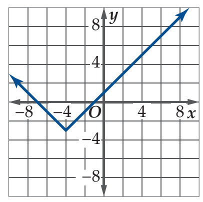
13) $f(x) = \sqrt{x+3}$ $\dfrac{1}{4}$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة من الدالتين أدناه؛ لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة.
للسؤالين 14,15 انظر الهامش

14) 

15) 

16) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية يمثّلها التمثيل البياني المجاور؟ C



A $f(x) = |x - 4| - 3$

B $f(x) = |x - 4| + 3$

C $f(x) = |x + 4| - 3$

D $f(x) = |x + 4| + 3$

17) عيّن الدالة الأم f لـ $g(x) = -(x+3)^3$، ثم مثل الدالة g بيانيًّا. انظر الهامش

إذا كانت $f(x) = x - 6$، $g(x) = x^2 - 36$، فأوجد كل دالة من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجالها. للسؤالين 18,19 انظر الهامش

18) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

19) $[g \circ f](x)$

20) **درجة الحرارة:** تستعمل معظم دول العالم الدرجات السيليزية C لقياس درجة الحرارة. والمعادلة التي تربط بين درجات الحرارة السيليزية C، والفهرنهايتية F هي $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) اكتب C كدالة بالنسبة لـ F. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

b) أوجد دالتين f، g، بحيث يكون $C = [f \circ g](F)$. $f(x) = \frac{5}{9}x$, $g(x) = x - 32$

بيِّن إذا كان للدالة f في كلٍّ مما يأتي، دالة عكسية أو لا، وفي حالة وجودها أوجدها وحدّد أية قيود على مجالها. للأسئلة 21 – 24 انظر الهامش

21) $f(x) = (x-2)^3$

22) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-8}$

23) $f(x) = \sqrt{4-x}$

24) $f(x) = x^2 - 16$ لا

للسؤالين 25,26 انظر ملحق الإجابات

حدّد خطوط التقارب لكل من الدالتين الآتيتين، ومقطعي المحورين x ، y، ثم مثّل كل دالة بيانيًّا، وأوجد مجالها.

25) $f(x) = \dfrac{2x-6}{x+5}$

26) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-4}$

بناء الاختبارات
التقـويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أنّ جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 2 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

إجابات

4a) $c(x) = \begin{cases} 0.2x & 0 \leq x \leq 3 \\ 1.3 & x > 3 \end{cases}$

4b) BD 0.5

4c) المجال = $[0, 24]$
إجابة ممكنة: يجب أن يكون عدد الساعات أكثر من 0 وأقل من 24 ساعة.

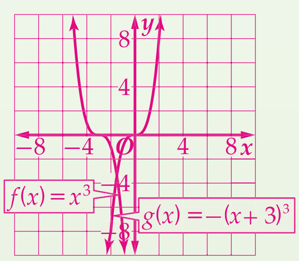
5) المجال $= (-\infty, \infty)$
المدى $= [-2, 8)$

6) المجال $= (-\infty, 5]$
المدى $= [0, \infty)$

14) f متزايدة على الفترة $(-\infty, 2.5)$، ومتناقصة على الفترة $(2.5, \infty)$.

15) f متناقصة على الفترة $(-\infty, -1.5)$، ومتزايدة على الفترة $(-1.5, 0)$، ثم متناقصة على الفترة $(0, 1.5)$، ومتزايدة على الفترة $(1.5, \infty)$.

17) $f(x) = x^3$



18) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{x+6}$، المجال $= \{x \mid x \neq -6, x \in R\}$

19) $[f \circ g](x) = x^2 - 12x$، المجال $= \{x \mid x \in R\}$.

21) نعم؛ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

22) نعم؛ $f^{-1}(x) = \dfrac{8x+3}{x-1}, x \neq 1$

23) نعم؛ $f^{-1}(x) = 4 - x^2, x \geq 4$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 2-1، 2-2، 2-3، 2-4، 2-5، 2-6، 2-7	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (48)	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

الدرس 1-2 ص 57 - 50

(1 $\{x \mid x > 50, x \in R\}, (50, \infty)$

(2 $\{x \mid x < -13, x \in R\}, (-\infty, -13)$

(3 $\{x \mid x \le -4, x \in R\}, (-\infty, -4]$

(4 $\{x \mid -4 \le x, x \in Z\}$

(5 $\{x \mid -31 < x \le 64, x \in R\}, (-31, 64]$

(6 $\{x \mid x < -19$ أو $x > 21, x \in R\},$
$(-\infty, -19) \cup (21, \infty)$

(7 $\{x \mid x \le 61$ أو $x \ge 67, x \in R\},$
$(-\infty, 61] \cup [67, \infty)$

(8 $\{x \mid x \le -45$ أو $x > 86, x \in R\},$
$(-\infty, -45] \cup (86, \infty)$

(9 $\{x \mid x = 5n, n \in N\}$

(10 $\{x \mid x \ge 32, x \in R\}, [32, \infty)$

(21a $\frac{-13}{79}$

(21b $\frac{16t + 11}{48t^2 + 20t + 1}$

(21c $\frac{-8a + 23}{12a^2 - 46a + 43}$

22 **(a** بتعويض -2 بدل x $\quad g(-2) = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2 + (-2) - 4}$

بالتبسيط $\quad = 12$

(b بتعويض $5x$ بدل x $\quad g(5x) = \frac{3(5x)^3}{(5x)^2 + 5x - 4}$

بالتبسيط $\quad = \frac{375x^3}{25x^2 + 5x - 4}$

(c بتعويض $8-4b$ بدل x $\quad g(8-4b) = \frac{3(8-4b)^3}{(8-4b)^2 + (8-4b) + 4}$

بالتبسيط $\quad = \frac{-48b^3 + 288b^2 - 576b + 384}{4b^2 - 17b + 17}$

(25c إجابة ممكنة: الدالة $f(x)$ أكثر دقة في السنوات الأخيرة التي فيها أعلى المبيعات؛ لأن $f(5) = 213$ أقل من 219 بنسبة 2%، ولكن $f(1) = 9$ أكبر من 1 بنسبة 800% .

(26 $(-\infty,-4) \cup (-4,-1) \cup (-1,\infty)$

(27 $(-\infty,-5) \cup (-5,8) \cup (8,\infty)$

(28 $(-\infty,\infty)$

(29 $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$

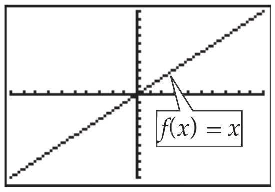
(30 $(0.25,\infty)$

(31 $(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,\infty)$

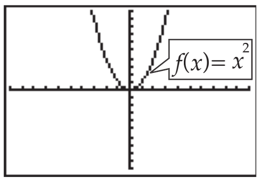
(48 لا؛ إجابة ممكنة؛ لأن كل قيمة من قيم المدى ترتبط بقيمتين من المجال، ولحَلّ المعادلة بالنسبة إلى y يكون هناك قيمتان موجبة وسالبة لِـ x.

(49 نعم؛ إجابة ممكنة؛ لأن كل قيمة في المدى ترتبط بقيمة واحدة من المجال. لذا، تُمثّل دالة.

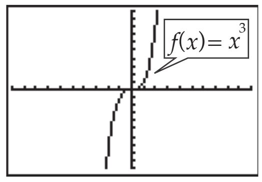
(50a



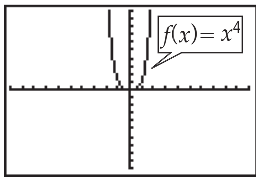
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



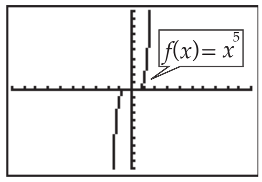
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



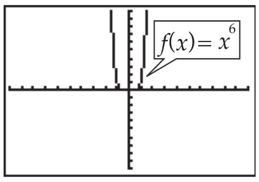
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

(50b

n	المدى
1	$(-\infty, \infty)$
2	$[0, \infty)$
3	$(-\infty, \infty)$
4	$[0, \infty)$
5	$(-\infty, \infty)$
6	$[0, \infty)$

(50c إجابة ممكنة: يكون المدى للدالة $f(x) = x^n$ هو $[0, \infty)$، إذا كانت n زوجية.

(50d إجابة ممكنة: يكون المدى للدالة $f(x) = x^n$ هو $(-\infty, \infty)$، إذا كانت n فردية.

52 بما أن $f(x)$ غير معرفة عندما $x = -3, x = -1, x = 5$، فإن مجال $f(x)$ باستعمال رمز الفترة هو:
$(-\infty,-3) \cup (-3,-1) \cup (-1,5) \cup (5,\infty)$،
وبالصفة المميزة هو $\{x \mid x \ne -3, x \ne -1, x \ne 5, x \in R\}$.

إجابة ممكنة: أفضل طريقة الصفة المميزة للمجموعة؛ لأنه بدلًا من كتابة أربع فترات تقع ضمنها x نكتب ثلاث قيم غير ممكنة لِـ x، والمجموعة التي يمكن أخذ x منها، أي أنه عند تحديد قيمة ما على فترات متعددة، تكون الصفة المميزة للمجموعة أكثر فعالية.

(62
$$\frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}}{\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

(63 إجابة ممكنة: إذا قطع أي مستقيم رأسي منحنى الدالة في نقطة واحدة فقط، عندئذن تكون الدالة علاقة.

64) $4(\sec^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}) = 4(\sec^2\theta - \tan^2\theta) = 4(1) = 4$

65) $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$
حيث n عدد صحيح

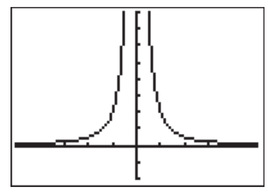
66) $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi$
حيث n عدد صحيح

67) $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi, 2n\pi$
حيث n عدد صحيح

68) $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$
حيث n عدد صحيح

الدرس 2-2 (تأكد) ص 58-67

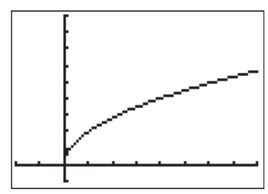
6A)



[−5, 5] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة زوجية، وتمثيلها البياني متماثل حول المحور y.

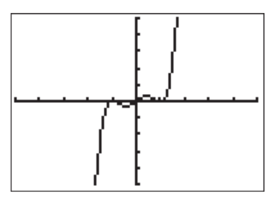
6B)



[−2, 8] scl: 1 by [−2, 18] scl: 2

الدالة ليست فردية، وليست زوجية.

6C)



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

يتضح من التمثيل أن الدالة فردية، وتمثيلها البياني متماثل حول نقطة الأصل.

الدرس 2-2 ص 58-67

11) لا يوجد مقطع المحور y، صفر الدالة هو 1 .

$0 = \sqrt{x-1}$

$(0)^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$

$0 = x - 1$

$x = 1$

12) مقطع المحور y هو 0 ،
أصفار الدالة هي $-1, 0, \frac{3}{2}$ ،

بوضع $f(x) = 0$ — $0 = 2x^3 - x^2 - 3x$

$0 = x(2x^2 - x - 3)$

بالتحليل $0 = x(2x - 3)(x + 1)$

خاصية الضرب الصفري $x = 0$ أو $2x - 3 = 0$ أو $x + 1 = 0$

بحل كل معادلة $x = 0$ أو $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -1$

13) مقطع المحور y هو 0 ، صفر الدالة هو 0 .

$0 = \sqrt[3]{x}$

$(0)^3 = (\sqrt[3]{x})^3$

$0 = x$

14) مقطع المحور y هو -2 ، صفرا الدالة هما:
$-\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$.

$0 = 6x^2 - x - 2$

$0 = (2x + 1)(3x - 2)$

$2x + 1 = 0$ أو $3x - 2 = 0$

$2x = -1$ أو $3x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{2}{3}$

17)

x	y	(x, y)
1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
1	$-\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
2	$-\sqrt{3}$	$(2, -\sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
3	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

متماثل حول المحور x ، والمحور y، ونقطة الأصل. وبما أن $x^2 + 4(-y)^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$ ، فإن منحنى الدالة متماثل حول المحور x .

x	y	(x, y)
−3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(-3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
−2	$\sqrt{3}$	$(-2, \sqrt{3})$
−1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(-1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

بما أن $(-x)^2 + 4y^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

x	y	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
-3	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(-3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
-2	$-\sqrt{3}$	$(-2, -\sqrt{3})$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
0	2	$(-0, 2)$

بما أن $(-x)^2+4(-y)^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

18) تماثل حول المحور x .

x	y	(x, y)
1	2	$(1, 2)$
1	-2	$(1, -2)$
2	$\sqrt{5}$	$(2, \sqrt{5})$
2	$-\sqrt{5}$	$(2, -\sqrt{5})$
3	$\sqrt{6}$	$(3, \sqrt{6})$
3	$-\sqrt{6}$	$(3, -\sqrt{6})$

بما أن $x = (-y)^2 - 3$ تكافئ $x = y^2 - 3$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

19) متماثل حول نقطة الأصل.

x	y	(x, y)
-4	4	$(-4, 4)$
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
2	-2	$(2, -2)$
3	-3	$(3, -3)$
4	-4	$(4, -4)$

بما أن $-x = -(-y)$ تكافئ $x = -y$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

20) متماثل حول المحور x ، والمحور y، ونقطة الأصل.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
2	$-\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, -\frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
3	$-\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(4, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9x^2 - 25(-y)^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

x	y	(x, y)
-3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
-2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(-2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
-1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2 - 25y^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

x	y	(x, y)
-3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
-2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(-2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
-1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$(-1, \sqrt{15})$
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$(1, \sqrt{15})$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2 - 25(-y)^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

21) متماثل حول نقطة الأصل.

x	y	(x, y)
-4	-16	$(-4, -16)$
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	$-\frac{1}{4}$	$\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$
1	$\frac{1}{4}$	$\left(1, \frac{1}{4}\right)$
2	2	$(2, 2)$
4	16	$(4, 16)$

بما أن $y = \frac{(-x)^3}{4}$ تكافئ $y = \frac{-x^3}{4}$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

22) متماثل حول نقطة الأصل.

x	y	(x, y)
-10	1	$(-10, 1)$
-5	2	$(-5, 2)$
-1	10	$(-1, 10)$
1	-10	$(1, -10)$
5	-2	$(5, -2)$
10	-1	$(10, -1)$

بما أن $-y = -\frac{10}{(-x)}$ تكافئ $y = -\frac{10}{x}$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل .

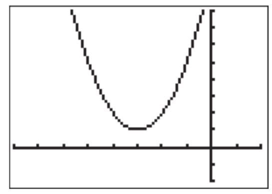
23) متماثل حول المحور y.

x	y	(x, y)
-3	9	$(-3, 9)$
-2	-16	$(-2, -16)$
-1	-7	$(-1, -7)$
1	-7	$(1, -7)$
2	-16	$(2, 16)$
3	9	$(3, 9)$

بما أن $y = (-x)^4 - 8(-x)^2$ تكافئ $y = x^4 - 8x^2$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

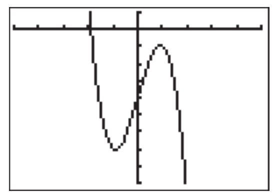
24) لا يوجد تماثل.

25) ليست فردية وليست زوجية.



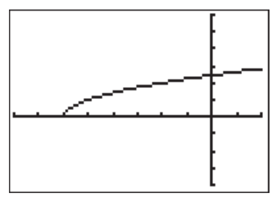
[−8, 2] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

26) ليست فردية وليست زوجية.



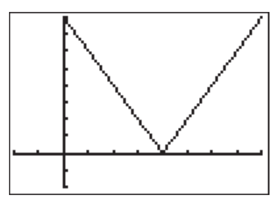
[−5, 5] scl: 1 by [−9, 1] scl: 1

27) ليست فردية وليست زوجية.



[−8, 2] scl: 1 by [−4, 6] scl: 1

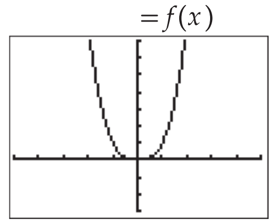
28) ليست فردية وليست زوجية.



[−2, 8] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

29) دالة زوجية، متماثلة حول المحور y.

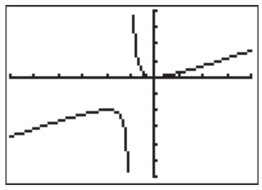
$$|f(-x) = (-x)^3|$$
$$= x^3$$
$$= f(x)$$



[−5, 5] scl: 1 by [−3, 7] scl: 1

30) ليست فردية، وليست زوجية.

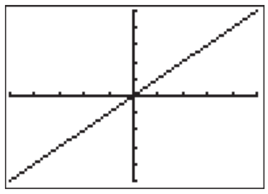
$$g(-x) = \frac{(-x)^2}{-x+1}$$
$$= \frac{x^2}{-x+1}$$



[−6, 4] scl: 1 by [−12, 8] scl: 2

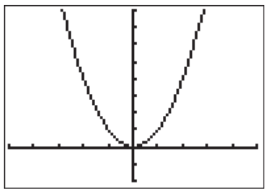
33a)

$f(x) = x$



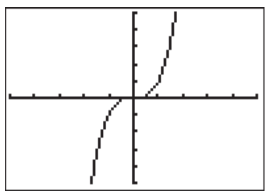
[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

$f(x) = x^2$



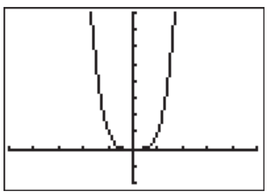
[−5, 5] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

$f(x) = x^3$



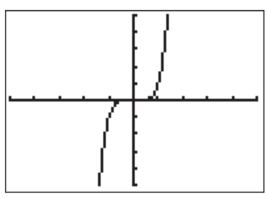
[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

$f(x) = x^4$



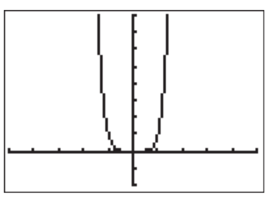
[−5, 5] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

$f(x) = x^5$



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

$f(x) = x^6$



[−5, 5] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

33b) الدالة $f(x) = x$:

مجالها = $\{x \mid x \in R\}$، مداها = $\{y \mid y \in R\}$

الدالة $f(x) = x^2$:

مجالها = $\{x \mid x \in R\}$، مداها = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

الدالة $f(x) = x^3$:

مجالها = $\{x \mid x \in R\}$، مداها = $\{y \mid y \in R\}$

الدالة $f(x) = x^4$:

مجالها = $\{x \mid x \in R\}$، مداها = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

الدالة $f(x) = x^5$:

مجالها = $\{x \mid x \in R\}$، مداها = $\{y \mid y \in R\}$

الدالة $f(x) = x^6$:

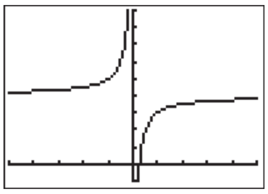
مجالها = $\{x \mid x \in R\}$، مداها = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

33c) $f(x) = x, f(x) = x^3, f(x) = x^5$ دوال متماثلة حول نقطة الأصل.

$f(x) = x^2, f(x) = x^4, f(x) = x^6$ دوال متماثلة حول المحور y.

33d) المجال $= \{x \mid x \in \mathrm{R}\}$ ، المدى $= \{y \mid y \in \mathrm{R}\}$ ، $f(x) = x^{35}$
دالة فردية . لذا، فهي متماثلة حول نقطة الأصل.

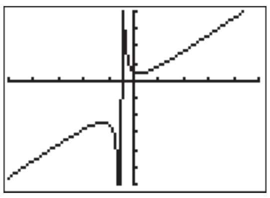
35)



[−5, 5] scl: 1 by [−1, 9] scl: 1

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-1}{x} \\ 0 &= \frac{4x-1}{x} \\ 4x-1 &= 0 \\ -4x &= -1 \\ x &= \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

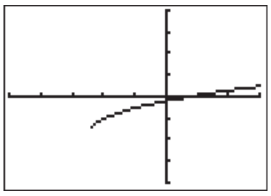
36)



[−30, 30] scl: 6 by [−36, 24] scl: 6

لا توجد اصفار للدالة.

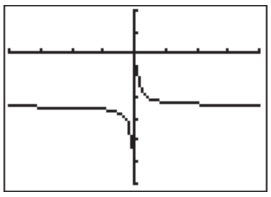
37)



[−25, 15] scl: 5 by [−20, 20] scl: 5

$$\begin{aligned} h(x) &= 2\sqrt{x+12} - 8 \\ 0 &= 2\sqrt{x+12} - 8 \\ 8 &= 2\sqrt{x+12} \\ 4 &= \sqrt{x+12} \\ 16 &= x + 12 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

38)

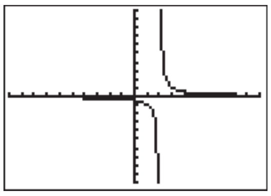


[−20, 20] scl: 5 by [−30, 10] scl: 5

$$\begin{aligned} g(x) &= -12 + \frac{4}{x} \\ -12 + \frac{4}{x} &= 0 \\ \frac{4}{x} &= 12 \\ 12x &= 4 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

42b) إجابة ممكنة: عندما تقترب x من 2 من اليسار تقترب الدالة من $-\infty$. وعندما تقترب x من 2 من اليمين تقترب الدالة من ∞.

42c)

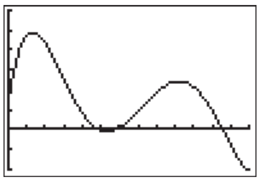


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

إجابة ممكنة: عندما تقترب x من 2 من اليسار تتناقص قيم الدالة بلا حدود. وعندما تقترب x من 2 من اليمين تتزايد قيم الدالة بلا حدود.

42d) إجابة ممكنة: عندما تتزايد x بشكل كبير، أوعندما $x > 3$ ، يتزايد مقام الكسر بشكل كبير. وهذا يؤدي إلى تناقص قيمة الكسر لكنه لا يصل إلى الصفر ، وعليه لا يقطع المنحنى المحور x. وهذا ينطبق على قيم x التي تتناقص بمعدلات كبيرة، وعندما $x < -1$. لذا، عندما تكون x سالبة تكون القيمة سالبة ، ولكنها لا تصل إلى الصفر. عندما تقترب x من 2 يبدأ الفرق d بين x ,2 بالتناقص ، وأما عندما تكون $-1 < d < 1$ ، فيصبح المقام أصغر من البسط مما يجعل قيمة الكسر كبيرة، وإذا كان الفرق موجبًا فستؤول قيمة الكسر إلى موجب ما لانهاية ، أما إذا كان الفرق سالبًا فستؤول قيمة الكسر إلى سالب ما لانهاية. الدالة غير معرفة عند 2؛ لأن الفرق في المقام لا يكون صفرًا.

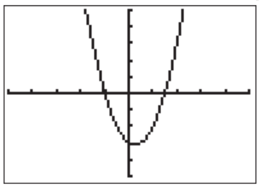
43)



[−5, 5] scl: 1 by [−200, 200] scl: 50

تماثل حول نقطة الأصل، الدالة فردية.

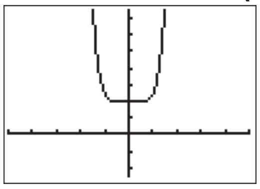
44)



[−10, 10] scl: 2 by [−10, 10] scl: 2

لا يوجد تماثل، الدالة ليست فردية، ولا زوجية.

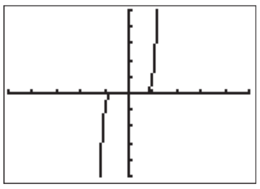
45)



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 15] scl: 2

تماثل حول المحور y ، الدالة زوجية.

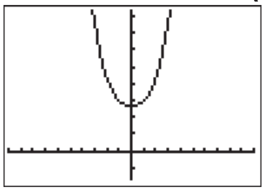
46)



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

تماثل حول نقطة الأصل، الدالة فردية.

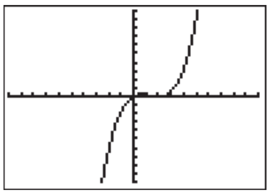
47)



[−10, 10] scl: 1 by [−50, 250] scl: 50

تماثل حول المحور y ، الدالة زوجية.

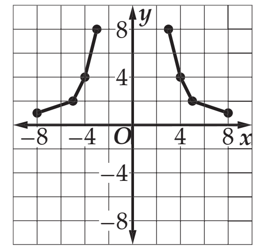
48)



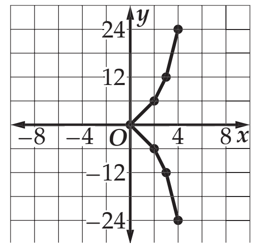
[−5, 5] scl: 1 by [−10, 10] scl: 2

لا يوجد تماثل، الدالة ليست فردية وليست زوجية.

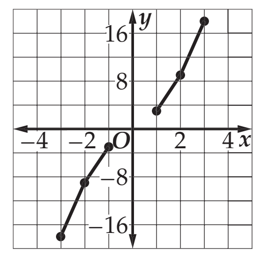
49)



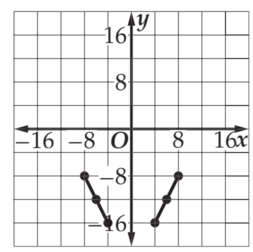
50)



51) يكون التَّمثيل البياني للعلاقة متماثلًا حول نقطة الأصل، إذا كان لأي نقطة (x,y) على التَّمثيل البياني، فإن النقطة $(-x,-y)$ تقع أيضًا على التَّمثيل البياني. لذلك، النقاط $(1,3)$, $(2,9)$, $(3,18)$ تقع على التَّمثيل البياني.

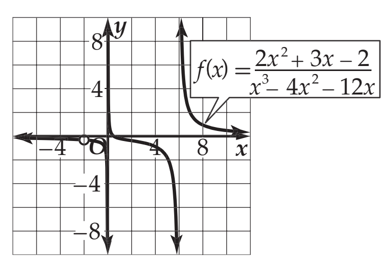


52)



53) يمكن أن يكون للدالة أكثر من مقطع مع المحور x (أكثر من صفر)؛ لأن قيمة x لا تعتمد على قيمة y. في حين قيمة y تعتمد على قيمة x، ويجب أن ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة فقط لـ y. إذا كان للعلاقة أكثر من مقطع للمحور y، فإنها لا تحقق اختبار الخط الرأسي، ولا تكون دالة.

54) المجال $= (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,6)\cup(6,\infty)$ ،
المدى $= \{y \mid y \in R\}$



من التمثيل البياني يمكن أن تكون x أي عدد حقيقي ماعدا $-2, 0, 6$. وتكون y أي عدد حقيقي.

55) خاطئة. إجابة ممكنة: إذا كانت $n = 0$، يكون المدى $= \{y \mid y = 0\}$.
وإذا كانت n سالبة يكون المدى $= \{y \mid y \le 0, y \in R\}$.
وعليه يكون المدى $= \{y \mid y \ge 0, y \in R\}$ عندما تكون n موجبة فقط.

56) صحيحة. إجابة ممكنة: إذا كانت $n = 0$، فإن المدى $= \{y \mid y = 0\}$،
وإذا كانت n سالبة تكون الدالة معرفة في
المجال $= \{x \mid x \le 0, x \in R\}$ ويكون المدى $= \{y \mid y \ge 0, y \in R\}$.
وكذلك، إذا كانت n موجبة تكون الدالة معرفة في
المجال $= \{x \mid x \ge 0, x \in R\}$، ويكون المدى $= \{y \mid y \ge 0, y \in R\}$.

57) خاطئة؛ $y = x^3$ دالة فردية، صورة النقطة $(2, 8)$ بانعكاس حول المستقيم $y = -x$ هي النقطة $(-8, -2)$ و ليست النقطة $(-2, -8)$.

58) صحيحة. إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا زوجياً فإن الدالة تُدوّر مضاعفات $360°$، وهذا يعيد الدالة إلى مكانها الأصلي. وإذا كانت n عددًا فرديًا، فإن الدالة تُدوّر مضاعفات $180°$ حول نقطة الأصل، وهذا مكافئ لانعكاس الدالة حول المحور x الذي يعمل على عكس إشارات y، و الذي يبقى على الدالة زوجية. فمثلاً، في الدالة الزوجية $f(-x) = f(x)$ وبعد دورانها بزاوية مقدارها $180°$ تصبح $-f(-x) = -f(x)$.

59) دالة فردية. إجابة ممكنة: $b(x)$ انعكاس لدالة $a(x)$ حول المحور y، وهي متماثلة حول نقطة الأصل . وعليه، فالدالة $b(x)$ فردية.

60) دالة فردية. إجابة ممكنة: $b(x)$ انعكاس للدالة $a(x)$ حول المحور y، وهي متماثلة حول نقطة الأصل، وعليه فالدالة $b(x)$ فردية.

61) دالة زوجية. إجابة ممكنة: $b(x) = [a(x)]^2$ ،
$b[a(x)] = b[-a(x)] = x^2$, أي أن $b(x) = b(-x)$.

62) دالة زوجية. إجابة ممكنة: $b(x) = b(-x)$, $b(x) = a|x|$.

63) دالة فردية. إجابة ممكنة: $b(x) = [a(x)]^3$، أي أن
$b(-x) = [a(-x)]^3 = -b(x)$.

64) أحيانًا يُمثّل دالة. إجابة ممكنة: منحنى العلاقة المتماثل حول المحور y يُمثّل دالة أحيانًا، ومثله منحنى العلاقة المتماثل حول المستقيم $x = 4$؛ لأن المستقيم $x = 4$ هو إزاحة للمحور y بمقدار 4 وحدات إلى اليمين.

65) لا يُمثّل دالة. إجابة ممكنة: منحنى العلاقة المتماثل حول المحور x لا يُمثّل دالة، ومثله المنحنى المتماثل حول المستقيم $y = 2$؛ لأن المستقيم $y = 2$ هو انسحاب للمحور x بمقدار وحدتين إلى أعلى.

66) لا يُمثّل دالة. إجابة ممكنة: منحنى العلاقة المتماثل حول المحور x، لا يُمثّل دالة مطلقًا.

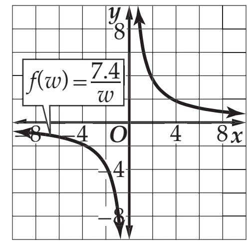
67) إجابة ممكنة: إذا كانت العلاقة متماثلة حول المحور x، فإنه يوجد نقطتان على خط رأسي واحد وعلى بعدين متساويين من المحور x. وهذا يعني أن عنصرًا من مجال الدالة ارتبط بعنصرين من المدى . لذا، فالعلاقة ليست دالة.

الدرس 3-2 ص 78 - 68

8 **a)** نعم متصلة. إجابة ممكنة: بما أن $f(0.4) = \frac{7.4}{0.4} = 18.5$، فإن الدالة معرفة عند $x = 0.4$ ، $\lim\limits_{x\to 0.4} f(w) = 18.5$ ، $f(0.4) = 18.5$.

b) غير متصلة، انفصال لا نهائي. إجابة ممكنة: بما أن $f(0)$ غير موجودة، فإن $f(x)$ منفصلة عند $x = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} f(w)$ ليس لها وجود؛ لأن $f(w)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب w من 0 من اليسار، وتتزايد بلا حدود عندما تقترب w من 0 من اليمين. وعليه، فإن للدالة انفصالاً لا نهائياً عند $w = 0$.

c)



15) واضح من التمثيل البياني أن $f(x)\to\infty$ عندما $x\to-\infty$ ، $f(x)\to\infty$ عندما $x\to\infty$.

x	−10000	−1000	0	1000	10000
$f(x)$	$4\cdot10^{16}$	$4\cdot10^{12}$	0	$4\cdot10^{12}$	$4\cdot10^{16}$

16) واضح من التمثيل البياني أن $f(x)\to\infty$ عندما $x\to-\infty$ ، $f(x)\to-\infty$ عندما $x\to\infty$.

x	−10000	−1000	0	1000	10000
$f(x)$	$5\cdot10^{12}$	$5\cdot10^{9}$	−1	$-5\cdot10^{9}$	$-5\cdot10^{12}$

17) واضح من التمثيل البياني أن $f(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$ ، $f(x)\to\infty$ عندما $x\to\infty$.

x	−10000	−1000	0	1000	10000
$f(x)$	−9995	−995	−0.3333	1005	10005

18) واضح من التمثيل البياني أن $f(x)\to-4$ عندما $x\to-\infty$ ، $f(x)\to-4$ عندما $x\to\infty$.

x	−10000	−1000	0	1000	10000
$f(x)$	−3.9981	−3.9811	−0.8333	−4.0191	−4.0019

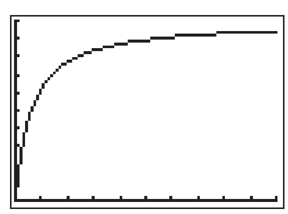
19) واضح من التمثيل البياني أن $f(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$ ، $f(x)\to\infty$ عندما $x\to\infty$.

x	−10000	−1000	0	1000	10000
$f(x)$	−5000	−500	undefined	499.7	4999.7

20) واضح من التمثيل البياني أن $f(x)\to-2$ عندما $x\to-\infty$ ، $f(x)\to-2$ عندما $x\to\infty$.

x	−1000	−100	−10	0	10	100	1000
$f(x)$	−1.99999	−1.9999	−1.997	−5	−1.98	−1.9999	−1.99999

21a)



[0, 200] scl: 20 by [0, 0.5] scl: 0.05

21b) إجابة ممكنة: يبيّن سلوك طرفي التَّمثيل البياني انه إذا زاد تركيز العامل المساعد فإن معدل التفاعل يقترب من 0.5.

x	0	10	100	1000	10000
$R(x)$	0	0.2273	0.4464	0.4941	0.4994

22) 0. إجابة ممكنة عندما $x\to\infty$، فإن قيمة الكسر تقل. لذا، فإن $q(x)$ تقترب من 0.

23) 0 . إجابة ممكنة عندما $x\to\infty$ ، فإن قيمة الكسر تقل. لذا، فإن $f(x)$ تقترب من 0.

24) $\frac{1}{2}$. إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$، فإن الكسر يقترب من $\frac{x}{2x}$.لذا، فإن $m(x)$ تقترب من $\frac{1}{2}$.

25) 0. إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$ ، تقل قيمة الكسر. لذا، فإن $c(x)$ تقترب من 0.

26) ∞؛ إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$, ، فإن بسط الكسر يتزايد. لذا، فإن $k(x)$ تؤول إلى ∞.

27) ∞. إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$ ، فإن $g(x)$ تتزايد وتؤول إلى ∞.

28) المجال = $\{x \mid x\neq 2, x\neq -2, x\in \mathrm{R}\}$

خط التقارب الرأسي $x=2, x=-2$

خط التقارب الأفقي $y=1$

29) المجال = $\{x \mid x\neq -4, x\in \mathrm{R}\}$

خط التقارب الرأسي $x=-4$

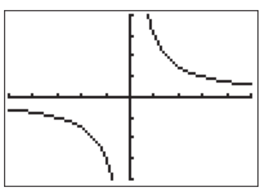
لا يوجد خطوط تقارب أفقية.

30) المجال = $\{x \mid x\neq -3, x\neq -5, x\in \mathrm{R}\}$

خطا التقارب الرأسي $x=-3, x=-5$

خط التقارب الأفقي $y=0$

34a)



[−5, 5] scl: 1 by [$-2\cdot10^8$, $2\cdot10^8$] scl: $5\cdot10^7$

34b)

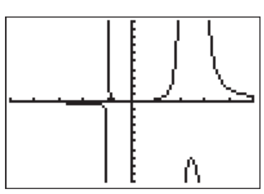
λ	$f(\lambda)$
−10000	-3.10^4
−1000	-3.10^5
−100	-3.10^6
0	غير معرفة
100	3.10^6
1000	3.10^5
10000	3.10^4

واضح من التَّمثيل البياني أن:

$f(\lambda)\to 0$ عندما $\lambda\to-\infty$ ،

$f(\lambda)\to 0$ عندما $\lambda\to\infty$.

35)



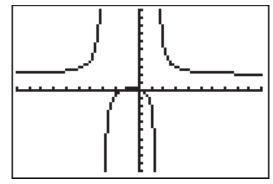
[−5, 5] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

منفصلة، انفصال لا نهائي عند $x=-1, x=2, x=3$؛

سلوك طرفي التَّمثيل البياني $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0, \lim_{x\to\infty} f(x)$

الأصفار: $x=0$

(36



$[-20, 20]$ scl: 2 by $[-20, 20]$ scl: 2

منفصلة: انفصال لا نهائي عند $x = -4$ ، $x = 6$.

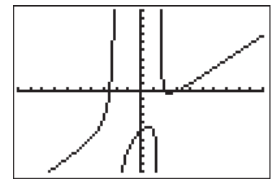
سلوك طرفي التَّمثيل البياني

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$،

$\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$.

الأصفار: $x = -3$

(37



$[-20, 20]$ scl: 2 by $[-20, 20]$ scl: 2

منفصلة، انفصال لا نهائي عند $x = 3$ ، $x = -4$.

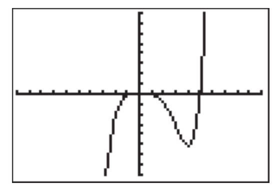
سلوك طرفي التَّمثيل البياني

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$ ،

الأصفار: $x = -5, 4, 6$.

(38



$[-40, 40]$ scl: 4 by $[-400{,}000, 400{,}000]$ scl: 50,000

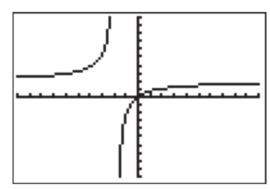
x	$f(x)$
-10000	$-1 \cdot 10^{20}$
-1000	$-1 \cdot 10^{15}$
-100	$-1 \cdot 10^{10}$
0	-5
100	$8 \cdot 10^{9}$
1000	$9.8 \cdot 10^{14}$
10000	$1 \cdot 10^{20}$

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

(39



$[-80, 80]$ scl: 8 by $[-80, 80]$ scl: 8

x	$f(x)$
-10000	16.024
-1000	16.244
-100	18.824
0	$-$
100	13.913
1000	15.764
10000	15.976

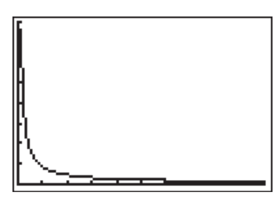
سلوك طرفي التمثيل البياني:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 16$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 16$

(40a $f(n) = \dfrac{3n + 4000}{n}$

(40b



$[0, 1000]$ scl: 100 by $[0, 400]$ scl: 50

(40c BD3. إجابة ممكنة : عندما تؤول n إلى ما لانهاية ∞، فإن $f(n)$ تؤول إلى 9. وعليه يكون معدل تكلفة القميص الواحد BD3 عندما يتزايد عدد القمصان المباعة بشكل كبير.

(41a $f_1(x) = \dfrac{3x^3 + 2}{x^3 + 4}, f_2(x) = \dfrac{-x^3 + 5}{x^3 + 7}, f_3(x) = \dfrac{9x^3 - 6}{x^3 + 8}$

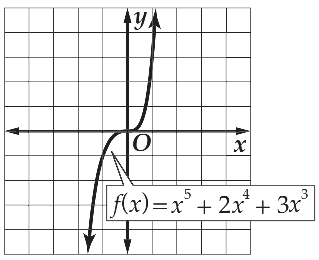
(41b

	$f(x) = \dfrac{a^3 + b}{cx^3 + d}$					
	a	b	c	d	$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim_{x \to \infty} f(x)$
$a > c$	6	-5	3	1	2	2
$a < c$	3	4	12	13	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$a = c$	7	1	7	-4	1	1

(41c إجابة ممكنة: نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من كل من ∞ ، $-\infty$ تساوي $\frac{a}{c}$.

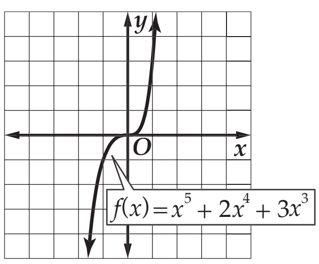
(42a

إجابة ممكنة: إذا كان n عدداً زوجياً، فإن طرفي التمثيل البياني يقتربان من ∞.



(42b

جابة ممكنة: إذا كان n فردياً، فإن طرف التمثيل البياني من اليسار يؤول إلى $-\infty$ وطرف التمثيل البياني من اليمين يؤول إلى ∞.



45 التَّمثيل البياني متصل عندما $x = 3$، وبالتعويض:

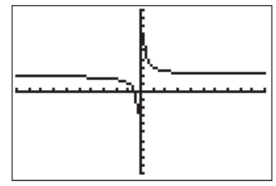
$x = 3$	$(3)^2 + a = (3)\,b + a$
بالتبسيط	$9 + a = 3b + a$
بالطرح	$9 = 3b$
بالقسمة	$b = 3$

التَّمثيل البياني متصل عندما $x = -3$ ، وبالتعويض:

$x = -3$	$(-3)\,b + a = \sqrt{-b+3}$
$b = 3$	$(-3)\,3 + a = \sqrt{-3+3}$
بالتبسيط	$-9 + a = 0$
بالطرح	$a = 9$

50) إجابة ممكنة : للدالة $f(x) = x\,\dfrac{(x+3)}{x}$ انفصال قابل للإزالة عند $x = 0$. هذا الانفصال يمكن إزالته بالقسمة على x. فيصبح التَّمثيل البياني للدالة شبيهًا بالتَّمثيل البياني للدالة $y = x + 3$، والانفصال عند $x = 0$ غير ظاهر على الرغم من أنه موجود. الدالة $f(x)$ تختلف عن الدالة $g(x) = x + 3$ ؛ لأن $f(x)$ غير معرفة عند $x = 0$.

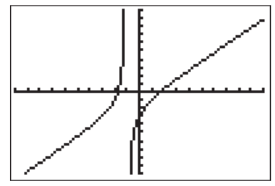
51) $x = -\frac{1}{2}$



[−10, 10] scl: 1; [−10, 10] scl: 1

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$
$$0 = \frac{2x+1}{x}$$
$$0 = 2x + 1$$
$$-1 = 2x$$
$$-\frac{1}{2} = x$$

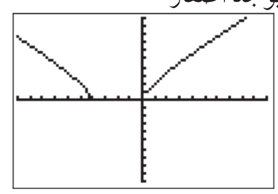
52) $x = -1.732, x = 1.732$



[−10, 10] scl: 1; [−10, 10] scl: 1

$$g(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$$
$$0 = \frac{x^2-3}{x+1}$$
$$0 = x^2 - 3$$
$$3 = x^2$$
$x = \pm\sqrt{3}$ أو
$x = -1.732,$
$x = 1.732$

53) لايوجد أصفار



[−10, 10] scl: 1; [−10, 10] scl: 1

الدرس 2-4 (تأكد) ص 88-79

1A) f متناقصة على الفترة $(-\infty, 2)$ ، ومتزايدة على الفترة $(2, \infty)$.

$(-\infty, 2)$

t	−8	−6	−4	−2	0	2
$f(t)$	197	125	69	29	5	−3

$(2, \infty)$

t	2	4	6	8	10	12
$f(t)$	−3	5	29	69	125	197

1B) h متزايدة على الفترة $(-\infty, -3)$ ، وثابتة على الفترة $(-3, \infty)$.

$(-\infty, 3)$

x	−8	−7	−6	−5	−4	−3
$f(x)$	−13	−10	−7	−4	−1	2

$(-3, \infty)$

x	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	2	2	2	2	2	2

الدرس 2-4 ص 88-79

8) يتضح من التَّمثيل البياني أن لـِ $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0.25 عند $x = \pm 0.5$، وقيمة صغرى محلية مقدارها −9 عند $x = 2.5$، ولها قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ ومقدارها 0.

9) يتضح من التمثيل البياني أن لـِ $f(x)$ قيمة عظمى محلية ومطلقة مقدارها 3 عند $x = -1.5$ ، وعند $x = 1.5$، ولها قيمة صغرى محلية مقدارها −1 عند $x = 0$.

x	−1.6	−1.5	−1.4	…	−0.2	−0.1	0
$f(x)$	2.69	2.94	2.998		−0.84	−0.96	−1

x	0	0.1	0.2	…	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	−1	−0.96	−0.84		2.998	2.98	2.69

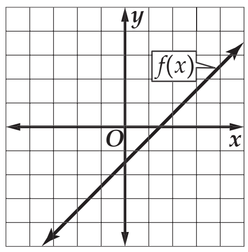
10) يتضح من التَّمثيل البياني أن لـِ $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها −60 عند $x = -2.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 60 عند $x = 2.5$.

11) يتضح من التَّمثيل البياني أن لـِ $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها −1100 عند $x = 3.5$، ولها قيمة صغرى مطلقة مقدارها −1300 عند $x = -3.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$.

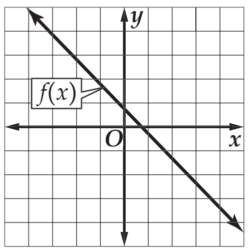
12) يتضح من التَّمثيل البياني أن لـِ $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها −1 عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 2$.

13) يتضح من التَّمثيل البياني أن لـِ $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها −4 عند $x = 1$ ، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 4 عند $x = -1$ ، ولها قيمة عظمى مطلقة مقدارها 22 عند $x = 4$.

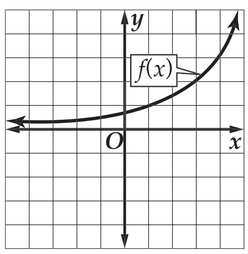
30) إجابة ممكنة:



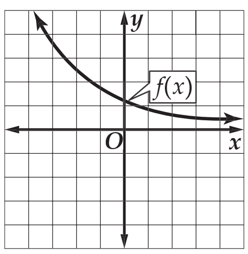
31) إجابة ممكنة:



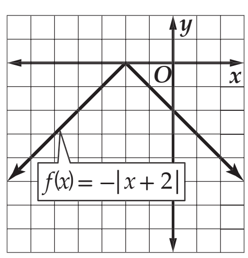
32) إجابة ممكنة:



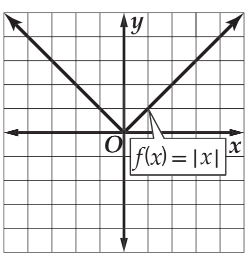
33) إجابة ممكنة:



34) إجابة ممكنة:



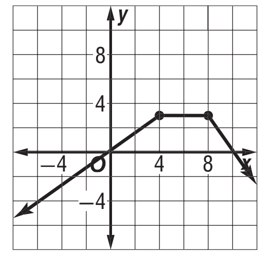
35) إجابة ممكنة:



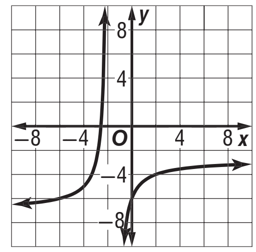
36) $14.46\text{ in} \times 14.46\text{ in} \times 14.46\text{ in}$؛ إجابة ممكنة: الدالة التي تعطي مساحة السطح الخارجي للصندوق بدلالة طول ضلع القاعدة هي $f(w) = 2w^2 + \frac{12{,}096}{w}$. يظهر التمثيل البياني للدالة أن القيمة الصغرى المطلقة تكون عندما $w = 14.46\text{ in}$

42) إجابة ممكنة: أحد أسباب الاختلاف في متوسط معدّل التغيّر هو أن عبدالله قد واجهته إشارات ضوئية في أثناء مسيره مما أدى إلى نقص في معدل المسافة المقطوعة، وسبب آخر أنه سلك طرقًا فرعية في الساعة الأولى من الرحلة قبل أن يدخل طريقًا سريعًا في الساعات الثلاث اللاحقة. الفترتان اللتان يبدو فيهما أنه لم يتحرك قد تكونان فترتي استراحة، أو لتناول الطعام، وربما كان سبب التوقف وجود حادث أدى إلى توقف حركة السير.

43) إجابة ممكنة:

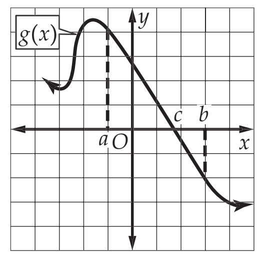


44) إجابة ممكنة:

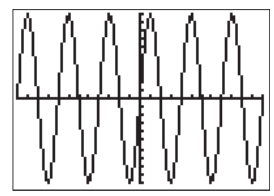


45) إجابة ممكنة: بما أن $f(c)$ قيمة صغرى محلية، فإن $f(a)$ أكبر من $f(c)$ عندما a أصغر من c. لذا، إذا تزايدت قيم x من a إلى c ، فإن قيم الدالة تتناقص.

46) إجابة ممكنة: بما أن $g(a)$ موجبة وg متصلة و $b > a$، فإنه عندما تتزايد قيم المجال من a إلى b، فإن قيم الدالة g تتناقص من الموجب إلى السالب، وعند إحدى النقاط c بين a و b يجب أن يقطع منحنى g المحور x ، ويكون $g(c) = 0$. أي أن c صفر للدالة.



47)



[−1080, 1080] scl: 90 by [−1, 1] scl: 0.1

توجد قيمة عظمى محلية عند عدد لا نهائي من قيم x . وكذلك الحال بالنسبة للقيمة الصغرى المحلية. القيمة العظمى المحلية تساوي 1، وتكون عند
$\{x \mid x = 90° + 360°\, n, n \in Z\}$
والقيمة الصغرى المحلية تساوي -1 وتكون عند
$\{x \mid x = 270° + 360°\, n, n \in Z\}$

48) إجابة ممكنة: عندما تكون الدالة ثابتة على فترة، فإن قيم y متساوية. لذا، فإن قيم y لنقاط القاطع متساوية ، ويكون القاطع في هذه الحالة أفقيًا وميله 0.

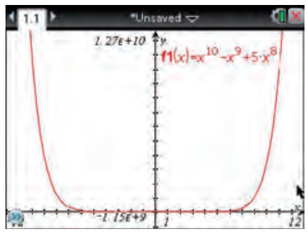
$$m = \frac{f(b) - f(b)}{b - a}$$

$$m = \frac{o}{b - a} \qquad f(a) = f(b) \text{ ،الدالة ثابتة}$$

$$m = o$$

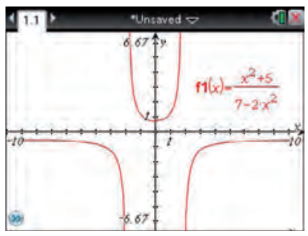
49) إجابة ممكنة: عندما تكون الدالة متزايدة على فترة يكون متوسط مُعدّل التغيّر موجبًا ، وإذا كانت الدالة متناقصة على فترة يكون متوسط التغيّر سالبًا ، وإذا كانت الدالة ثابتة على فترة يكون متوسط مُعدّل التغيّر صفراً.

59)



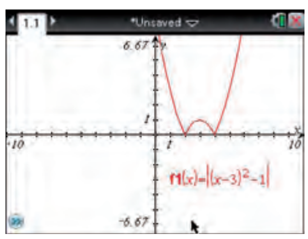
يوضح التَمّثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to \infty$ ، وعندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to \infty$

60)



يوضح التَمّثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\frac{1}{2}$، وعندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\frac{1}{2}$

61)



يوضح التَمّثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to \infty$، وعندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to \infty$

62) يتضح من التمثيل البياني أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة (0.3) تقريبًا , وعليه فإن مقطع المحور y هو 3 تقريبًا أما جبريًّا نجد $f(0)$ حيث $f(0) = \sqrt{0} + 3 = 3$ أي أن مقطع المحور y هو 3 من التمثيل البياني الذي لايقطع المحور x لايوجد أصفار للدالة. أما جبريًّا:

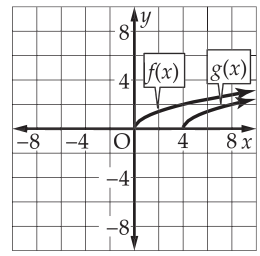
$$f(x) = 0$$

$$\sqrt{x} + 3 = 0$$

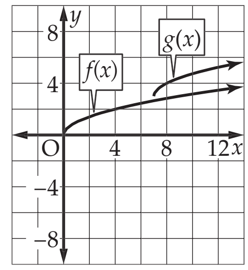
$\sqrt{x} = -3$ ليس لها حل.

الدرس 2-5 ص 89-97

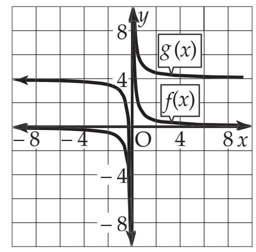
(7



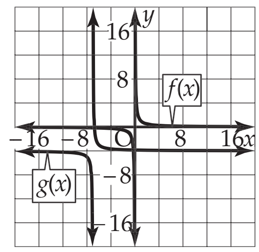
(8



(9



(10



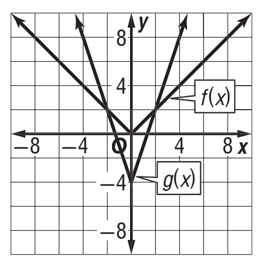
11) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار، $g(x) = [\![x + 3]\!]$.

12) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انعكاس حول المحور x، وانسحاب مقداره 4 وحدات إلى اليمين، $g(x) = -[\![x - 4]\!]$.

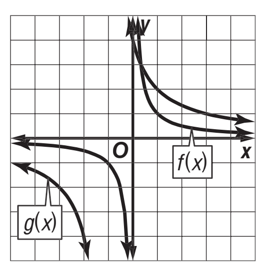
13) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليمين؛ $g(x) = |x - 8|$.

14) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره وحدة واحدة إلى اليمين و وحدتان إلى أسفل، $g(x) = |x - 1| - 2$.

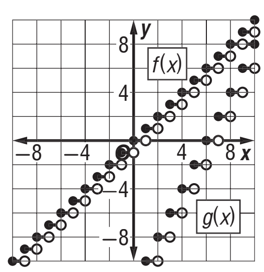
15) $f(x) = |x|$، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار 4 وحدات إلى أسفل للدالة $f(x)$.



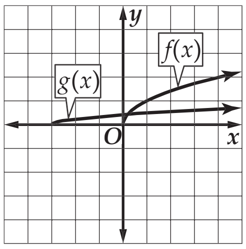
16) $f(x) = \frac{1}{x}$، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



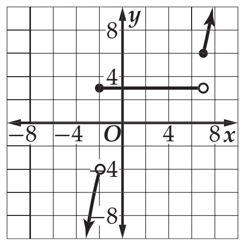
17) $f(x) = [\![x]\!]$، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي، وانسحاب مقداره 6 وحدات إلى اليمين لمنحنى $f(x)$.



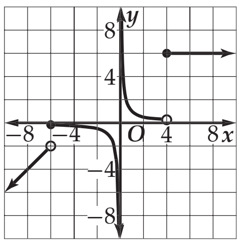
18) $f(x) = \sqrt{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو تضييق رأسي يتبعه انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



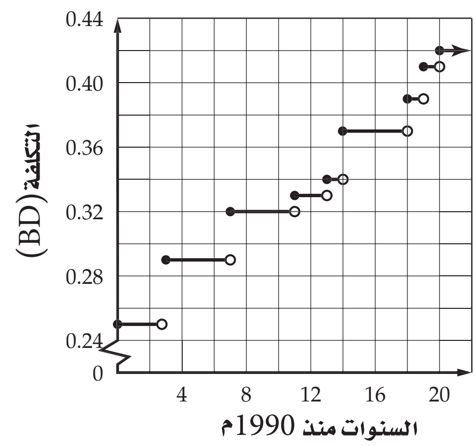
(19



(20

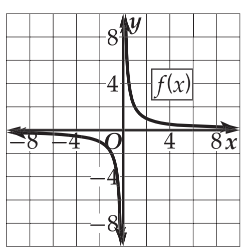


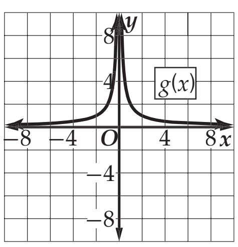
(21

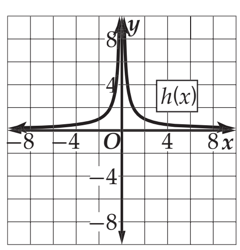


22a) انسحاب وحدتين إلى أعلى، وتضييق رأسي بمعامل مقداره 0.02.

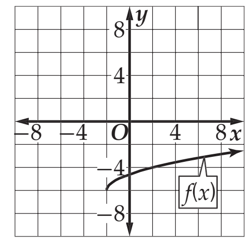
(24

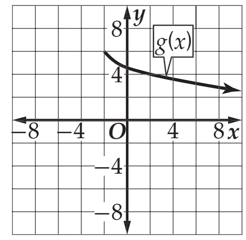


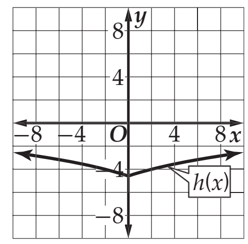




25)







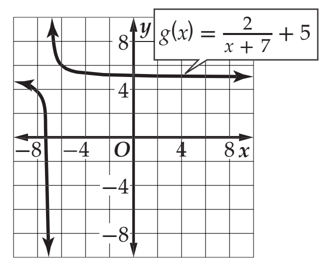
26) انسحاب رأسي بمقدار 5 وحدات هو $f(x) + 5 = \frac{1}{x} + 5$.

انسحاب أفقي بمقدار 7− وحدات هو $f(x-(-7)) = \frac{1}{x+7}$.

توسّع رأسي بمعامل مقداره 2 هو $2f(x) = \frac{2}{x}$.

الدالة الناتجة عن إجراء هذه التحويلات الهندسية هي

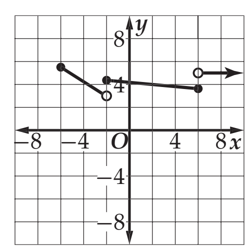
$g(x) = 2f(x-(-7)) + 5 = \frac{2}{x+7} + 5$



28) انسحاب بمقدار 10 وحدات إلى أعلى.

29) توسّع رأسي، يتبعه انسحاب مقداره وحدتان إلى اليسار و 7 وحدات إلى أسفل.

31)



33) إجابة ممكنة: كلاهما ؛ في دالة أكبر عدد صحيح، سحب الدالة الأصلية a وحدة إلى اليسار يماثل سحب الدالة الأصلية a وحدة إلى أعلى.

34) إجابة ممكنة: $f(x)$، $h(x)$ يمثّلان الدالة نفسها. $f(x) = x^3$ دالة فردية. وتكون $g(x) = -x^3$ وهو انعكاس لـِ $f(x)$ حول المحور y . وبالمثل $h(x) = -(-x^3) = x^3$ انعكاس لـِ $g(x)$ حول المحور x ، أيْ أن $f(x) = h(x)$.

35) أحيانًا. إجابة ممكنة: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فإن:

$|f(x)| = f(x) \cdot f(-x) = f(x)$ تكون صحيحة للدوال الزوجية التي تقع قيمها في الربعين الأول والثاني؛ فمثلاً ، عندما $g(x) = x^2 - 4$ ، فإن $g(1) = g(-1)$

وتكون الدالة زوجية في حين $|g(-1)| \neq g(-1)$.

36) أحيانًا: إجابة ممكنة. إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فإن $f(-x) = f(x)$ وبالتعويض في $|f(x)| - = f(-x)$ ينتج أن $|f(x)| - = f(x)$. وهذا صحيح فقط للدوال الزوجية التي تقع قيمها في الرُبعين الثالث والرابع. فمثلاً ؛ عندما تكون $g(x) = -x^2$، فإن المعادلتين $f(x) = f(-x)$ ،$f(x) = -|f(x)|$ صحيحتان.

37) إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بانسحاب 6 وحدات إلى اليسار و 8 وحدات إلى أسفل $g(x) = \sqrt{x+6} - 8$.

38) إجابة ممكنة: تضييق رأسي لـِ $f(x)$ بمعامل قدرة 4 ويكافئ $4f(x)$. تضييق أفقي بمعامل قدره $\frac{1}{4}$ يكافئ $f\left(\frac{1}{4}x\right)$. عند إجراء كل من التحويلين، فإن الناتج يكون $f(x)$، إذا كانت $f(x)$ خطية. وما عدا ذلك فالناتج لا يكون $f(x)$. فمثلاً ؛ إذا كانت $f(x) = x^2$، فإن $4f\left(\frac{1}{4}x\right) = 4\left(\frac{x^2}{16}\right) = \frac{x^2}{4}$ ، و هذه لا تساوي x^2، وعليه فإن $4f\left(\frac{1}{4}x\right) \neq f(x)$.

39) إجابة ممكنة: الترتيب مهم لأنه يمكن الحصول على منحنيات مختلفة بترتيب مختلف بين التحويلات الهندسية. فمثلاً؛ إذا كانت (a, b) نقطة على منحنى الدالة الأصلية وحدث للدالة انسحاب مقداره 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x ، فإن صورة النقطة (a, b) هي $(a, -b-6)$. وبالعكس إذا حدث انعكاس للدالة حول المحور x ، ثم انسحاب مقداره 6 وحدات إلى أعلى، فإن صورة (a, b) هي $(a, -b+6)$.

الدرس 6-2 ص 98-104

1) $(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$، المجال = $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$ ،

$(f-g)(x) = x^2 - \sqrt{x} + 4$، المجال= $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$ ،

$(f \cdot g)(x) = x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$، المجال = $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$ ،

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^{\frac{3}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$ ، المجال = $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

2) $(f+g)(x) = -x^3 + x + 5$ ، المجال= $\{x \mid x \in R\}$ ،

$(f-g)(x) = -x^3 - x + 11$، المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ،

$(f \cdot g)(x) = -x^4 + 3x^3 + 8x - 24$، المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ،

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{8-x^3}{x-3}$ ، المجال = $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$

3) $(f+g)(x) = x^2 + 6x + 8$، المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ،

$(f-g)(x) = x^2 + 4x + 4$، المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ،

$(f \cdot g)(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$، المجال = $\{x \mid x \in R\}$ ،

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 3$ ، المجال = $\{x \mid x \neq -2, x \in R\}$

4) $(f+g)(x)=x^2+10x$ ، المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ،

$(f-g)(x)=x^2-8x$ ، المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ،

$(f \cdot g)(x)=9x^3+9x^2$ ، المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ،

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+1}{9}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,\ x\in R\}$

5) $(f+g)(x)=2x$ ، المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ،

$(f-g)(x)=-14$ ، المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ،

$f\cdot g)(x)=x^2-49$ ، المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ،

$\frac{f}{g}(x)=\frac{x-7}{x+7}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq -7,\ x\in R\}$

6) $(f+g)(x)=x^3+x+\frac{6}{x}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,x\in R\}$ ،

$(f-g)(x)=-x^3-x+\frac{6}{x}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,x\in R\}$ ،

$(f\cdot g)(x)=6x^2+6$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,x\in R\}$ ،

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)\ \frac{6}{x^4+x^2}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,x\in R\}$

7) $(f+g)(x)=\frac{x^2+12}{4x}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,x\in R\}$ ،

$(f+g)(x)=\frac{x^2+12}{4x}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,x\in R\}$ ،

$(f\cdot g)(x)=\frac{3}{4}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,x\in R\}$ ،

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2}{12}$ ، المجال $=\{x \mid x\neq 0,x\in R\}$

8) $(f+g)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+4\sqrt{x}$ ، المجال $=\{x \mid x>0,x\in R\}$ ،

$(f-g)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}$ ، المجال $=\{x \mid x>0,x\in R\}$ ،

$(f\cdot g)(x)=4$ ، المجال $=\{x \mid x>0,x\in R\}$ ،

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{4x}$ ، المجال $=\{x \mid x>0,x\in R\}$

9) $(f+g)(x)=\sqrt{x+8}+\sqrt{x+5}-3$ ،

المجال $=\{x \mid x\geq -5,\ x\in R\}$ ،

$(f-g)(x)=\sqrt{x+8}-\sqrt{x+5}+3$ ،

المجال $=\{x \mid x\geq -5,\ x\in R\}$ ،

$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x^2+13x+40}-3\sqrt{x+8}$ ،

المجال $=\{x \mid x\geq -5,\ x\in R\}$ ،

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5}-3}$ ،

المجال $=\{x \mid x\geq -5,x\neq 4,x\in R\}$

10) $(f+g)(x)=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-4}$ ،

المجال $=\{x \mid x\geq 4,x\in R\}$ ،

$(f-g)(x)=\sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}$ ،

المجال $=\{x \mid x\geq 4,x\in R\}$ ،

$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x^2+2x-24}$ ،

المجال $=\{x \mid x\geq 4,x\in R\}$ ،

$\frac{f}{g}(x)=\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}}$ ، المجال $=\{x \mid x>4,x\in R\}$

12) $[f\circ g](x)=-x^4-2x^3-3x^2-2x+7$ ، $[f\circ g](6)=-1841$ ، $[g\circ f](x)=x^4-17x^2+73$

13) $[f\circ g](x)=-50x^2+145x-101$ ، $[f\circ g](6)=-1031$ ، $[g\circ f](x)=10x^2+25x+1$

14) $[f\circ g](x)=x^4+14x^3+71x^2+154x+105$ ، $[f\circ g](6)=7905$ ، $[g\circ]f(x)=x^4-25x^2+155$

15) $[f\circ g](x)=2+x^8$ ، $[f\circ g](6)=1679618$ ، $[g\circ f](x)=-x^8-4x^4-4$

16) المجال $=\{x \mid x\neq \pm\sqrt{3},\ x\in R\}$ ، $(f\circ g)(x)=\frac{1}{x^2-3}$

17) المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ، $(f\circ g)(x)=\frac{2}{x^2+3}$

18) المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ، $(f\circ g)(x)=x$

19) المجال $=\{x \mid x<6,x\in R\}$ ، $(f\circ g)(x)=\frac{5}{\sqrt{6-x}}$

20) المجال $=\{x \mid x>-8,x\in R\}$ ، $(f\circ g)(x)=\frac{-4}{\sqrt{x+8}}$

21) المجال $=\{x \mid x\in R\}$ ، $(f\circ g)(x)=x+2$

23) إجابة ممكنة: $f(x)=\sqrt{x}+7,g(x)=4x+2$

24) إجابة ممكنة: $f(x)=\frac{6}{x}-8,g(x)=x+5$

25) إجابة ممكنة: $f(x)=|x|-9,g(x)=4x+8$

26) إجابة ممكنة: $f(x)=[\![-3x]\!],g(x)=x-9$

27) إجابة ممكنة: $f(x)=\sqrt{x},g(x)=\frac{5-x}{x+2}$

28) إجابة ممكنة: $f(x)=x^3,g(x)=\sqrt{x}+4$

29) إجابة ممكنة: $f(x)=\frac{8}{x^2},g(x)=x-5$

30) إجابة ممكنة: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-6},g(x)=x+4$

31b) قيمة v لايمكن أن تكون صفرًا. وإذا كانت كذلك ، فلا يوجد طول موجه.

31d) إجابة ممكنة:

$f(v)=a[b(v)]=\frac{h}{25v}$, $b(v)=25v$, $a(v)=\frac{h}{v}$

33) $f(x)=x-\frac{4}{x^2+1},g(x)=\sqrt{x-1}$

34) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{9x}{7},g(x)=-7x$

35) $f(x)=\frac{x-4}{2x-9}+\sqrt{\frac{4}{x-4}}$, $g(x)=x+4$

36) $f(x)=\frac{x^2-4x}{x-2}+\frac{3x-11}{5x-10}$, $g(x)=x+2$

40 مجال $h(x)=\sqrt{x}+3$ هو $\{x|x\ge 0, x\in R\}$
ومجال $g(x)=x^2-6$ هو جميع الأعداد الحقيقية. لذلك مجال $g\circ f$
هو $\{x|x\ge 0, x\in R\}$

$$\begin{aligned}[g\circ f](x)&=g[h(x)]\\&=g(\sqrt{x}+3)\\&=[(\sqrt{x}+3)^2-6]\\&=[x+6\sqrt{x}+9-6]\\&=x+6\sqrt{x}+3\end{aligned}$$

ولأن مجال $f(x)=x+8$ هو جميع الأعداد الحقيقية، فإن مجال
$f\circ g\circ h$ هو $\{x|x\ge 0, x\in R\}$

$$\begin{aligned}[f\circ g\circ h](x)&=f(g[h(x)])\\&=f(x+6\sqrt{x}+3)\\&=(x+6\sqrt{x}+3)+8\\&=x+6\sqrt{x}+11\end{aligned}$$

لذلك، $[f\circ g\circ h](x)=x+6\sqrt{x}+11$ ، حيث $x\ge 0$.

56) $[f\circ g](x)=x$ ، ومجالها هو $\{x\mid x\ge -4, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=x$

57) $[f\circ g](x)=\sqrt{\sqrt{16+x^2}+6}$ ،
$[g\circ f](x)=\sqrt{x+22}$ ، ومجالها هو $\{x\mid x\ge -22, x\in R\}$

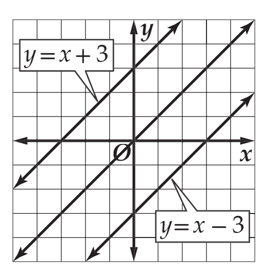
58) $[f\circ g](x)=\sqrt{\sqrt{9-x^2}}$ ،
$[g\circ f](x)=\sqrt{9-x}$ ومجالها هو $\{x\mid 0\le x\le 9, x\in R\}$

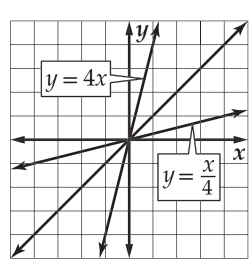
59) $[f\circ g](x)=\frac{24-6x}{12-x}$ ، مجالها هو $\{x\mid x\ne 4, x\ne 12, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=\frac{4x+2}{4x-1}$ ، مجالها هو $\{x\mid x\ne -\frac{1}{2}, x\ne \frac{1}{4}, x\in R\}$

60a) لكل دالة منها $[f\circ g](x)=x$

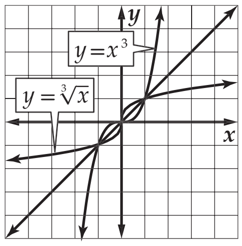
60b) إجابة ممكنة: لكل زوج من الدوال تختصر الأعداد بعضها مع بعض على ألا يكون للتركيب أية معامِلات غير الواحد، ولا يبقى ثوابت.

60c)





60d) إجابة ممكنة: محور الانعكاس بين كل زوج من الدوال هو المستقيم $y=x$.



60e) إجابة ممكنة: و يكافئ كل من التركيبين $[f\circ g](x)$ و $[g\circ f](x)$ الدالة المحايدة.

69) إجابة ممكنة : أحيانًا، إذا كانت $g(x)=x^2+x+1$ و $f(x)=\sqrt{x}$، فإن $[f\circ g](x)=\sqrt{x^2+x+1}$, وهذه ليست خطية .

70 $[g\circ h](x)=\sqrt{\frac{4}{x}+1}=\sqrt{\frac{4+x}{x}}$

مجالها هو $\{x\mid x\ne 0, x\in R\}$

ولأن $x\ge -4$ أو $4+x\ge 0$, $\frac{4+x}{x}\ge 0$

$$[f\circ g\circ h](x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{4+x}{x}}-2}$$

وعندما يكون المقام صفرًا

$\sqrt{\frac{4+x}{x}}-2=0$

$\sqrt{\frac{4+x}{x}}=2$ بإضافة 2 للطرفين

$\frac{4+x}{x}=4$ بتربيع الطرفين

$4+x=4x$ بالضرب التبادلي

$4=3x$ بطرح x من الطرفين

$x=\frac{4}{3}$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

أي أن المجال هو $\{x\mid x\ge -4, x\ne 0, x\ne \frac{4}{3}, x\in R\}$

71) إجابة ممكنة: أولاً، يجب أن تكون $g(x)$ معرفة. لذا، فإن $x \neq 3$. وثانيًا،
يجب أن تكون $f(x)$ معرفة عند قيم $g(x)$، لذا يجب أن تكون $g(x) \geq 1$, وهذا صحيح عندما $3 \leq x \leq 4$. وأخيرًا يجب مراعاة القيود الإضافية على مجال التركيب. والتركيب هو $\sqrt{\frac{4-x}{x-3}}$، ولا يوجد على مجاله قيود إضافية. لذا، فإن مجال التركيب هو
$\{x \mid 3 < x \leq 4, x \in R\}$

80) a) كل قيمة من x ترتبط بقيمة واحدة من y، أي أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الرأسي .

b) المجال = $\{0.8\}$ ، المدى = $[-20, 20]$

c) $37.5°c$ تقريبًا

d) يوجد أصفار للدالة عند $0, 3.2, 6.3$. تقريبًا. ولا يوجد تماثل للدالة. وعليه فإن الدالة ليست فردية ولا زوجية في هذا المجال.

e) الدالة متصلة عند $x = 2$. لأن $f(x)$ ومعرفة عند 2، أي أن $f(2)$ لها وجود. $f(x)$ تؤول إلى القيمة نفسها من جهتي العدد 2 وهي $f(2)$. أي أن:
$\lim_{x \to 2} f(x)$ لها وجود، وأن $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

f) متزايدة على $(4.75, 8) \cup (0, 1.5)$، ومتناقص على $(1.5, 4.75)$

g) -12.3 تقريبًا

h) عندما تتزايد الدالة، فإن درجة حرارة الجسم ترتفع، وعندما تتناقص الدالة، فإن درجة حرارة الجسم تنخفض بمعدل $12.3°C$ في الثانية في الفترة من
$t = 2g$ إلى $t = 5$.

الدرس 2-7 ص 105-112

20) $f(g(x)) = \frac{4(x-9)}{4} + 9 = x - 9 + 9 = x,$

$g(f(x)) = \frac{4x+9-9}{4} = \frac{4x}{4} = x$

21) $f(g(x)) = -3\left(\sqrt{\frac{5-x}{3}}\right)^2 + 5 = \frac{-3(5-x)}{3+5} = x,$

$g(f(x)) = \sqrt{\frac{5-(-3x^2+5)}{3}} = \sqrt{\frac{3x^2}{3}} = \sqrt{x^2} = x$

22) $f(g(x)) = \frac{(\sqrt{4x-32})^2}{4} + 8 = \frac{4x-32}{4} + 8 = x - 8$

$+ 8 = x,$

$g(f(x)) = \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4} + 8\right) - 32} = \sqrt{x^2 + 32 - 32} =$

$\sqrt{x^2} = x$

23) $f(g(x)) = \left(x^{\frac{2}{3}} - 8 + 8\right)^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x,$

$g(f(x)) = \left[(x+8)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} - 8 = x + 8 - 8 = x$

24) $f(g(x)) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}\right)^3 - 6 = \frac{2(x+6)}{2} - 6 = x + 6$

$- 6 = x,$

$g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 6 + 6}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}}$

$= \sqrt[3]{x^3} = x$

25) $f(g(x)) = \frac{\frac{2x+6}{1-x} - 6}{\frac{2x+6}{1-x} + 2} = \frac{\frac{2x+6-6+6x}{1-x}}{\frac{2x+6+2-2x}{1-x}}$

$= \frac{2x+6-6+6x}{2x+6+2-2x} = \frac{8x}{8} = x,$

$g(f(x)) = \frac{\frac{2(x-6)}{x+2} + 6}{1 - \frac{x-6}{x+2}} = \frac{\frac{2x-12+6(x+2)}{x+2}}{\frac{x+2-(x-6)}{x+2}}$

$= \frac{2x-12+6x+12}{x+2-x+6} = \frac{8x}{8} = x$

26) $f(g(x)) = (\sqrt{x+8} - 4)^2 + 8\sqrt{x+8} - 32 + 8$

$= x + 8 - 8\sqrt{x+8} + 16 + 8\sqrt{x+8} - 24 = x + 24 - 24 = x,$

$g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 8x + 8 + 8} - 4 = \sqrt{x^2 + 8x + 16} - 4$

$= \sqrt{(x+4)^2} - 4 = x + 4 - 4 = x$

27) a) إذا كانت $y = 0.5\,mx^2$، فإن معكوسها هو $x = \frac{1}{2}my^2$

المعادلة المعطاة	$2x = my^2$
بالقسمة	$y^2 = \frac{2x}{m}$
بأخذ الجذر للطرفين وتجاهل القيمة السالبة	$4 = \sqrt{\frac{2x}{m}}$
باستبدال y بـ $g(x)$	$g(x) = \sqrt{\frac{2x}{m}}$

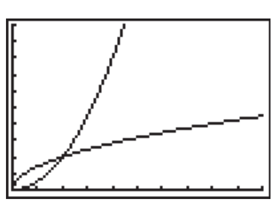
$g(x)$ هي السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية، وهي الطاقة الحركية بالجول. m هي الكتلة بالكيلوجرام.

b) $f[g(x)] = f\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{2x}{m} = x,$

$g[f(x)] = g\left(\frac{1}{2}mx^2\right) = \left(\sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}mx^2\right)}{m}}\right) = \sqrt{x^2} = x$

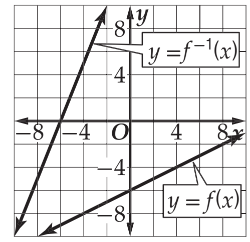
بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، فإن كل من الدالتين تمثل معكوسًا للأخرى.

c)

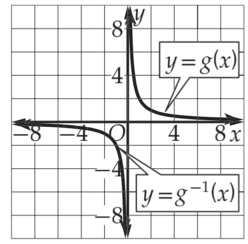


[0, 10] scl: 1 by [0, 10] scl: 1

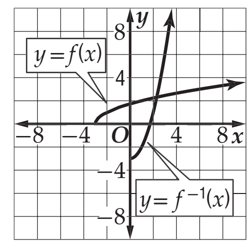
(28



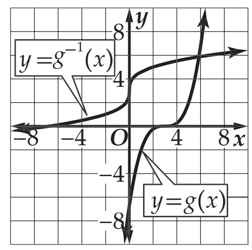
(29



(30



(31



32a) التمثيل البياني للدالة عبارة عن خط مستقيم، وتحقق $f(x)$ اختبار الخط الأفقي. لذا، $f^{-1}(x) = 10x - 420$

32b) تُمثّل x عمولة ياسين خلال أسبوع، أما $f^{-1}(x)$ فتُمثّل مقدار مبيعات ياسين.

32c) $x \geq 0$ ؛ لأنه لا يمكن أن تكون مبيعات ياسين بالسالب.

32d) BD 300

40) لأن رأس القطع المكافئ عند النقطة $(5, 0)$، فإن $x \leq 5$ أو $x \geq 5$ سوف يجعل المعكوس واحد لواحد.

اختر $x \geq 5$.

الدالة الأصلية	$x = (y-5)^2$
بتبديل x مكان y	$\sqrt{x} = y - 5$
بجمع 5 لكلا الطرفين	$\sqrt{x} + 5 = y$
	$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 5$

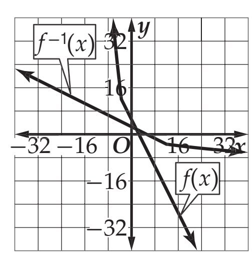
46a) افرض أن x يُمثّل عدد ازهار الجوري
$c(x) = 0.5x + 0.3(75 - x)$

46b) $c^{-1}(x) = 5x - 112.5$ ، x يُمثّل التكلفة الكلية، $c^{-1}(x)$ تُمثّل عدد أزهار الجوري.

46c) مجال $c(x)$ هو $\{x \mid 0 \leq x \leq 75, x \in W\}$
مجال $c^{-1}(x)$ هو $\{x \mid 22.5 \leq x \leq 37.5, x \in R\}$

46d) 33

47) $$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & , 16 \leq x \\ 2.5 - 0.5x & , 13 \geq x \end{cases}$$



48) f^{-1} ليس لها وجود

50) $[f^{-1} o g^{-1}](x) = \dfrac{x+2}{16}$

$[g^{-1} o f^{-1}](x) = \dfrac{x-44}{16}$

$(f o g)^{-1}(x) = \dfrac{x-44}{16}$

$(g o f)^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{16}$

$(f \cdot g)^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{x+49} - 5}{4}$

$(f^{-1} \cdot g^{-1}) = \dfrac{x^2 - 2x - 24}{16}$

51) $[f^{-1} o g^{-1}](x) = \sqrt{x^2 + 3}$

$[g^{-1} o f^{-1}](x) = x - 3$

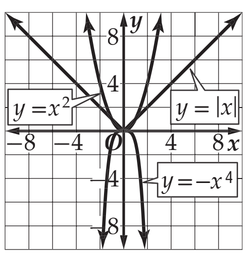
$(f o g)^{-1}(x) = x^4 + 5x^2 + 4$

$(g o f)^{-1}(x) = x + 3$

$(f \cdot g)^{-1}(x) = x^2 + 3$

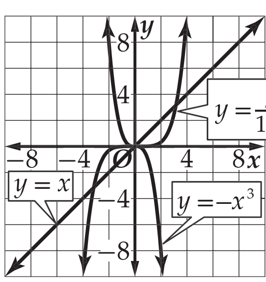
$(f^{-1} \cdot g^{-1}) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

52a) إجابة ممكنة : لا



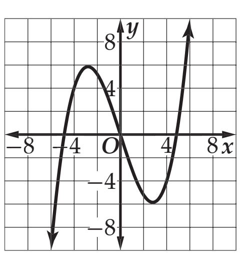
52b) إجابة ممكنة: يمكن التوصل إلى قاعدة تقول إن الدوال الزوجية ليس لها دوال عكسية. إذا كانت الدالة زوجية، فإن $f(x) = f(-x)$.
وعليه، فإن قيمتين من x ترتبطان بقيمة واحدة y ؛ مما يؤدي إلى أن الدالة لا تحقق اختبار الخط الأفقي ، أي أنه لا يوجد للدالة الزوجية دالة عكسية.

52c) إجابة ممكنة : نعم



52d) إجابة ممكنة: يوضح التمثيل البياني أن للدوال الثلاث دوالّ عكسيةً، ولكن هذا لا ينطبق على كل الدوال الفردية؛ فمثلاً الدالة $f(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{47}{15}x$ فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

منحنى هذه الدالة لا يحقق اختبار الخط الأفقي ، أي أنه لا يوجد دالة عكسية لـ f.



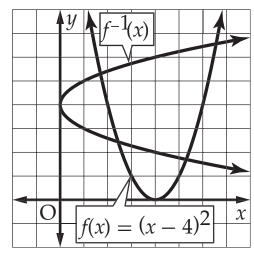
54) إجابة ممكنة: مجال الدالة التربيعية بحاجة إلى تحديد بحيث يظهر نصف المنحنى فقط ليكون لها معكوس ، وفي هذه الحالة يكون المجال $\left(-\infty ، \frac{-b}{2a}\right)$ أو $\left(\frac{-b}{2a}، \infty\right)$ للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$.

55) إجابة ممكنة: خاطئة، الدوال الثابتة خطية لكنها لا تحقق اختبار الخط الأفقي. لذا، فالدوال الثابتة ليست واحداً لواحد ، وعليه لا يوجد لها معكوس.

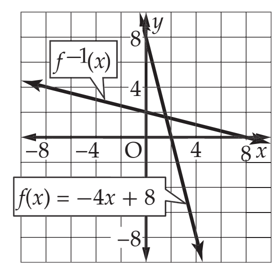
57) إجابة ممكنة: نعم، وإحدى هذه الدوال $f(x) = \frac{1}{x}$.
على الرغم من أن كلتا النهايتين تؤول إلى 0، إلا أنه لا يوجد قيمتان أو أكثر من المجال ترتبطان بقيمة واحدة y . وعليه، فالدالة تحقق اختبار الخط الأفقي.

دليل الدراسة والمراجعة، ص 113-118

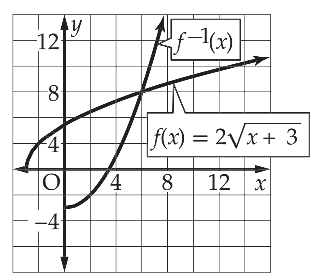
57) $y = \pm\sqrt{x} + 4$



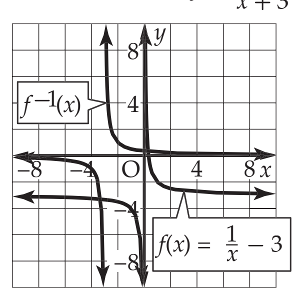
58) $y = -\frac{1}{4}x + 2$



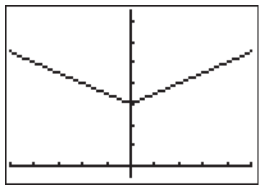
59) $y = \frac{1}{4}x^2 - 3$



60) $y = \frac{1}{x+3}$



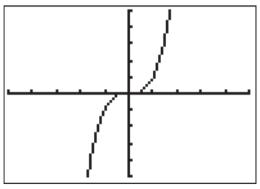
61)



[−5, 5] scl: 1 by [−1, 15] scl: 2

لا

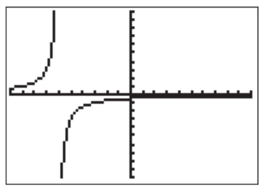
62)



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

نعم

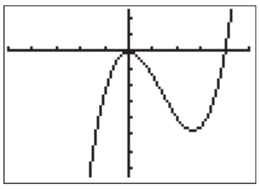
63)



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

نعم

64)

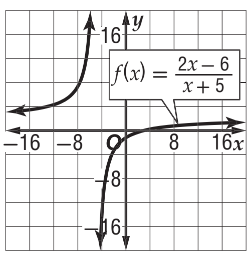


[−5, 5] scl: 1 by [−15, 5] scl: 2

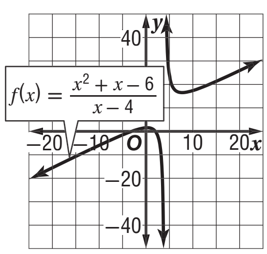
لا

اختبار الفصل ص 119

25) $y = 2$ خط تقارب أفقي لِـ $f(x)$، $x = -5$ خط تقارب رأسي لِـ $f(x)$، مقطع المحور x هو 3 ، مقطع المحور y هو $-\frac{6}{5}$ ، المجال $= \{x | x \neq 5, x \in R\}$



26) أن درجة البسط أكبر من درجة المقام. إذن، لايوجد خط تقارب أفقي للدالة، $x = 4$ خط تقارب رأسي للدالة، مقطعا المحور x هما 2 , 3− ، مقطع المحور y هو $\frac{3}{2}$ ، المجال $= \{x | x \neq 4, x \in R\}$



ملاحظات

الفصل 3

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (121)

	الدرس 3-1 حصتان	الدرس 3-2 حصتان	استكشاف 3-3 حصة
العنوان	**تقدير النهايات بيانيًا**	**حساب النهايات جبريًا**	**معمل الآلة الحاسبة البيانية ميل المنحنى**
الأهداف	• تقدير نهاية الدالة عند قيم محددة. • تقدير نهاية الدالة عند المالانهاية .	• إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند قيم محددة . • إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند المالانهاية.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتقدير ميل منحنى .
المفردات الأساسية	النهاية من جهة واحدة ، النهاية من جهتين	التعويض المباشر الصيغة غير المحددة	
تمثيلات متعددة			
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن •كتاب التمارين ، ص (16) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن •كتاب التمارين ، ص (17) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الدراسة دون ضمن فوق	**المواد** الآلة الحاسبة البيانية
التقنيات لكل درس	مدونة	السبورة التفاعلية	
تنويع التعليم	ص (130 ، 128)	ص (140 ، 138)	

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (148)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

النهايات والاشتقاق

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(23) حصة	(2) حصة	(25) حصة

الدرس 3-3 ثلاث حصص	الدرس 3-4 أربع حصص	الدرس 3-5 ثلاث حصص	الدرس 3-6 خمس حصص
المماس والسرعة المتجهة	**المشتقة**	**المساحة تحت المنحنى والتكامل**	**النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**
• إيجاد معدَل التغيّر اللحظي لدالة عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة. • إيجاد متوسط السرعة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.	• إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية عند نقطة باستعمال المشتقات . • استعمال قانوني الضرب والقسمة لإيجاد المشتقات.	• تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات. • تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.	• ايجاد الدوال الأصلية. • استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ لإيجاد التكامل المحدد.
المماس معدل التغيّر اللحظي قسمة الفرق السرعة المتجهة اللّحظية	المشتقة الاشتقاق المعادلة التفاضلية المؤثر التفاضلي	التجزيء المنتظم التكامل المحدد الحد الأدنى الحد الأعلى مجموع ريمان الأيمن التكامل	الدالة الأصلية التكامل غير المحدد النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.
ص(147)	ص(156)	ص(164)	ص(171)
مصادر الفصل 3 • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن •كتاب التمارين ، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الجداول الالكترونية دون فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن •كتاب التمارين ، ص (19) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن •كتاب التمارين ، ص (20) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 3** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن •كتاب التمارين ، ص (21) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 4 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق
مدونة	الكاميرا التوثيقية	السبورة التفاعلية	مدونة
ص (145، 147)	ص (154، 156)	ص (160، 162)	ص (169، 171)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (172 – 176)
- اختبار الفصل، ص (177)

الفصل 3

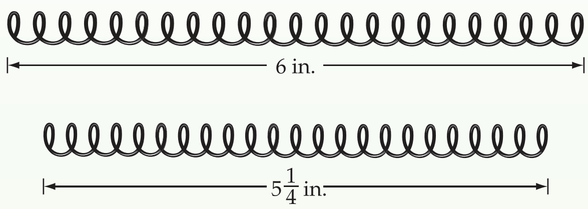
التقويم والمعالجة

التقويم	التشخيص	المرجع	إرشادات المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 3**	**المرجع**		**المرجع**
	التهيئة للفصل الثالث ، ص (121)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة ، ص (121)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق ، والآن ، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	الأمثلة ، تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه ! (الخطوة 4)، التقويم اختبارات قصيرة. زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب كتاب الطالب دليل المعلم دليل المعلم دليل المعلم مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1 الفصل 3 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (148) اختبار منتصف الفصل برنامج بناء الاختبارات	كتاب الطالب مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1 الفصل 3 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 3، ص (172-176) اختبار الفصل، ص (177) برنامج بناء الاختبارات زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1 الفصل 3 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 3**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد اختبارات الإجابة الحرة اختبار المفردات اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	مصادر الفصل

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون احضر إلى الصف بعض النوابض شديدة المقاومة عند ضغطها، واطلب إلى الطلبة ضغط نابض منها وقياس الطول المضغوط منه. وأكّد للطلبة بأن لطول النابض المضغوط نهاية معينة.



المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلبة كتابة فقرة تلخص الفروق بين التكامل المحدد وغير المحدد. على أن يضمّنوا إجاباتهم ذكر أوجه الشبه والاختلاف الموجودة عند إيجاد كل نوع منهما.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلبة عمل لوحة تلخص قواعد الاشتقاق المختلفة، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل. وعلى الطلبة أن يذكروا وصف القاعدة ومثالاً على كل قاعدة، ثم قم بتثبيت اللوحات على جدار الصف؛ لتساعد الطلبة في تذكّر القواعد.

البديل 4 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلبة كتابة خطواتهم؛ لإيجاد مشتقات دوال متعددة. مضمّنين ذلك أمثلةً على كلٍّ قاعدة.

الفصل 3

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 3

مواضيع ذات علاقة من الفصل 1

- تقدير النهايات؛ لدراسة اتصال دالة وسلوك طرفي التمثيل البياني.
- إيجاد متوسط معدل التغيّر باستعمال القاطع.
- إيجاد متوسط معدل التغيّر لدالة.

الفصل 3

- تقدير نهايات الدوال عند قيم محددة، أو عند المالانهاية.
- إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند قيم محددة وعند المالانهاية.
- إيجاد معدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- إيجاد معدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة باستعمال المشتقات.
- استعمال قانوني الضرب والقسمة لإيجاد المشتقات.
- تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال المستطيلات.
- تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.
- استعمال الدوال الأصلية.
- استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ لإيجاد التكامل المحدد.

ما بعد الفصل 3

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- استعمال قواعد الاشتقاق؛ لحساب مشتقات دوال مختلفة.
- استعمال التكامل؛ لحساب المساحة بين منحنيي دالتين.

نظرة على الدروس

3-1 تقدير النهايات بيانيًا

يمكن تقدير نهايات دوال من خلال تكوين جدول لقيمها، أو من خلال تَمثيلها بيانيًا، فإذا اقتربت نهاية الدالة من اليسار ونهايتها من اليمين من القيمة نفسها للدالة، فإن النهاية موجودة.
وإذا تبيَّن أن للدالة خطَّ تقارب رأسي عند نقطة ما، فإن النهاية ليس لها وجود عند تلك النقطة، ويمكن وصف سلوك الدالة عند تلك النقطة بـ $\pm\infty$.

3-2 حساب النهايات جبريًا

تستعمل الطرق الجبرية أيضاً لحساب النهايات، والخطوة الأولى لإيجاد النهاية هي التعويض المباشر للقيمة التي يقترب منها المتغيّر في الدالة، فإذا كان ناتج التعويض صيغة غير محددة مثل $\frac{0}{0}$ ، فإن طرق جبرية أخرى تستعمل لتبسيطها، بحيث يمكننا التعويض مرةً أخرى بشكل مباشر.
ومن الطرق الجبرية المستعملة في حساب النهايات التحليل إلى العوامل، أو إنطاق البسط أوالمقام ثم اختصار العوامل المشتركة، وبعد ذلك يمكننا التعويض المباشر لحساب النهاية. وفي دوال القوى عندما يقترب المتغيّر من ∞، فإن النهاية هي ∞. أما إذا اقترب المتغيّر من $-\infty$، فإن النهاية تكون ∞، أو $-\infty$ وذلك حسب درجة الدالة من حيث كونها زوجية، أو فردية على الترتيب. أما بالنسبة لدوال المقلوب، فإن $0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$.

النهايات والاشتقاق

3-3 المماس والسرعة المتجهة

إن معدل تغيّر الدالة الخطية هو ميل المستقيم نفسه. ومعدل تغيّر دالة غير خطية عند نقطة ما هو ميل مماس منحنى هذه الدالة عند تلك النقطة.

وتستعمل الصيغة $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ؛ لإيجاد معدل التغيّر اللحظي عند النقطة $(x, f(x))$ وتستعمل أيضًا لإيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة، كما تستعمل هذه الصيغة لإيجاد السرعة اللحظية المتجهة عند نقطة، أو لإيجاد معادلة تمكننا من حساب السرعة اللحظية المتجهة عند أي نقطةٍ على منحنى الدالة.

3-4 المشتقة

مشتقة الدالة هي النهاية التي تُستعمل لإيجاد ميل مماس منحنى هذه الدالة عند النقطة نفسها، والاشتقاق هو الاسم الذي يُطلق على عملية إيجاد المشتقة، والجدول أدناه يلخص بعض قواعد الاشتقاق:

	القاعدة	مثال
القوى	إذا كان $f(x) = x^n$، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.	إذا كان $f(x) = x^2$، فإن $f'(x) = 2x$.
الثابت	إذا كان $f(x) = c$ فإن $f'(x) = 0$.	إذا كان $f(x) = 6$، فإن $f'(x) = 0$.
الضرب في عدد حقيقي	إذا كان $f(x) = c\,x^n$، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.	إذا كان $f(x) = 3x^2$، فإن $f'(x) = 6x$.
الجمع والطرح	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.	إذا كان $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$، فإن $f'(x) = 6x + 2 - 0$ $= 6x + 2$

3-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

يعرض هذا الفصل طريقتين لحساب المساحة تحت منحنى دالة. الطريقة الأولى تتم من خلال جمع مساحات مستطيلات صغيرة تكوّن المساحة تحت المنحنى، وتزداد دقة هذه الطريقة كلما زاد عدد المستطيلات المستعملة في الحساب.

أما الطريقة الثانية فهي من خلال التكامل، والذي يستعمل النهايات بدلاً من المستطيلات. وهذه الطريقة أكثر دقة ولا تحتاج لحساب مساحات لعدة مستطيلات.

3-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا أعطينا دالة $F(x)$ مكتوبة على شكل مشتقة لدالة أخرى $F(x)$، فإن الدالة $F(x)$ تُسمى الدالة الأصلية للدالة $f(x)$. وهناك خيارات كثيرة للدالة الأصلية، وذلك لأن الحد الثابت في الدالة الأصلية غير معلوم، والدالة الأصلية للدالة $f(x) = kx^n$ هي: $F(x) = \dfrac{kx^{n+1}}{n+1} + C$ حيث k و n عددان معلومان $n \neq -1$، C أي عدد حقيقي.

وترشدنا النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل إلى طريقة ايجاد التكامل دون اللجوء إلى النهايات، وبما أن العدد الثابت ليس ذا أهمية في التكامل المحدد، فإنه إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن:

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

الفصل 3 ملاحظات

مشروع الفصل

إلى الأسفل ، إلى الأعلى

يستعمل الطلبة ما تعلموه عن النهايات والاشتقاق والتكامل؛ لوصف حركة عربة الأفعوانية المتغيّرة .

- اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية؛ لكتابة ملخص عن حدود الارتفاعات التي تبلغها الأفعوانيات.
- اطلب إليهم مناقشة عدة طرق؛ لاختبار معدلات سرعة عربة الأفعوانية في فترات زمنية مختلفة؛ لمعرفة إن كان وزنها يؤثر على معدل السرعة.
- اطلب إليهم العمل معًا في مجموعات واستعمال المعلومات التي جمعوها خلال البحث في تعريف دالة تُمثّل مسار العربة واستعمال هذه الدالة؛ لإيجاد معدلات سرعة العربة في ثلاث نقاط مختلفة خلال حركتها.
- اطلب إلى كل مجموعة تلخيص ما توصلت إليه، وعرضه في الصف.

المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

التعريف: ينص قانون مشتقة القوة على أنه إذا كانت $f(x) = x^n$، فإن مشتقة الدالة هي $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال: إذا كانت $f(x) = 3x^4$، فإن $f'(x) = 12x^3$.

سؤال: ما مشتقة $5x^2$؟

$10x$

الفصل 3 النهايات والاشتقاق

Limits and Differentiation

فيما سبق

درستُ النهايات ومُعدلات التغيُّر.

الآن

الأفكار العامة

- أحسبُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.
- أجدُ مُعدلات التغيُّر اللحظية.
- أجدُ مشتقات دوال كثيرات الحدود وأحسب قيمها.
- أقرّبُ المساحات تحت المنحنيات باستعمالِ التكامل المحدود.
- أجد الدالة الأصلية، وأستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.

لماذا؟

العجلة الدوّارة يُعد التفاضل والتكامل وسيلة فاعلة ومهمة عند دراسة مُعدلات التغيُّر غير الثابتة . فإذا ركبت العجلة الدوارة يومًا ، فإن سرعتك وتسارعك يتغيران باستمرار مع الزمن بالاعتماد على موقعك ، وستدرس في هذا الفصل مسائل تحتوي مواقف مشابهة.

قراءة سابقة استعن باختبار منتصف الفصل لكتابة ثلاثة أسئلة حول الدروس الثلاثة الأولى؛ لتساعدك على توقع محتوى النصف الأول من الفصل.

قراءة سابقة

شجع الطلبة على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة للفصل الثالث

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

استعمل التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 2-3) **للأسئلة 1-4 انظر ملحق الإجابات**

1) $q(x) = -\frac{2}{x}$ 2) $f(x) = \frac{7}{x}$

3) $p(x) = \frac{x+5}{x-4}$ 4) $m(x) = \frac{7-10x}{2x+7}$

5) **صناعة:** يمكن تقدير معدل تكلفة إنتاج x قطعة من منتج ما بـ $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. صف سلوك الدالة عندما تقترب x من موجب مالانهاية. (الدرس 2-3) **1200**

أوجد متوسط مُعدّل تغيّر كل دالةٍ مما يأتي على الفترة المعطاة: (الدرس 2-4)

6) $g(x) = 2x^2 + 4x - 1, [-2, 1]$ **2**

7) $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6, [-4, -1]$ **−17**

8) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 1, [-2, 4]$ **55**

9) **كتب:** يمكن تقدير تكلفة طباعة x نسخة من كتاب بـ $C(x) = 2x^2 + 140x + 25$. أوجد متوسط مُعدّل تغيّر التكلفة إذا تم طباعة 50 كتابًا بدلًا من 25. (الدرس 2-4) **BD 290**

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي: (مهارة سابقة) **للأسئلة 10-13 انظر الهامش**

10) $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1}$ 11) $h(x) = \frac{2x^2-8}{x-10}$

12) $f(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)(x-4)}$ 13) $g(x) = \frac{x^2-16}{(x-2)(x+4)}$

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتابعة مما يأتي: (مهارة سابقة) **للتمارين 14-19 انظر الهامش**

14) $3, 7, 11, 15, \ldots$ 15) $8, 3, -2, -7, \ldots$

16) $5, -1, -7, -13, \ldots$ 17) $-4, 12, -36, 108, \ldots$

18) $5, -10, 20, -40, \ldots$ 19) $-28, -21, -14, -7, \ldots$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

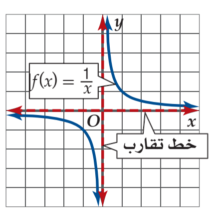
المفردات العامة

النهاية من جهة واحدة	ص 124	one—sided limit
النهاية من جهتين	ص 124	two—sided limit
التعويض المباشر	ص 133	direct substitution
الصيغة غير المحددة	ص 134	indeterminate form
المماس	ص 142	tangent line
معدل التغير اللحظي	ص 142	instantaneous rate of change
السرعة المتجهة اللحظية	ص 144	instantaneous velocity
المشتقة	ص 149	derivative
الاشتقاق	ص 149	differentiation
المعادلة التفاضلية	ص 149	differential equation
المؤثر التفاضلي	ص 149	differential operator
التجزيء المنتظم	ص 159	regular partition
التكامل المحدد	ص 159	definite integral
الحد الأدنى	ص 159	lower limit
الحد الأعلى	ص 159	upper limit
مجموع ريمان الأيمن	ص 159	right Riemann sum
التكامل	ص 159	integration
الدالة الأصلية	ص 165	antiderivative
التكامل غير المحدد	ص 166	indefinite integral
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل	ص 167	Fundamental Theorem of Calculus

مراجعة المفردات

النهاية (limit) مفهوم الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة.

خطوط التقارب (asymptotes) خط رأسي أو أفقي يقترب منحنى الدالة منه دون أن يصله.



الفجوات (hols) نقاط عدم اتصال قابلة للإزالة، وتحدث عندما يكون بين بسط و مقام الدالة النسبية عوامل مشتركة.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر معالجة لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين،

فاختر أحد المصادر الآتية:

كتاب الطالب	الدرسان 4-2 ,3-2
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (120)
كتاب التمارين	الفصل2
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

المستوى 2 دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،

فاختر أحد المصدرين الآتيين

مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

10) $y = 2$

11) $x = 10$

12) $x = -2, x = 4, y = 1$

13) $x = 2, y = 1$

14) $19, 23, 27, 31$

15) $-12, -17, -22, -27$

16) $-19, -25, -31, -37$

17) $-324, 972, -2916, 8748$

18) $80, -160, 320, -640$

19) $0, 7, 14, 21$

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلبة عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل 3؛ لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

3-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-1

تقدير النهايات؛ لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.

الدرس 3-1

تقدير نهاية الدالة عند قيم محددة.

تقدير نهاية الدالة عند المالانهاية .

ما بعد الدرس 3-1

حساب النهايات جبريًا.

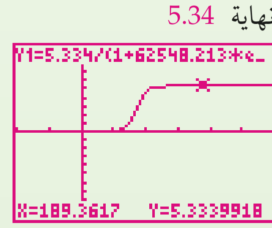
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما خصائص منحنى $f(x) = \dfrac{5.334}{1 + 62548.213e^{-0.129x}}$؟
  يتزايد بمعدل مُطّرد، ثم يتوقف التزايد عند الاقتراب من نهاية ما .
- ما الحد الاعلى، والحد الأدنى لقيمة x لـ $f(x)$؟
  الحد الأدنى: $x = 96$ والحد الأعلى: $x = 108$.
- استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لتَمثيل منحنى الدالة. ووظّف هذا المنحنى في إيجاد نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية 5.34



[−100, 300] scl: 50 by [−10, 10] scl: 1

3-1 تقدير النهايات بيانيًا
Estimating Limits Graphically

فيما سبق

درستُ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أقدر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات الأساسية

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

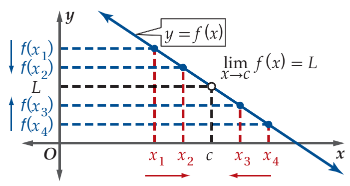
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هل هناك نهايات للأرقام المسجلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة للسيدات 5.05 m. ويمكن استعمال $f(x) = \dfrac{5.334}{1 + 62548.213e^{-0.129x}}$ ، حيث $e \approx 2.7$ ويعرف بالعدد النيبيري، لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1900 م ، ويمكن استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب x من المالانهاية للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

تقدير النهايات عند قيم محددة يتمحور علمُ التفاضلِ والتكامل حول مسألتين أساسيتين:

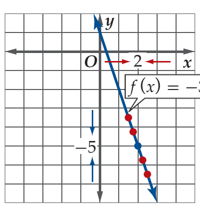
- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لمنحنى دالة والمحور x. وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.



تعلمت في الدرس (2–3) أنه إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L، كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين ، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L ، وتكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.
يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c ، أو $\lim_{x \to c} f(x)$ ، وذلك من خلال تمثيل منحنى الدالة بيانيًا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.

مثال 1 تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم ادعم إجابتك من خلال جدولٍ لقيم $f(x)$.



التحليل بيانيًا يُبيّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x) = -3x + 1$ ، أنه كلما اقتربت x من العدد 2 ، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد 5 − . لذا، فإن بإمكاننا تقدير أن :

$$\lim_{x \to 2}(-3x + 1) = -5 .$$

التعزيز عدديًا كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ⟵   ⟶ x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997	−5	−5.003	−5.03	−5.3

يبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 5− ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

للتدريبين 1A–1B الجداول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات

تأكد

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم ادعم إجابتك من خلال جدول قيم.

1A) $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$ 16

1B) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$ 0

مصادر الدرس 3-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (128)	• تنويع التعليم ، ص (128)	• تنويع التعليم ، ص (130)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين ، ص (16) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

في المثال 1 ، لاحظ أن $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ هي نفسها $f(2)$، إلا أن نهاية الدالة لا تساوي دائمًا قيمة الدالة.

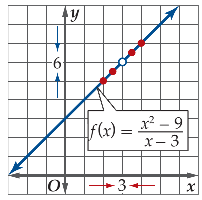
مثال 2 تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدولِ قيم.

التحليل بيانيًا

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ، أنه كلما اقتربت x من العدد 3 ، فإن قيمة الدالة المقابلة لها تقترب من العدد 6 . لذا، فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$



التعزيز عدديًا

كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

x تقترب من 3 ←				← x تقترب من 3		
x 2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يُبيِّن نمط قيم $f(x)$ ، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 3 ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تأكد

للتدريبين 2A–B الجداول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك من خلال جدول قيم.

(2A $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$ **-0.25**

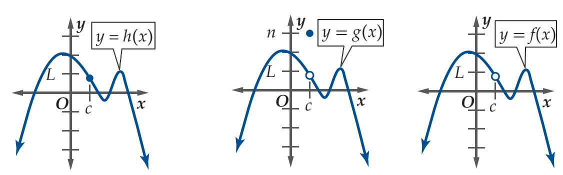
(2B $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$ **6**

في المثال 2 لاحظ أن نهاية $f(x)$ تقترب من العدد 6 عندما تقترب x من العدد 3 بالرغم من أن $f(3) \neq 6$ ، وفي الواقع فإن التعبير $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ غير معرف عندما $x = 3$. وهذه الملاحظة توضِّح مفهومًا هامًّا في النهايات.

مفهوم أساسي عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

التعبير اللفظي إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c ، لا تعتمد على قيمة الدالة عند c.

الأمثلة



$\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، $f(c)$ غير معرفة

$\lim_{x \to c} g(x) = L$ ، $g(c) = n$

$\lim_{x \to c} h(x) = L$ ، $h(c) = L$

من الضروري فهم أن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.

إرشاد تقني

جداول لإنشاء جدول باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة $\boxed{Y=}$ ، ثم استعمل الجدول بالضغط على $\boxed{2nd}$ [TABLE] . للاقتراب من قيمة محددة، غيِّر نقطة البداية والفترة التي تحوي x من خلال الضغط على $\boxed{2nd}$ [TBLESET] وتعديل خيارات TBLESET.

تقدير النهايات عند قيم محددة

الأمثلة 1-5 تُبيِّنُ كيفية استعمال التَّمثيل البياني في تقدير نهايات أنواع مختلفة من الدوال.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 قدِّر $\lim_{x \to -7} (4x + 1)$ باستعمال التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك من خلال جدول لقيم $f(x)$. **-27**، للتَّمثيل البياني انظر الهامش

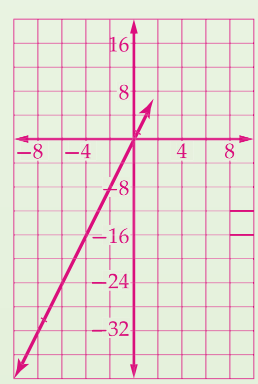
x	$f(x)$
-7.01	-27.04
-7.001	-27.004
-7	
-6.999	-26.996
-6.9	-26.96

2 قدِّر $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ باستعمال التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. **8**، للتَّمثيل البياني انظر الهامش.

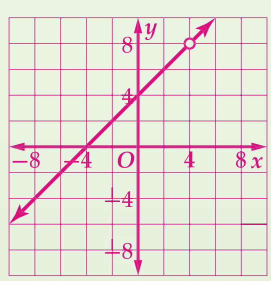
x	$f(x)$
3.99	7.99
3.999	7.999
4	
4.001	8.001
4.01	8.01

إجابات (مثالان إضافيان):

(1



(2



لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من c من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهةٍ واحدة**.

مفهوم أساسي النهايات من جهة واحدة

النهاية من اليمين	النهاية من اليسار
إذا اقتربت قيم $f(x)$ إلى قيمة وحيدة L_1، عندما تقترب x من العدد c من اليمين، فإن: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L_1$، وتقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2، عندما تقترب x من العدد c من اليسار، فإن: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L_2$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2

يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين**، وما يعنيه كونها لها وجود.

مفهوم أساسي النهاية عند نقطة

يكون لنهاية $f(x)$ وجود عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار لهما موجود ومتساويتين، أي أنه إذا كانت:

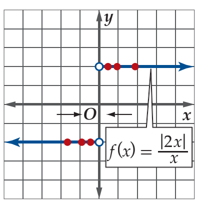
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$ ،

فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

مثال 3 تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

قدِّر كلًّا من النهايات الآتية:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|2x|}{x},\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|2x|}{x},\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x|}{x}$

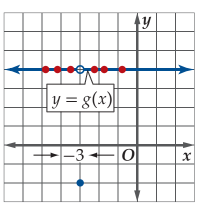


يُبيّن التمثيل البياني لمنحنى $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$ أن:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|2x|}{x} = -2$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|2x|}{x} = 2$

وبما أن كلا النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين، فإن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x|}{x}$ ليس لها وجود.

b) $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ ، حيث $g(x) = \begin{cases} 4 & , x \neq -3 \\ -2 & , x = -3 \end{cases}$



يُبيّن التمثيل البياني لمنحنى $g(x)$ أن:

$\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = 4$ ، $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = 4$

وبما أن كلا النهايتين من اليسار ومن اليمين متساويتان، فإن $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ لها وجود وتساوي 4.

إرشادات للدراسة

وصف النهاية إذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين ولا يمكن التعبير عنهما باستعمال $\infty+$ ، أو $\infty-$ فإننا نقول: إن النهاية ليس لها وجود.

✓ **تأكد**

قدِّر كلًّا من النهايات الآتية:

3A) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، حيث: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , x < 1 \\ 2x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$

3B) $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ ، حيث: $g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , x < -2 \\ -x^2 & , x \geq -2 \end{cases}$

3A) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3,$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3,$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

3B) $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = 3,$ $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = -4,$ $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ ليس لها وجود

مثال إضافي

3 قدِّر كلًّا من النهايات الآتية:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

حيث

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & , x < 1 \\ x + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2,$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3,$

بما أن،

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

إذن،

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ليس لها وجود

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x),\ \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ، حيث

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 0 \\ \frac{1}{4}x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1,$

بما أن،

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

إذن،

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ لها وجود وتساوي -1

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة أنشيء صفحة إلكترونية حول النهايات والاشتقاق، وحدِّث هذه الصفحة بعد نهاية كل درس من خلال إضافة ملاحظات ومقاطع مصورة، ومصادر أخرى، ثم اطلب إلى الطلبة تحديث المعلومات .

إن عدم وجود نهاية للدالة f عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من c ، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞ ، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c ، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

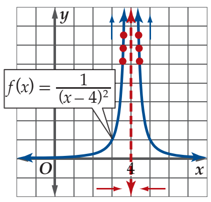
مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-4)^2}$

التحليل بيانيًّا يُبيّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x)=\dfrac{1}{(x-4)^2}$ أن:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{(x-4)^2}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 4^+}\frac{1}{(x-4)^2}=\infty$$



فكلما اقتربت قيم x من العدد 4 ، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، وبما أن كلتا النهايتين من اليسار ومن اليمين ليس لهما وجود. لذا، فإن $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-4)^2}$ ليس لها وجود، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين ∞، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-4)^2}=\infty$.

التعزيز عدديًّا

x تقترب من 4 ← → x تقترب من 4

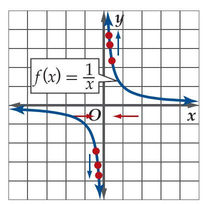
x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10000	100000		100000	10000	100

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 4 من اليسار أو من اليمين ، فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود وذلك يعزز تحليلنا البياني.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

التحليل بيانيًّا يُبيّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x)=\dfrac{1}{x}$ أن:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$



فكلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار ، قلت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليمين.

إن كلتا النهايتين من اليسار واليمين ليس لهما وجود. لذا، فإن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ليس لها وجود، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x=0$ بتعبير واحد، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$ ، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار .

التعزيز عدديًّا

x تقترب من 0 ← → x تقترب من 0

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-10	-100	-1000	0	1000	100	10

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار أو من اليمين ، فإن قيم $f(x)$ إما أن تنقص أو تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.

تأكد

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

4A) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x-3}$ ليس لها وجود

4B) $\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{2}{x^4}$ $\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{2}{x^4}=-\infty$

قراءة الرياضيات

النهاية غير المحدودة تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x\to c$ ، أنه باختيار قيمة لـ x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كلما كانت $|f(x)|$ أكبر.

تنبيه!

النهايات عند اللانهاية من الضروري أن تفهم أن التعبيرين $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$ هما فقط وصف للحالة التي بسببها $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ليس لها وجود، إذ لا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ عددين حقيقيين.

مثال إضافي

4 قدِّر كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}$ ∞

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^3}$ ليس لها وجود

التركيز في المحتوى الرياضي

النهايات إن التعريف الرياضي للنهاية هو $\lim\limits_{x\to p}f(x)=L$ إذا وفقط إذا وجد لأي عدد $\varepsilon>0$ ، يوجد عدد $\delta>0$ بحيث يكون $|f(x)-L|<\varepsilon$ عندما يكون $0<|x-p|<\delta$.

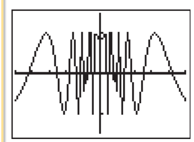
لا تعتمد قيمة النهاية على قيمة $f(p)$، ولكنها تعتمد على قيمة الدالة في جوار p.

مثال إضافي

5 قدّر $\lim_{x\to 0} (x \sin x)$. **0**

إرشاد تقني

التذبذب اللانهائي يمكنك استعمال خاصية TRACE في الآلة الحاسبة البيانية لتقريب نهاية الدالة، إلا أنه لا يمكنك الوثوق دائمًا بالآلة الحاسبة البيانية، ففي مثال 5 تستعمل الآلة الحاسبة عددًا محدودًا من النقاط لتمثيل المنحنى، في حين أن للدالة عددًا لانهائيًا من التذبذبات بالقرب من العدد 0.

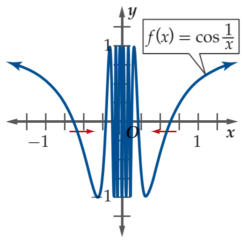


[−0.25, 0.25] scl: 0.05 by [−1.5, 1.5] scl: 1

لايكون للنهاية وجود أيضًا عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c.

مثال 5 النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$.



يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ أن قيم $f(x)$ تتذبذبُ بشكل مستمر بين العددين 1 ، −1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0 ، مما يعني أنه لأي قيمة x_1 القريبة من صفر، بحيث $f(x_1) = 1$ ، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًّا من صفر مثل x_2 ، بحيث $f(x_2) = -1$ ، وبالمثل لأي قيمة x_3 القريبة من الصفر، بحيث $f(x_3) = -1$ ، يمكنك إيجاد قيمة مثل x_4 قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4) = 1$.

أي أن $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ ليس لها وجود.

تأكد

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

5A) $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ ليس لها وجود

5B) $\lim_{x\to 0} (x^2 \sin x)$ 0

نلخِّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة ليس لها وجود.

ملخص المفهوم أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود باقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو من اليمين أو من كلا الجهتين.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c.

تقدير النهاية عند المالانهاية درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم x من عدد ثابت c ، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخَّص لرموز هذه النهايات.

مفهوم أساسي النهايات عند المالانهاية

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإننا نقول: إن $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإننا نقول: إن $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

درست سابقًا، أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x\to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$

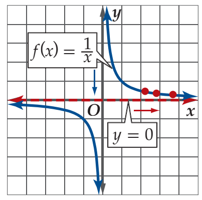
126 الفصل 3 النهايات والاشتقاق

مثال 6 تقدير النهاية عند اللانهاية

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

التحليل بيانيًّا يُبيّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x)=\frac{1}{x}$ أن $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}=0$ ، فكلما زادت قيم x اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.



التعزيز عدديًّا

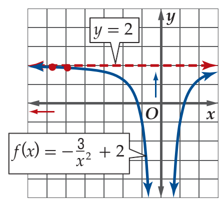
x تقترب من ∞

x	10	100	1000	10,000	100,000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما زادت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0. ✓

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{x^2}+2\right)$

التحليل بيانيًّا يُبيّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x)=-\frac{3}{x^2}+2$ أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)=2$ ، فكلما قلَّت قيم x، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.



التعزيز عدديًّا

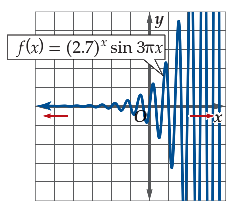
x تقترب من $-\infty$

x	−100,000	−10,000	−1000	−100	−10
$f(x)$	1.99999	1.99999	1.99999	1.9997	1.94

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 2.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$

التحليل بيانيًّا يُبيّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x)=(2.7)^x \sin 3\pi x$ أن:
$\lim\limits_{x\to-\infty}(2.7)^x \sin 3\pi x=0$ فكلما قلَّت قيم x، تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0 .
في حين يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty}(2.7)^x \sin 3\pi x$ ليس لها وجود ، فكلما ازدادت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدةً.



التعزيز عدديًّا

x تقترب من $-\infty$ x تقترب من ∞

x	−100	−50	−10	0	10	50	100
$f(x)$	3×10^{-44}	-2.0×10^{-22}	−0.00005	0	21966	4.8×10^{21}	-2.0×10^{43}

يتضح من نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0 ، في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم x.

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب أفقي $y=0$ ، بينما تشير النهاية في مثال 6b إلى وجود خط تقارب أفقي $y=2$.

تنبيه!

السلوك المتذبذب إن تذبذب الدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. فإذا كان التذبذب غير محدود بين قيمتين مختلفتين، فالنهاية ليس لها وجود، أما إذا كان التذبذب متقاربًا نحو عدد معين، فالنهاية لها وجود.

تقدير النهاية عند المالا نهاية

المثالان 6 ، 7 يبيِّنان كيفية تقدير النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$.

مثال إضافي

6 قدّر كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)$ 1

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}-1\right)$ -1

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ ليس لها وجود

إرشادات للمعلم الجديد

خطوط التقارب للدالة سلوك غير محدود عند خطوط التقارب الرأسية، ويمكن وصف هذا السلوك بـ $\pm\infty$ في حين تكون نهاية الدالة التي لها خَط تقارب أفقي $y=c$ مساوية لـِ c عند اقتراب x من ∞ أو $-\infty$.

مثال إضافي

7 **a) بكتيريا:** يُمكن نمذجة نمو مجتمع بكتيري بالدالة $B(t)=\frac{675}{1+135(2.7)^{-0.6t}}$، حيث t الزمن بالساعات. قدّر $\lim\limits_{t\to\infty} B(t)$ ، وفسِّر معناها إذا كان لها وجود.

$\lim\limits_{t\to\infty} B(t)=675,$ المجتمع البكتيري يصل إلى 675 كحد أقصى مع مرور الزمن.

b) سكان: يُعطى عدد سكان مجتمع ما بالعلاقة $P(t)=0.7(1.1)^t$، حيث t الزمن بالسنوات. قدّر $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$، وفسِّر معناها إذا كان لها وجود.

$\lim\limits_{t\to\infty} P(t)=\infty$؛ أي أن عدد سكان المجتمع سيزداد مع مرور الزمن بلا حدود.

تأكد

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

6A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$ -3

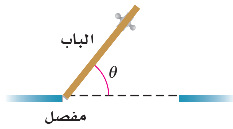
6B) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2.7)^x$ 0

6C) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ ليس لها وجود

يمكنك استعمال التمثيل البياني أو الطريقة العددية لتقدير النهايات عند المالانهاية في كثير من المواقف الحياتية.

مثال 7 من واقع الحياة — تقدير النهاية عند المالانهاية

هيدروليك: تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُرِكَ لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ تمثل زاوية فتحة الباب θ بعد t ثانية. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)$، وفسِّر معناها إذا كان لها وجود.



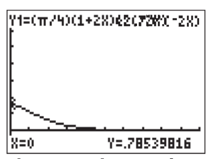
الربط مع واقع الحياة

تستعمل الأنظمة الهيدروليكية في العديد من المجالات، ومنها فرامل السيارات والأبواب الثقيلة وغيرها.

قدِّر النهاية

مَثِّل منحنى $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $t=0$ ، فإن $\frac{\pi}{4}\approx 0.785\approx\theta(t)$.

لاحظ أنه كلما زادت قيم t ، فإن قيم θ تقترب من العدد 0. أي أن $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)=0$.



[0, 5] scl: 0.5 by [−0.5, 3.5] scl: 0.5

فسِّر النتيجة

إن قيمة النهاية 0 في هذه المسألة، تعني أن الزاوية التي يصنعها الباب مع وضع الإغلاق مع مرور الزمن هي 0 rad. بمعنى أنه بعد مرور زمن أطول ، فإن الباب سيقترب من وضع الإغلاق التام.

تأكد

7) كهرباء: تُعطى قيمة الجهد الكهربائي في منطقة بالعلاقة $V(t)=165\sin 120\pi t$ ، حيث t الزمن بالثواني.

قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)$ إذا كان لها وجود، وفسِّر النتيجة.

7) $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)$ ليس لها وجود، حيث تتذبذب قيم $V(t)$ بين 165− و 165. كلما ازدادت t .

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلِّمون الحركيُّون استعمل شريطًا لاصقًا أو حبلًا؛ لرسم مستوى إحداثي على سطح الأرض، واطلب إلى أحد الطلبة الوقوف على نقطة الأصل، ثم اطلب إلى مجموعة طلبة أن يقفوا ليشكّلوا منحنى دالة، وناقشهم في قيمة نهاية الدالة باستعمال الاحداثيات x لمواقعهم، ثم اطلب إليهم تحديد قيم جديدة لـِ x إذا وقفوا خارج المنحنى الذي كونوه، وقارن بين نتائجهم.

تدرب وحل المسائل

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. (المثالان 1, 2) للتمارين 8–1 للجداول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات

1) $\lim_{x \to 5} (4x - 10)$ **10**

2) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}x^5 - 2x^3 + 3x^2\right)$ **12**

3) $\lim_{x \to -2} (x^2 + 2x - 15)$ **−15**

4) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$ **−3**

5) $\lim_{x \to 0} [5(\cos^2 x - \cos x)]$ **0**

6) $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ **4**

7) $\lim_{x \to 6} (x + \sin x)$ **5.72**

8) $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$ **−9**

قدِّر كل نهاية مما يأتي: (مثال 3)

9) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x}$ **0**

10) $\lim_{x \to 0^-} \frac{|4x|}{x}$ **−4**

11) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{|x|}$ **0**

12) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ **1**

13) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{|2x + 1|}{x}$ **0**

14) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{|x + 2|}$ **ليس لها وجود**

15) $\lim_{x \to 0^-} (\sqrt{-x} - 7)$ **−7**

16) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ **10**

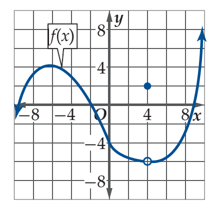
17) $\lim_{x \to 0} \frac{|3x|}{2x}$ **ليس لها وجود**

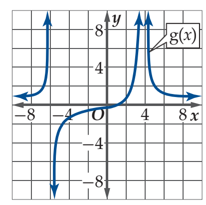
18) $\lim_{x \to -1} \frac{|x + 1|}{x^2 - 1}$ **ليس لها وجود**

19) $\lim_{x \to 0} f(x)$ ، $f(x) = \begin{cases} x - 5 & , \ x < 0 \\ x^2 + 5 & , \ x \geq 0 \end{cases}$ **ليس لها وجود**

20) $\lim_{x \to 0} f(x)$ ، $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & , \ x < 0 \\ \frac{2x}{x} & , \ x \geq 0 \end{cases}$ **2**

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كان لها وجود: (الأمثلة 4-1)





21) $\lim_{x \to -4} f(x)$ **4**

22) $\lim_{x \to 4} g(x)$ **−6**

23) $\lim_{x \to 4} f(x)$ **∞**

24) $\lim_{x \to -6} g(x)$ **ليس لها وجود**

قدِّر كل نهاية مما يأتي: (الأمثلة 6-4)

25) $\lim_{x \to -4} \frac{-17}{x^2 + 8x + 16}$ **−∞**

26) $\lim_{x \to 4} \frac{|x|}{x - 4}$ **ليس لها وجود**

27) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{x^2 - 10x + 25}$ **∞**

28) $\lim_{x \to 6} \frac{5}{(x - 6)^2}$ **∞**

29) $\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 7x^4 - 4x + 1)$ **−∞**

30) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 22}{4x^3 - 13}$ **0**

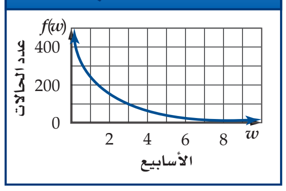
31) $\lim_{x \to \infty} x \cos x$ **ليس لها وجود**

32) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$ **−1**

33) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin |x|}{x}$ **ليس لها وجود**

34) $\lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$ **0**

35) **دواء:** تم توزيع لقاح للحدِّ من عدوى مرض ما. ويُبيِّن التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح. (مثال 7) للفرعين a, b انظر الهامش



a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w \to 1} f(w)$ ، $\lim_{w \to 3} f(w)$.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w \to \infty} f(w)$ إذا كان لها وجود، وفسِّر النتيجة.

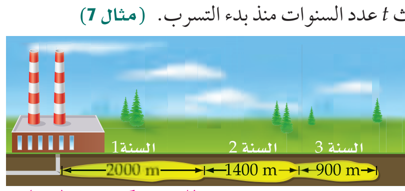
36) **برامج تلفزيونية:** يُقدَّر عدد مشاهدي أحد البرامج التلفزيونية اليومية بالدالة $p(d) = 12(1.25012)^d - 12$ ، حيث d رقم اليوم منذ أول يوم للبرنامج. (مثال 7) a–c انظر الهامش

a) مثِّل منحنى الدالة $p(d)$ بيانيًّا في الفترة $0 \leq d \leq 20$.

b) قدِّر عدد مشاهدي البرنامج في اليوم: الخامس، العاشر، العشرين. ما عدد مشاهدي البرنامج بعد شهرين؟ ($d = 60$)

c) قدِّر $\lim_{d \to \infty} p(d)$ إذا كان لها وجود، وفسِّر النتيجة.

37) **كيمياء:** تتسرَّب مادة سامة من أحد أنابيب الغاز المثبتة تحت الأرض كما هو مبين في الشكل أدناه. ويعبِّر عن المسافة الأفقية التي تقطعها المادة المتسربة بالدالة $d(t) = 2000(0.7)^{t-1}, t \geq 1$ ، حيث t عدد السنوات منذ بدء التسرب. (مثال 7)



للفروع a – d انظر ملحق الإجابات

a) مثِّل منحنى الدالة بيانيًّا في الفترة $1 \leq t \leq 15$.

b) استعمل التمثيل البياني لإيجاد قيم d عندما $t = 5, 10, 15$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t \to \infty} d(t)$.

d) هل من الممكن أن تصل المادة المتسربة لمستشفى يقع على بُعد 7000 m من موقع التسريب؟ تذكَّر أن مجموع المتسلسلة الهندسية هو $\frac{a_1}{1 - r}$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 37 – 1 للتأكد من فهم الطلبة .

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه !

أخطاء شائعة في التمارين 13 – 9 ذكِّر الطلبة أن نهاية الدالة عند c من أي جهة يمكن أن تكون موجودة، على الرغم من أن الدالة يمكن أن تكون غير معرَّفة عند c ، أو النهاية ليس لها وجود عند c.

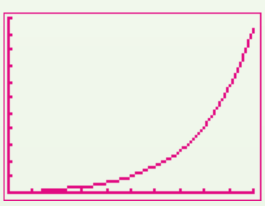
إجابات:

35a) $\lim_{w \to 3} f(w) = 100$، $\lim_{w \to 1} f(w) = 250$

35b) 0، إجابة ممكنة: سيتمكن اللقاح من التخلص من العدوى مع مرور الوقت.

36

a)



[0, 20] scl: 2 by [0, 1100] scl: 100

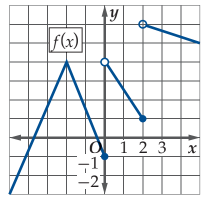
b) 25, 100, 1031، نحو 7880000 شخص سوف يشاهدون البرنامج بعد مرور شهرين .

c) ∞، إجابة ممكنة: تشير الإجابة إلى تزايد عدد مشاهدي بشكل البرنامج لا نهائي.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	48، 49، 51، 52، 61 – 54
ضمن ضمن المتوسط	47 – 39 فردي، 48، 49، 51، 52، 61 –54
فوق فوق المتوسط	61 – 38

للدالة الممثَّلة بيانيًّا أدناه، قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كان لها وجود:



38) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **−1**

39) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **4**

40) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **ليس لها وجود**

41) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **1**

42) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **6**

43) $\lim_{x\to 1} f(x)$ **2.5**

آلة حاسبة بيانية: حدِّد ما إذا كانت النهاية لها وجود أو ليس لها وجود في كل مما يأتي. وإذا لم يكن لها وجود فصف التمثيل البياني للمنحنى عند نقطة النهاية:

44) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ **لا؛ خط تقارب رأسي**

45) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x}{x^2-x-2}$ **58) لا؛ خط تقارب رأسي**

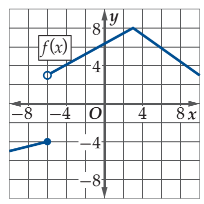
46) $\lim_{x\to 0} 3\cos\frac{\pi}{x}$ **لا؛ تذبذب**

47) $\lim_{x\to -5} \frac{|x+5|}{x+5}$ **انظر الهامش**

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **اكتشف الخطأ:** قال علي: إن نهاية الدالة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب x من -6 هي -4 . في حين قال محمد: إنها 3. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

كلاهما على خطأ، إذا اقتربت الدالة من قيمتين مختلفتين من اليمين واليسار، فإن النهاية ليس لها وجود عند تلك النقطة.



49) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على $f(x)$، بحيث يكون لـ $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود، و $f(0)$ ليس لها وجود، ومثالًا على دالة أخرى $g(x)$، بحيث تكون $g(0)$ لها وجود، ولكن $\lim_{x\to 0} g(x)$ ليس لها وجود. **انظر ملحق الإجابات**

50) **تحدٍّ:** إذا كان $g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. فقدِّر كلًّا من $\lim_{x\to 2} g(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$. وإذا كان $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$، فماذا يمكنك القول عن $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

51) **تبرير:** حَدِّد فيما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك.

إذا كان $f(c) = L$، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$. **انظر ملحق الإجابات**

52) **مسألة مفتوحة:** مَثِّل بيانيًّا منحنى دالة تحقق كلًّا مما يأتي: $f(2) = 5$, $f(0) = 2$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$ ، و $\lim_{x\to 2} f(x)$ ليس لها وجود. **انظر ملحق الإجابات**

53) **تحدٍّ:** قدِّر كلًّا من النهايات الآتية للدالة f.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 \;, & x < -1 \\ -1 \;, & -1 \le x \le 0 \\ x^2 \;, & 1 < x \le 2 \\ x-3 \;, & x > 2 \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **ليس لها وجود** b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **ليس لها وجود** c) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **−1**

54) **اكتب:** وضِّح طريقتك لتقدير نهاية دالة متصلة، ثم بيِّن الفرق بين هذه الطريقة وطريقة تقدير نهاية دالة غير متصلة. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

للتمرينين 55, 56 انظر ملحق الإجابات

55) اثبت صحة المتطابقة. (الدرس 1-2)

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right) = \cos^2\theta$$

56) ابحث في اتصال $h(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$ ، عندما $x = -5$ ، $x = 5$. وإذا كانت الدالة h منفصلة فحدِّد نوع الانفصال، وهل هو انفصال لا نهائي، أو انفصال قفزي، أو انفصال غير قابل للإزالة. (الدرس 2-3)

57) أوجد متوسط مُعدّل تغيّر $f(x) = \sqrt{x-6}$ في الفترة $[8, 16]$ (الدرس 2-4) **0.219**

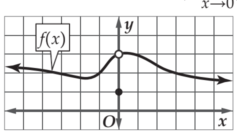
استعمل منحنى الدالة الأم $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل؛ كلٍّ من الدالتين الآتيتين: (الدرس 2-5) **للتمرينين 58, 59 انظر ملحق الإجابات**

58) $g(x) = \sqrt{x+3}$

59) $g(x) = \sqrt{x+6} - 4$

تدريب على اختبار معياري

60) باستعمال التمثيل البياني أدناه لمنحنى $y = f(x)$، ما قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$ (إن وجدت)؟ **C**



A 0

B 1

C 3

D النهاية ليس لها وجود.

61) أيٌّ مما يأتي يصف التمثيل البياني لمنحنى $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ؟ **A**

I للدالة نقطة انفصال لا نهائي.

II للدالة نقطة انفصال قفزي.

III للدالة نقطة انفصال نقطي.

A I فقط

B I , III فقط

C II فقط

D I و II فقط

تنبيه !

اكتشف الخطأ في التمرين 48 على الطلبة معرفة عدم وجود النهاية عند هذه النقطة من التَمثّيل البياني للدالة؛ وذلك لاختلاف النهايتين من اليسار و اليمين.

4 التقويم

تعلم لاحق سيقوم الطلبة في الدرس التالي بإيجاد، النهايات جبريًا. اطلب إليهم كتابة حول فائدة هذا الدرس في تعلم الدرس القادم .

إجابات:

47) لا، تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد -5 من اليمين ومن اليسار.

تنويع التعليم

فوق

توسّع إذا احتوى كل من بسط ومقام الدالة النسبية على عامل مشترك، فإن بإمكاننا إزالة نقطة الانفصال من خلال القسمة على عامل مشترك. كمثال على ذلك أوجد نقطة الانفصال والتي يمكن إزالتها للدالة $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2+5x-14}$. هل النهاية موجودة عند تلك النقطة؟ وضح إجابتك.

$\left(2, \frac{2}{3}\right)$، نعم؛ لأن النهايتين من اليسار واليمين متساويتان .

130 الفصل 3 النهايات والاشتقاق

3-2 ملاحظات الدرس

3-2 حساب النهايات جبريًّا
Evaluating Limits Algebraically

فيما سبق

درستُ كيفية تقدير النهايات بيانيًا وعدديًا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

المفردات الأساسية

التعويض المباشر
direct substitution

الصيغة غير المحددة
indeterminate form

www.obeikaneducation.com

لماذا ؟

إذا أُعطي اتساع البؤبؤ بالمليمترات لحيوان بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45} + 85}{4x^{-0.45} + 10}$، حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux)، فإنه يمكنك استعمال النهايات لإيجاد اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدها الأدنى أو الأعلى.

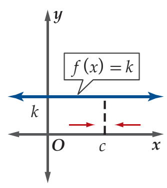
حساب النهاية عند نقطة تعلمتَ في الدرس 3–1 تقدير النهايات بيانيًّا، وباستعمال جداول القيم . وستكتشف في هذا الدرس طرقًا جبرية لحساب النهايات.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

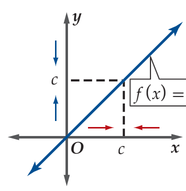
بالرموز $\lim\limits_{x \to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

بالرموز $\lim\limits_{x \to c} x = c$



تظهر أهمية نهايات الدوال الثابتة والدوال المحايدة واضحة في خصائص النهايات.

مفهوم أساسي — خصائص النهايات

إذا كان k, c عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكان للنهايتين $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ وجود ، فإن كلًا من الخصائص الآتية صحيحة :

خاصية الجمع $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في عدد حقيقي $\lim\limits_{x \to c} [k\, f(x)] = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

خاصية الضرب $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ ، حيث $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة $\lim\limits_{x \to c} [f(x)^n] = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ ، فإن n عدد زوجي.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2

تقدير النهايات بيانيًا وعدديًّا.

الدرس 3-2

ايجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند قيم محددة.

ايجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند المالانهاية .

ما بعد الدرس 3-2

استعمال النهايات لحساب معدل التغيّر اللحظي.

استعمال النهايات لحساب المساحات تحت المنحنيات.

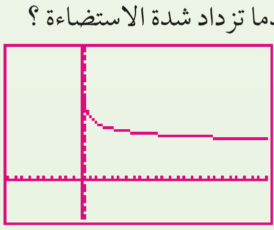
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل :

- ما النهاية التي تقترب منها x عندما تكون الاستضاءة في حدها الأدنى، أو الأعلى؟ $0, \infty$
- مثّل المنحنى بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانيّة. وضّح ما الذي يحدث لقطر البؤبؤ عندما تزداد شدة الاستضاءة ؟



[−10, 25] scl: 1 by [−10, 35] scl: 1

يقل قطر البؤبؤ عندما تزداد شدة الاستضاءة .

مصادر الدرس 3-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (138)	• تنويع التعليم ، ص (138)	• تنويع التعليم ، ص (138 , 140)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (17) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

حساب النهاية عند نقطة

مثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص النهايات؛ لحساب النهايات.

التقويم التكويني

استعمال تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 2x - 4)$ **11**

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - 3}{x + 2}$ **-1**

c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x + 4}$ **$\sqrt{6}$**

إرشادات للدراسة

خصائص النهايات تبقى خصائص النهايات صحيحة في حال كون النهايات من جهة واحدة، وفي حال كونها عند اللانهاية، شريطة وجود هذه النهايات.

مثال 1 استعمال خصائص النهايات

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 6x + 3)$

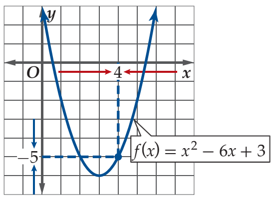
$$\lim_{x \to 4} (x^2 - 6x + 3) = \lim_{x \to 4} x^2 - \lim_{x \to 4} 6x + \lim_{x \to 4} 3$$ خاصيتا الجمع و الفرق

$$= \left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 - 6 \cdot \lim_{x \to 4} x + \lim_{x \to 4} 3$$ خاصيتا القوة والضرب في عدد حقيقي

$$= 4^2 - 6 \cdot 4 + 3$$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$$= -5$$ بالتبسيط

تحقق يعزز التمثيل البياني لمنحنى $f(x) = x^2 - 6x + 3$ هذه النتيجة. ✓



b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 1}{x - 5}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{4x^3 + 1}{x - 5} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (4x^3 + 1)}{\lim\limits_{x \to -2} (x - 5)}$$ خاصية القسمة

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -2} 4x^3 + \lim\limits_{x \to -2} 1}{\lim\limits_{x \to -2} x - \lim\limits_{x \to -2} 5}$$ خاصيتا الجمع و الفرق

$$= \frac{4\left(\lim\limits_{x \to -2} x\right)^3 + \lim\limits_{x \to -2} 1}{\lim\limits_{x \to -2} x - \lim\limits_{x \to -2} 5}$$ خاصية الضرب في عدد حقيقي وخاصية القوة

$$= \frac{4(-2)^3 + 1}{-2 - 5}$$ نهايتا الدالة الثابتة والمحايدة

$$= \frac{31}{7}$$ بالتبسيط

تحقق كوّن جدولًا لقيم x التي تقترب من -2 من الجهتين. ✓

x تقترب من -2 ← | → x تقترب من -2

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

c) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{8 - x}$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{8 - x} = \sqrt{\lim_{x \to 3} (8 - x)}$$ خاصية الجذر النوني

$$= \sqrt{\lim_{x \to 3} 8 - \lim_{x \to 3} x}$$ خاصية الفرق

$$= \sqrt{8 - 3}$$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$$= \sqrt{5}$$ بالتبسيط

تأكد

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A) $\lim\limits_{x \to 2} (-x^3 + 4)$ **-4**

1B) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{2x^2 - x - 15}$ **$\frac{1}{9}$**

1C) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x + 3}$ **$\sqrt{2}$**

لاحظ أن نهاية كل دالة في المثال أعلاه عندما تقترب x من c تساوي قيمة $f(c)$. ومع أن هذه الملاحظة ليست صحيحة في جميع الدوال، إلا أنها صحيحة في دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية، ما لم يكن المقام صفرًا.

مفهوم أساسي نهايات الدوال

نهايات دوال كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود ، وكان c عددًا حقيقيًا ، فإن $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ دالةً نسبية ، وكان c عددًا حقيقيًا ، فإن $\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$ ، حيث $q(c) \neq 0$.

إرشادات للدراسة

الدوال جيدة السلوك
تُعدُّ الدوال المتصلة مثل دوال كثيرات الحدود دوالَّ جيدة السلوك، إذ يمكن حساب نهاياتها من خلال التعويض المباشر. ويمكن إيجاد نهاية الدوال من خلال التعويض المباشر وإن لم تكن الدالة جيدة السلوك، بشرط أن تكون متصلة عند النقطة التي تحسب عندها النهاية.

وبشكل مختصر، فإنه يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر** ، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

مثال 2 استعمال التعويض المباشر

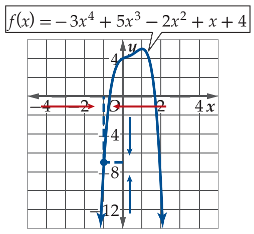
احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

a) $\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

بما أن هذه نهاية دالة كثيرة حدود، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$
$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني لمنحنى $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ هذه النتيجة. ✔



b) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامُها ليس صفرًا عندما $x = 3$ ، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{3 - (3)^2}$$
$$= \frac{48}{-6}$$
$$= -8$$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 1$ ، فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

تأكد ✔

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

2A) $\lim_{x \to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$ $\quad 3$

2B) $\lim_{x \to -5} \frac{x + 1}{x^2 + 3}$ $\quad \frac{-1}{7}$

2C) $\lim_{x \to -8} \sqrt{x + 6}$

2C) غير ممكن، لأن $f(-8)$ عدد غير حقيقي، أو $\lim_{x \to -8} \sqrt{x + 6} = \sqrt{-2} \notin R$

لنفترض أنك استعملت خاصية القسمة أو التعويض المباشر لحساب النهاية $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ بشكل خاطئ.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \to 1} (x - 1)} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

وهذا ليس صحيحًا؛ لأن نهاية المقام تساوي 0

حساب النهاية عند نقطة

مثال 2 يُبيِّنُ كيفية استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات.

مثال إضافي

2 احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim_{x \to 2} (-2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 5)$ $\quad -3$

b) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ $\quad -2$

c) $\lim_{x \to -4} \sqrt{x + 3}$ غير ممكن؛ لأن $f(-4)$ عدد غير حقيقي، أو $\lim_{x \to -4} \sqrt{x+3} = \sqrt{-1} \notin R$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بحلّ الأمثلة على السبورة التفاعلية، واحفظ ذلك في صفحات الملاحظات، ثم ارسلها للطلبة كمرجع إضافي خارج الصف.

133 الدرس 3-2 حساب النهايات جبريًا

حساب النهاية عند نقطة

مثال 3 يُبيِّنُ كيفية استعمال التحليل؛ لحساب النهايات.

مثال إضافي

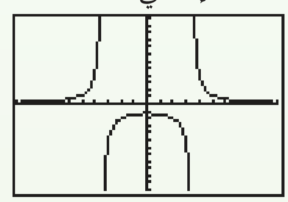
3 أحسب كل نهاية مما يأتي :

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ **5**

b) $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}$ **1**

إرشادات للمعلم الجديد

الآلة الحاسبة البيانية قد يظهر في بعض الأحيان عند تمثيل منحنى دالة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، أكثر من جزء للمنحنى كما في المثال الإضافي 3b.

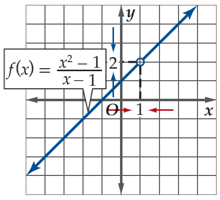


$[-5, 5]$ scl: 0.5 by $[-3, 3]$ scl: 0.25

لذا، ذكّر الطلبة بأننا نهتم فقط بجزء المنحنى عندما تقترب x من -2 في هذا المثال.

تنبيه!

التحليل عند اختصار البسط بأكمله، فإنه يصبح 1 وليس 0 .



يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ **الصيغة غير المحددة**؛ لأنه لا يمكنك تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر في المقام، ومثل هذه النهايات قد يكون لها وجود ولها قيمة حقيقية، أو ليس لها وجود، أو متباعدة نحو ∞ أو $-\infty$ ، ويُبيِّن التمثيل البياني لمنحنى $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ لها وجود وتساوي 2 .

بالرغم من أن الصيغة غير المحددة تظهر من خلال تطبيق خاطئ لخصائص النهايات، إلا أن دراسة هذه الصيغة قد ترشدنا إلى الطريقة الأنسب لإيجاد النهاية.

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط التعبير جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 3 استعمال التحليل

احسب كل نهاية مما يأتي :

a) $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0} = \frac{(-4)^2 - (-4) - 20}{-4 + 4}$. لذا، فإن علينا تحليل المقدار جبريًّا واختصار أي عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

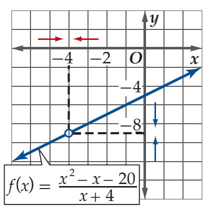
$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x - 5)(x + 4)}{x + 4}$$ بتحليل البسط

$$= \lim_{x \to -4} \frac{(x - 5)\cancel{(x + 4)}}{\cancel{x + 4}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x \to -4} (x - 5)$$ بالتبسيط

$$= (-4) - 5 = -9$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني لمنحنى $f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$ هذه النتيجة. ✓



b) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21}$

ينتج عن التعويض المباشر المقدار $\frac{0}{0} = \frac{3 - 3}{3^3 - 3(3)^2 - 7(3) + 21}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x^2 - 7)(x - 3)}$$ بتحليل المقام

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x - 3}}{(x^2 - 7)\cancel{(x - 3)}}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2 - 7}$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{(3)^2 - 7} = \frac{1}{2}$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

تأكد

احسب كل نهاية مما يأتي :

3A) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$ **20**

3B) $\lim_{x \to 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$ $\frac{1}{5}$

134 الفصل 3 النهايات والاشتقاق

حساب النهاية عند نقطة

مثال 4 يُبيِّنُ كيفية استعمال فكرة إنطاق البسط أو المقام؛ لحساب النهايات .

مثال إضافي

4 احسب $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. $\frac{1}{4}$

اختصار العامل المشترك يتطلب بعض التبريرات ، ففي المثال 3a ينتج عن اختصار العامل المشترك بين بسط ومقام الدالة f دالة جديدة g، حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x+4} \ , \ g(x) = x - 5$$

إن قيم هاتين الدالتين متساوية لجميع قيم x إلا عندما $x = -4$ ، فإذا تساوت قيم دالتين إلا عند نقطة وحيدة في مجالهما c ، فإن نهايتيهما عندما تقترب x من c متساويتان ؛ لأن قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة عند النقطة التي تُحسبُ النهاية عندها. لذا ، فإن $\lim\limits_{x \to -4} (x-5) = \lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x+4}$.

والطريقة الأخرى لإيجاد نهايات ناتج التعويض فيها صيغة غير محددة ، هي إنطاق البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.

مثال 4 استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

احسب $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9}$. لذا، أنطق البسط، ومن ثم اختصر العوامل المشتركة.

$\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ بضرب كلٍ من البسط والمقام في $\sqrt{x}+3$ ، والذي يمثل مرافق $\sqrt{x}-3$

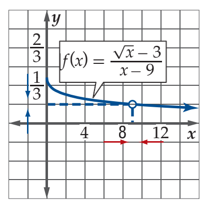
$= \lim\limits_{x \to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$ بالتبسيط

$= \lim\limits_{x \to 9} \frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}$ باختصار العامل المشترك

$= \lim\limits_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ بالتبسيط

$= \frac{1}{\sqrt{9}+3}$ بالتعويض المباشر

$= \frac{1}{6}$ بالتبسيط



تحقق يعزِّز التمثيل البياني لمنحنى $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ في الشكل المجاور هذه النتيجة. ✓

تأكد

احسب كل نهاية مما يأتي:

(4A $\lim\limits_{x \to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ **10**

(4B $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ $-\frac{1}{4}$

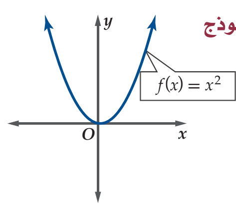
حساب النهايات عند المالانهاية درست سابقًا أن لجميع الدوال الزوجية سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه ، وكذلك الدوال الفردية لها جميعًا سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه.

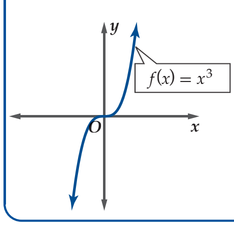
مفهوم أساسي نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n ،

- $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًا.

نموذج





إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.

حساب النهايات عند المالا نهاية

مثال 5 يُبيِّنُ كيفية إيجاد نهايات دوال كثيرة الحدود عند الاقتراب من ∞ أو $-\infty$.

مثال إضافي

5 احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to-\infty}(2x^4+x^3-7)$ ∞

b) $\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^2+8)$ $-\infty$

c) $\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2+x-7)$ ∞

إرشادات للدراسة

الضرب في المالانهاية

$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$

تعني أن الدالة تأخذ قيمًا موجبة ومتزايدة بشكل غير محدود، كلما اقتربت قيم x من العدد c. لذا، فإن ضرب هذه القيم في عدد موجب لا يغير هذا السلوك، أما ضربها في عدد سالب، فإنه يعكس إشاراتها، وبذلك تقترب النهاية من $-\infty$.

مفهوم أساسي نهايات كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن

$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n,\quad \lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n$$

يمكنك استعمال هاتين الخاصيتين لحساب نهايات دوال كثيرات حدود عند المالانهاية. تذكَّر أن النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$ لا تعني بالضرورة وجود النهاية، إلا أنها تصف سلوك الدالة عندما تزداد قيم x أو تنقص بشكلٍ غير محدود.

مثال 5 نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$

$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=-\infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

b) $\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)$

$\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)=\lim_{x\to\infty}-x^2$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=-\lim_{x\to\infty}x^2$ خاصية الضرب في عدد حقيقي

$=-\infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

c) $\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)$

$\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)=\lim_{x\to-\infty}5x^4$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=5\lim_{x\to-\infty}x^4$ خاصية الضرب في عدد حقيقي

$=5\times\infty=\infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

تأكد

احسب كل نهاية مما يأتي:

5A) $\lim_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)$ $-\infty$ 5B) $\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$ ∞ 5C) $\lim_{x\to-\infty}(2x-6x^2+4x^5)$ $-\infty$

ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

إرشادات للدراسة

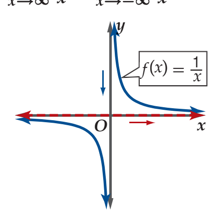
دالة المقلوب

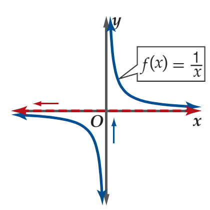
تذكر أن دالة المقلوب هي $f(x)=\frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالة خطية، و $a(x)\neq 0$.

مفهوم أساسي نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

التعبير اللفظي إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

بالرموز $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$





النتيجة لأي عدد صحيح موجب n، فإن $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

ويمكننا استعمال هذه الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على أعلى قوة للمتغير x.

مثال 6 نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3}$

بقسمة كل حد على أعلى قوة، وهي x

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$$

بالتبسيط

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$$

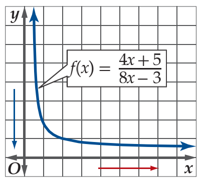
خصائص القسمة، الجمع، الفرق، والضرب في عدد حقيقي

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 8 - 3\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

$$= \frac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \frac{1}{2}$$

تحقق يعزّز التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x) = \frac{4x+5}{8x-3}$ هذه النتيجة. ✓



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1}$

بقسمة كل حد على أعلى قوة، وهي x^3

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$

بالتبسيط

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$$

خصائص القسمة، والجمع، والفرق، والضرب في عدد حقيقي

$$= \frac{6\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}}$$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

$$= \frac{6\cdot 0 - 0}{3+0} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x}$

بقسمة كل حد على أعلى قوة وهي x^4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$$

خصائص القسمة، الجمع، والضرب في عدد حقيقي

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5}{9\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

$$= \frac{5}{9\cdot 0 + 2\cdot 0} = \frac{5}{0}$$

وحيث إن نهاية المقام صفر، فإننا نكون قد طبقنا خصائص القسمة بشكل خاطئ، إلا أننا نعلم أنه عند قسمة العدد 5 على قيم صغيرة تقترب من الصفر، فإن الناتج سيكون كبيرًا بشكلٍ غير محدود، أي أن النهاية هي ∞.

✓ تأكد

احسب كل نهاية مما يأتي:

6A) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x-10}$ **0**

6B) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7}{5x+1}$ **$-\infty$**

6C) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$ **3.5**

إرشاد تقني

حساب النهايات لا يُعدُ استعمال الآلة الحاسبة البيانية كافيًا لإيجاد $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ وإنما يمكن استعمالها فقط لحساب قيم $f(x)$ لبعض قيم x القريبة من c أو الكبيرة ، إذ من الممكن أن يُظهر التمثيل البياني لمنحنى الدالة سلوكًا غير متوقع عندما تقترب x من c ، أو عندما تزداد قيم x أو تنقص بشكل غير محدود، لذا. يجب أن تستعمل الطرق الجبرية في حساب النهايات.

إرشادات للدراسة

النهاية عند المالانهاية في الفرعين b، c من مثال 6، يمكن في الخطوة الأولى من الحل قسمة كلٍّ من البسط والمقام على أعلى قوة في المقام، ولن يتغير الناتج في كلا الفرعين.

حساب النهايات عند المالا نهاية

مثال 6 يُبيِّنُ كيفية إيجاد نهايات دوال نسبية عندما يقترب x من ∞ أو $-\infty$.

مثال إضافي

6 أوجد قيمة كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{3x-4}$ $\frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-x^2}{3x^2-1}$ ∞

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3+2x^2-x+1}{2x^3-x^2+3x-2}$ 2.5

التركيز في المحتوى الرياضي

نهاية الدوال النسبية توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية .

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية غير محددة وهي إما ∞ أو $-\infty$، وذلك بحسب اشارة المعامل الرئيس في كلٍ من البسط والمقام.
2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لحاصل قسمة المعاملين الرئيسين في البسط والمقام.
3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام ، فإن النهاية تساوي صفر.

إرشادات للمعلم الجديد

صفر المقام إذا كان المقام صفرًا عند حساب نهاية وكان البسط عددًا غير الصفر، فإن النهاية إما ∞ أو $-\infty$. وذلك حسب إشارة البسط، فإذا كانت موجبة، فإن النهاية تقترب من ∞، وإذا كانت سالبة، فإن النهاية تقترب من $-\infty$.

درست سابقًا أن المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية. لذا، فإن نهاية المتتابعة هي نهاية دالة عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية لها وجود، فإن قيمة هذه النهاية هي العدد الذي تقترب منه المتتابعة. فمثلًا يمكن وصف المتتابعة $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ بـ $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$، حيث n عدد صحيح موجب. وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$، فإن المتتابعة تقترب من الصفر.

مثال 7 نهايات المتتابعات

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة مما يأتي، ثم أوجد نهايتها إن وُجدت:

a) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+5}$

الحدود الخمسة الأولى هي $\frac{3(1)+1}{1+5}, \frac{3(2)+1}{2+5}, \frac{3(3)+1}{3+5}, \frac{3(4)+1}{4+5}, \frac{3(5)+1}{5+5}$،

أو بصورة تقريبية هي 0.667, 1, 1.25, 1.444, 1.6 . لحساب نهاية المتتابعة، أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5}$

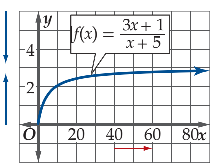
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$ بقسمة كل حد على أعلى قوة وهي n

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$ خصائص القسمة، والجمع، والضرب في عدد حقيقي

$$= \frac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 3، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 3 .

تحقق يعزِّز التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x) = \frac{3x+1}{x+5}$ هذه النتيجة. ✔



b) $b_n = \dfrac{5}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى مقربةً هي 5, 2.813, 2.222, 1.953, 1.8 . والآن، أوجد نهاية المتتابعة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$$ بتربيع ثنائية الحد

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$$ بالضرب

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5 + 10\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4}$$ بقسمة كل حد على أعلى قوة وهي n^4، ثم استعمال خصائص القسمة، والجمع، والضرب في عدد حقيقي

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 1.25، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 1.25.

تحقق كوّن جدول قيم واختر قيمًا كبيرة لـ x، قيم $f(x)$ في الجدول أدناه مقربة إلى أقرب منزلتين عشريتين ✔

x تقترب من ∞

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

تأكد ✔

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة مما يأتي، ثم أوجد نهايتها إن وُجدت:

7A) $a_n = \dfrac{4}{n^2+1}$ 7B) $b_n = \dfrac{2n^3}{3n+8}$ 7C) $c_n = \dfrac{9}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

إرشادات للدراسة

التحقق من معقولية الناتج

للتحقق من معقولية الناتج في المثال 7، أوجد كلًا من الحد المئة، والألف والعشرة آلاف وهي على التوالي: 2.867 و 2.986 و 2.999 ويظهر واضحًا أنها تقترب من العدد 3 . لذا، فإن حدود المتتابعة تتقارب إلى العدد 3.

حساب النهايات عند المالا نهاية

مثال 7 يُبيِّنُ كيفية حساب نهاية متتابعة متقاربة.

مثال إضافي

7 اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة مما يأتي، ثم أوجد نهايتها إن وُجدت:

a) $a_n = \dfrac{2n+3}{n+4}$؛ $1, \frac{7}{6}, \frac{9}{7}, \frac{11}{8}, \frac{13}{9}$

نهاية $\{a_n\}$ هي 2.

b) $b_n = \dfrac{3}{n^2}\left[\dfrac{(n+3)(n+4)}{9}\right]$؛ $6.\overline{6}, 2.5, 1.\overline{5}, 1.1\overline{6}, 0.96$

نهاية $\{b_n\}$ هي $\frac{1}{3}$.

7A) تقريبًا 2, 0.8, 0.4, 0.235, 0.154
نهاية $\{a_n\}$ هي 0 .

7B) تقريبًا 0.182, 1.143, 3.176, 6.4, 10.87
ليست لـ $\{b_n\}$ نهاية.

7C) تقريبًا 9, 5.625, 4.667, 4.219, 3.96
نهاية $\{c_n\}$ هي 3 .

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلبة بعد حَلّ كل مثال العمل في مجموعات مكونة من ثلاثة أو أربعة طلبة متفاوتي القدرات؛ لحَلّ تدريبات تأكد، وعند انتهاء المجموعة من الحَلّ، تقارن حلولها مع حلول المجموعات الأخرى، ثم تتم مناقشة النتائج مع الطلبة جميعًا، ومناقشة الأخطاء وتوضيح ما يلزم.

تدرب وحل المسائل

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي: (مثال 1)

1) $\lim_{x\to -3}(5x-10)$ **−25**

2) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+4x+13}{x-3}$ **29**

3) $\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{x}+2x+\sqrt{x}\right)$ **21.11**

4) $\lim_{x\to -4}[x^2(x+1)+2]$ **−46**

5) $\lim_{x\to 12}\frac{x^2-10x}{\sqrt{x+4}}$ **6**

6) $\lim_{x\to -6}\frac{x^4-x^3}{x^2}$ **42**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب: (مثال 2) **للتمرينين 7, 10 انظر الهامش**

7) $\lim_{x\to 16}\frac{x^2+9}{\sqrt{x}-4}$

8) $\lim_{x\to 2}(4x^3-3x^2+10)$ **30**

9) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+9x+6}{x^2+5x+6}$ **2**

10) $\lim_{x\to 3}\sqrt{2-x}$

11) $\lim_{x\to 9}(3x^2-10x+35)$ **188**

12) $\lim_{x\to 10}(-x^2+3x+\sqrt{x})$ **−66.84**

13) **فيزياء:** حسب نظرية آينشتاين النسبية، فإن كتلة جسم يتحرك بسرعة v تُعطى بالعلاقة $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء، m_0 كتلة الجسم الابتدائية أو كتلته عند السكون. (مثال 2) **للفرعين a, b انظر الهامش**

a) أوجد $\lim_{v\to 0} m$ ، ووضّح العلاقة بين هذه النهاية و m_0 .

b) ماذا يحدث لكتلة جسم يسير بسرعة تقترب من سرعة الضوء؟

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 3, 4)

14) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ **3**

15) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+1}-1}$ **8**

16) $\lim_{x\to -5}\frac{4x^2+21x+5}{3x^2+17x+10}$ **1.46**

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$ **−12**

18) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-15}{x+3}$ **−8**

19) $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$ **$\frac{1}{6}$**

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 5, 6)

20) $\lim_{x\to\infty}(5-2x^2+7x^3)$ **∞**

21) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}$ **$\frac{3}{4}$**

22) $\lim_{x\to\infty}(10x+14+6x^2-x^4)$ **−∞**

23) $\lim_{x\to\infty}\frac{14x^3-12x}{4x^2+13x-8}$ **∞**

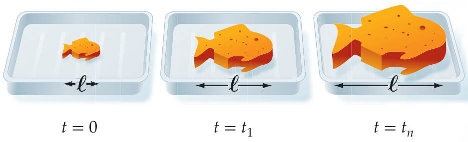
24) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x-11}{-x^5+17x^3+4x}$ **0**

25) $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ **2**

26) $\lim_{x\to -\infty}(3+x^2-2x^3)$ **−∞**

27) $\lim_{x\to -\infty}(3x^2-x-5)$ **∞**

28) **إسفنج:** تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بـ $\ell(t)=\frac{105t^2}{10+t^2}+25$ ، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالمليمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6) **للفروع a-c انظر ملحق الإجابات**



a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟

b) ما نهاية الدالة عندما $t\to\infty$؟

c) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج.

29) **حيوانات:** يُعطى وزن حيوان w بالباوند بعد d يومًا من الولادة بالعلاقة $w(d)=\frac{50}{2+98(0.85)^d}$. (مثال 6)

a) ما وزن الحيوان عند الولادة؟ **0.5 Ib**

b) ما نهاية الوزن الذي سيصلُهُ الحيوان (عندما تكون $d\to\infty$)؟ **25 Ib**

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كان لها وجود: (مثال 7)

30) $a_n=\frac{8n+1}{n^2-3}$ **0**

31) $a_n=\frac{-4n^2+6n-1}{n^2+3n}$ **−4**

32) $a_n=\frac{12n^2+2}{6n^2-1}$ **2**

33) $a_n=\frac{8n^2+5n+2}{3+2n}$ **∞**

34) $a_n=\frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$ **$\frac{1}{4}$**

35) $a_n=\frac{12}{n^2}\left[\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right]$ **∞**

احسب كل نهاية مما يأتي:

36) $\lim_{x\to -2}\begin{cases} x-3 , & x\le -2\\ 2x-1 , & x>-2\end{cases}$ **−5**

37) $\lim_{x\to 0}\begin{cases} 5-x^2 , & x\le 0\\ 5-x , & x>0\end{cases}$ **5**

38) $\lim_{x\to 2}\begin{cases} (x-2)^2+1 , & x\le 2\\ x-6 , & x>2\end{cases}$ **ليس لها وجود**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–35 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع عند إيجاد نهاية دالة نسبية، قد يستعمل بعض الطلبة التعويض المباشر، ويحدد خطأً نهاية الدالة بالقيمة $\frac{0}{0}$. لذا ذكِّرهم أن بإمكانهم تبسيط الدالة النسبية في هذه الحالة قبل إيجاد النهاية.

خطأ شائع للتمارين 12–7، يجب أن يعرف الطلبة أنه ليس بإمكانهم استعمال التعويض المباشر. إذا كانت النتيجة تتضمن صفرًا في المقام، أو إذا كان ما تحت الجذر سالبًا. فيجب عليهم في هذه الحالة توضيح سبب عدم إمكانية حساب النهاية لهذه الدوال بالإضافة إلى تبسيطها.

خطأ شائع للتمارين 41–39، ذكّر الطلبة بأن عليهم ضبط الآلة الحاسبة على وضعية الراديان وليس الدرجات.

إجابات:

7) ليس ممكنًا؛ فالمقام يساوي صفرًا عندما $x=16$.

10) ليس ممكنًا؛ قيمة الدالة $f(x)=\sqrt{2-x}$ هي $\sqrt{-1}$ عندما $x=3$ وهي ليست عدد حقيقي

$\lim_{x\to 3}\sqrt{2-x}=\sqrt{-1}\notin R$.

13a) $\lim_{v\to 0} m=m_0$. عندما تقترب سرعة الجسم من الصفر، أي أن كتلته تقترب من كتلته الابتدائية، أو كتلته في وضع السكون.

13b) تبدأ كتلة الجسم بالزيادة بلا حدود.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الواجب المنزلي
دون دون المتوسط	52–62 ،50 ،49
ضمن ضمن المتوسط	41–37 فردي، 42، 43 –47 فردي، 48، 49، 61–51
فوق فوق المتوسط	36 – 61

احسب كل نهاية مما يأتي، إذا كان لها وجود:

39) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x}$ **0**

40) $\lim_{x\to 0} (1 + x + 2^x - \cos x)$ **1**

41) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ **-0.5**

42) **أحياء:** افرض أن اتساع بؤبؤ حيوان بالمليمترات يُعطى بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}$ ، حيث x الاستضاءة الواقعة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (Lux). **للفرعين a,b انظر ملحق الإجابات**

a) اكتب نهاية لوصف اتساع البؤبؤ عندما تكون الإستضاءة في حدها الأدنى، ثم احسب النهاية، وفَسِّر معناها.

b) اكتب نهاية لوصف اتساع البؤبؤ عندما تكون الإستضاءة في حدها الأعلى، ثم احسب النهاية، وفسِّر معناها.

أوجد $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ لكل دالة مما يأتي:

43) $f(x) = 2x - 1$ **2**

44) $f(x) = 7 - 9x$ **-9**

45) $f(x) = \sqrt{x}$ **انظر الهامش**

46) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$**

47) $f(x) = x^2$ **$2x$**

48) $f(x) = x^2 + 8x + 4$ **$2x+8$**

49) **فيزياء:** يمتلك الجسم المتحرك طاقةً تُسمىَّ الطاقة الحركية، إذ يكون بإمكانه بذل شغل عند اصطدامه بجسم آخر. وتُعطي الطاقة الحركية لجسم متحرك بالعلاقة $k(t) = \frac{1}{2}m \cdot v(t)^2$ ، حيث $v(t)$ سرعة الجسم عند الزمن t ، و m كتلة الجسم بالكيلوجرام. إذا كانت سرعة جسم $v(t) = \frac{50}{1+t^2}$ لكل $t \geq 0$ ، وكتلته 1 kg، فما الطاقة الحركية التي يمتلكها عندما يقترب الزمن من 100 sec؟ **0.0000125**

مسائل مهارات التفكير العليا

(50,51) انظر ملحق الإجابات

50) **برهان:** استعمل خصائص النهايات؛ لإثبات أنه لأي كثيرة حدود

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ولأي عدد حقيقي c ، فإن $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$

51) **برهان:** استعمل الاستقراء الرياضي؛ لإثبات أنه إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، فإنه لأي عدد صحيح n

$\lim_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n = L^n$.

52) **تحدٍّ:** احسب النهاية الآتية إذا كانت $a_n \neq 0 \,,\, b_m \neq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

(إرشاد:افترض كلًّا من الحالات $m < n, n = m, m > n$)

انظر الهامش

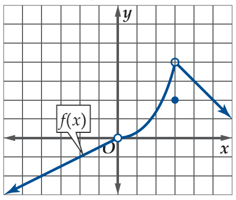
53) **تبرير:** إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل العلاقة $\lim_{x\to c} r(x) = r(c)$ صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك **انظر الهامش**

54) **اكتب:** استعمل جدولًا لتنظيم خصائص النهايات، وضمِّنه مثالًا على كل خاصية. **انظر ملحق الإجابات**

55) **اكتب:** افرض أن $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$. تدَّعي ليلى أن قيمة هذه النهاية هي 1 . وضِّح سبب كونها مخطئة. وما الخطوات التي يمكن اتباعها لحساب هذه النهاية، إذا كان لها وجود؟ **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لمنحنى $y = f(x)$ لإيجاد كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-3)



56) $\lim_{x\to -2} f(x)$ ، $f(-2)$ **-1 ، -1**

57) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ، $f(0)$ **0، غير معرفة**

58) $\lim_{x\to 3} f(x)$ ، $f(3)$ **4، 2**

أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f.g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ ، لكل زوج من الدوال الآتية، ثم حدِّد مجال الدالة الناتجة: (الدرس 6-2)

للتمرينين 59,60 انظر ملحق الإجابات

59) $f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = x + 9$

60) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 1$

تدريب على اختبار معياري

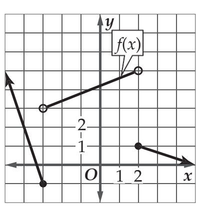
61) قيمة $\lim_{h\to 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$ ؟ **H**

F 3
G 4
H 5
J ليس لها وجود.

62) ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0 ؟ **A**

A $-\pi$
B $-\frac{3}{4}$
C $-\frac{1}{2}\pi$
D 0

63) باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ؟ **H**



F 0
H 1
G 5
J ليس لها وجود

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة كتابة تفسير بسيط يبيّن الحالة التي يمكن فيها حساب نهاية دالة باستعمال التعويض المباشر دون تبسيط الدالة واطلب اليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف. **إجابة ممكنة: يمكن حساب النهاية باستعمال التعويض المباشر. إذا كانت الدالة كثيرة حدود، أو دالة نسبية لا تأخذ شكل صيغة غير محددة عند التعويض فيها.**

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2–3 , 1–3 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

45)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{h\to 0}\sqrt{x+h} - \lim_{h\to 0}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

52) إذا كانت m > n، فإن النهاية تساوي 0.
إذا كانت m = n فإن النهاية تساوي $\frac{a_n}{b_m}$.
إذا كانت m < n ، فإن النهاية إما $+\infty$ أو $-\infty$.

53) صحيحة أحيانًا، تكون صحيحة إذا كانت $r(x)$ معرّفة عند c.

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد دالتين تحققان العبارتين $\lim_{x\to 7} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to 7} [f(x) \cdot g(x)] \neq 0$.

إجابة ممكنة: $f(x) = 49 - x^2$ ، $g(x) = \frac{x+3}{x^2+x-56}$.

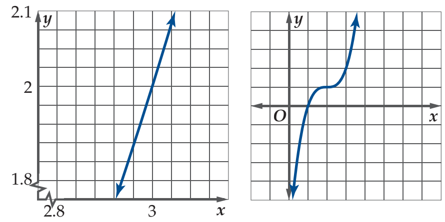
استكشاف 3-3
معمل الآلة الحاسبة البيانية:
ميل المنحنى
The Slope of a Curve

الهدف
استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتقدير ميل منحنى.

يعتبر ميل المستقيم كمعدل ثابت للتغير مفهومًا واضحًا، إلا أنه ليس واضحًا بالنسبة للمنحنيات بصورة عامة، إذ يتغير ميل المنحنى عند كل نقطة عليه.

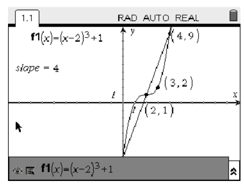
وبشكل عام فإن التمثيلات البيانية لمعظم الدوال تبدو خطيةً عند تفحُّصها على فترةٍ قصيرة جدًا.

وبالنظر إلى خطوط القاطع المتتالية، يكون من الممكن تطبيق فكرة الميل على المنحنيات.



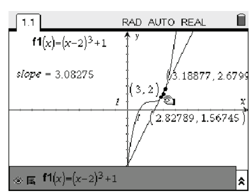
نشاط 1 خطوط القاطع

قدّر ميل منحنى الدالة $y = (x-2)^3 + 1$ عند النقطة $(3, 2)$.



خطوة 1 أدخل $y = (x-2)^3 + 1$ في **f1**، ثم احسب ميل القاطع المار بمنحنى $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 2$ ، $x = 4$.
ميل القاطع يساوي 4.

خطوة 2 احسب ميل القاطع المار بمنحنى $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 2.5$ ، $x = 3.5$.
ميل القاطع يساوي 3.25.



خطوة 3 احسب ميل القاطع المار بمنحنى $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 2.8$ ، $x = 3.2$.
ميل القاطع يساوي 3.04.

خطوة 4 أوجد ميل 3 قواطع أخرى في فترات متناقصة حول النقطة $(3, 2)$.

كلما نقص طول الفترة حول النقطة $(3, 2)$، فإن ميل القاطع يقترب أكثر من العدد 3. لذا، فإن ميل منحنى $y = (x-2)^3 + 1$ عند النقطة $(3, 2)$ هو 3 تقريبًا.

تمارين:

قدّر ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $y = (x+1)^2, (-4, 9)$ -6

2) $y = x^3 - 5, (2, 3)$ 12

3) $y = 4x^4 - x^2, (0.5, 0)$ 1

4) $y = \sqrt{x}, (1, 1)$ 0.5

حلل النتائج

5) **حلل:** صف ما يحدث لقاطع منحنى دالة عندما تقترب نقاط التقاطع من نقطة معطاة (a, b) على المنحنى.

6) **خمّن:** صِف كيف يمكنك إيجاد القيمة الفعلية لميل منحنى عند نقطة معطاةٍ عليه.

5) إجابة ممكنة: كلما اقتربت نقاط تقاطع القاطع من نقطة (a, b)، على المنحنى، فإن القاطع يقترب أكثر من المماس للمنحنى عند النقطة (a, b).

6) إجابة ممكنة: إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة.

استكشاف 3-3
ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتقدير ميل منحنى .

إرشادات التدريس
ذكِّر الطلبة بكيفية إيجاد ميل المستقيم، ثم اسألهم عن إمكانية استعمال فكرة ميل المستقيم؛ لإيجاد ميل منحنى دالة.

المواد اللازمة
- الآلة الحاسبة البيانية

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
وزع الطلبة في مجموعات ثلاثية، أو رباعية متفاوتة القدرات، و اطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط، وتحليل النتائج للتمرينين 5, 6.

تدريب اطلب إلى الطلبة حَلّ التمارين 1-4.

3 التقويم

التقويم التكويني
استعمل التمرين 4 ؛ لتقويم مدى اتقان الطلبة لاستعمال الآلة الحاسبة البيانية؛ لتقريب ميل دالة عند نقطة معطاة.

من المحسوس إلى المجرَّد
اسأل:
- كيف يرتبط ميل مماس منحنى دالة عند نقطة بقيمة الدالة عند تلك النقطة؟ يكون مساويًا لمعدل تغيّر الدالة عند تلك النقطة.

3-3 ملاحظات الدرس

3-3 المماس والسرعة المتجهة
Tangent Lines and Velocity

فيما سبق
درستَ إيجاد متوسط مُعدلات التغيّر باستعمال القاطع.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجدُ مُعدل التغيّر اللحظي لدالة عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- أجدُ متوسط السرعة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.

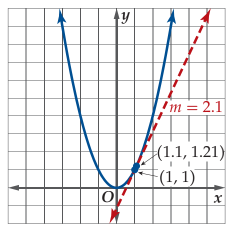
المفردات الأساسية
المماس
tangent line
مُعدل التغيّر اللحظي
instantaneous rate of change
قسمة الفرق
difference quotient
السرعة المتجهة اللحظية
instantaneous velocity

www.obeikaneducation.com

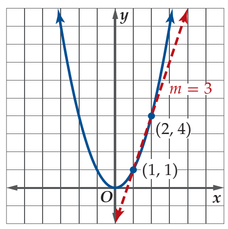
لماذا؟


عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ وذلك بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة القصوى، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها التسارع.

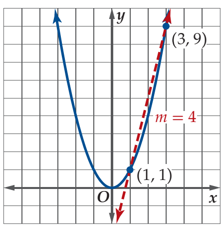
المماسات تعلمت في الدرس 4–2 أن مُعدل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى على منحنى الدالة، ولا يوجد مُعدل تغيّر ثابت، وفي هذه الحالة يمكن حساب متوسط مُعدلات تغيّر الدالة على فترة باستعمال القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه لمنحنى $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًا بالنقطة $(1, 1)$ ، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$ ، $(2, 4)$ ، أو $(1.1, 1.21)$ ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.



الشكل (1)

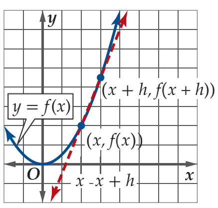


الشكل (2)



الشكل (3)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع ، زادت دِقَّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى الحقيقي عند نقاط تلك الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطتا التقاطع متطابقتين تقريبًا ، فإننا نحصل على مماس للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمكننا حساب ميل المنحنى بشكل تقريبي عند نقطة على المنحنى باستعمال **المماس** عند هذه النقطة كما في الشكل (1) أعلاه. إن ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو **مُعدل التغيّر اللحظي** عند تلك النقطة، ويمكن تمثيله بميل مماس المنحنى عند النقطة نفسها.



ولتعريف ميل المماس لمنحنى فإنه يمكننا الرجوع إلى معادلة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتُسَمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$ ، أي كلما اقتربت قيمة h من صفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$، وبالتالي يمكننا حساب ميل المماس على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

مفهوم أساسي | **مُعدل التغيّر اللحظي**

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويعطى بالصيغة $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية لها وجود.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3
إيجاد متوسط معدلات التغيّر باستعمال القاطع.

الدرس 3-3
إيجاد معدّل التغيّر اللحظي لدالة عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
إيجاد متوسط السرعة المتجهة والسرعة المتجهة اللَّحظية.

ما بعد الدرس 3-3
استعمال المشتقات؛ لإيجاد تعابير للسرعة اللَّحظية وإيجادها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- ما شكل المنحنى الذي يُمثّل دالة ارتفاع المظلي قبل فتح المظلة؟ قطع مكافئ
- ما الذي سيحدث لشكل المنحنى الذي يُمثّل هذا الوضع بعد فتح المظلة؟ وماذا يعني؟ يزداد ميل المنحنى، أمّا بعد فتح المظلة، فإن معدل الهبوط سيقل بشكل كبير.

مصادر الدرس 3-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (145)	• تنويع التعليم ، ص (145)	• تنويع التعليم ، ص (147)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الجداول الالكترونية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الالكترونية	• كتاب التمارين ، ص (18) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الجداول الالكترونية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

يمكنك استعمال هذا المفهوم لإيجاد ميل مماس منحنى عند نقطة تقع عليه.

مثال 1 ميل مماس منحنى عند نقطة تقع عليه

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ الواقعة عليه.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة مُعدل التغيّر اللحظي

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$ $x = 1$

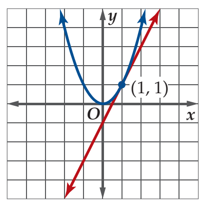
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$ $f(1+h) = (1+h)^2 ,\ f(1) = 1^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$ بالضرب

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h)$$ بالقسمة على h

$$= 2 + 0 = 2$$ خصائص الجمع للنهايات، ونهاية الدالة الثابتة والدالة المحايدة



أي أن ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ هو 2.

تأكد

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة الواقعة عليه:

(1A $y = x^2, (3, 9)$ 6 **(1B** $y = x^2 + 4, (-2, 8)$ -4

كما يمكنك استعمال صيغة مُعدل التغيّر اللحظي لإيجاد معادلة لميل مماس المنحنى عند أي نقطة x عليه .

مثال 2 معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة تقع عليه

أوجد معادلة ميل مماس منحنى $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة تقع عليه.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة مُعدل التغيّر اللحظي

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$ $f(x+h) = \frac{4}{x+h} ,\ f(x) = \frac{4}{x}$

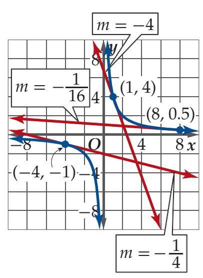
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$$ بجمع الكسرين في البسط، ثم التبسيط

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$$ بالتبسيط

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x^2 + xh}$$ بالقسمة على h، ثم الضرب

$$m = \frac{-4}{x^2 + x(0)}$$ خصائص الجمع والقسمة للنهايات، ونهاية الدالة الثابتة، والدالة المحايدة

$$m = \frac{-4}{x^2}$$ بالتبسيط



أي أن معادلة ميل مماس المنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ تقع عليه هو $m = -\frac{4}{x^2}$، كما هو مبيّن في الشكل المجاور .

تأكد

أوجد معادلة ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة تقع عليه:

(2A $y = x^2 - 4x + 2$ $m = 2x - 4$ **(2B** $y = x^3$ $m = 3x^2$

إرشادات للدراسة

مُعّدل التغيّر اللحظي عند حساب نهاية ميل المستقيم القاطع عندما $h \to 0$، فإن أيًّا من الحدود الباقية بعد إجراء الاختصارات، والتي تحتوي المتغير h ستصبح أصفارًا.

إرشادات للدراسة

يستعمل أحيانًا التعبير (ميل المنحنى) للدلالة على ميل مماس المنحنى عند نقطة تقع عليه.

المماسات

المثالان 2 ,1 يُبيِّنان كيفية استعمال صيغة معدل التغيّر اللَّحظي؛ لإيجاد ميل منحنى دالة عند نقطة تقع عليه، أو لإيجاد معادلة تُمكننا من حساب ميل منحنى دالة عند أي نقطة تقع عليه، وذلك من خلال إيجاد ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم .

مثالان إضافيان

1 أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2 + 1$ عند النقطة $(2 , 5)$. 4

2 أوجد معادلة ميل منحنى $y = x^2 + 2x$ عند أي نقطة عليه. $m = 2x + 2$

التركيز في المحتوى الرياضي

المماسات تُعطي صيغة معدل التغيّر اللَّحظي عند نقطة ما، ميل المماس للدالة عند تلك النقطة. ومعادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة $(a, f(a))$ تقع عليه هي:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

حيث $f'(a)$ ميل المماس للدالة عند $(a, f(a))$

إرشادات للمعلم الجديد

المماسات هندسيًّا، يقطع المماس الدائرة عند نقطة التماس فقط، ولا يقطعها مرة أخرى. والمماس لمنحنى هو مستقيم يلامس المنحنى عند نقطة دون أن يقطع المنحنى عند تلك النقطة، إلا أنه من الممكن أن يقطع المنحنى عند نقاطٍ أخرى.

السرعة المتجهة اللحظية تعلمت في الدرس 4 – 2 طريقة حساب متوسط السرعة المتجهة لجسم يسقط إلى الأسفل، وذلك من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة، ويمكنك استعمال الطريقة نفسها لحساب متوسط السرعة المتجهة.

مفهوم أساسي — متوسط السرعة المتجهة

إذا أُعطي موقع جسم بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن متوسط السرعة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b يُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

قراءة الرياضيات

يُعرف متوسط السرعة المتجهة أيضًا بالسرعة المتوسطة المتجهة.

مثال 3 من واقع الحياة — متوسط السرعة المتجهة

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالأميال، والتي قطعتها عدّاء في سباق جري بعد t ساعة. ما متوسط سرعته المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

أوجد أولًا المسافة الكلية التي قطعها العدّاء عند الزمن $a = 2\ ,\ b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$	$a = 2\ ,\ b = 3$	$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$
$f(2) = 18.8$	بالتبسيط	$f(3) = 24.3$

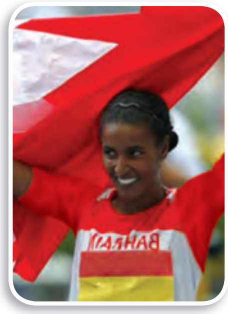
استعمل الآن صيغة متوسط السرعة المتجهة.

$$v_{avg} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ صيغة متوسط السرعة المتجهة

$$= \frac{24.3-18.8}{3-2}$$ $f(a) = 24.3\ ,\ f(b) = 18.8,\ b = 3\ ,\ a = 2$

$$= 5.5$$ بالتبسيط

أي أن متوسط سرعة العدّاء المتجهة خلال الساعة الثالثة هي $5.5\ mi/h$ إلى الأمام.



الربط مع واقع الحياة

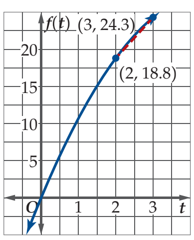
بدأت العداءة البحرينية مريم يوسف جمال موسمها في العام 2011م بفوز كبير في مسابقة الدوري الماسي في العاصمة الايطالية روما حيث تمكنت العداءة البحرينية التي تبلغ 26 عاما من الفوز بالمركز الأول في مسابقة 1500 m للسيدات وسجلت أسرع وقت في العالم هذا العام في هذا الحدث. وتمكنت العداءة مريم من قطع المسافة في زمن قدره 4,01,60 min .

المصدر: وكالة أنباء البحرين

http://www.bna.bh/portal/news/458219

تأكد

3) **بالون:** تمثِّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًّا إلى أعلى، ما متوسط سرعة البالون المتجهة بين $t = 1\,sec$ ، $t = 2\,sec$ ؟ **$17\ ft/sec$**



إذا أمعنَّا النظر في إجابة المثال 3 ، نجد أنه تم حساب متوسط السرعة المتجهة من خلال إيجاد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين $(2, 18.8)$ ، $(3, 24.3)$ كما في الشكل المجاور. والسرعة المتجهة التي تم حسابها هي متوسط سرعة العدّاء المتجهة خلال فترة زمنية محددة ، وليست **السرعة المتجهة اللحظية**، والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.

ولإيجاد سرعة العدّاء المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة t ، فإننا نجد مُعدّل التغير اللحظي لمنحنى $f(t)$ عند تلك اللحظة .

مفهوم أساسي — السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم على صورة $f(t)$ ، بدلالة الزمن t ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية لها وجود.

متوسط السرعة المتجهة

مثال 3 يُبيِّن كيفية حساب متوسط السرعة المتجهة لجسم متحرك.

إرشادات للمعلم الجديد

السرعة يُستعملُ مصطلح "السرعة المتجهة" للتعبير عن كمية متجهة لها مقدار واتجاه. أما مصطلح "السرعة" فيعبر عن مقدار السرعة فقط.

مثال إضافي

3 **فيزياء:** في تجربةٍ فيزيائية، أُطلقت كرة إلى أعلى، والدالة: $h(t) = -16t^2 + 95t + 15$ تُمثّل ارتفاعها بالأقدام بعد t ثانية، ما متوسط السرعة المتجهة للكرة في الفترة الزمنية من $t = 1\,sec$ إلى $t = 2\,sec$ ؟ **$47\ ft/sec$**

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة على الطلبة كتابة خطوات إيجاد ميل مماس منحنى دالة عند نقطة بالتفصيل على مدونة الصف. وعليهم توضيح كيفية استعمال صيغة معدل التغيّر اللحظي لإيجاد الميل، أو السرعة اللّحظية.

السرعة المتجهة اللحظية

المثالان 5 , 4 يُبيِّنان كيفية استعمال صيغة السرعة اللَّحظية لإيجاد السرعة المتجهة اللَّحظية لجسم متحرك عند نقطة محددة، أو التوصل إلى معادلة نجد من خلالها السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما عند أي نقطة على الدالة .

مثالان إضافيان

4 **سياحة :** يقوم سُيَّاح بإسقاط قطع نقدية من برج ارتفاعه 300 ft باتجاه بركة أسفل البرج. ويُعطى ارتفاع هذه القطع بعد t sec بالعلاقة: $h(t) = 300 - 16t^2$. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للقطعة النقدية بعد 2 sec.

$v(t) = -64$ **ft /sec**

5 **نحل:** يُعطى بُعد نحلةٍ عن خَليَّتِها بعد t sec بالعلاقة: $p(t) = (12t - 6t^3 + 1)$ بالبوصات. أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ للنَّحلة عند أي لحظة زمنية . $v(t) = 12 - 18t^2$

إرشادات للمعلم الجديد

السرعة تأكد من فهم الطلبة للفرق بين متوسط السرعة، والسرعة المتجهة اللحظية. فمتوسط السرعة هي متوسط السرعة بين نقطتين مختلفتين، وأما السرعة اللحظية فهي السرعة عند لحظة زمنية معينة.

تنبيه!

التعويض تذكر أن توزع الإشارة السالبة التي تسبق $f(t)$ على كل حد فيها.

مـثال 4 السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 2000 ft ، وتُمثِّل $f(t) = 2000 - 16t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5 sec.

لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية، افرض أن $t = 5$ وطبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{2000 - 16(5+h)^2 - [2000 - 16(5)^2]}{h}$$ $f(t+h) = 2000 - 16(5+h)^2,$ $f(t) = 2000 - 16(5)^2,\ t = 5$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-160h - 16h^2}{h}$$ بالضرب ، ثم التبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-160 - 16h)}{h}$$ بالتحليل

$$= \lim_{h \to 0} (-160 - 16h)$$ بالقسمة على h

$$= -160 - 16(0) = -160$$ خاصية الطرح للنهايات ، ونهاية الدالة الثابتة ، والدالة المحايدة

أي أن سرعة الكرة بعد 5 sec هي 160 ft/sec، أما الإشارة السالبة فتعني أن ارتفاع الكرة يتناقص.

تأكد

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد كمال أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية . أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7 sec . **-224 ft/sec**

يمكن إيجاد معادلة للسرعة المتجهة اللَّحظية عند أي لحظة زمنية t.

مـثال 5 السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية

تعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتيمترات بعد t ثانية بـِ $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي لحظة زمنية .

طبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$$ $s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$ $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$$ بالضرب ، ثم التبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$$ بإخراج عامل مشترك

$$= \lim_{h \to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$$ بالقسمة على h

$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$$ خاصية الطرح للنهايات ، ونهاية الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$$= 18 - 9t^2$$ بالتبسيط

أي أنَّ سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية t هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تأكد

5) تمثِّل $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي لحظة زمنية t . $v(t) = 90 - 32t$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون زوِّد كل طالبين بسلك وشريط لاصق واطلب إليهما تشكيل قطع مكافئ باستعمال السلك ولصقه على ورقة رسم بياني، ثم اطلب إلى الطلبة استعمال مسطرة لرسم مماس لهذا المنحنى. واطلب إليهم تحديد ميل هذا المماس، ثم ناقشهم في العلاقة بين ميل المماس عند نقطة، ومعدل التغيّر اللَّحظي للدالة عند تلك النقطة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 29-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم .

تنبيه !

خطأ شائع للتمارين 22–17، ذكِّر الطلبة باستعمال صيغة معدل التغيّر اللَّحظي، و ليس حساب $h(t)$ لقيمة t المعطاة؛ لأنها لا تساوي السرعة المتجهة اللحظية.

اكتشف الخطأ في التمرين 34، على الطلبة أن يتذكروا بأن شكل منحنى دالة القيمة المطلقة شبيه بالحرف "V" ويَنتُج عنه ميلان مختلفان. وبذلك تكون دالة الميل الناتجة ليست متصلة.

تدرب وحل المسائل

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $y = x^2 - 5x$, $(1, -4)$, $(5, 0)$ **$-3, 5$**

2) $y = 6 - 3x$, $(-2, 12)$, $(6, -12)$ **$-3, -3$**

3) $y = \frac{3}{x}$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ **$-3, -\frac{1}{3}$**

4) $y = x^3 + 8$, $(-2, 0)$, $(1, 9)$ **$12, 3$**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (مثال 2)

5) $y = 4 - 2x$ **$m = -2$**

6) $y = -x^2 + 4x$ **$m = -2x + 4$**

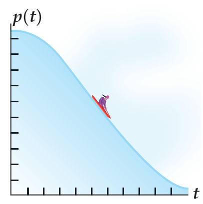
7) $y = 8 - x^2$ **$m = -2x$**

8) $y = \frac{1}{x^2}$ **$m = -\frac{2}{x^3}$**

9) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **$m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$**

10) $y = -2x^3$ **$m = -6x^2$**

11) **تزلج:** تمثِّل $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي بعد t ثانية. (مثال 2)



a) أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي لحظة t. **$m = 0.18t^2 - 2.16t$**

b) أوجد الميل عندما $t = 2\,\text{sec}, 5\,\text{sec}, 7\,\text{sec}$. **$-3.6, -6.3, -6.3$**

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي موقع جسم بالأميال بعد t دقيقة. أوجد متوسط سرعة الجسم المتجهة بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة: (مثال 3)

12) $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$, $3 \le t \le 5$ **0.75 mi/h**

13) $s(t) = 1.08t - 30$, $4 \le t \le 8$ **65 mi/h تقريبًا**

14) $s(t) = 0.01t^3 - 0.01x^2$, $4 \le t \le 7$ **49 mi/h تقريبًا**

15) $s(t) = -0.5(t - 5)^2 + 3$, $4 \le t \le 4.5$ **45 mi/h تقريبًا**

16) **طباعة:** تمثِّل $w(t) = 10t^2 - \frac{1}{2}t^3$ عدد الكلمات التي يطبعها خالد بعد t دقيقة. (مثال 3)

a) ما متوسط عدد الكلمات لكل دقيقة بين الدقيقتين الثانية والرابعة؟ **46 كلمة في الدقيقة**

b) ما متوسط عدد الكلمات لكل دقيقة بين الدقيقتين الثالثة والسابعة؟ **60.5 كلمة في الدقيقة**

تمثِّل $h(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللَّحظية لهذا الجسم عند الزمن المُعطى: (مثال 4)

17) $h(t) = 100 - 16t^2, t = 3$ **-96 ft/sec**

18) $h(t) = 38t - 16t^2, t = 0.8$ **12.4 ft/sec**

19) $h(t) = -16t^2 - 400t + 1700, t = 3.5$ **-512 ft/sec**

20) $h(t) = 1275 - 16t^2, t = 3.8$ **-121.6 ft/sec**

21) $h(t) = 73t - 16t^2, t = 4.1$ **-58.2 ft/sec**

22) $h(t) = -16t^2 + 1100, t = 1.8$ **-57.6 ft/sec**

تمثِّل $h(t)$ في كلٍّ مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي لحظة زمنية t: (مثال 5)

23) $h(t) = 14t^2 - 7$ **$v(t) = 28t$**

24) $h(t) = t - 3t^2$ **$v(t) = 1 - 6t$**

25) $h(t) = 5t + 8$ **$v(t) = 5$**

26) $h(t) = 18 - t^2 + 4t$ **$v(t) = -2t + 4$**

27) $h(t) = 12t^2 - 2t^3$ **$v(t) = 24t - 6t^2$**

28) $h(t) = 3t^3 - 20 + 6t$ **$v(t) = 9t^2 + 6$**

29) ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. يمكنُ وصفُ ارتفاع المظلي بالأقدام عن سطح الأرض بعد t ثانية بـ $h(t) = 15000 - 16t^2$ (مثال 5) **للفروع a–c انظر ملحق الإجابات**

a) أوجد متوسط سرعة المظلي المتجهة بين الثانيتين الثانية والخامسة من القفز.

b) كم بلغت السرعة المتجهة اللحظية للمظلِّي عند الثانية الثانية، وعند الثانية الخامسة؟

c) أوجد تعبيرًا يصف سرعة المظلي اللحظية عند أي لحظة زمنية t.

30) **غوص:** يُبيِّن الجدول أدناه ارتفاعات غواص d بالأمتار عن سطح الماء بعد t ثانية من قفزه من مكان مرتفع نحو الماء.

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.7	42.1	40.6	33.8	25.3	14.2	0.85

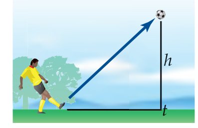
a) احسب متوسط سرعة الغواص المتجهة في الفترة الزمنية $0.5 \le t \le 1.0$ **-6.2 m/sec**

b) إذا كانت معادلة المنحنى التقريبي لنقاط الجدول هي $d(t) = -4.91t^2 - 0.04t + 45.06$. فأوجد تعبيرًا يصف سرعة الغواص المتجهة اللحظية $v(t)$ بعد t ثانية ، ثم استعمل $v(t)$ لحساب سرعته بعد 3 sec. **$-9.82t - 0.04$, -29.5 m/sec**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	34، 36–46
ضمن المتوسط	30، 31، 32 ، 34، 36–46
فوق المتوسط	30 – 46

31) **كرة القدم:** ركل سلمان كرة رأسيًا بسرعة قدرها 75 ft/sec. افرض أن ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية مُعطى بـ $h(t) = -16t^2 + 75t + 2.5$. **c) $t \approx 2.344$ sec**



a) أوجد تعبيرًا يصف سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$. **$-32t + 75$**

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 sec من ركلها؟ **59 ft/sec**

c) إذا علمت أن السرعة المتجهة اللحظية للكرة لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع هي صفر، فمتى تصل إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ **90.39 ft تقريبًا**

32) **فيزياء:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على مسار مستقيم بـ $d(t) = 3t^3 + 8t + 4$، حيث t الزمن بالثواني، و d المسافة بالأمتار.

a) أوجد تعبيرًا يصف السرعة المتجهة اللحظية للجسم $v(t)$ عند أي لحظة زمنية t. **$9t^2 + 8$**

b) استعمل $v(t)$ لحساب سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2\,\text{sec}, 4\,\text{sec}, 6\,\text{sec}$ **44 m, 152 m, 332 m**

33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين نظرية القيمة المتوسطة، والتي تنص على أنه إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنه توجد نقطة c على منحنى الدالة يساوي الميل عندها متوسط مُعدّل تغيّر الدالة على الفترة نفسها. **$1, y = x + 6$**

a) **عدديًا:** أوجد متوسط مُعدّل تغيّر $f(x) = -x^2 + 8x$ في الفترة $[1, 6]$، وأوجد معادلةً للقاطع على هذه الفترة.

b) **عدديًا:** أوجد معادلة لميل مماس منحنى الدالة عند أي نقطة على منحنى $f(x)$. **$m = -2x + 8$**

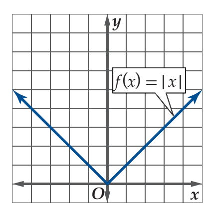
c) **عدديًا:** أوجد نقطةً على منحنى $f(x)$، بحيث يكون الميل عندها مساويًا لمتوسط مُعدّل تغيّر الدالة الذي أوجدته في الفرع a، وأوجد معادلة مماس منحنى $f(x)$ عند هذه النقطة. **انظر الهامش**

d) **تعبير لفظي:** خمِّن العلاقة بين قاطع $f(x)$ على الفترة $[1, 6]$، والمماس عند النقطة التي أوجدتها في الفرع c. **انظر الهامش**

e) **تمثيل بياني:** استعمل آلة حاسبة بيانية؛ لتمثيل كل من $f(x)$، القاطع، المماس على الشاشة نفسها. هل يعزز التمثيل البياني تخمينك؟ فسر إجابتك. **انظر الهامش**

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **اكتشف الخطأ:** سُئل علي وجميل أن يصفا معادلة ميل مماس منحنى الدالة الممثلة بيانيًا في الشكل المجاور عند أي نقطة على منحناها. فقال علي: إن منحنى معادلة الميل سيكون متصل؛ لأن الدالة الأصلية متصلة، في حين قال جميل: إن منحنى معادلة الميل لن يكون متصلًا. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك. **انظر الهامش**



35) **تحدٍّ:** أوجد معادلة ميل مماس منحنى $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه. **$m = 8x^3 + 9x^2 - 2$**

36) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة "يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط". برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

37) **تبرير:** صح أم خطأ: إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم بعد t ثانية بـ $s(t) = at + b$، فإن السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا. برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

38) **اكتب** بين لماذا تكون السرعة المتجهة اللحظية صفرًا عند نقطة القيمة العظمى أو الصغرى. **انظر الهامش**

مراجعة تراكمية

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 3-2)

39) $\lim_{x \to 4} (x^2 + 2x - 2)$ **22**

40) $\lim_{x \to -1} (-x^4 + x^3 - 2x + 1)$ **1**

41) $\lim_{x \to 0} (x + \sin x)$ **0**

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 3-2)

42) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 5}$ **$\frac{3}{2}$**

43) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^4 + x^3 + 3x}$ **0**

تدريب على اختبار معياري

44) ما معادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند أي نقطة عليه؟ **F**

F $4x$ G x

H $2x$ J $-4x$

45) سقطت كرة بشكل رأسي، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بـ $d(t) = 16t^2$. إذا كانت $\lim_{x \to 2} \frac{d(t) - d(2)}{t - 2}$ تمثل سرعة الكرة بعد 2 sec، فكم سرعتها بعد 2 sec؟ **C**

A 46 ft/sec C 64 ft/sec

B 58 ft/sec D 72 ft/sec

46) ماميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند $(3, 34)$؟ **G**

F -9 G 27

H 9 J 34

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة توضيح العلاقة بين ميل مماس منحنى دالة عند نقطة، ومعدل تغيّر الدالة عند نفس النقطة. **إجابة ممكنة: ميل مماس الدالة عند نقطة هو معدل تغيّر الدالة عند النقطة نفسها.**

التقويم التكويني

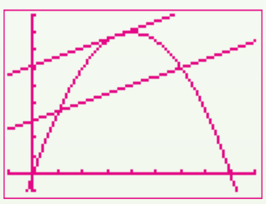
تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-3 بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

33c) $(3.5, 15.75), y = x + 12.25$

33d) الخطان المستقيمان متوازيان؛ لأن ميليهما متساويان.

33e)



[−1, 9] scl: 1 by [−2, 18] scl: 2

إجابة ممكنة: نعم؛ الخطان المستقيمان متوازيان.

34) جميل؛ إجابة ممكنة: ميل المنحنى هو -1 عندما $x < 0$، و 1 عندما $x > 0$. لذا، فإن منحنى الميل يتكون من مستقيمين أفقيين معادلتهما هي: $y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$؛ ولذلك يكون المنحنى غير متصل.

36) خاطئة؛ إجابة ممكنة: إذا لم يكن المنحنى دائرة فمن الممكن أن يقطع المماس هذا المنحنى في نقاط أخرى غير نقطة التماس، على سبيل المثال، منحنى الدالة $y = \sin x$.

37) صحيحة، إجابة ممكنة: بما أن $s(t)$ دالة خطية، فإن ميلها ثابت ويساوي a، وبذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا.

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد معادلة ميل مماس منحنى الدالة $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 6x + 5$ عند أي نقطة تقع عليه، واعتمد على إجابتك وإجابة السؤال 35؛ لوصف أي علاقة بين الدالة الأصلية، والمعادلة التي تصِف ميل الدالة عند أي نقطة.

الميل: $f'(x) = 15x^4 - 6x^2 + 2x - 6$، اضرب المعاملات بالقوى ثم اطرح 1 من كل قوة، واحذف الثابت.

38) إجابة ممكنة: إذا مُثِّلت دالة السرعة اللحظية لجسم واحتوى التَّمثيل البياني نقطة عظمى أو صغرى، تكون المماسات عند هذه النقاط أفقية، أي موازية للمحور x، وميل المماس عند أي من تلك النقاط يساوي 0. أي أن السرعات اللحظية عند النقاط العظمى أو الصغرى هي 0 فمثلًا؛ عند قذف كرة إلى أعلى، فإن سرعتها موجبة وعندما تصل إلى أقصى ارتفاع، تعود إلى سطح الأرض وتصبح سرعتها سالبة. عند أقصى ارتفاع تكون السرعة اللحظية تساوي 0.

التقويم التكويني

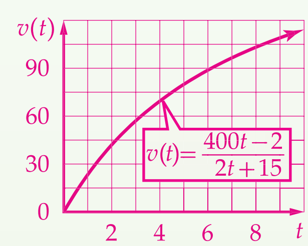
استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

بناء الاختبارات التقويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

إجابة:

9a)



الفصل 3

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-3

قدّر كل نهاية مما يأتي: (الدرس 3-1)

1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ **1**

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ **ليس لها وجود**

3) $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-18}{x-3}$ **12**

4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x}$ **0**

5) $\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x^2+1}$ **$\frac{3}{5}$**

6) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^3+3}$ **2**

7) $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x+20}}{x}$ **-1**

8) $\lim_{x\to 3} \frac{|4-x|}{\sqrt{3x}}$ **$\frac{1}{3}$**

9) تزداد قيمة تحفة فنية فريدة سنويًّا بحيث تصبح قيمتها بآلاف الدنانير بعد t سنة $v(t) = \frac{400t-2}{2t+15}$ (الدرس 3-1)

a) مثِّل منحنى $v(t)$ بيانيًّا في الفترة $0 \le t \le 10$. **انظر الهامش**

b) استعمل التمثيل البياني؛ لتقدير قيمة التحفة الفنية عندما $t = 2, 5, 10$. **42, 80, 115**

c) استعمل التمثيل البياني لحساب $\lim_{t\to\infty} v(t)$. **200**

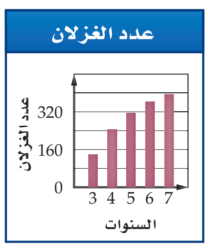
d) وضّح العلاقة بين النهاية وسعر التحفة الفنية. **إن قيمة اللوحة لن تزيد عن BD 200.**

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. (الدرس 3-2)

10) $\lim_{x\to 9} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-3}$ **ليس ممكنًا؛ عندما $x = 9$، فإن المقام يساوي صفر**

11) $\lim_{x\to -2} (2x^3+x^2-8)$ **-20**

12) **حياة بريَّة:** يمكن تقدير عدد الغزلان بالمئات في محمية بالعلاقة $P(t) = \frac{10t^3-40t+2}{2t^3+14t+12}$، وذلك بعد t سنة، حيث $t \ge 3$. ويُبيّن الشكل أدناه أعداد الغزلان على مدى 5 سنوات. ما أكبر عدد للغزلان يمكن أن يوجد في هذه المحمية؟ (الدرس 3-2) **500 غزال**



احسب كل نهاية مما يأتي: (الدرس 3-2)

13) $\lim_{x\to\infty} 15 - x^2 + 8x^3$ **∞**

14) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-x-2}{4x^3+5x^2}$ **$\frac{1}{2}$**

15) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-1}{2x^4-14x^2+2}$ **0**

16) $\lim_{x\to\infty} 10x^3 - 4 + x^2 - 7x^4$ **$-\infty$**

17) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{4-2x}$؟ (الدرس 3-1) **A**

A ليس لها وجود
B 4
C 2
D -2

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 3-3)

18) $y = x^2 - 3x$, $(2, -2)$, $(-1, 4)$ **1, −5**

19) $y = 2 - 5x$, $(-2, 12)$, $(3, -13)$ **−5, −5**

20) $y = x^3 - 4x^2$, $(1, -3)$, $(3, -9)$ **−5, 3**

21) **ألعاب نارية:** انطلقت قذيفة ألعاب نارية بسرعة رأسية قدرها 90 ft/sec، وتمثل $h(t) = -16t^2 + 90t + 3.2$ الارتفاع الذي تبلغه القذيفة بعد t ثانية من إطلاقها. (الدرس 3-3)

a) أوجد تعبيرًا يمثِّل السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للقذيفة. **$v(t) = -32t + 90$**

b) ما السرعة المتجهة للقذيفة بعد 0.5 sec من الإطلاق؟ **74 ft/sec**

c) ما أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة؟ **129.76ft تقريبًا**

22) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يمثل ميل منحنى $y = 7x^2 - 2$ عند أي نقطة تقع عليه. (الدرس 3-3) **H**

F $m = 7x$
G $m = 7x - 2$
H $m = 14x$
J $m = 14x - 2$

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد t دقيقة بـ $s(t)$. أوجد متوسط سرعة الجسم المتجهة في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترات الزمنية المعطاة. تذكّر بأن تحول الدقائق إلى ساعات. (الدرس 3-3)

23) $s(t) = 12 + 0.7t$, $2 \le t \le 5$ **42 mi/h**

24) $s(t) = 2.05t - 11$, $1 \le t \le 7$ **123 mi/h**

25) $s(t) = 0.9t - 25$, $3 \le t \le 6$ **54 mi/h تقريبًا**

26) $s(t) = 0.5t^2 - 4t$, $4 \le t \le 8$ **120 mi/h تقريبًا**

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي لحظة زمنية t بالعلاقة $h(t)$ في كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

27) $h(t) = 4t^2 - 9t$ **$v(t) = 8t - 9$**

28) $h(t) = 2t - 13t^2$ **$v(t) = 2 - 26t$**

29) $h(t) = 2t - 5t^2$ **$v(t) = 2 - 10t$**

30) $h(t) = 6t^2 - t^3$ **$v(t) = 12t - 3t^2$**

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 3-1, 3-2, 3-3	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	كتاب التمارين	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (120)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

3-4 المشتقة
Derivative

فيما سبق
درستُ حساب ميل المماسات لإيجاد مُعدل التغير اللحظي.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجدُ ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
- أستعملُ قانوني الضرب والقسمة لإيجاد المشتقات.

المفردات الأساسية
المشتقة
derivative
الاشتقاق
differentiation
المعادلة التفاضلية
differential equation
المؤثر التفاضلي
differential operator

www.obeikaneducation.com

لماذا ؟
ركل أحمد كرةً رأسيًّا فانطلقت بسرعة 65 ft/sec .
هل يمكن أن تبلغ ارتفاع 70 ft ؟

قواعد أساسية استعملت النهايات في الدرس 3–3 لتحديد ميل مماس منحنى الدالة عند أي نقطة عليه ، وتُسمى هذه النهاية (مُعدّل التغيُّر اللحظي) **مشتقة** $f(x)$ يرمز لها $f'(x)$ ، وتعرّف على أنها $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة **بالاشتقاق** وتُسمَّى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

مثـال 1 مشتقة دالة عند أي نقطة
أوجد مشتقة $f(x)=4x^2-5x+8$ باستعمال التعريف، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x=1\,,5$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ تعريف المشتقة

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-5(x+h)+8-(4x^2-5x+8)}{h}$$ $f(x+h)=4(x+h)^2-5(x+h)+8$, $f(x)=4x^2-5x+8$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{8xh+4h^2-5h}{h}$$ بالتبسيط

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(8x+4h-5)}{h}$$ بإخراج عامل مشترك

$$=\lim_{h\to 0}(8x+4h-5)$$ بالقسمة على h

$$=[8x+4(0)-5]=8x-5$$ خاصيتا الجمع والفرق للنهايات ونهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

أي أن مشتقة $f(x)$ هي $f'(x)=8x-5$. احسب $f'(x)$ عندما $x=1\,,5$.

$f'(x)=8x-5$	المعادلة الأصلية	$f'(x)=8x-5$
$f'(5)=8(5)-5$	$x=1\,,x=5$	$f'(1)=8(1)-5$
$f'(5)=35$	بالتبسيط	$f'(1)=3$

تأكد
أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال التعريف في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

(1A $f(x)=6x^2+7,\ x=2\,,5$
(1B $f(x)=-5x^2+2x-12,\ x=1\,,4$

$f'(x)=-10x+2,$
$f'(1)=-8,f'(4)=-38$

يُرمز لمشتقة $y=f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y' ، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

قراءة الرياضيات
المشتقات يُقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة f بالنسبة للمتغير x ، أو f prime of x .

إرشادات للدراسة
رموز المشتقة الأولى $f'(x)$ ، y' ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{df}{dx}$ هي رموز للمشتقة الأولى للدالة $y=f(x)$ ، وكلما طلب إيجاد مشتقة الدالة، فإن المقصود هو المشتقة الأولى.

$f'(x)=12x,$ **(1A**
$f'(2)=24,f'(5)=60$

3-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي
ما قبل الدرس 3-4
حساب ميل المماسات؛ لإيجاد معدل التغير اللَّحظي.
الدرس 3-4
إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
استعمال قانوني الضرب والقسمة؛ لإيجاد المشتقات.
ما بعد الدرس 3-4
استعمال قواعد الاشتقاق؛ لحساب التكاملات لبعض الدوال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"
اسأل :
- إذا ركل أحمد الكرة رأسياً من ارتفاع 5 ft، فما الدالة التي تصّف ارتفاع الكرة بعد t sec؟
$h(t)=-16t^2+65t+5$
- استعمل الآلة الحاسبة البيانية؛ لإيجاد أقصى ارتفاع تصله الكرة. 71 ft
- هل بإمكان أحمد ركل الكرة لتصل إرتفاع 80 ft؟ علِّل. لا، لأن أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة 71 ft.

مشتقة الدالة
مثال 1 يُبيّن كيفية استعمال مشتقة الدالة؛ لإيجاد قيمها عند نقاط محددة؛ وذلك بتعويض القيم المختلفة لِـ x فيها.

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (154)	• تنويع التعليم ، ص (154)	• تنويع التعليم ، ص (156 ، 154)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (19) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

قواعد أساسية

الأمثلة 4-2 تُبيّن كيفية استعمال قواعد الاشتقاق؛ لإيجاد مشتقات دوال مختلفة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد مشتقة: $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 7x + 12$، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1, x = 4$

$f'(x) = 6x^2 + 4x - 7, f'(1) = 3, f'(4) = 105$

2 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

a) $f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$

b) $g(x) = \sqrt[4]{x^6}$ $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

c) $h(x) = \frac{1}{x^{10}}$ $h'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$

استعملت حتى هذه اللحظة النهاية عندما تقترب من الصفر لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدُّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولةً ودقة.

مفهوم أساسي: قاعدة مشتقة القوة

التعبير اللفظي قوة x في المشتقة أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x الأصلية.

بالرموز إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 2 قاعدة القوة للمشتقات

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = x^9$

$f(x) = x^9$ الدالة المعطاة

$f'(x) = 9x^{9-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= 9x^8$ بالتبسيط

b) $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$ الدالة المعطاة

$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$ بإعادة كتابة الدالة كقوى نسبية

$g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$ بالتبسيط

c) $h(x) = \frac{1}{x^8}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$ الدالة المعطاة

$h(x) = x^{-8}$ بإعادة كتابة الدالة كقوى نسبية

$h'(x) = -8x^{-8-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$ بالتبسيط

تنبيه!

مشتقات القوى السالبة

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدًا من الأس، لنحصل على $-4-1=-4+(-1)$

لذا، فإن $f'(x) = -4x^{-5}$.

تأكد

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

2A) $j(x) = x^4$ $j'(x) = 4x^3$

2B) $k(x) = \sqrt{x^3}$ $k'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

2C) $m(x) = \frac{1}{x^5}$ $m'(x) = -\frac{5}{x^6}$

هناك العديد من قواعد الاشتقاق الأخرى المهمة التي تفيد في إيجاد مشتقات الدوال التي تحوي أكثر من حدٍّ.

مفهوم أساسي: قواعد أخرى للاشتقاق

الثابت مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا. أي أنه إذا كان $f(x) = c$ ، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

الضرب في عدد ثابت إذا كان $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.

الجمع أو الطرح إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

150 الفصل 3 النهايات والاشتقاق

مثالان إضافيان

3 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي.

a) $f(x) = 6x^2 - 3$ $\quad f'(x) = 12x$

b) $g(x) = 2x^3(5x - 3)$

$g'(x) = 40x^3 - 18x^2$

c) $h(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x}{x}$

$h'(x) = 6x - 2$

4 **حركة:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم بالمليمترات بعد t ثانية: $s(t) = 6t - 2t^3 + 4$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللّحظية $v(t)$ للجسم. $v(t) = 6 - 6t^2$

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر مجموعة من الطلبة؛ ليقوموا بتوضيح كيفية استعمال قواعد الاشتقاق لايجاد مشتقات دوال مختلفة لبقية طلبة الصف.

إرشادات للدراسة

المشتقات إذا كانت $f(x) = x$، فإن $f'(x) = 1$، وإذا كانت $f(x) = cx$، فإن $f'(x) = c$.

مثال 3 قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 5x^3 + 4$

$f(x) = 5x^3 + 4$	الدالة المعطاة
$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$	قواعد مشتقات الثابت، والضرب في عدد ثابت، والجمع
$= 15x^2$	بالتبسيط

b) $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$	الدالة المعطاة
$g(x) = 2x^8 + 4x^5$	خاصية التوزيع
$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$	قاعدتا مشتقتي الضرب في عدد ثابت، والجمع
$= 16x^7 + 20x^4$	بالتبسيط

c) $h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$	الدالة المعطاة
$h(x) = \dfrac{5x^3}{x} - \dfrac{12x}{x} + \dfrac{6\sqrt{x^5}}{x}$	بقسمة كل حد في البسط على x
$h(x) = 5x^2 - 12 + 6\,x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$
$h'(x) = 5 \cdot 2\,x^{2-1} - 0 + 6 \cdot \frac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}-1}$	قواعد مشتقات الثابت، والضرب في عدد ثابت، والجمع والفرق
$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}} = 10x + 9\sqrt{x}$	بالتبسيط

تأكد ✓

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

3A) $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$ $\qquad$ 3B) $g(x) = 3x^4(x + 2)$ $\qquad$ 3C) $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

3A) $f'(x) = 10x^4 - 3x^2$

3B) $g'(x) = 15x^4 + 24x^3$

3C) $h'(x) = 12x^2 - 3$

الآن ، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل. في مثال 5 من الدرس 3–3 أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسم متحرك، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بـ $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$ ، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم.

السرعة المتجهة اللحظية للجسم هي $s'(t)$.

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	الدالة المعطاة
$s'(t) = 18 \cdot 1t^{1-1} - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد مشتقات الثابت، والضرب في عدد ثابت، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بالتبسيط

أي أن سرعة الجسم المتجهة اللحظية هي $v(t) = 18 - 9t^2$. لاحظ أن هذه الإجابة مكافئة لتلك التي حصلت عليها في المثال 5 من الدرس 3-3 .

تأكد ✓

4) تمثّل $h(t) = 55t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قُذِفت رأسيًّا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن t . $v(t) = 55 - 32t$

القيمتان العظمى والصغرى لدالة

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال النقاط الحرجة أو أطراف الفترات المغلقة، لإيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة معرفة على فترة.

مثال إضافي

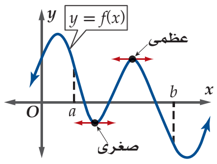
5 **الألعاب البهلوانية :** تُمثّل الدالة $h(t) = 4 + 5t - 2t^2$ ارتفاع لاعب بهلواني بالأقدام بعد قفزه من جهاز قفز في الفترة الزمنية $[0, 3]$، حيث t الزمن بالثواني. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يصله اللاعب.

أقصى ارتفاع هو 7.125 ft بعد 1.25 sec ، وأدنى ارتفاع يساوي 1 ft بعد 3 sec.

تُسمَّى النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير مُعرفة نقطةً حرجةً للدالة. والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدثُ عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير مُعرف.

مفهوم أساسي **نظرية القيمة القصوى**

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمًا عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند إحدى طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة التي هي في داخل الفترة.



لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة فلا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

الربط مع واقع الحياة

ازدادت سرعة العجلات الدوّارة حديثًا لتصل إلى 120 mi/h ، وكذلك ازدادت ارتفاعاتها لتبلغ 450 ft.

المصدر: Guinness World Records

مثال 5 من واقع الحياة — القيمتان العظمى والصغرى لدالة

عجلة دوارة : تمثِّل $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ ارتفاع أحمد أثناء ركوبه عجلة دوارة في الفترة الزمنية $[1, 12]$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد انطلاق العجلة الدوارة. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه أحمد.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$$ الدالة المعطاة

$$h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3\,t^{3-1} + 4 \cdot 2t^{2-1} + 0$$ قواعد اشتقاق الثابت، والضرب في عدد ثابت، والجمع، والفرق

$$= -t^2 + 8t$$ بالتبسيط

أوجد النقاط الحرجة وذلك بحل المعادلة $h'(t) = 0$.

$$0 = h'(t)$$ المعادلة الأصلية

$$= -t^2 + 8t$$ $h'(t) = -t^2 + 8t$

$$= -t(t - 8)$$ بالتحليل

أي أن لهذه الدالة نقطتين حرجتين عندما $t = 0\ ,\ 8$ ، وحيث إن $t = 0$ لا تقع في الفترة $[1, 12]$ ، فإننا نحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 1, 8, 12$.

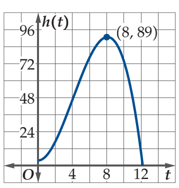
$$h(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 + \frac{11}{3} \approx 7.33$$

$$h(8) = -\frac{1}{3}(8)^3 + 4(8)^2 + \frac{11}{3} = 89$$ قيمة عظمى

$$h(12) = -\frac{1}{3}(12)^3 + 4(12)^2 + \frac{11}{3} \approx 3.67$$ قيمة صغرى

أي أن أقصى ارتفاع يبلغه أحمد هو 89 ft، وذلك بعد 8 sec، في حين أن أدنى ارتفاع هو 3.7 ft تقريبًا بعد 12 sec.

التحقق من الحل يعزِّز التمثيل البياني المجاور لمنحنى $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ على الفترة $[1, 12]$ هذه النتيجة ، حيث يبيِّن التمثيل البياني أن أعلى ارتفاع للتمثيل البياني يساوي 89 ft ، ويكون عندما $t = 8$ sec. ✔



تأكد

5) **رياضة القفز :** تمثِّل $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ ارتفاع سعد بالأقدام أثناء مشاركته في قفزة البنجي (Bungee) ، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

5) أقصى ارتفاع وقدره 330 ft ، وذلك عند 0 sec، وأدنى ارتفاع 10 ft عند 4 sec.

152 الفصل 3 النهايات والاشتقاق

قاعدتا مشتقّتي الضرب والقسمة تعلمت في هذا الدرس أن مشتقة مجموع دالّتين تساوي مجموع مشتقتي الدالّتين، فهل تكون مشتقة ناتج ضرب دالتين مساوية لناتج ضرب مشتقتي الدالتين؟ افرض أن $f(x) = x, g(x) = 3x^3$.

مشتقة الضرب

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3] = \frac{d}{dx}(3x^4) = 12x^3$$

ضرب المشتقات

$$\frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3) = 1 \cdot 9x^2 = 9x^2$$

يتضح من هذا المثال أن مشتقة ناتج ضرب دالّتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقتي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالّتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة الضرب**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f، g لها وجود عند x، فإن $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

ستبرهن قاعدة مشتقة الضرب في التمرين 48

مثال 6 قاعدة مشتقة الضرب

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

افرض أن $f(x) = x^3 - 2x + 7, g(x) = 3x^2 - 5$، أي أن $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$	من الفرض
$f'(x) = 3x^2 - 2$	قواعد مشتقات القوة، والضرب في عدد ثابت، والثابت، والجمع والطرح
$g(x) = 3x^2 - 5$	من الفرض
$g'(x) = 6x$	قواعد مشتقات الضرب في عدد ثابت، والثابت، والطرح

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$	قاعدة مشتقة الضرب
$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$	بالتعويض
$= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x$	خاصية التوزيع
$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$	بالتبسيط

b) $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

افرض أن $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64, g(x) = 6x^2 - x - 2$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$	من الفرض
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$	قواعد مشتقات القوة، والضرب في عدد ثابت، والثابت، والجمع والطرح
$g(x) = 6x^2 - x - 2$	من الفرض
$g'(x) = 12x - 1$	قواعد مشتقات الضرب في عدد ثابت، والقوة، والثابت، والطرح

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$	قاعدة مشتقة الضرب
$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$	بالتعويض

تأكد للتدريبين **6A, 6B** انظر الهامش

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

6A) $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$ **6B)** $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة الضرب
ينتج عن قاعدة مشتقة الضرب مقدار يمكن تبسيطه. ويمكنك أيضًا تركه على حاله دون تبسيط ما لم تكن بحاجة إلى تبسيطه.

قاعدة مشتقة الضرب

مثال 6 يُبيّن كيفية استعمال قانون الضرب؛ لإيجاد مشتقة حاصل ضرب دالتين.

مثال إضافي

6 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $h(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^3 - 4)$

$h'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 8$

b) $h(x) = (x^4 - x^2 + 2) \cdot (x^3 - x + 1)$

$h'(x) = (4x^3 - 2x)(x^3 - x + 1) + (x^4 - x^2 + 2)(3x^2 - 1)$

التركيز في المحتوى الرياضي

قاعدة مشتقة الضرب لاحظ أن قاعدة مشتقة ضرب القوى بثابت هي حالة خاصة من قاعدة مشتقة الضرب، حيث يُعَدُّ الثابت عاملاً، كما أن بإمكاننا تعميم قانون الضرب لأكثر من دالتين. فمثلاً،

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

إرشادات للمعلم الجديد

رمز المشتقة يُعبّر رمز المشتقة $\frac{dy}{dx}$ عن "التغيُّر في y مقسومًا على التغيّر في x" والحرف d هو اختصار للحرف اليوناني دلتا (delta)، والذي يستعمل للتعبير عن فرق القيم، أو التغيّر في القيم.

إجابات (تأكد):

6A) $h'(x) = (5x^4 + 26x)(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)(21x^2 - 10x)$

6B) $h'(x) = (2x + 3x^2 + 1)(8x^2 + 3) + (x^2 + x^3 + x)(16x)$

قاعدة مشتقة القسمة

مثال 7 يُبيّن كيفية استعمال قانون القسمة؛ لإيجاد مشتقة ناتج قسمة دالتين.

مثال إضافي

7 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $h(x) = \frac{4x^3}{x^2-2}$

$h'(x) = \frac{4x^4 - 24x^2}{x^4 - 4x^2 + 4}$

b) $h(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$

$h'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

إرشادات للمعلم الجديد

المشتقات السرعة المتجهة اللّحظية، والمشتقة، وميل المماس للدالة هي مصطلحات متكافئة. والمشتقات هي أسهلها للحساب. ومن المهم أن يفهم الطلبة العلاقة بين هذه المصطلحات الثلاث.

يمكنك بطريقة التبرير نفسها في مشتقة الضرب ملاحظة أن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقتي الدالتين ، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة القسمة**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g لهما وجود عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ستبرهن قاعدة مشتقة قسمة دالتين في التمرين 50

مثال 7 قاعدة مشتقة القسمة

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = \frac{5x^2-3}{x^2-6}$

افرض أن $g(x) = x^2 - 6$ ، $f(x) = 5x^2 - 3$ ، أي أن $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ — من الفرض

$f'(x) = 10x$ — قواعد مشتقات الضرب في عدد ثابت ، والثابت، والطرح

$g(x) = x^2 - 6$ — من الفرض

$g'(x) = 2x$ — قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والطرح

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ — قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{10x(x^2-6) - (5x^2-3)(2x)}{(x^2-6)^2}$ — بالتعويض

$= \frac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2-6)^2}$ — خاصية التوزيع

$= \frac{-54x}{(x^2-6)^2}$ — بالتبسيط

b) $h(x) = \frac{x^2+8}{x^3-2}$

افرض أن $g(x) = x^3 - 2$ ، $f(x) = x^2 + 8$.

$f(x) = x^2 + 8$ — من الفرض

$f'(x) = 2x$ — قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والجمع

$g(x) = x^3 - 2$ — من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ — قواعد مشتقات القوة ، والثابت، و الطرح

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ — قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{2x(x^3-2) - (x^2+8)3x^2}{(x^3-2)^2}$ — بالتعويض

$= \frac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3-2)^2}$ — بفك الأقواس، ثم التبسيط

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة القسمة
يُعدّ تبسيط ناتج مشتقة القسمة مهمًا في كثير من التمارين، إلا أنه ليس من الضروري فك أقواس المقام ما لم ينتج عن ذلك تبسيط أكثر.

تأكد

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

7A) $j(x) = \frac{7x-10}{12x+5}$ $\quad \frac{155}{(12x+5)^2}$

7B) $k(x) = \frac{6x}{2x^2+4}$ $\quad \frac{-12x^2+24}{(2x^2+4)^2}$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون اللغويون نظِّم الطلبة في مجموعات من خمسة إلى ثمانية، واطلب إلى كل مجموعة كتابة قواعد الاشتقاق بلغتهم الخاصة، ثم اطلب إليهم عرض ما كتبوه على المجموعات الأخرى، بحيث تقوم كل مجموعة بالتحقق من سلامة اللغة المستعملة في صياغة القواعد. بعدها قم بالتجول بين المجموعات؛ للتحقق من عدم وجود أي ارتباك أو سوء فهم للقواعد .

تدرب وحل المسائل

أوجد مشتقةَ كلِّ دالة مما يأتي باستعمال التعريف، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة: (مثال 1) للتمارين 1-5 انظر الهامش

1) $f(x) = 4x^2 - 3, x = 2, -1$

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11, t = 5, 3$

3) $m(j) = 14j - 13, j = -7, -4$

4) $v(n) = 5n^2 + 9n - 17, n = 7, 2$

5) $r(b) = 2b^3 - 10b, b = -4, -3$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (المثالان 2, 3) للتمارين 6-13 انظر الهامش

6) $y(f) = -11f$

7) $z(n) = 2n^2 + 7n$

8) $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$

9) $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$

10) $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$

11) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

12) $q(c) = c^9 - 3c^5 + 5c^2 - 3c$

13) $p(k) = k^{5.2} - 8k^{4.8} + 3k$

14) **درجات الحرارة:** تُعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بـ: للفروع a-c انظر ملحق الإجابات
$f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ ، حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم. (مثال 4)

a) أوجد معادلة تمثل مُعدّل التغيّر اللّحظي لدرجة الحرارة.

b) أوجد مُعدَّل التغيّر اللحظي لدرجة الحرارة عندما: $h = 2, 14, 20$.

c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة $0 \le h \le 24$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة لكل دالةٍ مما يأتي، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة على الفترة المعطاة. (مثال 5) للتمارين 15-20 انظر ملحق الإجابات

15) $f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0]$

16) $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2, [1, 4]$

17) $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115, [-6, -3]$

18) $f(x) = -5x^2 - 90x, [-11, -8]$

19) $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k, [0, 3]$

20) $c(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 6n + 8, [-5, 5]$

21) **رياضة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افرض أن $h(t) = 65t - 16t^2 + 5$ تمثل ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية عندما $0 \le t \le 4$. (مثال 5)

a) أوجد $h'(t)$. $h(t) = 65 - 32t$

b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لمسار الكرة في الفترة [0, 4].

c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 70 ft ؟

21b) (0, 5), (2.03, 71.02) c) انظر ملحق الإجابات

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (مثال 6) للتمارين 22-28 انظر ملحق الإجابات

22) $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

23) $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$

24) $s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t)$

25) $g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$

26) $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$

27) $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$

28) $f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي: (مثال 7) للتمارين 29-34 انظر ملحق الإجابات

29) $f(m) = \frac{3 - 2m}{3 + 2m}$

30) $r(t) = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$

31) $m(q) = \frac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$

32) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{-x^2 + 3}$

33) $q(r) = \frac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$

34) $t(w) = \frac{w + w^4}{\sqrt{w}}$

35) قام بائع ملبوسات بإيجاد العلاقة بين سعر قميص، وعدد القطع المبيعة منه يوميًّا، فوجد أنه عندما يكون سعر القميص d دينارًا ، فإن عدد القطع المبيعة يوميًّا، يساوي $80 - 2d$.

a) أوجد $r(d)$ تمثل إجمالي المبيعات اليومية عندما يكون سعر القميص d دينارًا. $r(d) = d(80 - 2d)$

b) أوجد $r'(d)$. $r'(d) = -4d + 80$

c) أوجد السعر d الذي تكون عنده قيمة المبيعات اليومية أكبر ما يمكن. 20 BD

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مَثِّل منحنى الدالة ومنحنى المشتقة على المستوى الإحداثي نفسه. للتمثيل البياني للتمارين 36-39 انظر ملحق الإجابات

36) $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ $\quad f'(x) = 6x + 2$

37) $g(x) = \sqrt{x} + 4$ $\quad g'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$

38) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 10x - 11$ $\quad f'(x) = 20x^4 - 18x^2 + 10$

39) $g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

40) **المشتقات العليا:** لتكن $f'(x)$ مشتقة $f(x)$، إذا كانت مشتقة $f'(x)$ لها وجود، فإنها تسمى المشتقة الثانية للدالة f، ويُرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، أو الرمز $f^{(2)}(x)$ ، وكذلك إذا كانت مشتقة $f''(x)$ لها وجود، فإنها تسمى المشتقة الثالثة للدالة f، ويرمز لها بالرمز $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$. وتسمى المشتقات على هذا النحو بالمشتقات العليا للدالة f . أوجد كلًّا مما يأتي: للفروع a-c انظر الهامش

a) المشتقة الثانية لـ $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

b) المشتقة الثالثة لـ $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

c) المشتقة الرابعة لـ $h(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 4x^2$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–34 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع نبه الطلبة في تمرين 8 إلى عدم إبقاء الجذر التربيعي في المقام في إجابتهم، ويمكننا التخلص من الجذر التربيعي في المقام بضرب كل من البسط والمقام بالجذر التربيعي.

خطأ شائع للتمارين 22–28، ذكّر الطلبة بأن مشتقة حاصل ضرب دالتين لا تساوي حاصل ضرب مشتقيتهما، إلا أنها تساوي حاصل جمع مشتقة كل دالة مضروبة في الدالة الأخرى.

اكتشف الخطأ للتمرين 46، على الطلبة أن يعرفوا أنّ $[f'(x)]^2 = f'(x) \cdot f'(x)$. لاحظ أن المعامل الرئيس يجب أن يكون زوجيًّا في هذه الحالة. لذا، فإن إجابة عبد الله صحيحة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	46، 48 – 62
ضمن المتوسط	35 – 43 فردي، 45، 46، 48 – 62
فوق المتوسط	35 – 62

إجابات:

1) $f'(x) = 8x, f'(2) = 16, f'(-1) = -8$

2) $g'(t) = -2t + 2, g'(5) = -8, g'(3) = -4$

3) $m'(j) = 14, m'(-7) = 14, m'(-4) = 14$

4) $v'(n) = 10n + 9, v'(7) = 79, v'(2) = 29$

5) $r'(b) = 6b^2 - 10, r'(-4) = 86, r'(-3) = 44$

6) $y'(f) = -11$

7) $z'(n) = 4n + 7$

8) $g'(h) = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{h^{\frac{2}{3}}} - 3h^{\frac{1}{2}}$

9) $b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}}$

10) $n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4}$

11) $f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

12) $q'(c) = 9c^8 - 15c^4 + 10c - 3$

13) $p'(k) = 5.2k^{4.2} - 38.4k^{3.8} + 3$

40a) $f''(x) = 80x^3 - 12x$

40b) $g'''(x) = -420x^4 + 96x - 42$

40c) $h^{(4)}(x) = 1080x^{-7} + 240x^{-6}$

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة شرح كيف ساعدهم الدرس السابق المماس والسرعة المتجهة على إيجاد المشتقة في هذا الدرس.

إجابة:

47 افرض أن كل من x ، z ثوابت.

$f'(y) = 10x^2 \cdot 3y^2 + 0 - 6x \cdot 2y + 0 - 11x^8 \cdot 1 \cdot z^7$
$= 30\,x^2\,y^2 - 12\,x\,y - 11\,x^8\,z^7$

للتمارين 44-41 انظر ملحق الإجابات

مَثِّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

41) المشتقة تساوي 0 عندما $x = -1, 1$.

42) المشتقة غير معرَّفة عندما $x = 4$.

43) المشتقة تساوي -2 عندما $x = -1, 0, 2$.

44) المشتقة تساوي 0 عندما $x = -1, 2, 4$.

للفروع b, c, e انظر ملحق الإجابات

45) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال.

a) **تحليل:** أوجد مشتقة مساحة سطح الدائرة وحجم الكرة بالنسبة لنصف القطر r. $A' = 2\pi r,\ V' = 4\pi r^2$

b) **تعبير لفظي:** وضِّح العلاقة بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع **a**.

c) **تمثيل بياني:** ارسم مربعًا طول ضلعه $2a$. ومكعبًا طول ضلعه $2a$.

d) **تحليل:** اكتب صيغة تمثِّل مساحة سطح المربع، وأخرى تمثِّل حجم المكعب بدلالة a . ثم أوجد مشتقتي الصيغتين. انظر الهامش

e) **تعبير لفظي:** وَضِّح العلاقة بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع **d**.

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ لـ $f(x) = 6x^2 + 4x$. حيث كانت إجابة عبد الله: $144x^2 + 96x + 16$ ، في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

47) **تحدٍّ:** أوجد $f'(y)$ علمًا بأن انظر الهامش
$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$

48) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة الضرب، وذلك بإثبات أن:
$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، وأضف $f(x)g(x+h)$ إلى البسط واطرحه منه) انظر ملحق الإجابات

49) **تبرير:** بيِّن ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرِّر إجابتك.
"إذا كان $f(x) = x^{5n+3}$ ، فإن $f'(x) = (5n+3)\,x^{5n+2}$" انظر ملحق الإجابات

50) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة القسمة، وذلك بإثبات أن:
$$\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، أضف $f(x)\,g(x)$ إلى البسط واطرحه منه). انظر ملحق الإجابات

51) **اكتب:** هل من الممكن أن يكون لدالَّتين مختلفتين المشتقة نفسها؟ عزِّز إجابتك بأمثلة. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 3-3)

52) $y = x^2 - 3x, (0, 0), (3, 0)$ $\quad -3, 3$

53) $y = 4 - 2x, (-2, 8), (6, -8)$ $\quad -2, -2$

54) $y = x^2 + 9, (3, 18), (6, 45)$ $\quad 6, 12$

احسب كل نهاية مما يأتي: (الدرس 3-2)

55) $\lim_{x\to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ $\quad -8$

56) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$ $\quad -\frac{1}{3}$

57) $\lim_{x\to 2} \frac{3x + 9}{x^2 - 5x - 24}$ $\quad -\frac{1}{2}$

قدِّر كل نهاية مما يأتي: (الدرس 3-1)

58) $\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2 - x - 12}{|x - 4|}$ $\quad 7$

59) $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x} + 2x + 3)$ $\quad 3$

تدريب على اختبار معياري

60) ما مشتقة $h(x) = (-7x^2 + 4)(2 - x)$ ؟ **D**

A $-14x$

B $14x$

C $-21x^2 - 28x + 4$

D $21x^2 - 28x - 4$

61) ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة $(1, 2)$؟ **H**

F 1   H 4

G 2   J 8

62) ما مشتقة $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$ ؟ **F**

F $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$ H $f'(x) = 225\,x^{\frac{5}{3}}$

G $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$ J $f'(x) = 225\,x^{\frac{8}{3}}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد قيمة (قيم) x التي يكون عندها المماسان لمنحنيي $f(x) = x,\ g(x) = x^2$ متوازيان. وضح إجابتك.

يكون المماسان متوازيان، إذا تساوى ميلاهما، وذلك يعني أن $f'(x) = g'(x)$ ، وبما أن $f'(x) = 1$ ، $g'(x) = 2x$ ، فإن $f'(x) = g'(x)$ فقط عندما $x = \frac{1}{2}$.

156 الفصل 3 النهايات والاشتقاق

3-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-5

حساب النهايات جبريًا باستعمال خصائص النهايات.

الدرس 3-5

تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.

تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد .

ما بعد الدرس 3-5

استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ لإيجاد المساحة تحت منحنى.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما التكلفة الحدية (الهامشية) لإنتاج كتاب واحد، 10 كتاب، 100 كتاب؟ BD9.998, BD9.89, BD9.80
- ماذا يحدث للتكلفة الحدية عندما يزداد عدد الكتب المطبوعة؟ تتناقص.

المساحة تحت منحنى

المثالان 1, 2 يُبيّنان كيفية تقدير المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مساحات مستطيلات

3-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

Area Under the Curve and Integration

فيما سبق

درستُ حساب النهايات جبريًا باستعمال خصائص النهايات.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أقرّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أقرّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات الأساسية

التجزيء المنتظم
regular partition

التكامل المحدد
definite integral

الحد الأدنى
lower limit

الحد الأعلى
upper limit

مجموع ريمان الأيمن
right Riemann sum

التكامل
integration

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُعطى التكلفة الحدية بالدينار لطباعة x نسخة من كتاب ما بـ $f(x) = 10 - 0.002x$.

المساحة تحت منحنى سبق أن درست طريقة حساب مساحات أسطح الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل والمضلع المنتظم، كما درست حساب مساحات أسطح بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة سطح أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة سطح شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلًا يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.

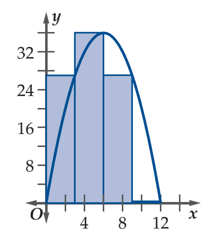
إرشادات للدراسة

التكلفة الحدية (الهامشية) هي المشتقة الأولى للتكلفة الحقيقية عند إنتاج x وحدة من سلعة ما.

مثال 1 المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4, 6, 12 مستطيلًا. استعمل طرف المستطيل الأيمن لتحديد ارتفاعه.

باستعمال الأشكال أدناه، لاحظ أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة $f(x)$ عند طرف المستطيل الأيمن، فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) أدناه هي $f(3), f(6), f(9), f(12)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.

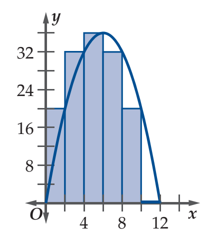


الشكل (1)

المساحة باستعمال 4 مستطيلات

$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$
$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$
$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$
$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 270 وحدة مربعة

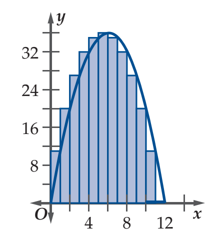


الشكل (2)

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$
$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$
$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$
$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$
$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$
$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 280 وحدة مربعة



الشكل (3)

المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$
$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$
$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$
$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$
$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$
$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$
$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$
$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$
$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$
$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$
$R_{12} = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 286 وحدة مربعة

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.

مصادر الدرس 3-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (160)		• تنويع التعليم ، ص (162)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (20) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 18x$ والمحور x على الفترة $[0, 18]$ باستعمال $6, 9, 18$ مستطيلًا. استعمل طرف المستطيل الأيمن؛ لتحديد ارتفاعه.

6 مستطيلات = 945 وحدة مربعة
9 مستطيلات = 960 وحدة مربعة
16 مستطيلًا = 969 وحدة مربعة

2 قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدة منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى، ثم اليسرى للمستطيلات؛ لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

الأطراف اليمنى = 34 وحدة مربعة
الأطراف اليسرى = 17 وحدة مربعة
الوسط = 25.5 وحدة مربعة.

المساحة باستعمال 6 مستطيلات = 2240 وحدة مربعة، المساحة باستعمال 8 مستطيلات = 2268 وحدة مربعة، المساحة باستعمال 12 وحدة مستطيلة = 2288 وحدة مربعة

تأكد

1) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال $6, 8, 12$ مستطيلًا. استعمل طرف المستطيل الأيمن لتحديد ارتفاعه.

لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة. وكما استعملنا أطراف المستطيلات اليمنى لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها ، ما قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لاتقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

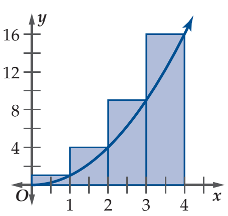
إرشاد تقني

جداول للحصول على ارتفاعات متعددة للمستطيلات على آلتك الحاسبة البيانية أدخل الدالة باستعمال قائمة $\boxed{Y=}$. ثم استعمل جدول الدالة بالضغط على $\boxed{2nd}$ [TABLE]، مما يسمح لك بالحصول على قائمة من الارتفاعات لعدة قيم من x . ويمكنك أيضًا تعديل فترات قيم x في قائمتك بالضغط على $\boxed{2nd}$ [TBLSET] وتعديل خيارات TBLSET .

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.

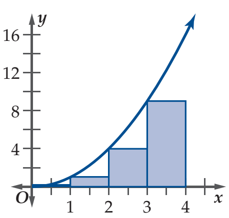


الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$
$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$
$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.

تأكد

2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

المساحة الناتجة عن استعمال: الأطراف اليمنى = 15.4وحدة مربعة، والمساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى = 25 وحدة مربعة، الوسط للمساحتين = 20.2 وحدة مربعة.

عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة، والمحور x، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على الضلع الأعلى للمستطيل والمحور x لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات أسطح المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.

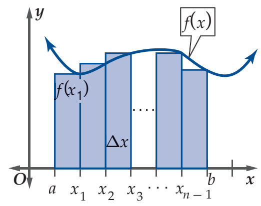
التركيز في المحتوى الرياضي

التقريب باستعمال المستطيلات تم التعرف إلى طريقتين لتقدير المساحة تحت منحنى دالة، وذلك مستعينًا بالأطراف اليمنى، أو الأطراف اليسرى للمستطيلات، حيث يُعطي الوسط للتقديرين تقديرًا أفضل للمساحة. وبإمكاننا أيضًا حساب المساحة باستعمال أدنى وأقصى ارتفاع لكل مستطيل، حيث يُعطي الوسط للتقديرين الأخيرين تقديرًا أفضل للمساحة.

قراءة الرياضيات

رمز المجموع تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب $f(x_i)$ في Δx من $i=1$ إلى $i=n$.

في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول، وتُسمَّى هذه التجزئة **التجزيء المنتظم**. إن طول الفترة الكلية من a إلى b هو $b-a$، وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل مستطيل) هو $\frac{b-a}{n}$، ويرمز له بالرمز Δx. وبما أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للمستطيل، فإن ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.



يمكن الآن حساب مساحة سطح كل مستطيل من خلال ضرب Δx في ارتفاع ذلك المستطيل، أي أن مساحة سطح المستطيل الأول هي $f(x_1)\,\Delta x$، ومساحة سطح المستطيل الثاني هي $f(x_2)\,\Delta x$، وهكذا. وتُعطى المساحة الكلية A لأسطح المستطيلات بمجموع مساحاتها، ويمكن كتابتها باستعمال رمز المجموع.

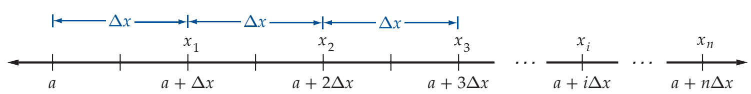
بجمع المساحات $\quad A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$

باخراج العامل المشترك Δx $\quad A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$

باستعمال رمز المجموع $\quad A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

الخاصية الإبدالية للضرب $\quad A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

ولتسهيل الحسابات مستقبلًا، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. فبما أن عرض أيٍّ من المستطيلات هو Δx، ويساوي الفرق بين أي قيمتين متتاليتين من قيم x_i . وبالنظر إلى خط الأعداد أدناه:



يمكننا ملاحظة أن $x_i = a + i\Delta x$. ولهذه العلاقة أهميتها عند إيجاد المساحة تحت منحنى أي دالة لاحقًا.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمَّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

مفهوم أساسي **التكامل المحدد**

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a,b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a **الحد الأدنى**، و b **الحد الأعلى**، وتُسمَّى هذه الطريقة **مجموع ريمان الأيمن**.

تنبيه!

المجموع إن مجموع عدد ثابت c هو $c\,n$، وليس صفرًا أو ∞. فمثلاً $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1866 – 1826). والذي يُعزى إليهِ إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وتسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$ ، حيث c عدد ثابت $\qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية احرص على حَلّ عدة أمثلة على السبورة التفاعلية حول إيجاد المساحات تحت المنحنيات، ثم احتفظ بكل مثال على شكل ملاحظة، وأضف هذه الملاحظات إلى الصفحة الإلكترونية الخاصة بالصف، بحيث يستطيع الطلبة الاعتماد عليها كمرجع إضافي .

إرشادات للمعلم الجديد

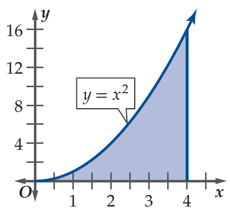
رمز التكامل نبِّه الطلبة إلى أن رمز التكامل هو شد للحرف S في كلمة *sum*.

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$ ، $\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i$ ، حيث c عدد ثابت

مثال 3 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$، أو $\int_0^4 x^2\, dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

صيغة Δx $\qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$b = 4 , a = 0$ $\qquad = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

صيغة x_i $\qquad x_i = a + i\,\Delta x$

$a = 0 , \Delta x = \frac{4}{n}$ $\qquad = 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n}$

احسب التكامل المحدد، الذي يُعطي المساحة المطلوبة.

تعريف التكامل المحدد $\qquad \int_0^4 x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$f(x_i) = x_i^2$ $\qquad = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\, \Delta x$

$\Delta x = \frac{4}{n} , x_i = \frac{4i}{n}$ $\qquad = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2 \left(\frac{4}{n}\right)$

خصائص المجموع $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$

بتوزيع القوة $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$

خصائص المجموع $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

بالضرب والتوزيع $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16n\,(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right)$

بالضرب $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$

بالقسمة $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$

بالتحليل $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \left(\frac{(2n^2+3n+1)}{n^2}\right)$

بالقسمة على n^2 $\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

خصائص النهايات $\qquad = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty} 2 + \left(\lim_{n\to\infty} 3\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right]$

$$= \frac{64}{6}\,[2 + 3(0) + 0] \approx 21.33$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

تأكد

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\int_0^1 3x^2\, dx$ وحدة مربعة

(3B $\int_0^3 x\, dx$ **4.5** وحدة مربعة

إرشادات للدراسة

النهايات حلّل كل مجموع بحيث تتضمن التعابير الباقية إما أعدادًا ثابتة أو i فقط، ثم طبق صيغة المجموع المناسبة.

التكامل

الأمثلة 5-3 تُبيِّن كيفية أستعمال التكامل لإيجاد المساحة تحت منحنى دالة في فترة ما.

مثال إضافي

3 استعمل النهايات ؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2 + 1$ ، والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ، أو

$$\int_0^4 (x^2+1)\, dx .$$

25.33 وحدة مربعة تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

الدقة نبّه الطلبة إلى أهمية كتابة كل خطوة عند حساب التكامل؛ وذلك تجنبًا للوقوع في أخطاء غير مقصودة. كما يجب على الطلبة أن يكونوا حريصين في اختيار العلاقة المناسبة لمجاميعهم.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة أن يُمثّلوا منحنى دالة في أحد الأمثلة على ورق رسم بياني كبير، ثم اطلب إليهم أن يقصُّوا المساحة المطلوبة، وأن يحدّدوا عدد الوحدات المربعة التي تحويها هذه المنطقة. والذي قد يتطلب تجميع أجزاء مختلفة من المساحات، ثم اطلب إليهم أن يقارنوا بين المساحة باستعمال التكامل وعدد الوحدات المربعة التي أوجدوها.

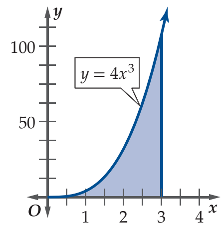
مثال إضافي

4 استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^3 + 1$ والمحور x في الفترة $[2, 4]$، أو $\int_2^4 (x^3+1)\,dx$. 62 وحدة مربعة

يمكننا أيضًا حساب مساحات المناطق باستعمال النهايات في حال كون نقطة الأصل ليست حدًّا أدنى لها.

مثال 4 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x، في الفترة $[1, 3]$ ، أو $\int_1^3 4x^3\,dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$= \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ $b = 3 , a = 1$

$x_i = a + i\,\Delta x$ صيغة x_i

$= 1 + i\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n}$ $a = 1 , \Delta x = \frac{2}{n}$

احسب التكامل المحدد، والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تعريف التكامل المحدد

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x$ $f(x_i) = 4(x_i)^3$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$ $x_i = 1 + \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3$ خصائص المجموع

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[1 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$ مفكوك $\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right)$ بالتبسيط

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{12i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^3}{n^3}\right)$ خصائص المجموع

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right)$ خصائص المجموع

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$ صيغ المجموع

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n}{n} + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right)$ خاصية التوزيع

$= \lim_{n\to\infty} \left(8 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right)$ بالتبسيط

$= \lim_{n\to\infty} \left[8 + 24\left(1+\frac{1}{n}\right) + 16\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$ بالقسمة

$= \lim_{n\to\infty} 8 + 24\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ خصائص النهايات

$= 8 + 24(1+0) + 16(2+0+0) + 16(1+0+0) = 80$ بالتبسيط

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تنبيه!

النهايات عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال النهايات، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع Δx أو أي ثوابت أخرى.

✓ تأكد

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

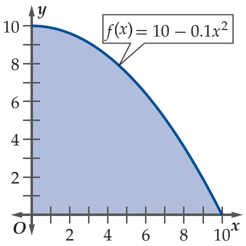
4A) $\int_1^3 x^2\,dx$ 8.67 وحدة مربعة تقريبًا

4B) $\int_2^4 x^3\,dx$ 60 وحدة مربعة

161 الدرس 5-3 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 5 من واقع الحياة — المساحة تحت منحنى

بلاط: يكلِّف تبليط القدم المربع الواحد من فناء منزل بالجرانيت BD 2.2. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت مساحة سطح أيٍّ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx$، فكم تكلفة تبليط الممرين؟ علمًا بأن x مقيسة بالأقدام.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

صيغة Δx	$\Delta x=\frac{b-a}{n}$
$a=0, b=10$	$=\frac{10-0}{n}=\frac{10}{n}$
صيغة x_i	$x_i=a+i\,\Delta x$
$a=0, \Delta x=\frac{10}{n}$	$=0+i\frac{10}{n}=\frac{10i}{n}$

احسب التكامل المحدد، والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x \quad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(10-0.1x_i^2)\Delta x \quad f(x_i)=10-0.1x_i^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[10-0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{n} \quad x_i=\frac{10i}{n}, \Delta x=\frac{10}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(10-\frac{10i^2}{n^2}\right) \quad \text{بالتبسيط}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\sum_{i=1}^{n}\frac{10i^2}{n^2}\right) \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\frac{10}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right) \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(10n-\frac{10}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \quad \text{صيغ المجموع}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n}{n}-\frac{100n(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right) \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(100-\frac{50(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right) \quad \text{بالقسمة على } n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[100-\frac{50}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad \text{بالقسمة على } n^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}100-\frac{50}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{خصائص النهايات}$$

$$=100-\frac{50}{3}(2+0+0)\approx 66.67 \quad \text{بالتبسيط}$$

أي أن مساحة سطح أيٍّ من الممرين تساوي $66.67\ \text{ft}^2$ تقريبًا. وعليه فإن تكلفة تبليط الممرين هي $(66.67\times 2)\times$ BD 2.2 أو BD 293.3 تقريبًا.

الربط مع واقع الحياة

الجرانيت
الجرانيت هو صخر ناري يتميز بنسيج خشن يكسبه مظهرًا فريدًا، وهو مقاوم لعوامل الأكسدة، لذلك يستعمل لتبليط الأرضيات.

✓ تأكد

5) طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ \text{ft}^2$، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة سطح كل منهما تُعطَى بالتكامل $\int_0^5(5-0.2x^2)dx$، حيث x مقيسة بالأقدام؟ برِّر إجابتك.

5) لا؛ مساحة كل جزء من الجدار $16.67\ \text{ft}^2$ تقريبًا، بما أن المطلوب طلاء جزأين من الجدار، أي $2(16.67)$، ويساوي $33.34\ \text{ft}^2$ تقريبًا. إذن، كمية الطلاء لا تكفي.

مثال إضافي

5 أعمال: ينتج مصنع 2000 قميص يوميًا. تُعطى تكلفة زيادة الإنتاج من 2000 قميص إلى 5000 قميص يوميًّا بالعلاقة: $\int_{2000}^{5000}(20-0.004x)\,dx$. ما قيمة الزيادة في التكلفة؟ BD18000

إرشادات للمعلم الجديد

إجابة السؤال لجميع "مسائل الربط مع واقع الحياة"، ذكّر الطلبة بأن عليهم التحقّق من أنهم قد أجابوا عن المطلوب في المسألة. ففي المثال 5، تحتاج الإجابة إلى ضرب المساحة بـ 2 بسبب وجود مساحتين، ثم الضرب بـ BD 2.2.

تنويع التعليم

فوق

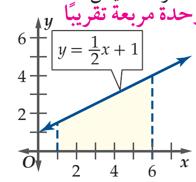
توسَّع احسب $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ من خلال التَّمثيل البياني للدالة، وتحديد المساحة الفعلية تحت المنحنى. وضِّح إجابتك.

6.28، المساحة الفعلية تحت المنحنى هي 2π؛ لأن المنطقة على شكل نصف دائرة نصف قطرها 2.

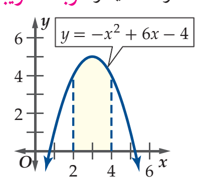
تدرب وحل المسائل

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملًا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كلٍّ من الأشكال أدناه: (مثال 1)

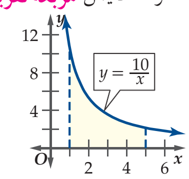
1) 5 مستطيلات الطرف الأيمن **15وحدة مربعة تقريبًا**



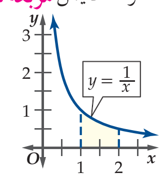
2) 4 مستطيلات الطرف الأيسر **9.25وحدة مربعة تقريبًا**



3) 8 مستطيلات الطرف الأيمن **14.29 وحدة مربعة تقريبًا**



4) 5 مستطيلات الطرف الأيمن **0.65 وحدة مربعة تقريبًا**

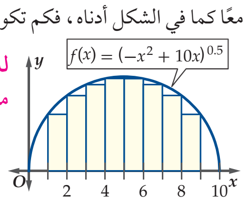


5) **أرضيات:** يرغب أحمد في تبليط جزء من فناء منزله على شكل نصف دائرة تمثله $f(x) = (-x^2 + 10x)^{0.5}$. (مثال 1)

a) قرِّب مساحة المنطقة نصف الدائرية باستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة.

b) إذا قرَّر أحمد تقريب المساحة باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى معًا كما في الشكل أدناه، فكم تكون المساحة؟

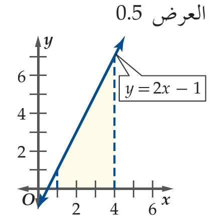
للفروع a–c أنظر ملحق الإجابات



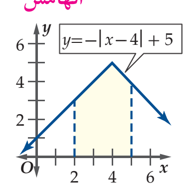
c) أوجد مساحة المنطقة باستعمال صيغة مساحة سطح نصف الدائرة. أي التقريبين أقرب إلى المساحة الحقيقية؟ فسِّر إجابتك.

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في كلٍّ من الأشكال الآتية مستعملًا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍّ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين: (مثال 2) **للفروع 6-9 انظر الهامش**

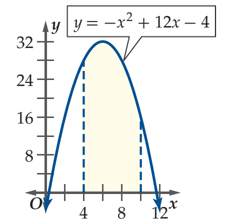
6) العرض 0.5



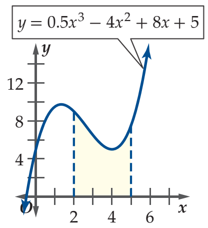
7) العرض 0.5



8) العرض 0.75



9) العرض 0.5



استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي: (المثالان 3, 4)

10) $\int_0^4 4x^2\, dx$ **84 وحدة مربعة تقريبًا**

11) $\int_0^2 6x\, dx$ **12 وحدة مربعة تقريبًا**

12) $\int_1^3 (2x^2 + 3)\, dx$ **23.33 وحدة مربعة تقريبًا**

13) $\int_0^4 (4x - x^2)\, dx$ **10.67 وحدة مربعة تقريبًا**

14) $\int_3^4 (-x^2 + 6x)\, dx$ **8.67 وحدة مربعة تقريبًا**

15) $\int_2^4 (-3x + 15)\, dx$ **12 وحدة مربعة تقريبًا**

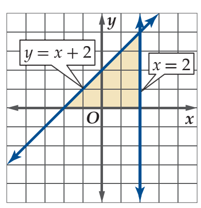
16) $\int_1^5 (x^2 - x + 1)\, dx$ **33.33 وحدة مربعة تقريبًا**

17) $\int_1^3 12x\, dx$ **48 وحدة مربعة تقريبًا**

18) **طباعة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميًا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب. فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل

$\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\, dx$. (مثال 5) **BD 3750**

19) يمكن حساب التكاملات المحددة عندما يكون أحد حدي التكامل موجبًا والآخر سالبًا.



a) أوجد طول قاعدة وارتفاع المثلث، ثم مساحة سطحه باستعمال قانون مساحة سطح المثلث. **انظر الهامش**

b) أوجد مساحة سطح المثلث بحساب التكامل $\int_{-2}^{2} (x + 2)\, dx$. **8 وحدات مربعة**

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

20) $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$ **0.67وحدة مربعة تقريبًا**

21) $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\, dx$ **انظر ملحق الإجابات**

22) $\int_{-4}^{-2} (-x^2 - 6x)\, dx$ **17.33 وحدة مربعة تقريبًا**

23) $\int_{-3}^{-2} -5x\, dx$ **12.5 وحدة مربعة تقريبًا**

24) $\int_{-2}^{0} (2x + 6)\, dx$ **8 وحدات مربعة تقريبًا**

25) $\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x)\, dx$ **0.75 وحدة مربعة تقريبًا**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–18 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع في التمارين 1–4، قد ينسى الطلبة أن يضربوا بعرض المستطيلات، لذا ذكّرهم بضرورة الضرب بالعرض الصحيح لهذه المستطيلات.

إجابات:

6) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 13.5 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 10.5 وحدات مربعة، الوسط للتقريبين هو 12 وحدة مربعة.

7) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 12.75 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 12.25 وحدة مربعة، الوسط للتقريبين هو 12.5 وحدة مربعة

8) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 162.94 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 171.94 وحدة مربعة، الوسط للتقريبين هو 167.44 وحدة مربعة،

9) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 18.91 وحدة مربعة. المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 19.66 وحدة مربعة ، الوسط للتقريبين هو 19.28 وحدة مربعة.

19a) الارتفاع = 4 وحدات، القاعدة = 4 وحدات، المساحة = 8 وحدات مربعة

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	33 – 31 ، 35 – 47
ضمن المتوسط	19–29 (فردي)، 33 – 30، 35 – 47
فوق المتوسط	19 – 47

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة الكتابة عن كيفية توظيف المستطيلات في إيجاد المساحة التقريبية تحت منحنى دالة ما.

إجابة ممكنة: أوجد مساحة كل مستطيل بضرب العرض في الطول الذي يُمثّل قيمة الدالة عند نقطة، ثم اجمع مساحات المستطيلات .

تنبيه !

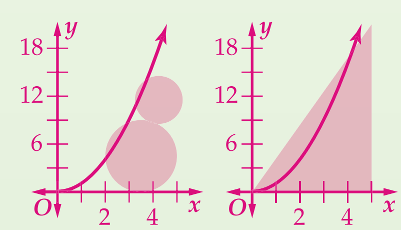
اكتشف الخطأ في التمرين 31، على الطلبة إدراك أن التقدير العلوي يتغيّر اعتمادًا على سلوك الدالة. إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى سيُعطي قيمة أكبر للمساحة. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات هو الذي يُعطي تقديرًا أكبر للمساحة .

التقويم التكويني

تحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين5-3 , 4-3 ، بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

35) إجابة ممكنة: يُعطي المثلث تقريبًا جيدًا للمساحة، وذلك اعتمادًا على شكل المنحنى كما هو مبين أدناه، أما إذا كان للدالة عدة نقاط حرجة، فإنه من الصعب استعمال المثلثات. أما الدوائر فيصعب استعمالها؛ وذلك لأنها تترك مساحات واسعة خارجها. لذا، فإن المثلثات أسهل للاستعمال عند تقريب المساحة؛ بسبب مرونة التعامل معها مقارنة مع الدوائر.



استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمُعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_{-3}^{-1}(-2x^2-7x)\,dx$ 10.67 وحدات مربعة تقريبًا

27) $\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx$ 4 وحدات مربعة تقريبًا

28) $\int_{-4}^{3}2\,dx$ 14 وحدة مربعة تقريبًا

29) $\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ 3.75 وحدات مربعة تقريبًا

30) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين عملية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين. للفروع a-e انظر ملحق الإجابات

a) **تمثيل بياني:** مَثِّل منحنيي $f(x)=-x^2+4, g(x)=x^2$ في المستوى الإحداثي نفسه وظلّل المساحتين اللتين يمثلهما التكاملان $\int_0^1(-x^2+4)\,dx,\ \int_0^1 x^2\,dx$

b) **تحليل:** احسب $\int_0^1 x^2\,dx,\ \int_0^1(-x^2+4)\,dx$.

c) **تعبير لفظي:** وضّح لماذا تكون مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين مساوية لـ $\int_0^1(-x^2+4)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$. ثم أحسب هذه القيمة باستعمال القيم التي أوجدتها في الفرع b .

d) **تحليل:** أوجد $f(x)-g(x)$، ثم احسب $\int_0^1[f(x)-g(x)]\,dx$.

e) **تعبير لفظي:** خمّن طريقة إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** سُئل ماجد وخالد عن دقة تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات، فأجاب ماجد: إنه عند تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات اليمنى، فإن المساحة الناتجة تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. في حين أجاب خالد: إن المساحة المحسوبة باستعمال أطراف المستطيلات اليسرى تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. أيهما كانت إجابته صحيحة ؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

32) **تبرير:** افرض أن المقطع الرأسي العرضي لنفق يُعطى بالدالة f. اشرح كيف يمكن حساب حجم النفق باستعمال $\int_0^d f(x)\,dx$ ، حيث d عرض النفق، إذا كان طوله معلوم. برِّر إجابتك. انظر الهامش

33) **اكتب:** اكتب ملخصًا للخطوات المتبعة لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x على فترة معطاة. انظر إجابات الطلبة

34) **تحدٍّ:** أوجد $\int_0^t(x^2+2)\,dx$. $\frac{t^3}{3}+2t$

35) **اكتب:** وضّح إمكانية استعمال المثلثات أو الدوائر في تقريب المساحة تحت المنحنيات. أي الشكلين يعطي تقريبًا أفضل برأيك؟ انظر الهامش

مراجعة تراكمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 3-4) للتمارين 36-38 انظر الهامش

36) $j(x)=(2x^3+11x)(2x^8-12x^2)$

37) $f(k)=(k^{15}+k^2+2k)(k-7k^2)$

38) $s(t)=(\sqrt{t}-7)(3t^8-5t)$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عندما $x=1$: (الدرس 3-3)

39) $y=x^3$ 3

40) $y=x^3-7x^2+4x+9$ -7

41) $y=(x+1)(x-2)$ 1

أوجد كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 3-2)

42) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$ 3

43) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ -1

44) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}$ $\frac{2}{9}$

تدريب على اختبار معياري

45) ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y=-x^2-3x+6$ والمحور x، في الفترة $[2, 6]$ ؟ A

A 93.33 وحدة مربعة تقريبًا

B 90 وحدة مربعة تقريبًا

C 86.67 وحدة مربعة تقريبًا

D 52 وحدة مربعة تقريبًا

46) أيٌّ مما يأتي يمثّل مشتقة $n(a)=\frac{4}{a}-\frac{5}{a^2}+\frac{3}{a^4}+4a$ ؟ J

F $n'(a)=8a-5a^2+3a^4$

H $n'(a)=4a^2-5a^3+3a^4+4$

G $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{5}{a^3}-\frac{3}{a^5}+4$

J $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{10}{a^3}-\frac{12}{a^5}+4$

47) ما قيمة $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-10}{x^2+5x+6}$ ؟ J

F $\frac{1}{15}$ H $\frac{3}{15}$

G $\frac{2}{15}$ J $\frac{4}{15}$

32) إجابة ممكنة: يعطي التكامل مساحة كل مقطع عرضي، ونحصل على حجم النفق بضرب هذه المساحة بطول النفق.

36) $j'(x)=(6x^2+11)(2x^8-12x^2)+(2x^3+11x)(16x^7-24x)$

37) $f'(k)=(15k^{14}+2k+2)(k-7k^2)+(k^{15}+k^2+2k)(1-14k)$

38) $s'(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^8-5t)+(\sqrt{t}-7)(24t^7-5)$

3-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
The Fundamental Theorm of Calculus

فيما سبق

استعملتُ النهايات لتقريب المساحة تحت منحنى دالة.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أجدُ الدوال الأصلية.
- أستعملُ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لإيجاد التكامل المحدد.

المفردات الأساسية

الدالة الأصلية
antiderivative

التكامل غير المحدد
indefinite integral

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
Fundamental Theorem of Calculus

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالأقدام لكل ثانية تعطى بـ $v(t) = -32t$ ، فإنه من الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-3 و3-4، أنّه إذا أُعطيتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن التعبير الذي يمثّل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$ ، إذا أُعطيت تعبيرًا يمثّل السرعة المتجهة، وطُلِب إليك إيجاد الصيغة التي تم إيجاد السرعة المتجهة منها، فلا بد من وجود طريقة للعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **دالة أصلية** للدالة f .

مثال 1 إيجاد الدوال الأصلية

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^2$

لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ سيكون 3 ، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

وعلى أيّة حال ، فإن x^3 ليس الدالة الوحيدة التي تحققُ المطلوب، فمثلًا $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضًا؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$ ، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

b) $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$ ، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8 ، وعليه تكون $F(x) = x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f ،

فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1} = -8x^{-9}$. لاحظ أن كلًّا من $G(x) = x^{-8} + 3$ ، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثّل دالة أصلية للدالة f.

تأكد

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

1A) $2x$ إجابة ممكنة: $x^2, x^2 + 5, x^2 - 7, x^2 + 28$

1B) $-3x^{-4}$ إجابة ممكنة: $x^{-3}, x^{-3} + 33, x^{-3} - 4, x^{-3} + 9$

في المثال 1 لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لدالّةٍ أصلية ينتج عنه دالة أصلية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لدالة أصلية يُنتج دالة أصلية أخرى ؛ وذلك لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لانهائيًا من الدوال الأصلية لأي دالة. والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحوي الثابت C .

3-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-6

استعمال النهايات؛ لتقريب المساحات تحت منحنى دالة.

الدرس 3-6

إيجاد الدوال الأصلية.

استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ لإيجاد التكامل المحدد.

ما بعد الدرس 3-6

ايجاد تكاملات الدوال ليست كثيرات الحدود.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ماعلاقة الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم بالدالة التي تُمثّل ارتفاعه؟ الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم هي مشتقة الدالة التي تُمثّل ارتفاعه. أو الدالة التي تُمثّل ارتفاع القلم هي الدالة الأصلية للدالة التي تُمثّل سرعته.
- ما الذي يحتاجه علي لتحديد الارتفاع الذي أسقط منه القلم؟ يحتاج لإيجاد الدالة الأصلية لدالة السرعة وتعويض عدد الثواني التي استغرقها القلم للوصول إلى سطح الأرض بدلاً من t.

إيجاد الدوال الاصلية

المثالان 1,2 يُبيِّنان كيفية إيجاد دالة أصلية لدوال كثيرات الحدود ودوال القوى.

مصادر الدرس 3-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (169)	• تنويع التعليم ، ص (169)	• تنويع التعليم ، ص (171 و169)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (21) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

كما في المشتقات، فإن هناك قواعد لإيجاد الدالة الأصلية.

مفهوم أساسي **قواعد الدالة الأصلية**

قاعدة القوة إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{k\,x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة الجمع والفرق إذا كان $f(x)$، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$، $G(x)$ على الترتيب، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

مثال 2 **قواعد الدوال الأصلية**

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 4x^7$

$f(x) = 4x^7$ الدالة المعطاة

$F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= \frac{1}{2}x^8 + C$ بالتبسيط

b) $f(x) = \frac{2}{x^4}$

$f(x) = \frac{2}{x^4}$ الدالة المعطاة

$= 2x^{-4}$ بإعادة كتابة الدالة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -\frac{2}{3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$ بالتبسيط

c) $f(x) = x^2 - 8x + 5$

$f(x) = x^2 - 8x + 5$ الدالة المعطاة

$= x^2 - 8x^1 + 5x^0$ بإعادة كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$ بالتبسيط

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية
$F(x) = kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$، فمثلًا، إذا كان $f(x) = 3$، فإن $F(x) = 3x$.

تأكد

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

2A) $f(x) = 6x^4$ $F(x) = \frac{6}{5}x^5 + C$ (2A

2B) $f(x) = \frac{10}{x^3}$ $F(x) = -5x^{-2} + C$

2C) $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ $F(x) = x^8 + 3x^2 + 2x + C$

يُعطى الشكل العام للدَّالة الأصلية باسم ورمز خاصَّين.

مفهوم أساسي **التكامل غير المحدد**

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$، و C ثابت.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 6x$
إجابة ممكنة: $3x^2$

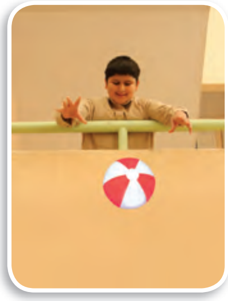
b) $f(x) = -6x^{-7}$
إجابة ممكنة: x^{-6}

2 أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^5$ $\frac{1}{2}x^6 + C$

b) $f(x) = \frac{4}{x^6}$ $-\frac{4}{5x^5} + C$

c) $f(x) = x^2 + 3x + 4$ $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$



الربط مع واقع الحياة

السقوط الحر قبل أربعمائة عام تقريبًا، استنتج جاليليو جاليلي أن لجميع الأجسام التي تسقط سقوطًا حرًا التسارع (العجلة) نفسه، بإهمال تأثير الهواء. وأن هذا التسارع لا يتأثر بأي من مادة الجسم الساقط أو وزنه أو الارتفاع الذي سقط منه.

المصدر: Salem-Winston Joumal

مثال 3 من واقع الحياة — التكامل غير المحدد

فيزياء: أجرى طلبة الصف الثاني الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي تعلوا عن سطح الأرض بـ 30 ft، وتمثل $v(t) = -32t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام لكل ثانية t.

a) أوجد دالَّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$ العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة

$$= \int -32t\,dt$$ $v(t) = -32t$

$$= -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$$= -16t^2 + C$$ بالتبسيط

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي، 0 sec للزمن الابتدائي.

$$s(t) = -16t^2 + C$$ الدالة الأصلية لـ $v(t)$

$$30 = -16(0)^2 + C$$ $s(t) = 30,\ t = 0$

$$30 = C$$ بالتبسيط

أي أن دالة الموقع هي $s(t) = -16t^2 + 30$.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

حُلّ المعادلة $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 30$$ دالة الموقع

$$0 = -16t^2 + 30$$ $s(t) = 0$

$$-30 = -16t^2$$ بطرح 30 من كلا الطرفين

$$1.875 \approx t^2$$ بقسمة كلا الطرفين على -16

$$1.369 \approx t$$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

أي أن الكرة ستستغرق 1.369 sec تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.

تأكد

3) سقوط حر: عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثل $v(t) = -32t$ سرعةُ المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام لكل ثانية.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها. $s(t) = -16t^2 + 120$

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُه المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

3B) تصل المحفظة إلى سطح الأرض بعد 2.74 sec.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهًا بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 5–3، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدَّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات غير المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

نظرية — النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه المعادلة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

التكامل غير المحدد

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد ثابت التكامل في مواقف خاصة.

مثال إضافي

3 القفز إلى الماء: تُمثّل الدالة $v(t) = -32t$ السرعة التي قفز بها شخص من فوق منحدر ارتفاعه 100 ft باتجاه سطح الماء، حيث $v(t)$ سرعة الشخص المتجهة اللحظية بالأقدام لكل ثانية t.

a) أوجد الدالة التي تُمثّل موقع هذا الشخص $s(t)$.

$s(t) = -16t^2 + 100$

b) أوجد الزمن الذي يحتاجه للوصول إلى سطح الماء.

2.5 sec

إرشادات للمعلم الجديد

الدوال الأصلية أكد على الطلبة أن مصطلح "الدالة الأصلية" مصطلح مضلل إذ يوجد عدد لا نهائي من الدوال الأصلية، إلا أننا نستعمل هذا المصطلح؛ لأنه بإمكاننا التعبير عنها جميعًا باستعمال تعبير واحد.

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد دوال أصلية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

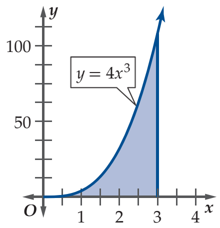
الربط مع تاريخ الرياضيات

ماريا أجنسي (1718–1799)
عالمة إيطالية برعت في اللغات والفلسفة والرياضيات، ويُعدُّ كتابها *Analytical Institutions* أول كتاب ناقش حسابي التفاضل والتكامل معًا.

مثـال 4 المساحة تحت منحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$ أو $\int_1^3 4x^3\,dx$.



أولًا، أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$$= x^4 + C$$ بالتبسيط

الآن ، احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، ثم أوجد الفرق.

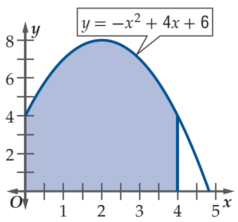
$$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= (3^4 + C) - (1^4 + C)$$ $a = 1 , b = 3$

$$= 81 - 1 = 80$$ بالتبسيط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0, 4]$ أو $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx$



أولًا، أوجد الدالة الأصلية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\,dx$$

$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C$$ قواعد الدالة الأصلية

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C$$ بالتبسيط

الآن، احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right)$$ $a = 0 , b = 4$

$$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67$$ بالتبسيط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -x^2 + 4x + 6$ والمحور x على الفترة $[0 , 4]$ هي 34.67 وحدة مربعة تقريبًا.

تأكد

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) $\int_2^5 3x^2\,dx$ **117**

4B) $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$ **46**

لاحظ أنه عند حساب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، وحساب الفرق بين القيمتين ، فإن C لن تظهر في الناتج؛ وذلك لأن C موجودة في كلتا قيمتي الدالة الأصلية، فإن الفرق بين قيمتي C تساوي صفرًا، لأي قيم C. لذا، فإنه لحساب تكامل محدد باستعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل يمكنك إهمال الثابت C، وعدم كتابته في الدالة الأصلية.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

مثال 4 يُبيّن كيفية استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد المساحة المحصورة تحت منحنى دالة في فترة محددة.

مثال إضافي

4 استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x في الفترة المعطاة

a) $y = 5x^4$ على الفترة $[2, 4]$ ، أو $\int_2^4 5x^4\,dx$. **992 وحدة مربعة**

b) $y = -x^2 + 6x + 9$ على الفترة $[0, 6]$ ، أو $\int_0^6 (-x^2 + 6x + 9)\,dx$.

90 وحدة مربعة

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة على الطلبة إضافة مدخل في مدونة الصف يوضحون فيه مفهوم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل، وكيفية استعمالها لحساب المساحة تحت منحنى دالة.

إرشادات للمعلم الجديد

الدوال الأصلية عند حساب تكامل ما، نبّه الطلبة إلى ضرورة إيجاد الدالة الأصلية أولاً ثم القيام بالتعويض.

قبل حساب التكامل حدِّد ما إذا كان محددًا أو لا.

تنبيه!

التكاملات صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

مثال 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (9x - x^3)\,dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

قواعد الدالة الأصلية $\int (9x - x^3)\,dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$

بالتبسيط $= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C$

b) $\int_2^3 (9x - x^3)\,dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل $\int_2^3 (9x - x^3)\,dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3$

$a = 2 , b = 3$ $= \left(\frac{9}{2}3^2 - \frac{3^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{2^4}{4}\right]$

بالتبسيط $= 20.25 - 14 = 6.25$

تأكد

احسب كل تكامل مما يأتي:

5A) $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$ $2x^3 + 4x^2 - 3x + C$

5B) $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\,dx$ 15.6

لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي الدالَّة الأصلية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد الدالة الأصلية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة، وهي الدالة الأصلية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى، ليصبح التكامل عندها محددًا.

مثال 6 التكاملات المحددة

يُعطي الشغل (بالجول) اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\,dx$. ما قيمة الشغل اللازم؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل $\int_0^{0.5} 360x\,dx = 180x^2\Big|_0^{0.5}$

$a = 0 , b = 0.5$ $= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$

بالتبسيط $= 45 - 0 = 45$

أي أن الشغل اللازم هو 45J .

تأكد

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A) $\int_0^{0.7} 476x\,dx$ 116.62 J

6B) $\int_0^{1.4} 512x\,dx$ 501.76

التكامل المحدد وغير المحدد

المثالان 6 ,5 يُبيّنان كيفية ايجاد التكاملات المحددة وغير المحددة.

مثالان إضافيان

5 احسب كل تكامل مما يأتي :

a) $\int (x^3 - 2x + 1)\,dx$

$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + C$

b) $\int_1^4 (x^3 - 2x + 1)\,dx$

51.75

6 يعطي الشغل (بالجول) اللازم؛ لشد نابض من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{2.5} 60x\,dx$. ما قيمة الشغل اللازم؟ 187.5J

التركيز في المحتوى الرياضي

التكاملات المحددة وغير المحددة

ينتج عن التكامل غير المحدد للدالة حد ثابت، إلا أن هذا الثابت يحذف عند حساب التكامل المحدد؛ لأنه يضاف إلى الحد العلوي، ويُطرح من الحد السفلي للتكامل.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون السمعيون نظّم الطلبة في مجموعات ثنائية، واطلب إليهم كتابة شعر أو نمط (نص أدبي) يصف خطوات النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل واستعمالاتها. واطلب إليهم عرض أعمالهم أمام الطلبة الآخرين.

تدرب وحل المسائل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي: (المثالان 1 , 2)

للتمارين 1-6 انظر الهامش

1) $f(x) = x^5$

2) $f(z) = \sqrt[3]{z}$

3) $q(r) = \frac{3}{4} r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8} r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$

4) $w(u) = \frac{2}{3} u^5 + \frac{1}{6} u^3 - \frac{2}{5} u$

5) $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6d^2 + 3.5$

6) $m(t) = 16t^3 - 12t^2 + 20t - 11$

7) **سقوط حر:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افرض أن القلم قد استغرق 2 sec حتى الوصول إلى سطح الأرض. (مثال 3)

a) أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t\, dt$. للفروع a-c

b) احسب قيمة C عندما $t = 2\text{sec}$ ، $s(t) = 0$. انظر الهامش

c) كم ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5 sec من سقوطه؟

احسب كل تكامل مما يأتي: (المثالان 4 , 5)

8) $\int (6m + 12m^3)\, dm$ **$3m^2 + 3m^4 + C$**

9) $\int_1^4 2x^3\, dx$ **127.5**

10) $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\, da$ **46.5**

11) $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{5}h^4\right) dh$ **7.99**

12) $\int (3.4t^4 - 1.2t^3 + 2.3t - 5.7)\, dt$

$0.68t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + C$

13) $\int (14.2w^{6.1} - 20.1w^{5.7} + 13.2w^{2.3} + 3)\, dw$

$2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + C$

14) **حشرات:** تُعطى سرعة قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية.

(مثال 6) انظر ملحق الإجابات

a) أوجد دالة الموقع $s(t)$ للحشرة، ثم احسب قيمة الثابت C بفرض أنه عندما $t = 0$ ، فإن $s(t) = 0$.

b) أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟

15) **هندسة:** صمَّم مهندس مدخل بناية على شكل قوس يمكن وصفه بـ $y = -\frac{x^2}{157.5} + 4x$ ، حيث x بالأقدام. احسب مساحة المنطقة تحت هذه القوس (مثال 6)

احسب كل تكامل مما يأتي:

16) $\int_{-3}^{1} 3\, dx$ **12**

17) $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\, dx$ **27**

18) $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\, dx$ **28.5**

19) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4}\right) dx$ **2.5**

20) $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\, dx$ **16.4**

21) **مقذوفات:** تُعطى سرعة مقذوفة بـ $v(t) = -32t + 120$ ، حيث $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية بعد t ثانية ، ويبلغ ارتفاعها 228 ft بعد 3 sec .

a) أوجد أقصى ارتفاع تصله المقذوفة. **237 ft**

b) أوجد سرعة المقذوفة عندما تصل إلى سطح الأرض. **-123.16 ft/sec تقريبًا**

احسب كل تكامل مما يأتي: للتمارين 22–27 انظر الهامش

22) $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\, dt$

23) $\int_5^x (10t^4 - 12t^2 + 5)\, dt$

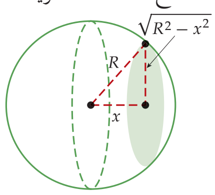
24) $\int_3^2 (4t^3 + 10t + 2)\, dt$

25) $\int_{-x}^{6} (-9t^2 + 4t)\, dt$

26) $\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)\, dt$

27) $\int_{2x}^{x+3} (3t^2 + 6t + 1)\, dt$

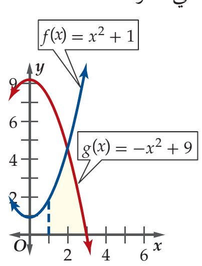
28) **حجم الكرة:** يمكن إيجاد حجم كرة نصف قطرها R بقصها إلى حلقات دائرية من خلال مستويات رأسية متوازية ثم إجراء تكامل لحساب مساحات أسطح الحلقات الدائرية.



يبلغ نصف قطر كل حلقة $\sqrt{R^2 - x^2}$ ، أي أن مساحة سطح كل حلقة هي $\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$.

أوجد $\int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)\, dx$ لحساب حجم الكرة. **$\frac{4}{3}\pi R^3$**

29) **مساحات:** احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ والمحور x ، في الفترة $1 \le x \le 3$. **6 وحدات مربعة**



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–15 للتأكد من فهم الطلبة .

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع للتمارين 8، 12، 13 ، ذكِّر الطلبة بإضافة الثابت C في إجاباتهم؛ لأن التكاملات غير محددة .

إجابات:

1) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$

2) $F(z) = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + C$

3) $Q(r) = \frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + C$

4) $W(u) = \frac{1}{9}u^6 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{5}u^2 + C$

5) $U(d) = -\frac{3}{d^4} - \frac{5}{2d^2} - 2d^3 + 3.5d + C$

6) $M(t) = 4t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 11t + C$

7a) $s(t) = -16t^2 + C$

7b) $s(t) = -16t^2 + 64$

7c) $28ft$

22) $-x^3 - 4x^2 + 24$

23) $2x^5 - 4x^3 + 5x - 5775$

24) -92

25) $-3x^3 - 2x^2 - 576$

26)
$$\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)dt$$
$$= 16\frac{t^{3+1}}{3+1} - 15\frac{t^{2+1}}{2+1} + 7t\Big|_x^{x^2}$$
$$= 4t^4 - 5t^3 + 7t\Big|_x^{x^2}$$
$$= \left[4(x^2)^4 - 5(x^2)^3 + 7x^2\right] - \left[4x^4 - 5x^3 + 7x\right]$$
$$= 4x^8 - 5x^6 - 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 7x$$

27) $-7x^3 + 44x + 57$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	32–46
ضمن المتوسط	17–19 فردي، 21، 26–22 زوجي 28، 29، 30، 32 – 46
فوق المتوسط	16–46

30) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة، ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

a) **هندسي:** مَثِّل منحنى $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ بيانيًا، وظلِّل المنطقة المحصورة بين $f(x)$ والمحور x، في الفترة $0 \le x \le 4$.

للفروع a, c, e انظر ملحق الإجابات

b) **تحليل:** احسب كلًّا من: $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\,,\ \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$ **4, −4**

c) **تعبير لفظي:** أعطِ تخمينًا حول مساحة المنطقة الواقعة فوق أو تحت المحور x .

d) **تحليل** أوجد التكامل على الفترة كاملة من خلال حساب $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$ ، ثم أوجد المساحة الكلية من خلال حساب **0, 8**

$$\left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right|$$

e) **تعبير لفظي:** أعطِ تخمينًا حول الفرق بين قيمة التكامل على الفترة كاملة والمساحة الكلية.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تحدٍّ:** احسب قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ ، حيث r عدد ثابت. $\frac{1}{2}\pi r^2$

تبرير: حَدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك: للتمارين 32–34 انظر الهامش

32) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

33) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$

34) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{|b|}^{|a|} f(x)\,dx$

35) **برهان:** أثبت أنه لأي عددين ثابتين m ، n ، فإن

$$\int_a^b (n+m)\,dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$$

انظر ملحق الإجابات

36) **تبرير:** صف قيم $f(x)$ ، $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، $\int_a^b f(x)\,dx$ ، عندما يقع التمثيل البياني للدالة f تحت المحور x في الفترة $a \le x \le b$. انظر الهامش

37) **اكتب:** بيِّن لماذا يمكننا إهمال الحد الثابت C في الدالة الأصلية عند حساب التكامل المحدد. انظر الهامش

مراجعة تراكمية

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل في كل مما يأتي: (الدرس 3-5)

38) $\int_{-2}^{2} 14x^6\,dx$ **512**

39) $\int_0^6 (x+2)\,dx$ **30**

استعمل قاعدة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 3-4)

40) $j(k) = \frac{k^8 - 7k}{2k^4 + 11k^3}$ $\quad \frac{8k^{11} + 55k^{10} + 42k^4 + 154k^3}{(2k^4 + 11k^3)^2}$

41) $g(n) = \frac{2n^3 + 4n}{n^2 + 1}$ $\quad \frac{2n^4 + 2n^2 + 4}{(n^2 + 1)^2}$

42) إذا كان $\lim_{x \to 1} (2x^2 + ax) = 8$ ، فأوجد قيمة a. (الدرس 3-2) **6**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (الدرس 3-3)

43) $y = x^2 + 3$ $\quad m = 2x$

44) $y = x^3$ $\quad m = 3x^2$

تدريب على اختبار معياري

45) إذا كان $\int_0^2 k\,x\,dx = 6$ ، فما قيمة k ؟ **C**

A 1

B 2

C 3

D 4

46) يُعطى الشغل (بالجول) المبذول لضخِّ المياه خارج بركة سباحة أبعادها $10\text{m} \times 5\text{m} \times 2\text{m}$ بالتكامل $\int_0^2 490000x\,dx$. ما قيمة الشغل المبذول؟ **F**

F 980000J

G 985000J

H 990000J

J 995000J

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدتهم مفاهيم الدرس السابق عن التكامل في الدرس الجديد عن الدوال الأصلية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-6 ، بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 3.

إجابات:

32) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: يؤدي تغيير ترتيب حدود التكامل إلى تغيير إشارته مالم تكن قيمة التكامل صفرًا.

33) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: في حالة أن $f(x)$ دالة زوجية، فإن العبارة تكون صحيحة.

34) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: في حالة أن $f(x)$ دالة زوجية، وكل من a, b سالبًا، فإن العبارة تكون صحيحة.

36) بما أن التمثيل البياني للدالة $f(x)$ يقع تحت المحور x، فإن اشارة $f(x)$ سالبة. وبما أن $f(x)$ سالبة و Δx موجبة، فإن كل حد في $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ سالب. وعلية، فإن المجموع سالب؛ لأن $\int_a^b f(x)\,dx$ هو نهاية مجاميع سالبة، فإنه يكون سالبًا .

37) إجابة ممكنة: إذا احتوت الدالة $F(x)$ على الثابت C ، فإنه سيظهر في كل من $F(b)$ و $F(a)$ ولأننا نطرح هاتين القيمتين، فإن C تحذف.

تنويع التعليم

فوق

توسَّع افرض أن $f(x)$ دالَّة متصلة وأن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$. اثبت أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [f(b) - f(a)] + [f(c) - f(b)]$$
$$= [f(c) - f(a)]$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx$$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تقدير النهايات بيانيًّا (الدرس 3-1)

- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c لها وجود، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار لهما وجود ومتساويتين.
- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c ليس لها وجود إذا اقتربت $f(x)$ من قيمتين مختلفتين باقتراب x من العدد c من اليسار ومن اليمين، أو عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود باقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو اليمين أو كلاهما، أو عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من c.

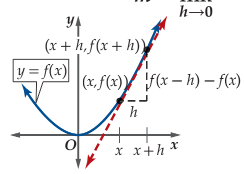
حساب النهايات جبريًّا (الدرس 3-2)

- يمكن إيجاد نهايات كثيرات الحدود والدوال النسبية عادةً من خلال التعويض المباشر.
- إذا توصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ عند حساب نهاية دالة نسبية، فبَسِّط التعبير جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام أو إنطاق البسط أو المقام، ثم اختصار العوامل المشتركة.

المماس والسرعة المتجهة (الدرس 3-3)

- مُعدّل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



المشتقة (الدرس 3-4)

- مشتقة $f(x) = x^n$ هي $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة $f'(x) = n x^{n-1}$، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 3-5)

- تُعطى مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x بالصيغة $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$، حيث b، a هما الحدان الأعلى والأدنى على الترتيب،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الدرس 3-6)

- الدالة الأصلية لـ $f(x) = x^n$ هي $F(x)$ وتُعطى بالصيغة $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$، حيث C عدد ثابت
- إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

المفردات الأساسية

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو معدل التغير اللحظي والذي يمكن تمثيله بميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.

2) يمكن إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x باستعمال التكامل .

3) يمكن إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية باستعمال التعويض المباشر وذلك إذا كان مقام الدالة النسبية لا يساوي صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية .

4) تُسمى $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$.

5) يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ بـ الصيغة غير المحددة.

6) تُسمى عملية إيجاد المشتقة بـ الاشتقاق .

7) إذا سُبقت دالة بـ معامل تفاضلي $\frac{d}{dx}$، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

8) يطلق على السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة السرعة المتجهة اللحظية

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبات في حَلّ الأسئلة 8-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

CRM اختبار المفردات في مصادر الفصل.

أحاجي المفردات

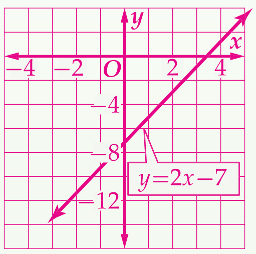
تتعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة كلمات، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت، أو على أوراق عمل مطبوعة.

مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر .

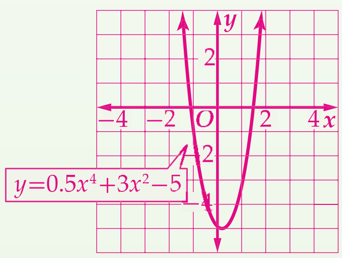
إجابات:

9) -1



x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	-1.02	−1.002		−0.998	−0.998

10) -1.5



x	0.99	0.999	1	1.0001	1.001
$f(x)$	−1.579	−1.508		−1.499	−1.492

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

3-1 تقدير النهايات بيانيًا (الصفحات 122-130)

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم:

9) $\lim_{x\to3}(2x-7)$ للتمرينين 9, 10 انظر الهامش

10) $\lim_{x\to1}(0.5x^4+3x^2-5)$

قدّر كل نهاية مما يأتي:

11) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ 5

12) $\lim_{x\to4}\frac{x^2+x+20}{x-4}$ ليس لها وجود

13) $\lim_{x\to4}\frac{9}{x^2-8x+16}$ ∞

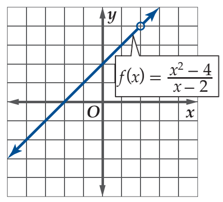
14) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-7x-10}{x-2}$ ليس لها وجود

مثال 1

قدّر $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًا يُبيّن التمثيل البياني أدناه لمنحنى $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 ، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من 4 .

لذا، فإن بإمكاننا تقدير $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ بالعدد 4 .



التعزيز عدديًا كوّن جدول قيم وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من الجهتين.

x تقترب من 2 ← ← x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

يبيّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيم $f(x)$، تقترب من العدد 4 .

3-2 حساب النهايات جبريًا (الصفحات 131-140)

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

15) $\lim_{x\to5}\frac{x^2+2x+10}{x}$ 9

16) $\lim_{x\to-1}(5x^2-2x+12)$ 19

استعمل التعويض المباشر ، لحساب كل نهاية إذا كان ذلك ممكنا، وإلا فاذكر السبب.

17) $\lim_{x\to25}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}-5}$ ليس ممكنًا؛ عند $x=25$ المقام يساوي صفر .

18) $\lim_{x\to2}(-3x^3-2x^2+15)$ -17

احسب كل نهاية مما يأتي:

19) $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2-2x-8}$ $-\frac{1}{6}$

20) $\lim_{x\to\infty}(2-4x^3+x^2)$ $-\infty$

مثال 2

استعمل التعويض المباشر لحساب كل نهاية إذا كان ذلك ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim_{x\to2}(2x^3-x^2+4x+1)$

بما أن هذه نهاية كثيرة حدود . لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to2}(2x^3-x^2+4x+1)=2(2)^3-2^2+4(2)+1$$
$$=16-4+8+1=21$$

b) $\lim_{x\to-4}\frac{2x-7}{2-x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها ليس صفرًا عندما $x=-4$.

لذا ، يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to-4}\frac{2x-7}{2-x^2}=\frac{2(-4)-7}{2-(-4)^2}=\frac{-8-7}{2-16}=\frac{15}{14}$$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-3 المماس والسرعة المتجهة (الصفحات 142-147)

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

21) $y = 6 - x$, $(-1, 7)$, $(3, 3)$ $\quad$ **$-1, -1$**

22) $y = x^2 + 2$, $(0, 2)$, $(-1, 3)$ $\quad$ **$0, -2$**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

23) $y = -x^2 + 3x$ $\quad$ **$m = -2x + 3$**

24) $y = x^3 + 4x$ $\quad$ **$m = 3x^2 + 4$**

تمثّل $h(t)$ في كل مما يأتي بُعد جسم متحرك بالأقدام بعد t ثانية. أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

25) $h(t) = 15t - 16t^2$, $t = 0.5$ $\quad$ **$v(0.5) = -1$ ft/sec**

26) $h(t) = -16t^2 - 35t + 400$, $t = 3.5$ $\quad$ **$v(3.5) = -147$ ft/sec**

تمثّل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي لحظة زمنية t:

27) $h(t) = 12t^2 - 5$ $\quad$ **$v(t) = 24t$**

28) $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$ $\quad$ **$v(t) = -4t + 3$**

مثال 3

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{صيغة مُعدل التغيّر اللحظي}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad x = 2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \qquad f(2+h) = (2+h)^2 , f(2) = 2^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \qquad \text{بفك الأقواس}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} \qquad \text{بالتبسيط، ثم إخراج عامل مشترك}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4 + h) \qquad \text{بالقسمة على } h$$

$$= 4 + 0 = 4 \qquad \text{خصائص الجمع للنهايات ونهاية الدالة الثابتة والدالة المحايدة}$$

أي أن ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4.

3-4 المشتقة (الصفحات 149-156)

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال التعريف، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

29) $g(t) = -t^2 + 5t + 11$, $t = -4, 1$ $\quad$ **$g'(t) = -2t + 5, g'(-4) = -3, g'(1) = 3$**

30) $m(j) = 10j - 3$, $j = 5, -3$ $\quad$ **$m'(j) = 10, m'(5) = 10, m'(-3) = 10$**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: **للتمارين 31-34 انظر الهامش**

31) $p(v) = -9v + 14$

32) $z(n) = 4n^2 + 9n$

33) $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6}$

34) $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}} + 5$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

35) $f(m) = \dfrac{5 - 3m}{5 + 2m}$ $\quad$ **$f'(m) = \dfrac{-25}{(5 + 2m)^2}$**

36) $m(q) = \dfrac{2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$ $\quad$ **$m'(q) = \dfrac{4q^5 - 96q^3 + 6q}{(q^2 - 12)^2}$**

مثال 4

أوجد مشتقة $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افرض أن $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = x^3 + 2$. لذا، $h(x) = f(x)/g(x)$. أوجد مشتقة كل من $f(x), g(x)$

$$f(x) = x^2 - 5 \qquad \text{من الفرض}$$

$$f'(x) = 2x \qquad \text{قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة}$$

$$g(x) = x^3 + 2 \qquad \text{من الفرض}$$

$$g'(x) = 3x^2 \qquad \text{قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة}$$

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \text{قاعدة مشتقة القسمة}$$

$$= \frac{2x(x^3 + 2) - (x^2 - 5)\,3x^2}{(x^3 + 2)^2} \qquad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2} \qquad \text{بالتبسيط}$$

إجابات:

31) $p'(v) = -9$

32) $z'(n) = 8n + 9$

33) $s'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}}$

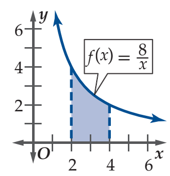
34) $g'(h) = 3h^{-\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}}$

174 الفصل 3 النهايات والاشتقاق

3-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل (الصفحات 157-164)

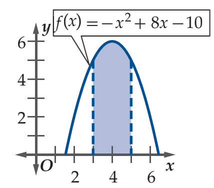
قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و 5 مستطيلات:

37)



5.6 وحدة مربعة

38)



11.28 وحدة مربعة

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

39) $\int_1^2 2x^2\,dx$ 4.67 وحدة مربعة تقريبًا

40) $\int_0^3 (2x^3 - 1)\,dx$ 37.5 وحدة مربعة تقريبًا

41) $\int_0^2 (x^2 + x)\,dx$ 4.67 وحدة مربعة تقريبًا

42) $\int_1^4 (3x^2 - x)\,dx$ 55.5 وحدة مربعة تقريبًا

مثال 5

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2x^2$ والمحور x، في الفترة $[0, 2]$ أو $\int_0^2 2x^2\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx، x_i.

صيغة Δx: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$b = 2, a = 0$: $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$a = 0, \Delta x = \frac{2}{n}$: $x_i = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$

$x_i = \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$: $\int_0^2 2x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$

بالتبسيط: $= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}\right)$

صيغ المجموع: $= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

بالتبسيط: $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$

بإخراج عامل مشترك، ثم القسمة على n^2: $= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{3}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$

خصائص النهايات: $= \frac{16}{3} \approx 5.33$

3-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الصفحات 165-171)

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي: للتمارين 43-46 انظر الهامش

43) $g(n) = 5n - 2$

44) $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$

45) $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$

46) $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$

احسب كل تكامل مما يأتي:

47) $\int 8x^2\,dx$ $\frac{8}{3}x^3 + C$

48) $\int (2x^2 - 4)\,dx$ $\frac{2}{3}x^3 - 4x + C$

49) $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\,dx$ 2466.53 وحدة مربعة

50) $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\,dx$ 3294 وحدة مربعة

مثال 6

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{4}{x^5}$

بإعادة كتابة الدالة المعطاة بقوة سالبة: $f(x) = 4x^{-5}$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت: $F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$

بالتبسيط: $= -1x^{-4} + C = -\frac{1}{x^4} + C$

b) $f(x) = x^2 - 7$

الدالة المعطاة: $f(x) = x^2 - 7$

بإعادة كتابة الدالة بدلالة قوى x: $= x^2 - 7x^0$

قواعد الدالة الأصلية: $F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$

بالتبسيط: $= \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

إجابات:

43) $G(n) = \frac{5}{2}n^2 - 2n + C$

44) $R(q) = q^3 + \frac{9}{2}q^2 - 2q + C$

45) $M(t) = \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + t^2 - 11t + C$

46) $p(h) = h^7 + \frac{2}{3}h^6 - 3h^4 - 4h + C$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

تطبيقات ومسائل

51) **حيوانات:** يُعطى عدد الحيوانات P في محميَّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بـ $P(t) = \dfrac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95}$. (الدرس 3-1)

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميَّة بعد 5 سنوات. **2966 حيوانًا**

b) ما أقصى عدد ممكن للحيوانات في المحمية؟ **8000 حيوانٍ**

52) **تحف فنية:** لدى سلمان تحفة فنية يزداد سعرها كل سنة. افرض أن $v(t) = \dfrac{800t - 21}{4t + 19}$ تمثِّل سعر التحفة بعد t سنة بالدنانير. (الدرس 3-1)

a) مَثِّل الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le t \le 10$. **انظر الهامش**

b) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لتقريب سعر التحفة عندما $t = 3 , 6 , 10$. **BD 76.7, BD 111.1, BD 135.2**

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لحساب $\lim\limits_{t\to\infty} v_t$. **20000**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر التحفة. **انظر الهامش**

e) بعد 10 سنوات، قدَّم أحد المعارض الفنية عرضًا لشراء التحفة من سلمان بسعر BD300، فهل من الأفضل بيعها بهذا السعر؟ برِّر إجابتك. **نعم؛ العرض أفضل من قيمة التحفة**

53) **مبيعات:** افرض أن $v(t) = \dfrac{450}{5 + 25(0.4)^t}$ تمثِّل سعر سلعة ما بالدنانير بعد t سنة. (الدرس 3-2)

a) أكمل الجدول أدناه: **للفروع a-b انظر الهامش**

السنة	0	1	2	3
السعر				

b) مَثِّل الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le t \le 10$.

c) استعمل التمثِيل البياني لتقدير $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ إذا كان لها وجود. **BD 90**

d) وضّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر السلعة.
إجابة ممكنة: أقصى سعر يمكن أن تصله السلعة هو BD 90 تقريبًا

54) **صواريخ:** أُطلق صاروخ رأسيًّا لأعلى بسرعة 150 ft/sec. افرض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية ومعطى بـ $h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2$. (الدرس 3-3)

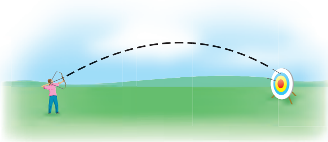
a) اكتب تعبير يمثل السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ. **$-32t + 150$**

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 sec من إطلاقه؟ **102 ft/sec**

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟ **4.69 sec تقريبًا**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟ **359.8 ft تقريبًا**

55) **رماية:** أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/sec باتجاه هدف . افرض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بِـ $h(t) = -16t^2 + 35t + 1.5$. (الدرس 3-3)



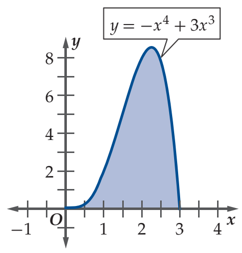
a) اكتب تعبيرًا يمثِّل السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم. **$-32t + 35$**

b) ما سرعة السهم بعد 0.5/sec من إطلاقه؟ **19 ft/sec**

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟ **1.09 sec تقريبًا**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟ **20.64 ft تقريبًا**

56) **تصميم:** يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد كما في الشكل أدناه . حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار وتثبيته على قمصان لاعبي فريق رياضي ، ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعار إذا كانت x بالبوصات؟ (الدرس 3-6) **$607.5\ in^2$**



57) **ضفادع:** تمثل $v(t) = -32t + 26$ سرعة قفز ضفدع، حيث t الزمن بالثواني ، $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية. (الدرس 3-6)

a) أوجد موقع الضفدع $s(t)$ عندما $t = 0$ ، على فرض أن $s(t) = 0$. **$s(t) = -16t^2 + 26t$**

b) ما الزمن الذي سيستغرقه الضفدع في الهواء عند قفزه؟ **1.63 sec**

58) **طيور:** سقطت حبة قمح من منقار حمامة تطير على ارتفاع 20 ft ، وتُعطى سرعة سقوط الحبة بِـ $v(t) = -32t$ ، حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ بالأقدام لكل ثانية. (الدرس 3-6)

a) أوجد موقع الحبة $s(t)$ عند أي لحظة زمنية t. **$s(t) = -16t^2 + 20$**

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الحبة حتى الوصول إلى سطح الأرض. **1.12 sec**

مراجعة حَلّ المسائل

إذا احتاج الطلبة إلى تدريبات إضافية على حَلّ المسألة، فذكّرهم بخطوات حَلّ المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقّع

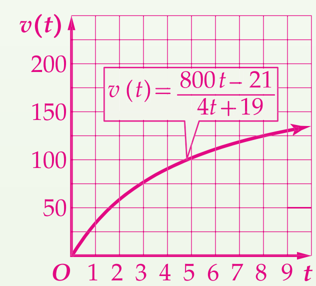
اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقّع في مصادر الفصل3، ويناقشوا أي تغييرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 3.

قبل الاختبار

اطلب إلى الطلبة دراسة الصفحات 172–175 من دليل الدراسة والمراجعة؛ المواضيع، والمهارات الواردة في الفصل.

إجابات:

52a)

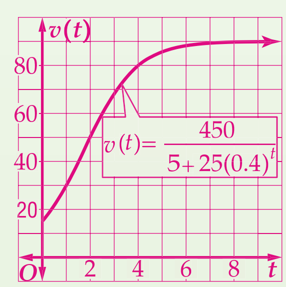


52d) لن تزيد قيمة التحفة عن BD 20000.

53a.

t	0	1	2	3
v	15	30	50	68.2

53b)



176 الفصل 3 النهايات والاشتقاق

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أنّ جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 3 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

إجابات:

5b) إجابة ممكنة: رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني كلما أزداد عدد الاجهزة المنتجة، إلا أن متوسط التكلفة سيقترب من BD 100 لكل جهاز.

اختبار الفصل

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+4}-8$ **-6**

2) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$ **8**

3) $\lim_{x\to 7} \frac{6}{x-7}$ **ليس لها وجود**

4) $\lim_{x\to \infty} x^3+5x^2-2x+21$ **∞**

5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالدينار عند إنتاج x جهاز بـ $C(x)=\frac{100x+7105}{x}$.

a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية. **100**

b) فَسِّر الناتج في الفرع a. **انظر الهامش**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4}-2}$ **-25**

7) $\lim_{x\to 9} (2x^3-12x+3)$ **1353**

8) **نادٍ رياضي:** تُمثّل $S(t)=\frac{2000t^2+4}{1+10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد t يوم من افتتاحه.

a) ما عدد المشتركين في البداية؟ **4**

b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟ **40**

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x\to \infty} (x^2-7x+2)$ **∞**

10) $\lim_{x\to \infty} (2x^3-8x^2-5)$ **∞**

11) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-x-1}{-x^4+7x^3+4}$ **0**

12) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{25+x}-4}{x}$ **0**

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$؟ **A**

A $-\frac{1}{9}$

B 0

C $\frac{1}{9}$

D ليس لها وجود

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y=x^2+2x-8\ ,\ (-5,7)\ ,\ (-2,-8)$ **$-8, -2$**

15) $y=\frac{4}{x^3}+2\ ,\ (-1,-2)\ ,\ \left(2,\frac{5}{2}\right)$ **$-12, -\frac{3}{4}$**

16) $y=(2x+1)^2\ ,\ (-3,25)\ ,\ (0,1)$ **$-20, 4$**

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي لحظة زمنية t بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t)=9t+3t^2$ **$v(t)=9+6t$**

18) $h(t)=10t^2-7t^3$ **$v(t)=20t-21t^2$**

19) $h(t)=3t^3-2+4t$ **$v(t)=9t^2+4$**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x)=-3x-7$ **$f'(x)=-3$**

21) $b(c)=4c^{\frac{1}{2}}-8c^{\frac{2}{3}}+5c^{\frac{4}{5}}$ **$b'(c)=\frac{2}{\sqrt{c}}-\frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}}+\frac{4}{c^{\frac{1}{5}}}$**

22) $w(y)=3y^{\frac{4}{3}}+6y^{\frac{1}{2}}$ **$w'(y)=4y^{\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{1}{2}}$**

23) $g(x)=(x^2-4)(2x-5)$ **$g'(x)=6x^2-10x-8$**

24) $h(t)=\frac{t^3+4t^2+t}{t^2}$ **$h'(t)=\frac{t^2-1}{t^2}$**

25) **صناعة:** تُعطى التكلفة الحدّية c بالدينار لإنتاج x كرة قدم يوميًا بـ $c(x)=15-0.005x$.

a) أوجد دالة تمثل التكلفة الحقيقية. **$C(x)=15x-0.0025x^2$**

b) أوجد تكلفة زيادة الإنتاج اليومي من 1500 كرة إلى 2000 كرة. **BD 3125**

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_1^4 (x^2-3x+4)\,dx$ **10.5 وحدة مربعة تقريبًا**

27) $\int_3^8 10x^4\,dx$ **65050 وحدة مربعة تقريبًا**

28) $\int_2^5 (7-2x+4x^2)\,dx$ **156 وحدة مربعة تقريبًا**

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $d(a)=4a^3+9a^2-2a+8$ **$D(a)=a^4+3a^3-a^2+8a+C$**

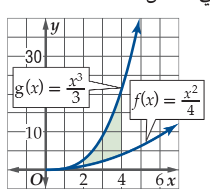
30) $w(z)=\frac{3}{4}z^4+\frac{1}{6}z^2-\frac{2}{5}$ **$W(z)=\frac{3}{20}z^5+\frac{1}{18}z^3-\frac{2}{5}z+C$**

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int (5x^3-6x^2+4x-3)\,dx$ **$\frac{5}{4}x-2x^3+2x^2-3x+C$**

32) $\int_1^4 (x^2+4x-2)\,dx$ **45**

33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المبينة بين منحنيي $f(x)$، $g(x)$ في الفترة $2\le x\le 4$ في الشكل أدناه؟ **H**



F $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة

H $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

G $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

J 16 وحدة مساحة

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس من 1-3 إلى 3-6	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
مصادر الفصل	كتاب الطالب	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (120)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

التهيئة للفصل 3، ص 121

1) يظهر من المنحنى أن $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$، و $f(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$.

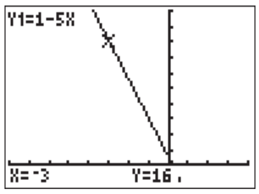
2) يظهر من المنحنى أن $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$، و $f(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$.

3) يظهر من المنحنى أن $f(x) \to 1$ عندما $x \to \infty$، و $f(x) \to 1$ عندما $x \to -\infty$.

4) من المنحنى، يظهر أن $f(x) \to -5$ عندما $x \to \infty$، وأن $f(x) \to -5$ عندما $x \to -\infty$.

الدرس 1-3 (تأكد)، ص 122-123

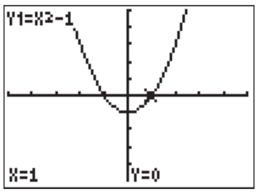
1A)



[−8, 4] scl: 1 by [−2, 20] scl: 2

x	−3.01	−3.001	−3	−2.999	−2.99
$f(x)$	16.05	16.005		15.995	15.95

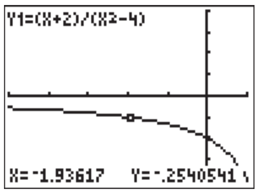
1B)



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

x	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	−0.0199	−0.001999		0.002001	0.0201

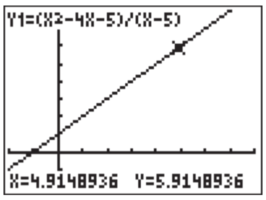
2A)



[−5, 1] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.25

x	−1.99	−1.999	−2	−2.001	−2.01
$f(x)$	−0.2506	−0.2501		−0.2499	−0.2494

2B)

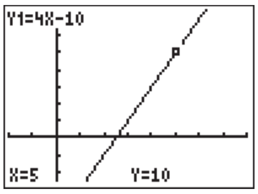


[−2, 8] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	5.99	5.999		6.001	6.01

الدرس 1- 3، ص 122-130

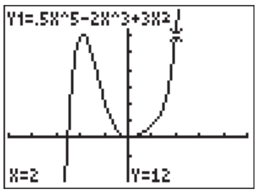
1)



[−2, 8] scl: 1 by [−5, 15] scl: 2

x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	9.96	9.996		10.004	10.04

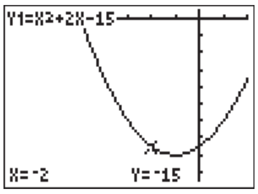
2)



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 15] scl: 2

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	11.72	11.972		12.028	12.28

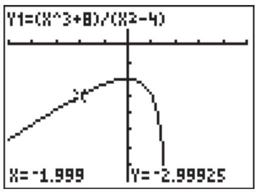
3)



[−8, 2] scl: 1 by [−19, 1] scl: 2

x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	−14.98	−14.998		−15.002	−15.02

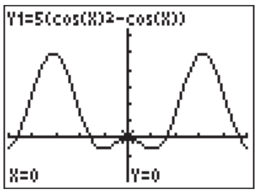
4)



[−5, 5] scl: 1 by [−8, 2] scl: 1

x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	−3.008	−3.0008		−2.9993	−2.993

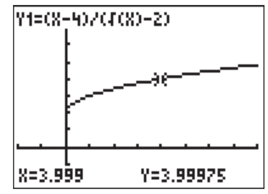
5)



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 15] scl: 2

x	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	−0.0002	−0.000002		−0.000002	−0.0002

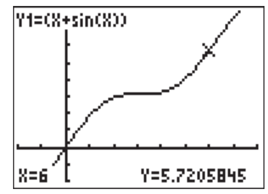
(6



[−2, 8] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	3.998	3.9997		4.0002	4.003

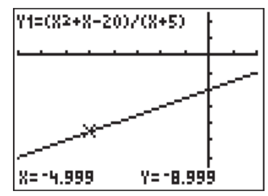
(7



[−2, 8] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

x	5.99	5.999	6	6.001	6.01
$f(x)$	5.70	5.719		5.723	5.74

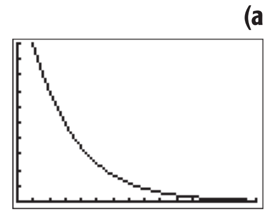
(8



[−8, 2] scl: 1 by [−15, 5] scl: 2

x	−5.01	−5.001	−5	−4.999	−4.99
$f(x)$	−9.01	−9.001		−8.999	−8.99

37 **(a**



[1, 15] scl: 1 by [0, 2000] scl: 200

(b (15,13.56) ، (10,80.70) ، (5,48.2)

(c يقترب المنحنى من محور x . لذلك ، $\lim\limits_{t\to\infty} = 0$.

(d لا؛ مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية 6666.67 m تقريبًا، وهو أقل من 7000 m ، والذي يساوي بُعد المستشفى.

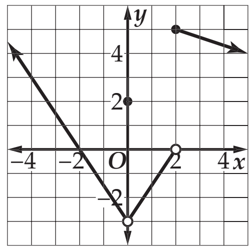
(49 إجابة ممكنة: $g(x) = \begin{cases} 2x & ، x = 0 \\ x+1 & ، x > 0 \end{cases}$ ، $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(50 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ليس لها وجود؛ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ ليس لها وجود، إجابة ممكنة:

إذا كان مقام الدالة النسبية صفرًا والبسط لا يساوي صفرًا عند نقطة معطاة، فإن النهاية ليس لها وجود.

(51 أحيانًا؛ إجابة ممكنة: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c. فإذا كانت الدالة غير متصلة عند c، وكان $f(c) = L$، فإن نهاية الدالة قد تكون أي قيمة مختلفة عن L.

(52 إجابة ممكنة:



(54 إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = a$، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض عن x بـ a في الدالة، أما إذا لم تكن الدالة متصلة، فبإمكانك التبسيط ثم التعويض عن x بـ a. وإذا لم تفد أي من الطريقتين، فإننا نقدّر النهاية باستعمال التمثيل البياني.

(55

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta} - \cos\theta \div \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cancel{\cos\theta}\cdot\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$

$$\cancel{\sin}\theta\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\cancel{\sin}\theta}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta \stackrel{\checkmark}{=} \cos^2\theta$$

(56 عند $x=5$ ،

$$h(5) = 0$$

$$\lim_{x\to 5} h(x) = 0$$

وبما أن $h(5) = \lim\limits_{x\to 5} h(x)$

فإن $h(x)$ متصلة عند $x = 5$

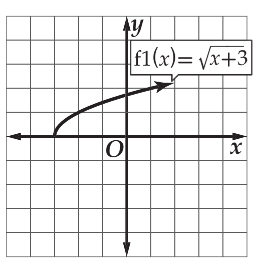
عند $x = -5$ ،

$$h(-5) = \frac{0}{0} \text{ (غير معرّفة)}$$

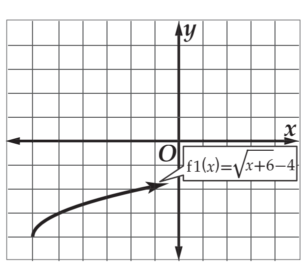
$$\lim_{x\to -5} h(x) = \lim_{x\to -5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)} = -10$$

وبما أن $h(-5)$ غير معرّفة، $\lim\limits_{x\to -5} h(x)$ موجودة، فإنه يوجد عند $x=-5$ نقطة انفصال قابل للإزالة.

(58



(59



الدرس 3-2 ، ص (131-140)

28

a) طول حيوان الأسفنج قبل امتصاصه الماء هو طوله عند الزمن $t = 0$.

b)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{105t^2}{10+t^2} + 25 = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{105t^2}{t^2}}{\frac{10}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}} + 25$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{105}{\frac{10}{t^2}+1} + 25$$

$$= \frac{\lim_{t\to\infty} 105}{\lim_{t\to\infty}\frac{10}{t^2} + \lim_{t\to\infty} 1} + \lim_{t\to\infty} 25$$

$$= \frac{105}{0+1} + 25$$

$$= 130$$

c) لن يزيد طول حيوان الأسفنج عن 130 mm

42a) $\lim_{x\to 0} \frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10} = 38$ ؛ عندما تكون الإضاءة أقل ما يمكن فإنه لا يوجد ضوء. وعندما يكون المكان مظلمًا، فإن اتساع بؤبؤ عين الحيوان يكون 38 mm.

42b) $\lim_{x\to\infty} \frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10} = 8.5$ ؛ عندما تكون الإضاءة أكبر ما يمكن فإنه يوجد ضوء شديد، وعندما يكون المكان مضيء، فإن اتساع بؤبؤ عين الحيوان يكون 8.5 mm.

50)

$$\lim_{x\to c} p(x) = \lim_{x\to c} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0\right)$$

$$= \lim_{x\to c} a_nx^n + \lim_{x\to c} a_{n-1}x^{n-1} + \dots + \lim_{x\to c} a_2x^2 + \lim_{x\to c} a_1x + \lim_{x\to c} a_0$$

$$= a_n \lim_{x\to c} x^n + a_{n-1} \lim_{x\to c} x^{n-1} + \dots + a_2 \lim_{x\to c} x^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0$$

$$= a_n \left(\lim_{x\to c} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to c} x\right)^{n-1} + \dots + a_2\left(\lim_{x\to c} x\right)^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0$$

$$= a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_2c^2 + a_1c + a_0$$

$$= p(c)$$

51) أثبت أن العبارة صحيحة عند $n = 1$،

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^1 = L^1 = L = \lim_{x\to c} [f(x)]$$

أي أن العبارة صحيحة عند $n = 1$. افرض أن العبارة صحيحة عند $n = k$ حيث k عدد صحيح موجب، أي : $\lim_{x\to c} [f(x)]^k = L^k$.
والمطلوب إثبات أن العبارة صحيحة عند $n = k+1$، أي:

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{k+1} = L^{k+1}$$

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{k+1} = \lim_{x\to c} [f(x)]^k \cdot \lim_{x\to c} [f(x)]^1 = L^k \cdot L^1 = L^{k+1}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = k+1$. وحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن العبارة صحيحة لأي عدد صحيح موجب n.

52) إجابة ممكنة :

الخاصية	التعريف	مثال
خاصية الجمع	$\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} (x+5) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$
خاصية الطرح	$\lim_{x\to c} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} (x-5) = \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 5$
خاصية الضرب بثابت	$\lim_{x\to c} [kf(x)] = k \lim_{x\to c} f(x)$	$\lim_{x\to 2} 2x = 2 \lim_{x\to 2} x$
خاصية الضرب	$\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} [x^2(x-5)] = \left(\lim_{x\to 2} x^2\right)\left(\lim_{x\to 2} x-5\right)$
خاصية القسمة	$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, if $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$	$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2}{(x-5)}\right] = \frac{\left(\lim_{x\to 2} x^2\right)}{\left(\lim_{x\to 2} x-5\right)}$ $\lim_{x\to 2}(x-5) \neq 0$
خاصية القوة	$\lim_{x\to c} [f(x)^n] = \lim_{x\to c} [f(x)]^n$	$\lim_{x\to 2} [(x-5)^2] = \lim_{x\to 2} [(x-5)]^2$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ عندما n زوجي.	$\lim_{x\to 2} \sqrt{(x-5)} = \sqrt{\lim_{x\to 2} (x-5)}$

55) إجابة ممكنة: إذا كانت النهاية على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$، فإنها لا تساوي 1، لأن ∞ ليس عددًا حقيقيًا؛ أنها تمثل رمزًا. حَلِّل هذه المسألة بتمثيل الدالة النسبية الأصلية بيانيًّا، وملاحظة سلوك الدالة حول نقطة النهاية.

59)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= x^2 - 2x + x + 9$$
$$= x^2 - x + 9$$

المجال = $(-\infty,\infty)$ أو R

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= x^2 - 2x - x - 9$$
$$= x^2 - 3x - 9$$

المجال = $(-\infty,\infty)$ أو R

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$
$$= (x^2 - 2x).(x+9)$$
$$= x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 18x$$
$$= x^3 + 7x^2 - 18x$$

المجال = $(-\infty,\infty)$ أو R

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-2x}{x+9}$$

المجال = $\{x \mid x \neq -9, x\in R\}$

(60

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$= \frac{x}{x+1} + x^2 - 1$
المجال $= \{x | x \neq -1, x \in R\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$= \frac{x}{x+1} - x^2 + 1$
المجال $= \{x | x \neq -1, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$= \frac{x}{\cancel{x+1}} \cdot (x-1)\cancel{(x+1)}$
$= x(x-1)$
المجال $= \{x | x \neq -1, x \in R\}$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x+1} \div (x^2 - 1)$
$= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2-1}$
المجال $= \{x | x \neq -1, x \neq 1, x \in R\}$

الدرس 3-3، ص 146

29

a) حدد ارتفاع المظلي عند الزمن $t = 2, t = 5$

$h(2) = 15{,}000 - 16 \cdot 2^2 = 14{,}936$

$h(5) = 15{,}000 - 16 \cdot 5^2 = 14{,}600$

السرعة المتوسطة المتجهة بين الزمنين $t = 2$ ، $t = 5$ هي:

$$\frac{h(5) - h(2)}{5 - 2} = \frac{14600 - 14936}{3} = -112 \text{ ft/s}$$

b) احسب $v(2)$ ، $v(5)$

$$\begin{aligned}
v(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h) - h(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{15000 - 16(2+h)^2 - [15000 - 16 \cdot 2^2]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{15000 - 16(4 + 4h + h^2) - 15000 + 64}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-64 - 64h - 16h^2 + 64}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-64 - 16h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-64 - 16h) \\
&= -64
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(5) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(5+h) - h(5)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{15000 - 16(5+h)^2 - [15000 - 16 \cdot 5^2]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{15000 - 16(25 + 10h + h^2) - 15000 + 400}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-400 - 160h - 16h^2 + 400}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-160 - 16h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-160 - 16h) \\
&= -160
\end{aligned}$$

السرعة المتجهة عند الزمن $t = 2$ تساوي -64 ft/s، والسرعة المتجهة عند الزمن $t = 5$ تساوي -160 ft/s

(c

$$\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{15000 - 16(t+h)^2 - [15000 - 16t^2]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{15000 - 16(t^2 + 2th + h^2) - 15000 + 16t^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-16t^2 - 32th - 16h^2 + 16t^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-32t - 16h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-32t - 16h) \\
&= -32t
\end{aligned}$$

الدرس 3-4، ص 149-156

14

a) أوجد $f'(h)$

$f'(h) = -0.0036 \cdot 3h^2 - 0.01 \cdot 2h + 2.04$
$= -0.0108h^2 - 0.02h + 2.04$

b) احسب $f'(h)$ عند $h = 2, h = 14, h = 20$

$f'(2) = -0.0108 \cdot 2^2 - 0.02 \cdot 2 + 2.04$
≈ 1.96 deg/hr
$f'(14) = -0.0108 \cdot 14^2 - 0.02 \cdot 14 + 2.04$
≈ -0.36 deg/hr
$f'(20) = -0.0108 \cdot 20^2 - 0.02 \cdot 20 + 2.04$
≈ -2.68 deg/hr

c) حل المعادلة $f'(h) = 0$

$-0.0108h^2 - 0.02h + 2.04 = 0$

$$h = \frac{-(-0.02) \pm \sqrt{(-0.02)^2 - 4(-0.0108)(2.04)}}{2(-0.0108)}$$

$h \approx -14.70$ or $h \approx 12.85$

بما أن $0 \leq h \leq 24$، فإختر القيمة موجبة لِـ h.

احسب f عند $h = 12.85, h = 24, h = 0$

$f(0) = -0.0036 \cdot 0^3 - 0.01 \cdot 0^2 + 2.04 \cdot 0 + 52 = 52$
$f(12.85) = -0.0036 \cdot 12.85^3 - 0.01 \cdot 12.85^2 + 2.04 \cdot 12.85 + 52 \approx 68.92$
$f(24) = -0.0036 \cdot 24^3 - 0.01 \cdot 24^2 + 2.04 \cdot 24 + 52 \approx 43.43$

إذن، درجة الحرارة العظمى هي $68.92°$.

15) نقطة حرجة $(-2, -8)$، صغرى $(-2, -8)$، عظمى $(-5, 10)$

16) نقطة حرجة $(-2, 0)$ لكنها خارج الفترة $[1, 4]$، صغرى $(1, 5)$، عظمى $(4, 350)$

17) نقطة حرجة $(-5, -10)$، صغرى $(-6, -11)$، عظمى $(-3, -2)$

18) نقطة حرجة $(-9, 405)$، صغرى $(-11, 385)$، عظمى $(-9, 405)$

19) نقطة حرجة $(1, 1)$، صغرى $(0, 0)$، عظمى $(3, 9)$

20) نقطتان حرجتان $(-3, 21.5)$ و $(2, 0.67)$، صغرى $(2, 0.67)$، عظمى $(5, 32.17)$

21c) نعم؛ أقصى ارتفاع يمكن لأحمد قذف الكرة إليه هو 71 ft. وهذا أعلى من 70 ft الارتفاع المطلوب.

22) $f'(x) = 4(x^2 + 9) + 2x(4x + 3)$

23) $g'(x) = (12x^3+2)(5-3x) - 3(3x^4+2x)$

24) $s'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^{11}-4t) + (\sqrt{t}+2)(33t^{10}-4)$

25) $g'(x) = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+2\right)(0.5x^4-3x) + (2x^3-3\ (x^{\frac{3}{2}}+2x)$

26) $c'(t) = (3t^2+2-7t^6)(t^6+3t^4-22t) + (t^3+2t-t^7)\cdot(6t^5+12t^3-22)$

27) $q'(a) = \left(\frac{9}{8}a^{\frac{1}{8}} - \frac{1}{4}a^{-\frac{5}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}}-13a\right) + \left(a^{\frac{9}{8}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}a^{\frac{1}{4}}-13\right)$

28) $f'(x) = (7x^4+2.7)(7.3x^9-0.8x^5) + (1.4x^5+2.7x)(65.7x^8-4x^4)$

29) $f'(m) = -\frac{12}{(3+2m)^2}$

30) $r'(t) = \frac{10t}{(3-t^2)^2}$

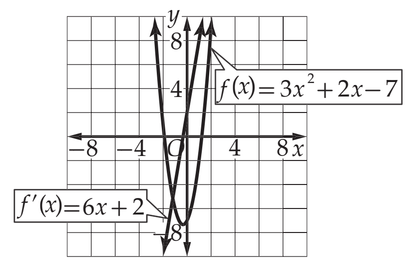
31) $m'(q) = \frac{q^6-2q^4-8q^3-9q^2-8q}{(q^3-2)^2}$

32) $f'(x) = \frac{4x^2+3x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}+12}{2(-x^2+3)^2}$

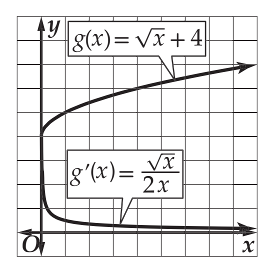
33) $q'(r) = \frac{r^2-15}{r^4}$

34) $t'(w) = \frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}w^{\frac{5}{2}}$

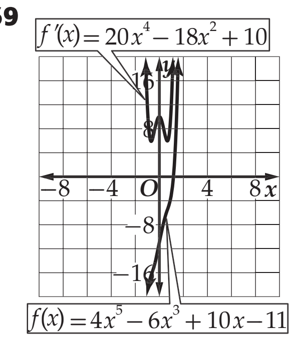
36)



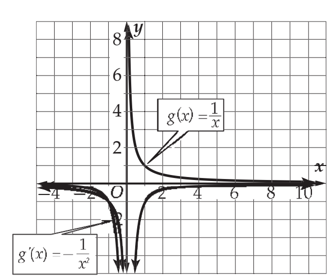
37)



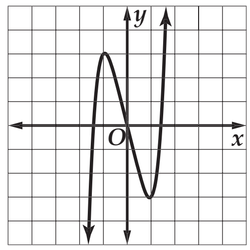
38)



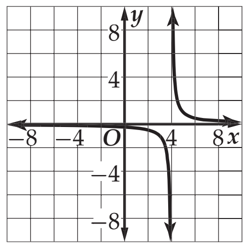
39)



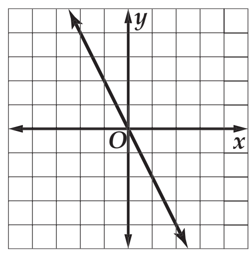
41) اجابة ممكنة :



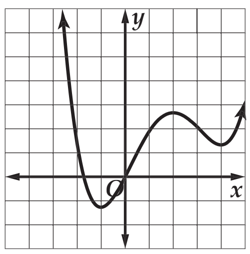
42) اجابة ممكنة:



43) اجابة ممكنة:

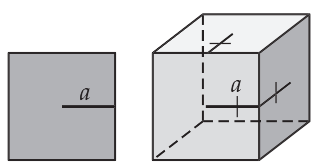


44) اجابة ممكنة:



45b) إجابة ممكنة: مشتقة معادلة مساحة سطح الدائرة هي معادلة محيط الدائرة. مشتقة معادلة حجم الكرة هي معادلة المساحة السطحية للكرة.

45c)



45e) عند كتابة مساحة سطح المربع بدلالة بُعد المركز عن الأضلاع، فإن مشتقة معادلة سطح المربع هي محيط المربع. وعند اشتقاق حجم المكعب المكتوب بدلالة بُعد المركز عن الأوجه، فإننا نحصل على مساحة السطح الكلية للمكعب.

46) عبد الله، إجابة ممكنة: وجد عبدالله أن $f'(x) = 12x + 4$، ثم ربَّع الطرفين. أما أحمد فقد ربَّع الدالة الأصلية، ثم أوجد المشتقة.

48) إجابة ممكنة:

$$f'(u)\,g(x) + f(x)\,g'(x) =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} +$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right] +$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\left[\lim_{h\to 0} g(x+h)\right] +$$

$$f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

49) صحيحة: إجابة ممكنة: إنّ قوة $f(x)$ هي $5n + 3$. حسب قاعدة القوة، تصبح هذه القوة معامل في المشتقة. وتصبح القوة في المشتقة أقل بواحد من $5n + 3$ أي $(5n + 3) - 1$ أو $5n + 2$.

50) إجابة ممكنة:

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - [g(x+h) - g(x)]f(x)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}f(x)}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x)\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

51) إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون لدالتين مختلفتين المشتقة نفسها؛ لأن مشتقة أي ثابت هي 0، أي أنه لأي دالتين تختلفان بانسحاب عمودي، فإن لهما المشتقة نفسها. فمثلاً للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 3$ المشتقة نفسها $2x$.

الدرس 3-5، ص 157-164

5

a) طرفا منحنى نصف الدائرة هما طرفا الفترة $[0, 10]$، وباستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة نجد أن:

$R_1 = 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58$
$R_5 = 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90$
$R_6 = 1 \cdot f(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5)^{0.5} = 5$
$R_7 = 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90$
$R_8 = 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58$
$R_9 = 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4$
$R_{10} = 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3$

المساحة الكلية تساوي 37.96 وحدة مربعة تقريبًا.

b) في هذا الجزء من السؤال، سوف نستعمل الأطراف اليمنى لمستطيلات، والأطراف اليسرى لمستطيلات أخرى.

$R_1 = 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58$
$R_5 = 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90$
$R_6 = 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90$
$R_7 = 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58$
$R_8 = 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4$
$R_9 = 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3$
$R_{10} = 1 \cdot f(10) = (-10^2 + 10 \cdot 10)^{0.5} = 0$

المساحة الكلية تساوي 32.96 وحدة مربعة تقريبًا.

c) نصف القطر يساوي 5 وحدات.

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi 5^2 = 12.5\pi \approx 39.27$$

التقريب الأول هو الأقرب إلى المساحة الحقيقية.

إجابة ممكنة: المساحات خارج نصف الدائرة، والمحتواة داخل مستطيلات التقريب الأول تعوِّض المساحة داخل نصف الدائرة، وغير المحتواة في المستطيلات.

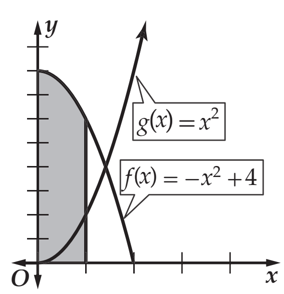
21 أوجد Δx ، x_i

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0-(-1)}{n} = \frac{1}{n}$$
$$x_i = a + i\Delta x = -1 + \frac{i}{n}.$$

احسب التكامل المحدد الذي يمثل المساحة.

$$\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(-1 + \frac{i}{n}\right)^3 + 2\right]\frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[-1 + 3\left(\frac{i}{n}\right) - 3\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \left(\frac{i}{n}\right)^3 + 2\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{3i}{n} - \frac{3i^2}{n^2} + \frac{i^3}{n^3}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{3i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^3}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(n + \frac{3}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{3}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{3n(n+1)}{2n^2} - \frac{3n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3(n+1)}{2n} - \frac{2n^2+3n+1}{2n^2} + \frac{n^2+2n+1}{4n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (1) + 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right)$$
$$= 1 + 3\left(\frac{1}{2} + 0\right) - (1 + 0 + 0) + \left(\frac{1}{4} + 0 + 0\right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

(30a



(30b

$$\int_0^1 (-x^2 + 4)\,dx = \frac{11}{3} \approx 3.67$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

30c) إجابة ممكنة: إذا أردنا إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين، فإننا نبدأ بالتكامل $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx$ ، والذي يُمثّل المساحة الكلية بين $f(x)$ ، والمحور x. وبما أننا لا نحتاج للمساحة تحت $g(x)$. لذا، فإننا نطرح المساحة الناتجة عن التكامل $\int_0^1 x^2\,dx$ من $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx$ ؛ لنحصل على $\frac{10}{3} \approx 3.33$

أو 3.33 تقريبًا.

30d) $-2x^2+4$ ، $\frac{10}{3} \approx 3.33$

30e) عند حساب المساحة المحصورة بين منحنيي دالتين، فإن بإمكاننا حساب المساحة المحصورة تحت كل منحنى، ثم نطرح إحداهما من الأخرى، أو نجد الفرق بين الدالتين، ثم نحسب تكامل الدالة الناتجة.

31) كلاهما خطأ؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى للمستطيلات سيُعطي مساحاتٍ أكبر من تلك المساحة تحت المنحنى، في حين يُعطي استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات مساحاتٍ أصغر. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، سيُعطي قيمةً أكبر للمساحة ويُعطي استعمال الأطراف اليمنى قيمةً أصغر.

الدرس 6-3، ص 171-165

14

a) أوجد الدالة الأصلية لـِ $v(t)$ لتجد $s(t)$.

$$s(t) = -32\,\frac{t^{1+1}}{1+1} + 34t + C = -16t^2 + 34t + C$$

عوِّض $0 = s(t)$ ، $t = 0$، ثم حُلّ المعادلة ؛ لإيجاد قيمة c .

$$0 = -16 \cdot 0^2 + 34 \cdot 0 + C$$

$$0 = C$$

إذن، $s(t) = -16t^2 + 34t$.

b) حُلّ المعادلة $s(t) = 0$ ؛ لتحدد زمن هبوط الحشرة.

$$-16t^2 + 34t = 0$$

$$(-16t + 34)t = 0$$

$t = 0$ أو $-16t + 34 = 0$.

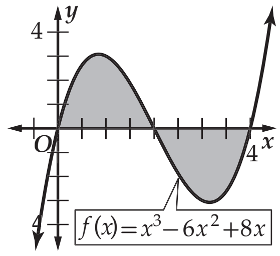
ولأن قيمة $t = 0$ عندما تقفز الحشرة ،

حُل $-16t + 34 = 0$

$$-16t = -34$$

$$t = 2.125$$

30a)



30c) إجابة ممكنة: يظهر أن المساحة فوق المحور x موجبة ومساوية للتكامل المحدد في هذه الفترة، والمساحة تحت المحور x مساوية سالب التكامل المحدد في تلك الفترة.

30e) التكامل على الفترة كاملة هو الفرق بين القيمة المطلقة للمساحة أعلى وأسفل المحور x ، أما المساحة الكلية فهي حاصل جمع القيم المطلقة للتكاملين.

35)

$$\int_a^b (n+m)dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$$

$$nx + mx\Big|_a^b = nx\Big|_a^b + mx\Big|_a^b$$

$$(nb+mb) - (na+ma) = (nb-na) + (mb-ma)$$

$$nb + mb - na - ma = nb + mb - na - ma$$

ملاحظات

الفصل 4

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص 179

	الدرس 4-1 — 3 حصص	الدرس 4-2 — 3 حصص	الدرس 4-3 — حصتان
العنوان	**مقدمة في المتجهات**	**المتجهات في المستوى الاحداثي**	**الضرب الداخلي ومسقطا المتجه**
الأهداف	• اجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم وتمثيلها هندسيًا. • تحليل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين. • حل مسائل تطبيقية على المتجهات .	• إجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وتمثيلها بيانيًا. • كتابة المتجه باستعمال متجهي الوحدة.	• إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله في إيجاد الزاوية بينهما. و إيجاد مسقط متجه على آخر.
المفردات	المتجه، نقطة البداية، نقطة النهاية، الوضع القياسي، الاتجاه، الطول، الاتجاه الربعي، الاتجاه الحقيقي، المتجهات المتوازية، المتجهات المتكافئة، المتجهان المتعاكسان، المحصلة، قاعدة المثلث، قاعدة متوازي الأضلاع، المتجه الصفري، المركبات، المركبات متعامدة.	الصورة الإحداثية، متجه الوحدة، توافق خطي	الضرب الداخلي، المتجهان المتعامدان، مسقط متجه، الشغل
تمثيلات متعددة	ص (185 ,188)		
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص(22) . دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراس الدراسة دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (23) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ، ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراس الدراسة دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 4** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (24) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراس الدراسة دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	مدونة	تسجيل مرئي	الكاميرا التوثيقية
تنويع التعليم	ص (185,188)	ص (190,193,195)	ص (200,203)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (204)

المفاتيح: ضمن ضمن المستوى دون دون المستوى فوق فوق المستوى

المتجهات

الخطة الزمنية		
التدريس	مراجعة وتقويم	المجموع
(12) حصة	(2) حصة	(14) حصة

الدرس 4-4 حصتان	الدرس 4-5 حصتان
المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد	**الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء**
• تعيين النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد. • التعبير عن المتجهات جبريًّا، وإجراء العمليات عليها في الفضاء ثلاثي الأبعاد.	• إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء. • إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهات، واستعماله في ايجاد المساحات والحجوم .
نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد المحور z الثُّمن الثلاثي المرتب	الضرب الاتجاهي العزم متوازي السطوح الضرب القياسي الثلاثي
مصادر الفصل 4 • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (25) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية دون ضمن فوق • اختبار قصير 3 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراس الدراسة دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 4** •دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (26) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية دون ضمن فوق • اختبار قصير 4 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراس الدراسة دون ضمن فوق
• السبورة التفاعلية	• نظام استجابة الطالب
ص (207,208,210)	ص (214,216)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ، ص (217-220)
- اختبار الفصل، ص (221)

التقويم والمعالجة

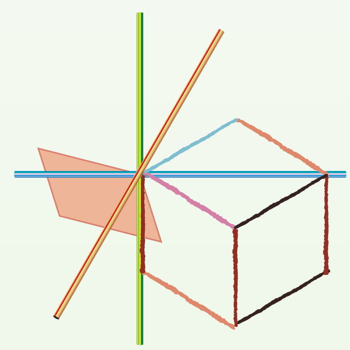
	التشخيص	المرجع	إرشادات المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 4**	**المرجع**		**المرجع**
	التهيئة للفصل الرابع، ص (179)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (179)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس**			
	الأمثلة، تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! (الخطوة 4) التقويم اختبارات قصيرة زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب كتاب الطالب دليل المعلم دليل المعلم دليل المعلم مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1: الفصل 4 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2: تنويع التعليم دليل الدراسة والمراجعة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (204) اختبار منتصف الفصل برنامج بناء الاختبارات	كتاب الطالب مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1: الفصل 4 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com تنويع التعليم مستوى المعالجة 2: تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 4، ص (217-220) اختبار الفصل، ص (221) برنامج بناء الاختبارات زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب كتاب الطالب مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1: الفصل 4 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com تنويع التعليم مستوى المعالجة 2: تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 4**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد اختبار أسئلة ذات إجابات مطوَّلة اختبارات الإجابة الحرة اختبار المفردات برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	مصادر الفصل

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون وزع الطلبة إلى مجموعات ثلاثية. بحيث يكتب أحد الطلبة الصورة الإحداثية لمتجهين ثم يمثل الطالب الثاني هذين المتجهين في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي، ويجد الطالب الثالث الضرب الداخلي للمتجهين للتحقق من تعامدهما. ثم تقارن المجموعة الرسم مع ناتج الضرب الداخلي.

المتعلمون الحركيون اطلب إلى مجموعات الطلبة عمل نموذج للمستوى الإحداثي ثلاثي الأبعاد باستعمال قصبات العصير والغراء أو المعجون، ثم اطلب إليهم تحديد الأثمان التي ينقسم إليها الفضاء، وأن يستعملوا صفحة من دفتر لتمثيل مستوى. واستعمال عيدان القش أو الكبريت لتمثيل متوازي السطوح.

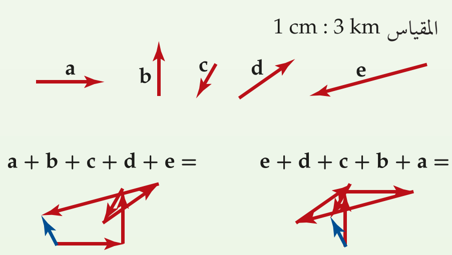


البديل 2 دون المتوسط دون

من القوى المتجهة المؤثرة للأسفل والتي يسهل قياسها وزن جسم. اطلب إلى الطلبة إيجاد وزن جسم من داخل الصف، ثم اطرح السؤال الآتي: ما دور الجاذبية الأرضية في تحديد الوزن؟ **إجابة ممكنة: يُعرّف الوزن على أنه القوة المؤثرة للأسفل بسبب الجاذبية الأرضية.** اطلب إلى الطلبة البحث في الإنترنت حول أثر الجاذبية على القمر أو الكواكب الأخرى. واستعمال ما توصلوا إليه لحساب أوزانهم على هذه الكواكب.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

كلف مجموعات الطلبة باختيار مقياس رسم، ثم كلفهم برسم خمسة متجهات مختلفة وتسميتها بالحروف من **a** إلى **e**. ثم يقوم كل فرد في المجموعة بجمع المتجهات بترتيب يختلف عن ترتيب زميله وتمثيل الجمع بالرسم مستعملين قاعدة وضع نقطة نهاية المتجه الأول على نقطة بداية المتجه الثاني (قاعدة المثلث). كلف الطلبة باستعمال منقلة ومسطرة ومقياس الرسم؛ لإيجاد مقدار واتجاه المحصلة، ثم يقارن الطلبة النتائج التي حصلوا عليها، ثم اطلب إلى مجموعات الطلبة كتابة تقرير عن ذلك فمثلًا:



سيتوصل الطلبة إلى أن الترتيب غير مهم عند جمع المتجهات؛ أي أن محصلة جمع المتجهات تكون هي نفسها بغض النظر عن الترتيب الذي جمعت فيه هذه المتجهات.

الفصل 4

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 4

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال قانون الجيب لحل المثلثات منفرجة الزاوية .
- جمع، وطرح، وضرب المصفوفات، وضرب المصفوفة في عدد ثابت.
- إيجاد محددات المصفوفات من الرتبة 2×2 ، ومن الرتبة 3×3.

الفصل 4

- إجراء العمليات على المتجهات، وتمثيلها هندسيًّا وجبريًّا.
- تحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.
- كتابة المتجه كتوافق خطي باستعمال متجهي الوحدة.
- إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله؛ لإيجاد الزاوية بينهما.
- إيجاد مسقط متجه على متجه آخر.
- إجراء عمليات على المتجهات وتمثيلها في الفضاء .
- إيجاد الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين والزاوية بينهما في الفضاء.
- إيجاد مساحة سطح متوازي الأضلاع وحجم متوازي السطوح في الفضاء.

ما بعد الفصل 4

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

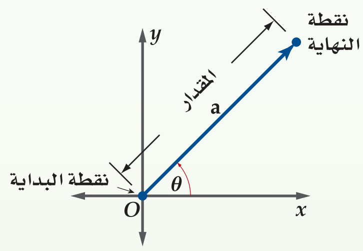
- استعمال المعادلات الوسيطية لمستقيم في المستوى ثنائي الأبعاد والفضاء ثلاثي الأبعاد، واشتقاق معادلة مستوى في الفضاء ثلاثي الأبعاد، والتعبير عن هذه المعادلات بصيغة متجهة وبالصورة الإحداثية.
- معالجة تعابير جبرية تتضمن أعدادًا مركبة .
- التعبير عن الأعداد المركبة بالصورة الديكارتية، وتمثيلها بيانيًّا في المستوى المركب.

نظرة على الدروس

4-1 مقدمة في المتجهات

يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعة مستقيمة متجهة لها نقطتا بداية ونهاية .

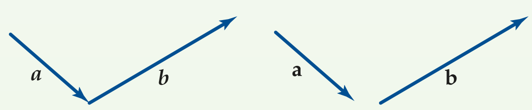
ويكون المتجه في الوضع القياسي إذا كانت نقطة بدايته هي نقطة الأصل كما في الشكل أدناه.



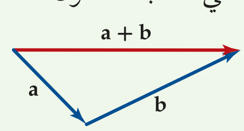
المقياس: 1cm = 5 ft/s

يمكن جمع متجهين أو أكثر معًا لتكوين متجه واحد يُسمى المحصلة. وتسمى المتجهات التي محصلتها المتجه **r** مركبات **r**.

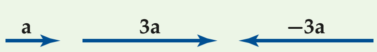
لإيجاد محصلة المتجهين **a** و **b** ، ارسم المتجه **b** بحيث تلتقي نقطة نهايته مع نقطة بدايته المتجه **a**.



فتكون المحصلة هي المتجه ذا اللون الأحمر **a + b**.



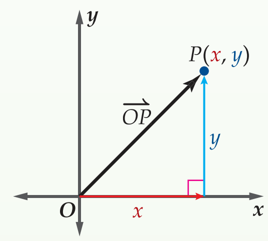
يمكن كذلك ضرب المتجه بعدد حقيقي، ولتمثيل المتجه **3a**، ارسم متجهًا طوله 3 أمثال طول المتجه **a**. أما لتمثيل المتجه **−3a** ، فارسم متجهًا طوله 3 أمثال طول المتجه **a** وبعكس اتجاهه.



المتجهات

4-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

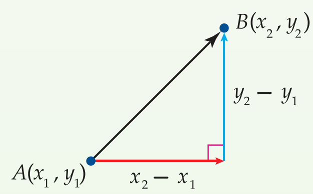
الصورة الإحداثية لمتجه أو المتجه الجبري $\langle x, y\rangle$، هي طريقة أخرى للتعبير عن المتجه الهندسي $\overrightarrow{OP}$ عندما يكون في وضع قياسي. وتسمى الزاوية θ المحصورة بين المحور x الموجب والمتجه، بالزاوية المتجهة والتي تحدد اتجاه المتجه.



لإيجاد الصورة الإحداثية للمتجه AB عندما لا يكون في الوضع القياسي، استعمل إحداثيي نقطتي نهايته وبدايته:

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.

طول $\overrightarrow{AB}$ هو $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



تشبه عمليات الجمع، والطرح، والضرب في عدد ثابت على المتجهات العمليات نفسها على المصفوفات ويكون ناتج كل منها متجهًا.
ناتج الجمع $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ هو توافق خطي من متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$.

4-3 الضرب الداخلي ومسقط المتجه

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2\rangle$ ، $b = \langle b_1, b_2\rangle$ كالآتي $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. وناتج الضرب الداخلي لمتجهين هو عدد وليس متجه.

إذا كان ناتج الضرب الداخلي لمتجهين هو 0، فإن المتجهين متعامدان.
ومسقط المتجه $\mathbf{u}$ على المتجه $\mathbf{v}$ هو متجه يوازي $\mathbf{v}$.
ويمكن استعمال مساقط المتجهات؛ لإيجاد قوة وحساب الشغل الناتج عن قوة.

4-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

يتكون نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد مما يأتي:

- المحاور x، y، z .
- ثمان مناطق تُسمى أثمانًا.

تُمثَّل النقطة في الفضاء بثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية (x, y, z).
إذا كانت $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين في الفضاء، فإن:

- المسافة بين النقطتين A ، B تُعطى بالقانون:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

- إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي النقطة

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

الصورة الإحداثية للمتجه AB في الوضع القياسي والذي نقطة نهايته (x_1, y_1, z_1) هي $\langle x_1, y_1, z_1\rangle$.

الصورة الإحداثية للمتجه AB في الوضع غير القياسي الذي نقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ ونقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ، هي

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$.

4-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ في الفضاء كالآتي:

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

إذا كان الضرب الداخلي لمتجهين يساوي 0، فإن المتجهين متعامدان.
الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ في الفضاء هو المتجه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

حيث $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

مقدار الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء يمثل مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي يمثل المتجهان ضلعين متجاورين فيه.
إذا التقت نقاط بداية ثلاثة متجهات في نقطة واحدة، وكانت المتجهات تقع في مستويات مختلفة، فإنها تشكل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي سطوح، والقيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات لهذه المتجهات يَمثّل حجم متوازي السطوح.

مشروع الفصل

المتجه القائد !

على الطلبة استعمال ما تعلموه حول المتجهات في بُعدين وثلاثة أبعاد لقيادة قارب في البحر.

- اطلب إلى كل طالب تحديد السرعة التي سيسحب بها القارب عموديًّا على الشاطئ، ثم اطلب إلى الطلبة حساب السرعة التي يجب أن تعبر بها قواربهم البحرية وزاوية سير القارب بالنسبة إلى الشاطئ عندما تكون سرعة التيار البحري 4 mi /h باتجاه مجرى التيار.
- بالنسبة للرحلة الثانية، على الطلبة تصميم منحدر، وكتابة طوله وزاوية ميله عن المستوى الأفقي. اطلب إلى كل طالب تحديد مقدار الشغْل المبذول عندما تستعمل قوة مقدارها 520 N لدفع برميل إلى أعلى المنحدر.
- اطلب إلى طالبين العمل معًا باستعمال قواربهم لسحب قارب معطل، عليهم ربط حبلين بالقارب أحدهما غرب الشمال والثاني شرق الشمال. إذا كان كل قارب يسحب بقوة ثابتة مقدارها 2.25×10^6 N بزاوية تنخفض °15 عن نقطة ربط الحبلين بالقارب المعطل اطلب منهم تحديد متجه ثلاثي الأبعاد للتعبير عن قوة الشد في كل قارب.

المفردات الأساسية قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: الثُّمْن هو أحد ثمانية مناطق في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد.

مثال: إذا نظرت إلى أحد أركان غرفة، فإن الأرض تمثل حرفًا لأحد الأثمان.

سؤال: لماذا تعتقد أن أرض الغرفة تقع في المستوى xy؟ المحوران اللذان يشكلان ضلعين متجاورين لأرض الغرفة هما المحوران x ، y.

الفصل 4 المتجهات Vectors

فيما سبق

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن

الأفكار العامة

- أُجري العمليات على المتجهات، وأمثلها في الأنظمة ثنائية ، وثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخر.
- اكتب متجه باستعمال متجهي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة ثنائية، وثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء ، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا ؟

تجذيف تستعمل المتجهات في الغالب؛ لنمذجة التغيرات الناتجة عن التيارات البحرية والهوائية، فمثلا يمكن استعمال متجه لتحديد محصلة سرعة، واتجاه قارب يبحر بسرعة 8mi/h باتجاه يعاكس اتجاه تيار بحري سرعته 3mi/h.

قراءة سابقة اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما سوف تتعلمه في هذا الفصل .

قراءة سابقة

شجع الطلبة على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعدك العبارة "إذا...فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر معالجة لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (178)
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

1) $3, \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

2) $5, \left(-5, \frac{11}{2}\right)$

3) $\sqrt{29}, \left(-\frac{1}{2}, -8\right)$

4) $\sqrt{53}, \left(-5, -\frac{9}{2}\right)$

10) $B \approx 33°, C \approx 19°, c \approx 4.0$

11) لا يوجد حل

12) $B \approx 71°, C \approx 57°, c \approx 16.0,$
$B \approx 109°, C \approx 19°, c \approx 6.2$

13) $B \approx 39°, C \approx 50°, c \approx 22.9$

التهيئة للفصل الرابع

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

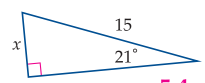
أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

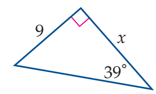
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. (مهارة سابقة) للأسئلة 1-4 انظر الهامش

1) $(1, 4), (-2, 4)$
2) $(-5, 3), (-5, 8)$
3) $(2, -9), (-3, -7)$
4) $(-4, -1), (-6, -8)$

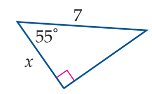
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة)

5) 

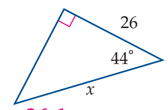
5.4

6) 

11.1

7) 

4.0

8) 

36.1

9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين يمسك بكل منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft ، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض °40 ، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة. (مهارة سابقة) 22.8 ft

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ، فاكتب "لايوجد حَلّ". مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياس الزوايا إلى أقرب درجة . (مهارة سابقة)

للأسئلة 10-13 انظر الهامش

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$
11) $a = 15, b = 16, A = 127°$
12) $a = 15, b = 18, A = 52°$
13) $a = 30, b = 19, A = 91°$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

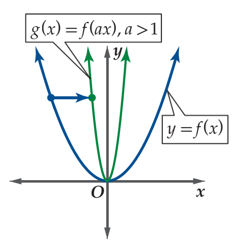
المفردات العامة

المتجه	ص 180	vector
نقطة البداية	ص 180	initial point
نقطة النهاية	ص 180	terminal point
الوضع القياسي	ص 180	standard position
الاتجاه	ص 180	direction
الطول	ص 180	magnitude
الاتجاه الربعي	ص 181	quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي	ص 181	true bearing
المتجهات المتوازية	ص 181	parallel vectors
المتجهات المتكافئة	ص 181	equivalent vectors
المتجهان المتعاكسان	ص 181	opposite vectors
المحصلة	ص 182	resultant
المتجه الصفري	ص 183	zero vector
الصورة الإحداثية	ص 189	component form
متجه الوحدة	ص 191	unit vector
الضرب الداخلي	ص 196	dot product
المتجهان المتعامدان	ص 196	orthogonal vectors
المحور z	ص 205	z—axis
الثمن	ص 205	octant
الثلاثي المرتب	ص 205	ordered triple
الضرب الاتجاهي	ص 212	cross product
الضرب القياسي الثلاثي	ص 214	triple scalar product

مراجعة المفردات

قياسي (عددي) (scalar) كمية لها قيمة فقط.

التمدد (dilation) تحويل هندسي غير قياسي نتيجته تضييق، أو توسُّع رأسي، أو أفقي لمنحنى دالة.



تمدد أفقي

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلبة عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل 4 ؛ لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

4-1 ملاحظات الدرس

4-1 مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

فيما سبق
درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثلها هندسيًا .
- أحلل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- أحلُ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات الأساسية
المتجه vector
نقطة البداية initial point
نقطة النهاية terminal point
الوضع القياسي standard position
الاتجاه direction
الطول magnitude
الاتجاه الربعي quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي true bearing
المتجهات المتوازية parallel vectors
المتجهات المتكافئة equivalent vectors
المتجهات المتعاكسة opposite vectors
المحصلة resultant
قاعدة المثلث triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع parallelogram method
المتجه الصفري zero vector
المركبات components
المركبات المتعامدة rectangular components
www.obeikaneducation.com

لماذا؟


تعتمد المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كل من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

المتجهات يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، تُسمى كمية قياسية (عددية)، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. وأما **المتجه** فهو كمية لها طول واتجاه؛ فمثلًا السرعة المتجهة للكرة تصف كلًا من مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها.

مثال 1 تحديد الكميات المتجهة
حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h

بما أن لهذه الكمية قيمة هي 15 mi / h ، وليس لها اتجاه. لذا، فإن هذه السرعة كمية قياسية.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min باتجاه الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m / min واتجاهًا للغرب. لذا ، فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

بما أن لهذه الكمية قيمة هي 20 km ، وليس لها اتجاه. لذا، فإن هذه المسافة كمية قياسية.

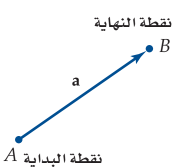
تأكد
حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية °15 باتجاه شرق الجنوب. كمية متجهة

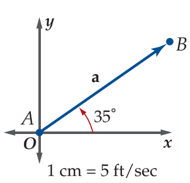
1B) هبوط مظلي رأسيًّا للأسفل بسرعة 12.5 mi / h . كمية متجهة

1C) دفع طفل مزلجة بقوة مقدارها 40 N . كمية قياسية

يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعة مستقيمة متجهة، أو سهم يظهر كلًّا من الطول والاتجاه. ويمثِّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل، فإن **المتجه يكون في الوضع القياسي**. ويعبِّر عن اتجاه **المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا، اتجاه المتجه **a** هو °35 .



أما **طول المتجه** فيمثِّله طول القطعة المستقيمة. إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/sec ، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز |**a**| ، يساوي 5 × 2.6 أو 13 ft / sec .

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-1
حل المثلث باستعمال حساب المثلثات.

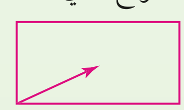
الدرس 4-1
- إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وتمثيلها هندسيًا.
- تحليل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- حل مسائل تطبيقية على المتجهات.

ما بعد الدرس 4-1
تمثيل المتجهات و إجراء العمليات الجبرية عليها.
كتابة المتجه باستعمال متجهي الوحدة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

أسأل :
- إذا ضُربت كرة، فما الشيئان اللذان تحتاجهما لتحديد موقع الكرة؟ سرعة الكرة بعد ضربها واتجاه حركتها.
- ارسم مستطيلاً. وتخيّل أنك تضرب كرة قدم من الزاوية السفلى اليسرى للمستطيل. ارسم سهمًا من الزاوية إلى الموقع الذي ستقف عنده الكرة.



- إذا ضُربت الكرة بقوة أكبر كيف سترسم السهم؟ إجابة ممكنة : أرسم سهمًا أطول .

مصادر الدرس 4-1

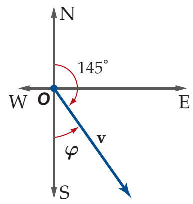
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (185)	• تنويع التعليم، ص (185)	• تنويع التعليم ، ص (188)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (22) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي
إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه v في الشكل المجاور هي 145°.

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي قياس اتجاهي بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي 35° شرق الجنوب، وتُكتب S 35° E .

كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة 025° .

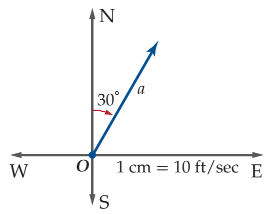


مثال 2 تمثيل المتجه هندسيًا

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

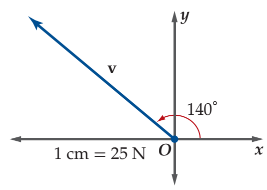
a) $a = 20$ ft/sec باتجاه 030° .

استعمل مقياس الرسم 1 cm = 10 ft ، وارسم سهمًا طوله 10 ÷ 20 ، أو 2 cm بزاوية قياسها 30° من الشمال، وباتجاه عقارب الساعة.



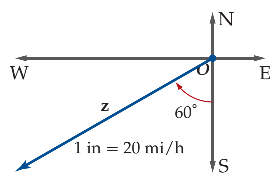
b) $v = 75$ N ، بزاوية قياسها 140° مع الأفقي.

استعمل مقياس الرسم 1 cm = 25 N ، وارسم سهمًا طوله 25 ÷ 75 ، أو 3 cm في الوضع القياسي، وبزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الموجب للمحور x .



c) $z = 30$ mi/h ، باتجاه S 60° W .

استعمل مقياس الرسم 1 in = 20 mi / h ، وارسم سهمًا طوله 1.5 in = 20 ÷ 30 ، بزاوية قياسها 60° باتجاه غرب الجنوب .



تأكد

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $t = 20$ ft / sec ، باتجاه 065° . للتدريبات 2A–2C انظر ملحق الإجابات

2B) $u = 15$ mi / h ، باتجاه S 25° E .

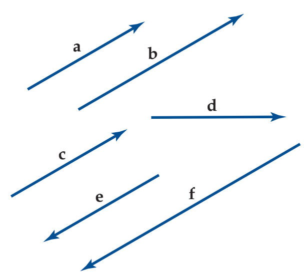
2C) $m = 60$ N ، بزاوية قياسها 80° مع الأفقي.

تنبيه!

الطول يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة.

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك بحاجة للأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتكافئة** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. كما في الشكل المجاور، $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ ؛ لأن لهما الطول والاتجاه نفسيهما، لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ ، $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه **a** على الصورة $-\mathbf{a}$. ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.



المتجهات

مثال 1 يُبيّن كيفية تمييز الكميات المتجهة.

مثال 2 يُبيّن كيفية تمثيل المتجه هندسيًا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يضرب لاعب كرة قدم بسرعة 60 mi/h باتجاه شمال غرب. كمية متجهة

b) يرسل لاعب كرة تنس أرضية بسرعة 110 mi/h. كمية عددية

c) يركض لاعب مسافة 100 m شمالًا. كمية متجهة

2 استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة: للفروع a–c انظر الهامش

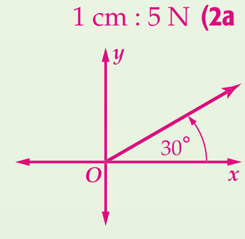
a) $\mathbf{v} = 10$ N بزاوية قياسها 30° مع الأفقي.

b) $\mathbf{z} = 25$ m/sec باتجاه W 20° S.

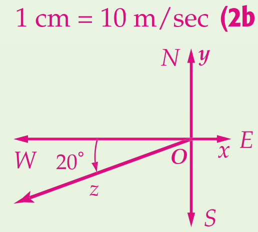
c) $\mathbf{t} = 10$ mi/h باتجاه 025°.

إجابات (مثالان إضافيان):

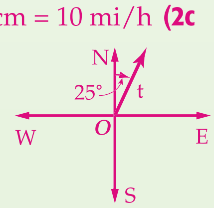
2a) 1 cm : 5 N



2b) 1 cm = 10 m/sec



2c) 1 cm = 10 mi/h



المتجهات

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًّا.

مثال إضافي

3 **نزهة:** قام فيصل بنزهة مشيًّا خارج المخيم الكشفي، فسار مسافة 2 km من مخيمه باتجاه N W60°، ثم سار مسافة 2 km باتجاه الشرق. كم يُبعد فيصل عن مخيمه الكشفي وفي أي اتجاه يكون؟

2 km, N 30° E

إرشادات للمعلم الجديد

أشكال عند حل الأمثلة، من المهم أن يبدأ الطلبة برسم أشكال دقيقة. شجع الطلبة على استعمال ورق الرسم البياني، والتحقق من معقولية إجاباتهم من خلال الأشكال.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية؛ لعمل مدونة عن الطرائق التي يستعملونها؛ لإيجاد محصلة متجهين. واطلب إليهم مراجعة أوراق بعضهم بعضًا وتعديلها أثناء بناء المدونة.

التركيز في المحتوى الرياضي

جمع المتجهات وطرحها

لاحظ أن قاعدة متوازي الأضلاع تستعمل كذلك لطرح المتجهات. فعند جمع متجهين، يكون ناتج الجمع هو القطر الأكبر لمتوازي الأضلاع المرتبط بالمتجهين، أما عند طرح متجهين، فإن ناتج الطرح هو القطر الأصغر لمتوازي الأضلاع هذا.

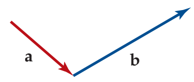
عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

مفهوم أساسي: إيجاد المحصلة

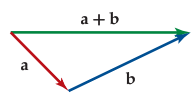
قاعدة المثلث

لإيجاد محصّلة المتجهين **a**، **b**، اتّبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a**.



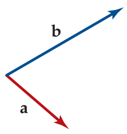
الخطوة 2 محصلة المتجهين **a**، **b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b**.



قاعدة متوازي الأضلاع

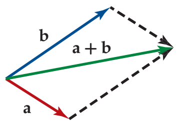
لإيجاد محصّلة المتجهين **a**، **b**، اتّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a**.



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a**، **b**.

الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّل قطر متوازي الأضلاع.



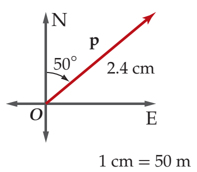
إرشادات للدراسة

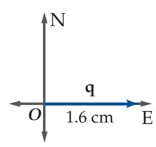
المحصلة يتطلب استعمال قاعدة متوازي الأضلاع؛ لإيجاد محصلة أكثر من متجهين، إعادة الرسم أكثر من مرة. لذا، من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة المثلث؛ لإيجاد محصلة ثلاثة متجهات فأكثر، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.

مثال 3 من واقع الحياة: إيجاد محصلة متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E، ثم مسافة 80 m باتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وفي أي اتجاه يكون؟

افترض أن المتجه **p** يمثِّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E، وأن المتجه **q** يمثِّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثّل **p**، **q** باستعمال مقياس الرسم $1\text{cm} = 50\text{m}$.

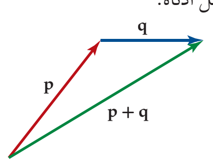




استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله 2.4 cm؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شرق الشمال؛ ليُمثّل المتجه **p**، وارسم سهمًا آخر طوله $80 \div 50 = 1.6\,\text{cm}$ باتجاه الشرق؛ ليُمثّل المتجه **q**.

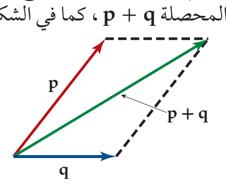
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p**، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.

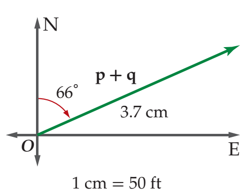


الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثِّل المحصلة **p + q**، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي شمال – جنوب كما في الشكل المجاور.

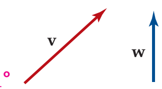


تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثّل $3.7 \times 50 = 185\,\text{m}$.

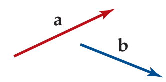
وعليه يكون عبد الله قد قطع 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E.

تأكد

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. (قرّب المحصلة إلى أقرب سنتيمتر، ثمّ حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي).

3A)


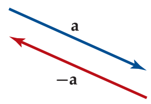
$2.9\ cm$, $61°$ مع الأفقي

3B)


$3.3\ cm$, $25°$ مع الأفقي

3C) **لعبة أطفال:** رمى طفل كرة صغيرة في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\ in/sec$، باتجاه $310°$، فارتدت باتجاه $055°$، وبسرعة $4\ in/sec$، أوجد مقدار واتجاه محصلة حركة الكرة. $7.1\ in/sec, 343°$

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$، وطوله صفر، وليس له اتجاه. وتشبه عملية طرح المتجهات، عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$؛ أي أن $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.



$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

ويمكن كذلك ضرب المتجه بعدد حقيقي.

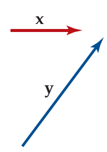
مفهوم أساسي — **ضرب المتجه في عدد حقيقي**

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k.

- إذا كانت $k > 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

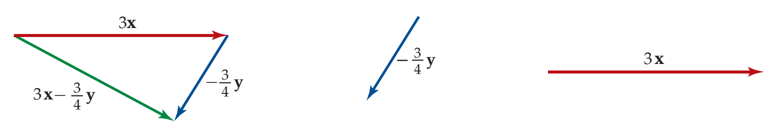
مثال 4 العمليات على المتجهات

ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$، حيث $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.



أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$، ثم مثِّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل. (1)

ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل(2)، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل. (3)

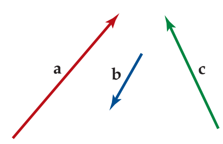


الشكل(1) الشكل(2) الشكل(3)

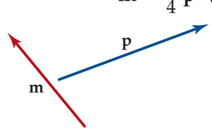
تأكد

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي: للتدريبين 4A,4B انظر الهامش

4A) $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$

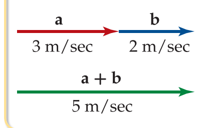


4B) $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



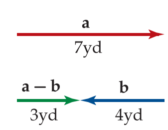
إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه
محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهها هو نفس اتجاه المتجهات الأصلية .



إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان
عند جمع متجهين متوازيين متعاكسين، فإن طول المحصّلة هو القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهها هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.

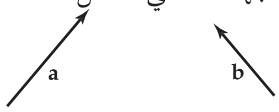


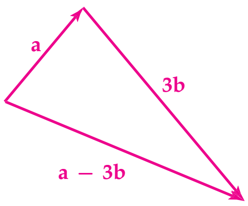
المتجهات

مثال 4 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات.

مثال إضافي

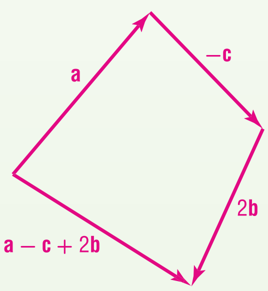
4) ارسم المتجه $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ حيث $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ متجهان كما في الشكل أدناه.



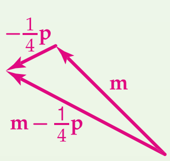


إجابة (تأكد):

4A)



4B)



تطبيقات المتجهات

مثال 5 يُبيِّن كيفية استعمال المتجهات لحل مسائل الملاحة.

مثال إضافي

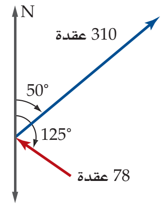
5 **ملاحة جوية:** تحلّق طائرة بسرعة مقدارها 475 mi/h باتجاه 070°. إذا كانت الرياح تتحرك بسرعة 80 mi/h من الاتجاه 120°، أوجد اتجاه ومحصلة سرعة الطائرة بالنسبة للأرض. **محصلة سرعة الطائرة بالنسبة للأرض تساوي 428.0 mi / h تقريبًا، وباتجاه 061.8° تقريبًا.**

تطبيقات المتجهات يمكن استعمال جمع المتجهات، وحساب المثلثات في حل مسائل حياتية على المتجهات، تتضمن مثلثات غير قائمة الزاوية، كما في مسائل الملاحة الجوية والبحرية. فمن المهم مثلًا تحديد السرعة والاتجاه الذي يجب أن تنطلق فيه الطائرة أو السفينة لتتغلَّب على القوى الأخرى مثل الرياح، وتكون السرعة النسبية للمَرْكَبة هي المحصِّلة الناتجة عن سرعة انطلاق المركبة، والقوى الأخرى المؤثرة عليها.

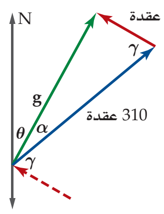
مثال 5 من واقع الحياة استعمال المتجهات لحَل مسائل الملاحة

ملاحة جوية: تُحلِّق طائرة بسرعة مقدارها 310 عقدة باتجاه 050°، وتهب الرياح بسرعة 78 عقدة من الاتجاه 125°، أوجد محصِّلة سرعة الطائرة، واتجاه حركتها بالنسبة لسطح الأرض.

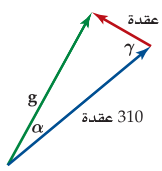
الخطوة 1 ارسم شكلًا يُمثِّل سرعة الطائرة والرياح كما في الشكل (4)، ثم اسحب متجه حركة الرياح كما في الشكل (5) واستعمل قاعدة المثلث؛ لإيجاد متجه المحصلة الذي يُمثِّل سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض. في المثلث المكوّن من هذه المتجهات في الشكل (6)، $\gamma = 125° - 50° = 75°$.



الشكل (4)



الشكل (5)



الشكل (6)

الخطوة 2 استعمل قانون جيب التمام؛ لإيجاد $|\mathbf{g}|$، وهو يُمثِّل سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$ قانون جيب التمام

$$|\mathbf{g}|^2 = 78^2 + 310^2 - 2(78)(310) \cos 75°$$ $c = |\mathbf{g}|, a = 78, b = 310, \gamma = 75°$

$$|\mathbf{g}| = \sqrt{78^2 + 310^2 - 2(78)(310) \cos 75°}$$ بإيجاد الجذر التربيعي الموجب للطرفين

$$\approx 299.4$$ بالتبسيط

سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا.

الخطوة 3 يُمثِّل اتجاه المحصلة $\mathbf{g}$ بالزاوية θ، كما في الشكل (5)، ولإيجاد θ أوجد أولًا α باستعمال قانون الجيب.

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$ قانون الجيب

$$\frac{\sin \alpha}{78} = \frac{\sin 75°}{299.4}$$ $c = |\mathbf{g}| = 299.4, a = 78, \gamma = 75°$

$$\sin \alpha = \frac{78 \sin 75°}{299.4}$$ بالحَل بالنسبة إلى α

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{78 \sin 75°}{299.4}$$ باستعمال الدالة العكسية للجيب

$$\approx 14.6°$$ بالتبسيط

قياس θ هو $50° - \alpha$، أي $50° - 14.6° = 35.4°$.

لذا، فإن سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض هي 299.4 عقدة باتجاه 035° تقريبًا.

إرشادات للدراسة

الزوايا الداخلية المتبادلة يعمل انسحاب نقطة البداية لمتجه حركة الرياح إلى نقطة نهاية متجه حركة الطائرة على تكوين متجهين متوازيين يقطعهما قاطع، لذا، فإن الزاويتين المتبادلتين الناتجتين من هذا الوضع متطابقتان كما في الشكل (5).

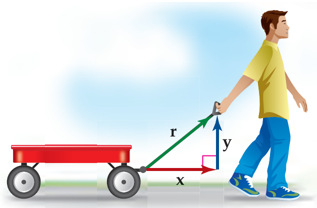
تنبيه!

اتجاه الرياح في المثال 5 لاحظ أن الرياح تهب من الاتجاه 125°، لذا، رسم السهم، بحيث تقع نقطة انتهائه على خط شمال - جنوب، وعندما تهب الرياح باتجاه 125°، فإن نقطة بداية المتجه هي التي تقع على خط شمال - جنوب.

✓ تأكد

5) **سباحة:** يسبح سلطان عبر أحد الأنهار بسرعة 3.5 ft / sec، باتجاه الشرق قاصدًا الضفة الأخرى للنهر، في الوقت الذي يؤثر عليه تيار مائي باتجاه الجنوب بسرعة 2 ft / sec. أوجد محصلة سرعة سلطان، واتجاه حركته. **محصلة سرعة سلطان 4.03 ft/sec باتجاه S 60.26° E.**

يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما هو المتجه r، **مركبتي** r . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين** واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة **r** المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية **x** تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية **y** تحرك العربة إلى أعلى.



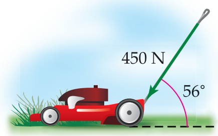
الربط مع واقع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N . والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية على الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .

المصدر: Contemporary College Physics

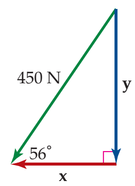
مثال 6 من واقع الحياة تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاوية قياسها 56° مع سطح الأرض.



a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين أفقية **x** إلى الأمام ورأسية **y** إلى الأسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية، والرأسية للقوة.

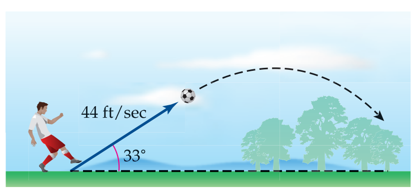
تكوّن المركبتان الأفقية والرأسية للقوة مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{\lvert x\rvert}{450}$	تعريف الجيب، وجيب التمام	$\sin 56° = \frac{\lvert y\rvert}{450}$
$\lvert x\rvert = 450 \cos 56°$	بالحَل بالنسبة إلى x ، y	$\lvert y\rvert = 450 \sin 56°$
$\lvert x\rvert \approx 252$	باستعمال الآلة الحاسبة	$\lvert y\rvert \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

تأكد

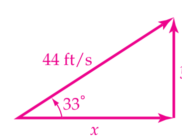
6) **كرة قدم:** يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft / sec ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

6A)



6B) المركبة الأفقية تساوي 36.90 ft/sec تقريبًا، المركبة الرأسية تساوي 23.96 ft/sec تقريبًا.

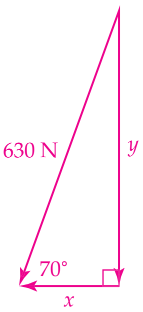
تطبيقات المتجهات

مثال 6 يُبيّن كيفية تحليل قوة إلى مركبتين متعامدتين.

مثال إضافي

6 **حدائق:** يدفع عبد الله مجرفة في أرض حديقته المنزلية بقوة مقدارها 630 N وبزاوية قياسها 70° مع سطح الأرض.

a) ارسم شكلًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها عبد الله إلى مركبتين متعامدتين.



b) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

المركبة الأفقية تساوي 215.47 تقريبًا

المركبة الرأسية تساوي 592.01 تقريبًا

تنويع التعليم

دون ضمن

المواد لعبة على شكل قارب صغير له شراع متحرك، بركة ماء، ومروحة طاولة.

المتعلمون الحركيون تستعمل المتجهات في الغالب لوصف القوى وإيجاد المحصلة في مواقف من واقع الحياة. اطلب إلى الطلبة التنبؤ بأثر الرياح على قارب، وذلك بوضع لعبة القارب الصغير في حوض ماء، واستعمال مروحة طاولة كمصدر للرياح. حافظ على سرعة الرياح والمسافة بين المروحة والقارب ليظلا ثابتتين. ضع القارب بحيث يكون في وضع يعامد حركة الرياح. اطلب إلى الطلبة وضع عدة تنبؤات واختبارها بناء على موقع القارب وأثر قوة الرياح على القارب.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–31 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل التمارين

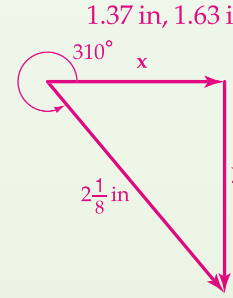
المسطرة والمنقلة يحتاج الطلبة إلى المسطرة والمنقلة في كثير من تمارين هذا الدرس.

تنبيه!

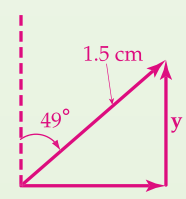
أخطاء شائعة قد لا يستعمل الطلبة الزاوية الصحيحة عندما يُعطى الاتجاه الحقيقي للمتجه. لذا، ذكّر الطلبة بأن الاتجاه يُعبَّر عنه بزوايا مقاسة مع عقارب الساعة من الشمال و لا تقاس بعكس عقارب الساعة من المحور x (الوضع القياسي).

إجابات:

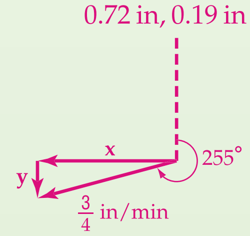
28) 1.37 in, 1.63 in



29) 1.13 cm, 0.98 cm



30) 0.72 in, 0.19 in



تدرب وحل المسائل

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي: (مثال 1)

1) دفع صندوق بقوة مقدارها 125 N . قياسية

2) تهب الرياح بسرعة 20 عقدة. قياسية

3) يركض غزال بسرعة 15 m / sec باتجاه الغرب. متجهة

4) ضربت كرة قدم بسرعة 85 km / h . قياسية

5) إطار سيارة وزنه 15 lb معلق بحبل. متجهة

6) رمي حجر رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 50 ft / sec . متجهة

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية. واكتب مقياس الرسم في كل حالة. (مثال 2)

7) $h = 13$ in/sec ، باتجاه °205 .

للتمارين 7–12 انظر ملحق الإجابات

8) $g = 6$ km/h ، باتجاه N 70° W .

9) $j = 5$ ft/sec ، وبزاوية قياسها °300 مع الأفقي.

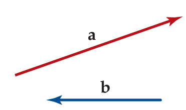
10) $d = 28$ km ، وبزاوية قياسها °35 مع الأفقي.

11) $R = 40$ m ، باتجاه S 55° E.

12) $n = 32$ m/sec ، باتجاه °030 .

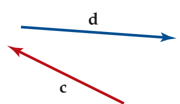
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة: (مثال 3)

13)



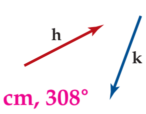
1.4 cm, 45°

14)



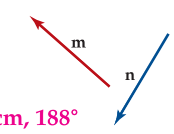
1.0 cm, 58°

15)



1.1 cm, 308°

16)



2.3 cm, 188°

17) **ركوب الزوارق:** غادر زورق أحد الموانى باتجاه N 60° W ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًّا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى N 25° E ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًّا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. (مثال 3)

20mi بحريًّا، N 12° W تقريبًا

حدِّد مقدار، واتجاه المحصلة الناتجة من جمع المتجهين في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

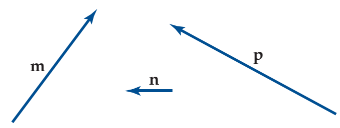
18) 18 N للأمام ثم 20 N للخلف. 2N للخلف

19) 100 m للشمال ثم 350 m للجنوب . 250 m للجنوب

20) 17 mi شرقًا ثم 16 mi جنوبًا. انظر ملحق الإجابات

21) $15\,m/sec^2$ باتجاه زاوية قياسها °60 مع الأفقي، ثم $9.8\,m/sec^2$ للأسفل. $8.15 m/sec^2$، باتجاه °23 مع الأفقي

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل تعبير مما يأتي: (مثال 4) للتمارين 22-25 انظر ملحق الإجابات



22) $m - 2n$

23) $4n + \frac{4}{5}p$

24) $p + 2n - m$

25) $m - 3n + \frac{1}{4}p$

26) **طيران شراعي:** يقود شخص طائرة شراعية بسرعة مقدارها 15 mi/h باتجاه الغرب . إذا هبت الرياح بسرعة 5 mi/h باتجاه N 60° E ، فأوجد محصِّلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض. (مثال 5) انظر ملحق الإجابات

27) **تيار مائي:** يسبح أحمد باتجاه الغرب بسرعة 1.5 m/sec . أثَّر عليه تيار بحري قوي سرعته 1 m/sec ، وباتجاه S 20° E . أوجد محصِّلة سرعة أحمد، واتجاهها. (مثال 5) انظر ملحق الإجابات

ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. (مثال 6) للتمارين 28-30 انظر الهامش

28) $2\frac{1}{8}$ in/sec ، باتجاه °310 مع الأفقي.

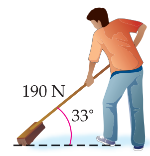
29) 1.5 cm ، باتجاه N 49° E.

30) $\frac{3}{4}$ in/min ، باتجاه °255 .

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	46–59
ضمن المتوسط	32، 33، 34–39، 41–45 (فردي)، 46–48، 50–59
فوق المتوسط	32–59

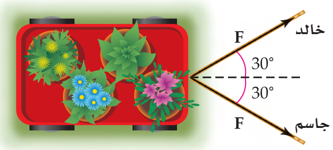
31) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 6)**



a) ارسم شكلًا يوضّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين. **انظر الهامش**

b) أوجد مقدار كل من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية. **المركبة الأفقية 159.3 N، والمركبة الرأسية 103.5 N**

32) **بستنة:** يسحب خالد وجاسم عربة مليئة بالنباتات بقوتين متساويتين، تصنع كلٌّ منهما زاوية قياسها 30° مع محور العربة. إذا كانت محصلة قوة السحب 120 N، فأجب عما يأتي:



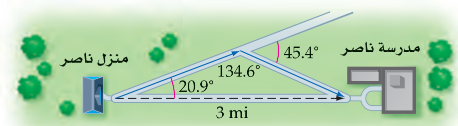
a) أوجد القوة التي يسحب بها كل من خالد وجاسم العربة. **69 N تقريبًا**

b) إذا سحب كل منهما العربة بقوة مقدارها 75 N ، فأوجد المحصلة. **130 N تقريبًا**

c) كيف تتأثر المحصلة، إذا تقارب خالد وجاسم؟ **ستزداد**

33) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى الثلاث الآتية التي تؤثِّر على جسم. 8 N باتجاه 300° مع الأفقي، 12 N باتجاه 045°، 6 N باتجاه 120° مع الأفقي. **11.6 N باتجاه 35° مع الأفقي**

34) **قيادة سيارة:** يبعُد منزل ناصر عن مدرسته مسافة أفقية مقدارها 3 mi، وللوصول إلى مدرسته فإنه يقود سيارته في شارعين مختلفين؛ إذ يسير أولًا بزاوية قياسها 20.9° بالنسبة إلى المسار الأفقي على الشارع الأول، ثم ينعطف بزاوية قياسها 45.4° على الشارع الثاني كما في الشكل أدناه.



a) أوجد المسافة التي يقطعها ناصر على الشارع الأول. **1.75 mi**

b) أوجد المسافة التي يقطعها ناصر على الشارع الثاني. **1.5 mi**

c) إذا احتاج ناصر إلى 10 min للوصول إلى مدرسته، وكان متوسط سرعته على الشارع الأول 25 mi/h ، فأوجد متوسط سرعته على الشارع الثاني. **15.5 mi / h**

35) **عربة أطفال:** يسحب محمد عربة أخته بقوة معينة مقدارها $|r|$ N وباتجاه 31° مع الأفقي، إذا علمت أن مقدار مركبتها الأفقية 86 N، فأوجد:

a) مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح.

b) مقدار المحصلة r إلى أقرب عدد صحيح. **انظر الهامش**

36) **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذا التمرين ضرب متجه في عدد حقيقي.

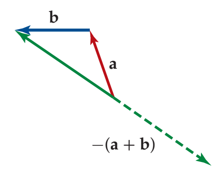
a) **تمثيل بياني:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لـ k ، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k بالمتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية لأربعة متجهات أخرى **b, c, d, e** واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة. **انظر الهامش**

b) **جدولة:** انقل الجدول أدناه إلى دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا بالعدد k
a	(2, 4)	(4, 8)
b	(0, 3)	(0, 6)
c	(−1, 2)	(−2, 4)
d	(−2, −2)	(−4, −4)
e	(3, −1)	(6, −2)

c) **تحليل:** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a** ، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه k**a** ؟ (ka, kb)

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري. والمتجه الموازن للمتجه a + b هو (a + b)−.

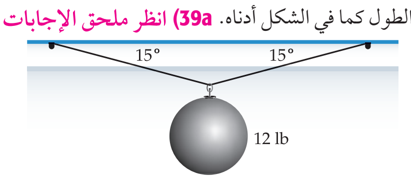


أوجد طول واتجاه المتجه الموازن لكل زوج من المتجهات الآتية:

37) **a** = 15 mi/h ، باتجاه 125° مع الأفقي.
b = 12 mi/h ، باتجاه 045°. **انظر ملحق الإجابات**

38) **a** = 4 km ، باتجاه N 30° W.
b = 6 km ، باتجاه N 20° E. **9.1 km باتجاه 180°**

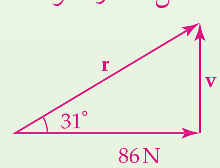
39) **كرة حديدية:** عُلِّقت كرة حديدية وزنها 12 lb بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه. **39a) انظر ملحق الإجابات**



a) إذا كانت T_1 ، T_2 تُمثّلان قوتي الشد في الحبلين، وكانت $T_1 = T_2$ ، فارسم شكلًا يُمثّل وضع التوازن للكرة.

b) استعمل حقيقة أن محصلة $T_1 + T_2$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من T_1 ، T_2 . **$T_1 \approx 23.18$ lb, $T_2 \approx 23.18$ lb**

35 a) افرض أن v تمثل المركبة الرئيسية للقوة، r تمثل مقدار القوة الناتجة



استعمل النسبة المثلثية tan θ ؛ لإيجاد v

$$\tan 31° = \frac{|v|}{86}$$

$$|x| = 86 \tan 31°$$

$$\approx 52$$

المركبة الرأسية للقوة تساوي 52N تقريبًا.

b) استعمل النسبة المثلثية cos θ ؛ لإيجاد r

$$\cos 31° = \frac{86}{r}$$

$$|r| = \frac{86}{\cos 31°}$$

$$\approx 100$$

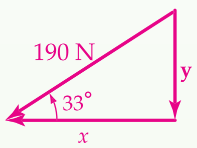
إذن، المحصلة تساوي 100 N تقريبًا.

تنبيه!

أخطاء شائعة في التمرين 31 قد لا يستعمل الطلبة خاصيتي نسب الجيب وجيب التمام. لذا، راجع تعريف كل نسبة منهما في المثلث القائم الزاوية.

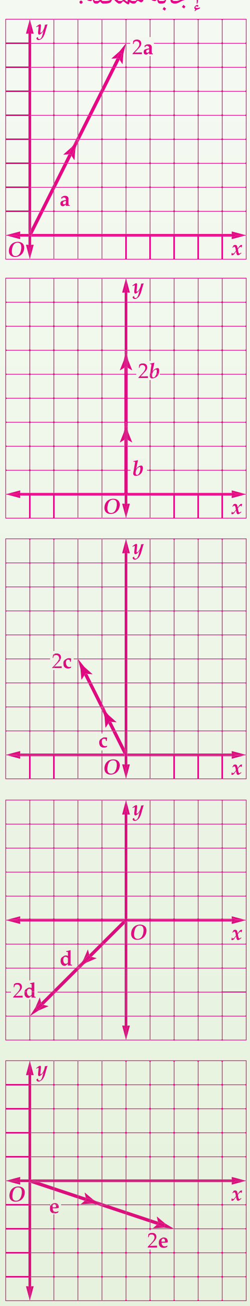
إجابات:

31a)



1 cm = 50 N

36a) إجابة ممكنة:



تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 49، ذكّر الطلبة بدراسة الرسوم بدقة. عند اختيار قاعدة إيجاد محصلة متجهين (المثلث أو متوازي الأضلاع)، من المهم أن توضع نقاط البداية والنهاية بشكل صحيح.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة شرح طريقة جمع وطرح متجهين، موضحة بالأشكال.

إجابات:

47) ليست صحيحة، إجابة ممكنة: إذا توازى متجهان، فإنهما يكونان في الاتجاه نفسه أو في اتجاهين متعاكسين. أمّا إذا وضع المتجهان بحيث تتطابق نقطتا بدايتهما، فعندها لا توجد زاوية بين المتجهين تسمح بتكوين متوازي أضلاع.

48 a) مقدار المتجه a مضافًا إلى مقدار المتجه b أكبر من أو يساوي مقدار المتجه الناتج من $a + b$.

b) صحيحة، إجابة ممكنة: المتجه الناتج من $a + b$ يتأثر باتجاهي المتجهين وهذا قد يجعل مقدار $|a + b|$ صغيرًا إذا كان a، b متعاكسين في الاتجاه. ويكون مجموع المقدارين $|a| + |b|$ أكبر قيمة ممكنة؛ لأنه لا يأخذ بعين الاعتبار اتجاهي المتجهين ويتساوي المقداران. $|a + b|$،$|a| + |b|$ إذا كان a، b متوازيين ولهما الاتجاه نفسه.

أوجد طول واتجاه كل متجه مما يأتي بمعلومية مركبتيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كل منها:

40) الأفقية 0.32 in، الرأسية 2.28 in، $90° < \theta < 180°$.
2.3 in, 98°

41) الأفقية 3.1 ft، الرأسية 4.2 ft، $0° < \theta < 90°$.
5.2 ft, 54°

42) الأفقية 2.6 cm، الرأسية 9.7 cm، $270° < \theta < 360°$.
10 cm, 285°

ارسم ثلاثة متجهات **a, b, c**؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًّا: **للتمارين 43-45 انظر ملحق الإجابات**

43) الخاصية الإبدالية $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

44) الخاصية التجميعية $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

45) الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **مسألة مفتوحة:** لديك متجه مقداره 5 وحدات باتجاه المحور x الموجب. حلّل المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيٌّ منهما أفقية أو رأسية. **انظر ملحق الإجابات**

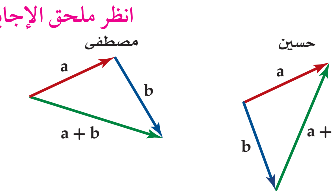
47) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع". **انظر الهامش**

48) **تبرير:** بفرض أن $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

a) عبّر عن هذه العبارة بالكلمات . **للفرعين a, b انظر الهامش**

b) هل هذه العبارة صحيحة أو خاطئة؟ برّر إجابتك .

49) **اكتشف الخطأ:** حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين a، b . أيهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**



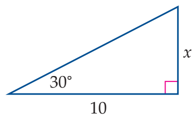
50) **تبرير:** هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساويًا لأحدهما؟ برّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

51) **اكتب:** قارن بين قاعدتي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

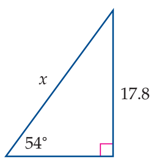
أوجد قيمة x لكل مما يأتي، مقرّبًا الناتج لأقرب عُشر، إن لزم ذلك: **(مهارة سابقة)**

(52



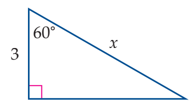
5.8

(53



22

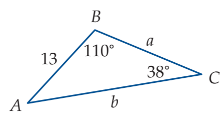
(54



6

حُلّ كل مثلث فيما يأتي، مقرّبًا الناتج لأقرب عُشر (إن لزم ذلك). **(مهارة سابقة)** **للتمرينين 55,56 انظر ملحق الإجابات**

(55

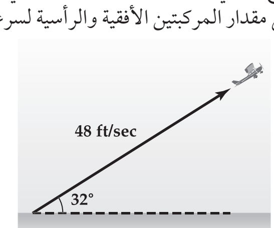


56) $\triangle ABC$، الذي فيه $A = 42°, b = 12, c = 13$

تدريب على اختبار معياري

57) **نزهة:** قام حسان وسعيد بنزهة خارج مخيمهما الكشفي، فقطعا مسافة 3.75 km باتجاه 55° شرق الجنوب من المخيم حتى وصلا أحد المساجد، ثم غيّرا اتجاه سيرهما ليصبح 33° غرب الشمال قاصدين حديقة عامة، فقطعا مسافة 5.6 km حدّد موقع الحديقة بالنسبة لمخيمهما؟ **2.6 km باتجاه E72°N**

58) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/sec كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة؟ **B**



A الرأسية 25.4 ft/sec ،الأفقية 40.7 ft/sec

B الرأسية 40.7 ft/sec ،الأفقية 25.4 ft/sec

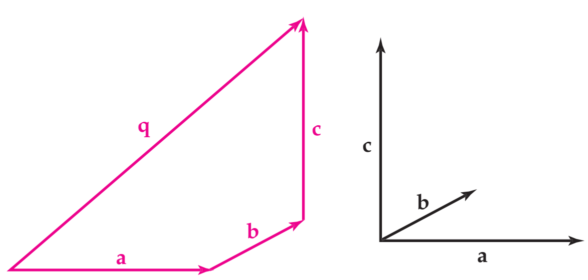
C الرأسية 56.6 ft/sec ،الأفقية 90.6 ft/sec

D الرأسية 90.6 ft/sec ،الأفقية 56.6 ft/sec

تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة حل المسألة الآتية:
إذا كان لديك ثلاث قوى متجهة a, b , c تؤثر في نقطة. فطوّر استراتيجية؛ لإيجاد المتجه q الذي يمثل محصلة هذه القوى .



4-2 المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

فيما سبق

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم .

والآن

الأفكار الرئيسة

- أُجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثلها بيانيًا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهي الوحدة.

المفردات الأساسية

الصورة الإحداثية
component form

متجه الوحدة
unit vector

توافق خطي
linear combination

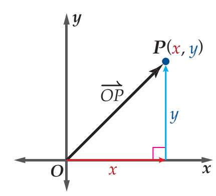
www.obeikaneducation.com

لماذا ؟

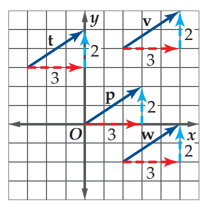
تؤثِّر الرياح على سرعة الطائرة واتجاه حركتها، لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ ولمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي تعلمت في الدرس 1–4 ، إيجاد طول، واتجاه المحصّلة لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقة أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل (1) بصورة وحيدة، وذلك باحداثيي نقطة نهايته $P(x, y)$. وتُعبِّر عن $\overrightarrow{OP}$ في المستوى الإحداثي بالصورة $\langle x, y\rangle$. حيث إن x ، y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$ ، لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل(1)



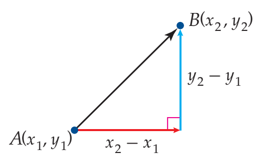
الشكل(2)

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفسيهما متكافئة، فإن بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلًا المتجهات **p, t, v, w** في الشكل (2) متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أي منها بالصورة $\langle 3, 2\rangle$. ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجه مرسوم في وضع غير قياسي استعمل إحداثيي نقطتي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي **الصورة الإحداثية لمتجه**

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$



مثال 1 **التعبير عن المتجه على الصورة الإحداثية**

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ بالطرح

تأكد

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\langle 8, 8\rangle$

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\langle -9, -11\rangle$

4-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-2

إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم .

الدرس 4-2

إجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وتمثيلها بيانيًّا.

كتابة المتجه باستعمال متجهي الوحدة.

ما بعد الدرس 4-2

إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله في إيجاد الزاوية بين هذين المتجهين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل :

- كيف تؤثر الرياح العكسية على محصلة سرعة الطائرة؟ تستطيع الرياح العكسية تخفيض سرعة الطائرة الفعلية.
- كيف تؤثر الرياح باتجاه الطائرة على سرعتها؟ تزيد من سرعة الطائرة.
- ما نوع الرياح التي تؤثر على اتجاه حركة الطائرة؟ أي اتجاه للرياح غير اتجاه حركة الطائرة أو عكسه.
- إذا هبت رياح جانبيه بزاوية قياسها °90 على اتجاه سير الطائرة. فهل تُخرج هذه الرياح الطائرة عن مسارها بزاوية قياسها °90؟

لا ؛ لأنه في الوقت الذي تسير فيه الطائرة للأمام تُدفع باتجاه حركة الرياح، لذلك يتغير مسار الطائرة بزاوية أقل من °90.

المتجهات في المستوى الاحداثي

مثال 1 يُبيّن كيفية التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية إذا أُعطي الزوجان المرتبان اللذان يمثلان نقطتي بدايته و نهايته.

مصادر الدرس 4-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (190)	• تنويع التعليم ، ص (190,193)	• تنويع التعليم ، ص (193, 195)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (23) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

المتجهات في المستوى الاحداثي

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد طول المتجه باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

مثال 3 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات وإيجاد ناتج الجمع، الطرح، والضرب في عدد حقيقي للمتجهات جبريًّا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overline{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -3)$، ونقطة نهايته $B(1, 3)$. $\langle 0, 6\rangle$

2 أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -3)$، ونقطة نهايته $B(1, 3)$.
6

3 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 2, 0\rangle$، $\mathbf{w} = \langle 2, -5\rangle$، $\mathbf{z} = \langle -1, -4\rangle$.

a) $2\mathbf{w} + \mathbf{y}$ $\langle 6, -10\rangle$

b) $3\mathbf{y} - 2\mathbf{z}$ $\langle 8, 8\rangle$

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

قراءة الرياضيات

المعيار يسمى طول المتجه أحيانًا بمعيار المتجه.

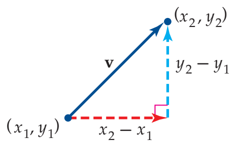
مفهوم أساسي — طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، وكانت نقطة بدايته (x_1, y_1)، ونقطة نهايته (x_2, y_2)، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b\rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$، فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مثال 2 إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

قانون المسافة بين نقطتين $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$ $= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$

بالتبسيط $= \sqrt{98} \approx 9.9$

التحقق علمت من المثال 1 أن $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7\rangle$. وعليه، فإن $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔

تأكد

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$، المعطى نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

(2A $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\sqrt{128} \approx 11.3$

(2B $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\sqrt{202} \approx 14.2$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$، و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

مثال 3 العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{w} = \langle -4, 1\rangle$، $\mathbf{z} = \langle -3, 0\rangle$، $\mathbf{y} = \langle 2, 5\rangle$:

a) $\mathbf{w} + \mathbf{y}$

بالتعويض $\mathbf{w} + \mathbf{y} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$

بجمع المتجهين $= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$

b) $\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$

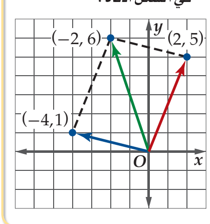
بإعادة كتابة الطرح كعملية جمع $\mathbf{z} - 2\mathbf{y} = \mathbf{z} + (-2)\mathbf{y}$

بالتعويض $= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي، وجمع متجهين $= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًا يمكن التحقق بيانيًا من إجابة مثال 3 الفرع a باستعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع كما في الشكل أدناه.



تأكد

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{w} = \langle -4, 1\rangle$، $\mathbf{z} = \langle -3, 0\rangle$، $\mathbf{y} = \langle 2, 5\rangle$:

(3A $4\mathbf{w} + \mathbf{z}$ $\langle -19, 4\rangle$

(3B $-3\mathbf{w}$ $\langle 12, -3\rangle$

(3C $2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ $\langle 3, 22\rangle$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات صغيرة؛ لإيجاد ناتج جمع وطرح متجهين وضرب متجه في عدد حقيقي. ثم اطلب إليهم استعمال ورق رسم بياني؛ للتحقق من صحة إجاباتهم.

متجهات الوحدة يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**. ومن المفيد أحيانًا التعبير عن المتجه غير الصفري $\mathbf{v}$ على أنه حاصل ضرب متجه وحدة $\mathbf{u}$ في عدد حقيقي بنفس اتجاه $\mathbf{v}$. ولإيجاد $\mathbf{u}$ ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

الربط مع تاريخ الرياضيات

ويليام روان هاميلتون (1805–1865)

طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظرية في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات تعتمد على هذه النظرية.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطى

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

متجه وحدة باتجاه $\mathbf{v}$	$\mathbf{u} = \frac{1}{\lvert\mathbf{v}\rvert}\mathbf{v}$
بالتعويض	$= \frac{1}{\lvert\langle -2, 3\rangle\rvert}\langle -2, 3\rangle$
$\lvert\langle a, b\rangle\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$	$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}\langle -2, 3\rangle$
بالتبسيط	$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$
ضرب متجه في عدد حقيقي	$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\rangle$
بإنطاق المقام	$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right\rangle$

التحقق بما أن $\mathbf{u}$ تمثل حاصل ضرب $\mathbf{v}$ في عدد موجب فإن له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه. تحقّق من أن طول $\mathbf{u}$ هو 1 .

قانون المسافة بين نقطتين	$\lvert\mathbf{u}\rvert = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$
بالتبسيط	$= \sqrt{\frac{4}{13}+\frac{9}{13}}$
بالتبسيط	$= \sqrt{1} = 1$ ✓

تأكد

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كل مما يأتي:

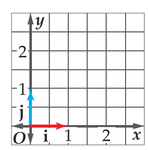
4A) $\mathbf{w} = \langle 6, -2\rangle$ $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10}\right\rangle$

4B) $\mathbf{x} = \langle -4, -8\rangle$ $\left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

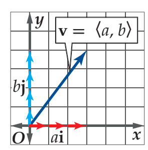
تنبيه!

متجه الوحدة i لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ ، والعدد التخيلي i ، حيث يكتب متجه الوحدة بخط داكن غير مائل $\mathbf{i}$. بينما يكتب العدد التخيلي بخط داكن مائل i .

يُرمز لمتجهي الوحدة باتجاه المحور x الموجب، والمحور y الموجب بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ على الترتيب كما في الشكل (3) . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ متجهي الوحدة القياسيين.



الشكل (3)



الشكل (4)

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل (4) .

الصورة الإحداثية	$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$
بإعادة كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين	$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$
ضرب متجه في عدد حقيقي	$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$
$\langle 1, 0\rangle = \mathbf{i}$ ، $\langle 0, 1\rangle = \mathbf{j}$	$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

إرشادات للمعلم الجديد

ضرب المتجه في عدد حقيقي ذكّر الطلبة بأن العدد الذي يُضرب به المتجه هو عدد حقيقي.

التركيز في المحتوى الرياضي

الضرب في عدد حقيقي يمكن اعتبار الضرب في عدد حقيقي للمتجه على أنه تمدد للمتجه الأصلي. وينعكس اتجاه المتجه إذا كان العدد سالبًا، وعليه فإنه لا يحصل تمدد فقط للمتجه بل انعكاس أيضًا في المحور العمودي على المتجه من نقطة منتصفه. لاحظ أنه إذا كانت القيمة المطلقة للعدد أقل من 1، فإنه يحدث تصغير للمتجه.

متجهات الوحدة

مثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعطى.

مثال إضافي

4 أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle 4, -2\rangle$.

$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right\rangle$

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي قسّم طلبة الصف إلى مجموعات، وحدّد لكل مجموعة متجهًا، واطلب إليهم إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعطى وصوّر عملهم بالفيديو.

إرشادات للمعلم الجديد

رمز المتجه يمكن التعبير عن المتجهات بأزواج مرتبه مثل النقاط في المستوى الإحداثي، لكن الأقواس في المتجهات تختلف عنها في النقاط. فالنقطة (x, y) تدل على موقع واحد في المستوى الإحداثي في حين أن المتجه $\langle x, y\rangle$ يشير إلى متجه (له طول واتجاه) في الوضع القياسي وينتهي بالنقطة (x, y).

متجهات الوحدة

مثال 5 يُبيّن كيفية كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة.

مثال 6 يُبيّن كيفية إيجاد الصورة الإحداثية لمتجه أُعطي طوله وزاوية اتجاهه.

مثالان إضافيان

5 إذا كانت نقطة بداية المتجه DE هي $D(-3,-3)$ ونقطة نهايته $E(2,6)$. فاكتب $\overrightarrow{DE}$ بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$. $5\mathbf{i}+9\mathbf{j}$

6 أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 7 ، وزاوية اتجاهه $60°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v}=\left\langle \frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

يسمى ناتج الجمع $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًا** للمتجهين $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$. ويُقصد به كتابة ناتج الجمع بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$.

مثال 5 كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2,3)$ ، و نقطة نهايته $E(4,5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية $\overrightarrow{DE}$.

الصورة الإحداثية $\quad \overrightarrow{DE}=\langle x_2-x_1, y_2-y_1\rangle$

$(x_1,y_1)=(-2,3)$, $(x_2,y_2)=(4,5)$ $\quad =\langle 4-(-2), 5-3\rangle$

بالتبسيط $\quad =\langle 6,2\rangle$

ثم أعد كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة.

الصورة الإحداثية $\quad \overrightarrow{DE}=\langle 6,2\rangle$

$\langle a,b\rangle=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ $\quad =6\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

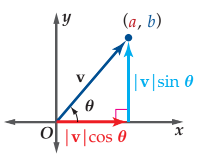
تأكد

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ في كلٍّ مما يأتي :

(5A $D(-6,0), E(2,5)$ $\quad 8\mathbf{i}+5\mathbf{j}$

(5B $D(-3,-8), E(7,1)$ $\quad 10\mathbf{i}+9\mathbf{j}$

ويمكن تحديد اتجاه المتجه $\mathbf{v}=\langle a,b\rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع المحور x الموجب. فمن الشكل (5) يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل(5)

الصورة الإحداثية $\quad \mathbf{v}=\langle a,b\rangle$

بالتعويض $\quad =\langle |\mathbf{v}|\cos\theta, |\mathbf{v}|\sin\theta\rangle$

توافق خطي من $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ $\quad =|\mathbf{v}|(\cos\theta)\mathbf{i}+|\mathbf{v}|(\sin\theta)\mathbf{j}$

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة

تستنتج من الصورة $\mathbf{v}=\langle|\mathbf{v}|\cos\theta, |\mathbf{v}|\sin\theta\rangle$ أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة $\mathbf{v}=\langle 1\cos\theta, 1\sin\theta\rangle$ $=\langle\cos\theta, \sin\theta\rangle$

مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة $|\mathbf{v}|$ ، θ $\quad \mathbf{v}=\langle|\mathbf{v}|\cos\theta, |\mathbf{v}|\sin\theta\rangle$

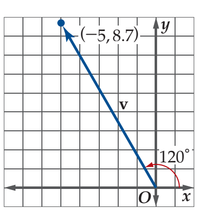
$|\mathbf{v}|=10$, $\theta=120°$ $\quad =\langle 10\cos 120°, 10\sin 120°\rangle$

$\cos 120°=-\frac{1}{2}$, $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad =\left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle$

بالتبسيط $\quad =\langle -5, 5\sqrt{3}\rangle$

التحقق مثِّل بيانيًا $\mathbf{v}=\langle -5, 5\sqrt{3}\rangle\approx\langle -5, 8.7\rangle$ ، علمًا بأن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع المحور x الموجب هي $120°$ كما في الشكل المجاور،

$|\mathbf{v}|=\sqrt{(-5)^2+(5\sqrt{3})^2}=10$ ✓



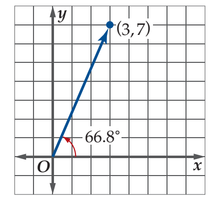
تأكد

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ مما يأتي :

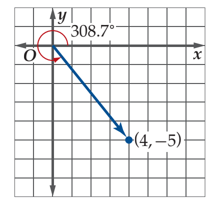
(6A $|\mathbf{v}|=8, \theta=45°$ $\quad \langle 5.7, 5.7\rangle$

(6B $|\mathbf{v}|=24, \theta=210°$ $\quad \langle -12\sqrt{3}, -12\rangle$

تستنتج من الشكل (5) في الصفحة السابقة أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ مع المحور x الموجب بحَلّ المعادلة المثلثية $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$ ، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.



الشكل(6)



الشكل(7)

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع المحور x الموجب .

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

معادلة زاوية الاتجاه	$\tan\theta = \frac{b}{a}$
$a = 3 , b = 7$	$\tan\theta = \frac{7}{3}$
بالحَل بالنسبة إلى θ	$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$\theta \approx 66.8°$

أي أن زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل (6) .

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5\rangle$

معادلة زاوية الاتجاه	$\tan\theta = \frac{b}{a}$
$a = 4 , b = -5$	$\tan\theta = \frac{-5}{4}$
بالحَل بالنسبة إلى θ	$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$
باستعمال الآلة الحاسبة	$\theta \approx -51.3°$

بما أن $\mathbf{r}$ يقع في الربع الرابع، كما في الشكل (7) ، فإن $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$

تأكد

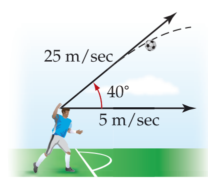
أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع المحور x الموجب.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $161.6°$

7B) $\langle -3, -8\rangle$ $249.4°$

مثال 8 من واقع الحياة تطبيق العمليات على المتجهات

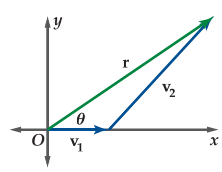
كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/sec ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/sec ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لهذا المتجه $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0\rangle$. وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2|\cos\theta, |\mathbf{v}_2|\sin\theta\rangle$
$|\mathbf{v}_2| = 25 , \theta = 40°$	$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40°\rangle$
بالتبسيط	$\approx \langle 19.2, 16.1\rangle$

اجمع المتجهين $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.



متجه المحصلة	$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$
بالتعويض	$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle$
بالجمع	$= \langle 24.2, 16.1\rangle$

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي:

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ ، حيث $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$	$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$
بالحَل بالنسبة إلى θ	$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$

أي أن محصلة سرعة حركة الكرة هي 29.1 m/sec ، وتصنع زاوية قياسها $33.6°$ مع الأفقي.

تأكد

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة سرعة حركة الكرة، إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/sec.

30.1 m/sec بزاوية 31.6° مع الأفقي

متجهات الوحدة

مثال 7 يُبيّن كيفية إيجاد زاوية اتجاه متجه باستعمال الدالة العكسية لدالة الظل.

مثال 8 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات.

مثالان إضافيان

7 أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتيين مع المحور x الموجب:

a) $\mathbf{p} = \langle 2, 9\rangle$ $77.5°$

b) $\mathbf{r} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $344.1°$

8 **كرة قدم:** يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 7 m/sec ؛ ليرمي الكرة بسرعة للأمام 30 m/sec بزاوية 10° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة؟ 36.9 m/sec, 8.1°

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة تعليق جسم بحبلين بين مقعدين، واطلب إلى كل واحد منهم رسم شكل يمثل هذا الوضع وتوضيح طريقة إيجاد القوة على كلا الحبلين.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-36 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $\langle 7,4\rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$

2) $\langle -8,16\rangle, \sqrt{320} \approx 17.9$

3) $\langle -7,-3\rangle, \sqrt{58} \approx 7.6$

4) $\langle 3,4\rangle, 5$

5) $\langle -6.5, 4.5\rangle, \sqrt{62.5} \approx 7.9$

6) $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2}\right\rangle, \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$

13a) $f=\langle -9,10\rangle$ ، $n=\langle 76,84\rangle$ ، $w=\langle 0,-170\rangle$

13b) لإيجاد محصلة القوى $\vec{r}$:

$\vec{r} = \vec{w} + \vec{n} + \vec{f}$

$= \langle -9,10\rangle + \langle 76,84\rangle + \langle 0,-170\rangle$

$= \langle 67,-76\rangle$

14) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53}\right\rangle$

15) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$

16) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, -\frac{5\sqrt{89}}{89}\right\rangle$

17) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

18) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26}\right\rangle$

19) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right\rangle$

20) $\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

21) $-16\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

22) $-5\mathbf{i} - 19\mathbf{j}$

23) $-9.5\mathbf{i} - 8.3\mathbf{j}$

24) $13\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

25) $-\frac{33}{8}\mathbf{i} - \frac{19}{7}\mathbf{j}$

28) $\langle 6, 6\sqrt{3}\rangle$

29) $\langle 8\sqrt{3}, -8\rangle$

30) $\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\rangle$

31) $\langle -8.6, 12.29\rangle$

38) لا، إجابة ممكنة: يختلف المقدار والاتجاه في كل من المتجهين. لذا، فالمتجهان غير متكافئين.

39) نعم؛ إجابة ممكنة: للمتجهين المقدار نفسه والاتجاه نفسه. لذا، فهما متكافئان.

تدرب وحل المسائل

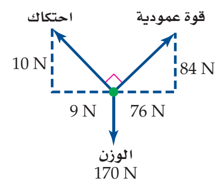
أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ ، المُعطى نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي: (المثالان 1, 2) للتمارين 1-6 انظر الهامش

(1 $A(-3, 1), B(4, 5)$
(2 $A(2, -7), B(-6, 9)$
(3 $A(10, -2), B(3, -5)$
(4 $A(-2, 6), B(1, 10)$
(5 $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$
(6 $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

إذا كان $\mathbf{f} = \langle 8,0\rangle, \mathbf{g} = \langle -3,-5\rangle, \mathbf{h} = \langle -6,2\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

(7 $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$ $\langle -21, 13\rangle$
(8 $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$ $\langle -4, 4\rangle$
(9 $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$ $\langle 31, -11\rangle$
(10 $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$ $\langle 26, 6\rangle$
(11 $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$ $\langle -53, -23\rangle$
(12 $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$ $\langle -42, -18\rangle$

(13 **فيزياء:** يُستعمل مخطط القوى؛ لتوضيح أثر القوى المختلفة على جسم. ويمثِّل المخطط أدناه القوى التي تؤثر على طفل ينزلق على منحدر للأسفل. (مثال 3)



a) اعتبر أن النقطة الخضراء التي تُمثِّل الطفل هي نقطة الأصل، واكتب كل متجه على الصورة الإحداثية. انظر الهامش

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة الذي يسبِّب انزلاق الطفل للأسفل. انظر الهامش

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4) للتمارين 14-19 انظر الهامش

(14 $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$
(15 $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$
(16 $\mathbf{v} = \langle -8, -5\rangle$
(17 $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$
(18 $\mathbf{v} = \langle -1, -5\rangle$
(19 $\mathbf{v} = \langle 1, 7\rangle$

اكتب $\overline{DE}$ ، المُعطى نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5) للتمارين 20-25 انظر الهامش

(20 $D(4, -1), E(5, -7)$
(21 $D(9, -6), E(-7, 2)$
(22 $D(3, 11), E(-2, -8)$
(23 $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$
(24 $D(-4, -6), E(9, 5)$
(25 $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

(26 **عمل:** يقود محمد سيارته؛ لكي يصل إلى عمله باتجاه الشمال مسافة 2.4 km ، ثم يغير اتجاه حركته إلى اليسار؛ ليقطع مسافة 3.1 km، ثم يغير اتجاه حركته إلى اليمين؛ ليقطع مسافة 5.8 km . عبِّر عن مسار محمد بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. (مثال 5)

26) $-3.1\mathbf{i} + 8.2\mathbf{j}$

(27 **تجديف:** يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h ، ويؤثِّر عليه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h . (مثال 5) انظر ملحق الإجابات

a) أوجد إلى أقرب جزء من عشرة السرعة التي يتحرك بها القارب.

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة. (إرشاد: افرض أن اتجاه حركة المياه في النهر نحو الشرق).

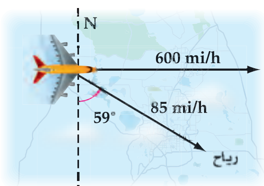
أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور x الموجب في كل مما يأتي: (مثال 6) للتمارين 28-31 انظر الهامش

(28 $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$
(29 $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$
(30 $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$
(31 $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع المحور x الموجب: (مثال 7)

(32 $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ $63.4°$
(33 $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ $111.8°$
(34 $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ $216.9°$
(35 $\langle -5, 9\rangle$ $119.1°$

(36 **ملاحة جوية:** تطير طائرة باتجاه الشرق بسرعة مقدارها 600 mi/h . وتهب الرياح بسرعة مقدارها 85 mi/h باتجاه S59°E . (مثال 8) انظر ملحق الإجابات



a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة.

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة.

(37 **ملاحة جوية:** تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N82°E . وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N79°E . انظر ملحق الإجابات

a) ارسم شكلًا يُمثِّل هذا الموقف.

b) ما مقدار سرعة الرياح واتجاهها؟

c) إذا زاد الطيار من سرعة الطائرة وأصبحت 500 mi/h ، فما محصِّلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض؟ و ما اتجاه حركتها؟

بيّن إذا كان $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ المُعطى نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا. وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overline{AB} = \overline{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب. للتمرينين 38-39 انظر الهامش

(38 $A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0)$

(39 $A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1)$

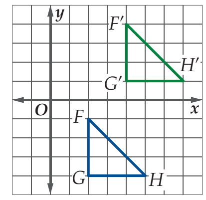
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	45، 47، 49–59
ضمن المتوسط	37–41، 43–45، 47، 49–59
فوق المتوسط	37–59

تنبيه!

أخطاء شائعة في التمرين 37، لاحظ الطلبة الذين لا يرسمون رسمًا صحيحًا يعبِّر عن الموقف. واقترح عليهم كتابة الاتجاهات الشمال، الجنوب، الشرق، الغرب على رسومهم.

40) **انسحاب:** يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x، وإضافة b إلى الإحداثي y.



a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور. $\langle 2, 5 \rangle$

b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$، فمثّل بيانيًا كلًّا من $\triangle F'G'H'$، وصورته $\triangle F''G''H''$. انظر الهامش

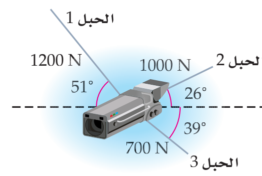
c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$. $\langle -1, -1 \rangle$

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علمت طوله ونقطة بدايته:

41) $\sqrt{37}$، $(-1, 4)$ انظر الهامش

42) 10، $(-3, -7)$ إجابة ممكنة: $(5, -1)$

43) **آلة تصوير:** عُلّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثّل متجهًا، فأجب عما يأتي: انظر ملحق الإجابات

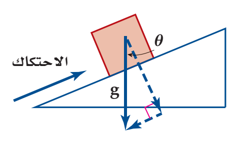


a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه.

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير.

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى.

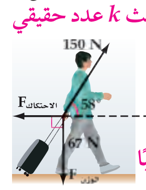
44) **قوة:** تؤثّر قوة الجاذبية g وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل المجاور المركبتين الموازية والرأسية للجاذبية الأرضية. ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟ يجب أن تكون قوة الاحتكاك مساوية لمركبة الجاذبية الموازية للسطح المائل



مسائل مهارات التفكير العليا

45) **تبرير:** إذا كان a، b متجهين متوازيين، فاكتب معادلة متجه تُبيّن العلاقة بين a، b. إجابة ممكنة: $\mathbf{a} = k\,\mathbf{b}$، حيث k عدد حقيقي

46) **تحدٍّ:** يبذل علي قوة مقدارها 150 N، وبزاوية قياسها 58° مع الأفقي؛ ليسحب على أرض مستوية حقيبة أمتعته التي وزنها 67 N. أوجد مقدار قوة الاحتكاك. 79.5 N تقريبًا



47) **تبرير:** إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيّنًا). انظر الهامش

48) **تحدٍّ:** إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y \rangle$ هي $(4y)°$، فأوجد قيمة x بدلالة y. انظر الهامش

برهان: إذا كان $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1 \rangle, \mathbf{b} = \langle x_2, y_2 \rangle, \mathbf{c} = \langle x_3, y_3 \rangle$ فأثبت الخصائص الآتية: للتمارين 56-49 انظر ملحق الإجابات

49) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

50) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

51) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث k عدد حقيقي.

52) $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$، حيث k عدد حقيقي.

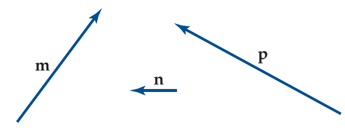
مراجعة تراكمية

53) **دمى الأطفال:** يقوم محمد بسحب دميته بقوة مقدارها 1.5N بواسطة نابض مثبّت بها. (الدرس 4-1)

a) إذا كان النابض يصنع زاوية 52° مع سطح الأرض. فأوجد المركبتين الرأسية والأفقية للقوة. 0.92 N تقريبًا, 1.18 N تقريبًا

b) إذا رفع محمد النابض، وأصبح يصنع زاوية قياسها 78° مع سطح الأرض. فأوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. 1.47 N تقريبًا, 0.31 N تقريبًا

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثّل كل مما يأتي: (الدرس 4-1) للتمارين 57-54 انظر ملحق الإجابات



54) $\mathbf{n} - \frac{3}{4}\mathbf{m}$

55) $\frac{1}{2}\mathbf{p} + 3\mathbf{n}$

56) $-\frac{1}{3}\mathbf{m} + \mathbf{p} - 2\mathbf{n}$

57) $3\mathbf{n} - \frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{m}$

تدريب على اختبار معياري

58) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$؟ D

A $\sqrt{2}$ C $\sqrt{82}$

B $\sqrt{26}$ D $\sqrt{106}$

59) يقوم سالم وحسن بإزالة صخرة من الطريق تعرقل مرور الناس، حيث يدفع سالم الصخرة من الخلف بقوة مقدارها 135 N، وبزاوية 58° مع الأفقي. في حين يسحب حسن الصخرة من الأمام بقوة مقدارها 214 N، بزاوية 43° مع الأفقي. ما مقدار القوة الأفقية المؤثرة على الصخرة تقريبًا؟ A

A 228 N B 260 N C 299 N D 346 N

4 التقويم

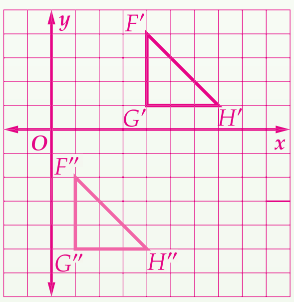
تعلّم سابق اطلب إلى الطلبة توضيح كيفية استفادتهم من موضوع التمثيل الهندسي للمتجهات في درس اليوم عن المتجهات بالصورة الجبرية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 4–1, 4–2 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 4.

إجابات:

40b)



41) $|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\sqrt{37} = \sqrt{(x_2 + 1)^2 + (y_2 - 4)^2}$

$37 = (x_2 + 1)^2 + (y_2 - 4)^2$

والآن، افترض أي قيمة لِ x_2، وأوجد y_2.

بفرض أن $x_2 = 0$، فإن

$37 = 1 + (y_2 - 4)^2$

$\Rightarrow 36 = (y_2 - 4)^2 \Rightarrow y_2 - 4 = \pm 6$

$\Rightarrow y_2 = 10 \text{ or } -2$

وعليه فإن $(0, -2)$ هي نقطة نهاية ممكنة للمتجه.

47) إجابة ممكنة: إذا كانت نقطة بداية المتجه هي (a, b) ومقدار المتجه m، فإن أي نقطة (x, y) تحقق المعادلة $m = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. يمكن أن تكون نقطة نهاية للمتجه.

48) $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\tan 4y = \frac{y}{x}$

$x \tan 4y = y$

$x = \frac{y}{\tan 4y}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة حل المسألة الآتية.

تعاون مزارع وجاره على إزالة صخرة كبيرة من الحقل. وذلك بسحب الصخرة بواسطة حبلين مثبتين بها، الزاوية بينهما 35°. إذا كان المزارع يسحب الحبل بقوة مقدار 105 N، وجاره يسحب الحبل الآخر بقوة مقدارها 95 N. فأوجد مقدار واتجاه القوة المحصلة المؤثرة على الصخرة.

190.8 N بزاوية قياسها 16.6° مع القوة 105 N.

4-3 الضرب الداخلي ومسقطا المتجه
Dot Products and Vector Projections

فيما سبق
درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًا وجبريًا.

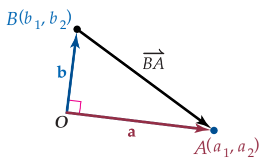
والآن
الأفكار الرئيسة
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بين هذين المتجهين.
- أجدُ مسقط متجه على آخر.

المفردات الأساسية
الضرب الداخلي
dot product
المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors
مسقط متجه
vector projection
الشغل
work

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
تحمل كلمة الشغل معاني متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

الضرب الداخلي (القياسي) تعلمت في الدرس 2–4 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تستعمل عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان **a**، **b** في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.



باستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

تعريف طول متجه	$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
بتربيع الطرفين	$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$
بفك الأقواس	$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$
بجمع الحدود المتشابهة	$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$
$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$	$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

لاحظ أن التعبيرين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئين، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي للمتجهين** a ، b ، ويُرمز له بالرمز **a • b** ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a ، b ، أو يُقرأ باختصار a dot **b** .

> **مفهوم أساسي** — **الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي**
>
> يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :
>
> $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر : **متجهان متعامدين** .

> **مفهوم أساسي** — **المتجهان المتعامدان**
>
> يكون المتجهان **a** ، **b** متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن : $\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

قراءة الرياضيات
الضرب القياسي يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-3
إيجاد مقادير المتجهات وإجراء العمليات عليها جبريًا.

الدرس 4-3
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله في إيجاد الزاوية بين هذين المتجهين.
إيجاد مسقط متجه على آخر .

ما بعد الدرس 4-3
استعمال المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل :
- انظر إلى الصورة وبيّن كيف يعرف الأشخاص الذين يدفعون السيارة أنهم يبذلون شغلًا؟ إذا تحركت السيارة.
- لماذا يعد الشغل تحويلًا للطاقة؟ عند بذل شغل على جسم ما، يحدث تحويل للطاقة على الجسم مما يسبب حركته.
- إذا حاولت نفس المجموعة دفع السيارة بقوة أكبر وتحركت السيارة مسافة أكبر، فهل بذل الأشخاص شغلًا أكبر أو أقل؟ بذلوا شغلاً أكبر
- هل وضع كتاب على ذراع شخص دون حركة يعطي شغلًا؟ لا ؛ لأن الكتاب لم يتحرك.

مصادر الدرس 4-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (200)		• تنويع التعليم ، ص (203)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (24) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (24) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (24) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u** ، **v** ، ثم تحقق فيما إذا كانا متعامدين .

(a $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$

$= 0$

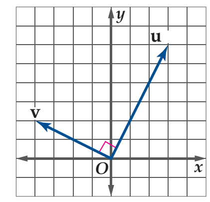
بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن **u** ، **v** متعامدان كما هو موضَّح في الشكل (1) .

(b $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

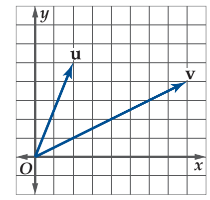
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$

$= 36$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن **u** ، **v** غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل (2) .



الشكل(1)



الشكل(2)

✔ تأكد

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u** ، **v**، ثم تحقق فيما إذا كانا متعامدين .

(1A $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$ **−17** ؛ ليسا متعامدين

(1B $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$ **0**؛ متعامدان

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

مفهوم أساسي خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت **u, v, w** متجهات، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert \mathbf{u} \rvert^2$

افرض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

الضرب الداخلي $\quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$

بالكتابة على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$ $\quad = \left(\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}\right)^2$

$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$ $\quad = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

سوف تبرهن الخصائص الثلاث الأولى في التمارين 47-45

مثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

بما أن $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن $\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$ $\quad \lvert\langle -5, 12\rangle\rvert = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle}$

بالتبسيط $\quad = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$

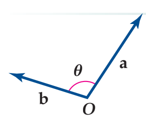
✔ تأكد

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

(2A $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$ **20**

(2B $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$ $5\sqrt{2} \approx 7.07$

الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين **a** ، **b** هي الزاوية بين هذين المتجهين عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور. وتُقاس هذه الزاوية دائمًا، بحيث إن $0 \le \theta \le \pi$ ، أو $0° \le \theta \le 180°$. ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.



الضرب الداخلي

مثال1 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين والتحقق من كونهما متعامدين.

مثال2 يُبيّن كيفية إيجاد طول متجه باستعمال الضرب الداخلي.

✔ التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u** ، **v** في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق فيما إذا كانا متعامدين:

(a $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$.
15، غير متعامدين .

(b $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -14, 4\rangle$.
0، متعامدين.

2 استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -6, 5\rangle$.
$\sqrt{61} \approx 7.81$

إرشادات للمعلم الجديد

الضرب الداخلي أعط مثالاً على كلٍ من جمع متجهين، ضرب متجه في عدد حقيقي والضرب الداخلي لمتجهين، ثم اسأل الطلبة عن الفرق بين إجابة الضرب الداخلي والإجابات الأخرى. وعليهم ملاحظة أن ناتج الضرب الداخلي عدد وليس متجهًا.

الضرب الداخلي

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الزاوية بين متجهين باستعمال الضرب الداخلي.

مثال إضافي

3 أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, -5\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle$ $64.7°$ تقريبًا

b) $\mathbf{u} = \langle 1, -4\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$ $147.5°$ تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر مجموعة من الطلبة لحل بعض المسائل، وشرح طريقة استعمال الدالة العكسية لدالة جيب التمام؛ لإيجاد الزاوية بين متجهين.

التركيز في المحتوى الرياضي

المتجه الصفري
ناتج الضرب الداخلي للمتجه الصفري $\langle 0, 0\rangle$ وأي متجه آخر يساوي 0، وناتج جمع أي متجه مع المتجه الصفري يُعطي المتجه نفسه، مما يعني أن المتجه الصفري هو العنصر المحايد لعملية جمع المتجهات.

إرشادات للمعلم الجديد

صورة أخرى للضرب الداخلي تقود قاعدة الزاوية بين متجهين إلى صورة بديلة للضرب الداخلي بين متجهين .

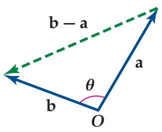
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

ويمكن استعمال هذه الصورة لحساب الضرب الداخلي بين المتجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عند معرفة طول كلٍّ من المتجهين والزاوية بينهما.

مفهوم أساسي الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



البرهان

إذا كان $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

قانون جيب التمام	$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\,\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos \theta = \lvert\mathbf{b} - \mathbf{a}\rvert^2$
$\lvert\mathbf{u}\rvert^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$	$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\,\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos \theta = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$
خاصية التوزيع للضرب الداخلي	$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\,\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$	$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\,\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos \theta = \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \lvert\mathbf{a}\rvert^2$
بطرح $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ من الطرفين	$-2\,\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos \theta = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
بقسمة الطرفين على $-2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert$	$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert}$

إرشادات للدراسة

المتجهات المتعامدة والمتوازية يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

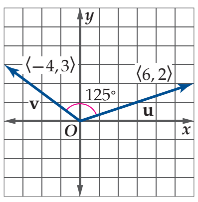
مثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

الزاوية بين متجهين	$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}$
$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$	$\cos \theta = \frac{\langle 6, 2\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle}{\lvert\langle 6, 2\rangle\rvert\,\lvert\langle -4, 3\rangle\rvert}$
الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه	$\cos \theta = \frac{-24 + 6}{\sqrt{40}\,\sqrt{25}}$
بالتبسيط	$\cos \theta = \frac{-18}{10\sqrt{10}}$
بالحل بالنسبة إلى θ	$\theta = \cos^{-1} \frac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل (3).

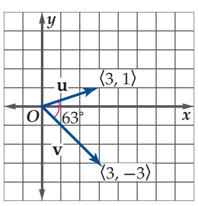


الشكل(3)

b) $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

الزاوية بين متجهين	$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}$
$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$	$\cos \theta = \frac{\langle 3, 1\rangle \cdot \langle 3, -3\rangle}{\lvert\langle 3, 1\rangle\rvert\,\lvert\langle 3, -3\rangle\rvert}$
الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه	$\cos \theta = \frac{9 + (-3)}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}}$
بالتبسيط	$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$
بالحل بالنسبة إلى θ	$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 63°$

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ هو $63°$ تقريبًا، كما في الشكل (4).



الشكل(4)

تأكد

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

3A) $\mathbf{u} = \langle -5, -2\rangle , \mathbf{v} = \langle 4, 4\rangle$ $157°$ تقريبًا

3B) $\mathbf{u} = \langle 9, 5\rangle , \mathbf{v} = \langle -6, 7\rangle$ $102°$ تقريبًا

مسقط المتجه تعلمت في الدرس 1-4 أن بإمكاننا تحليل متجه إلى مركبتين متعامدتين تكونان غالبًا أفقية ورأسية، إلا أنه من المفيد أحيانًا أن تكون إحدى المركبتين موازية لمتجه آخر.

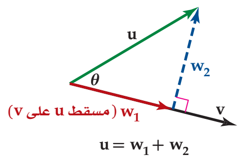
إرشادات للدراسة

المركبة العمودية
يُسمَّى المتجه $\mathbf{w_2}$ المركبة العمودية للمتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

مفهوم أساسي — مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$

إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين غير صفريين، وكان $\mathbf{w_1}$ ، $\mathbf{w_2}$ مركبتي $\mathbf{u}$ ، بحيث $\mathbf{w_1}$ موازٍ للمتجه $\mathbf{v}$ كما في الشكل المجاور ، فإن $\mathbf{w_1}$ يُسمَّى **مسقط المتجه** $\mathbf{u}$ على المتجه $\mathbf{v}$ ، ويكون:

$$\mathbf{w_1} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$



البرهان

بما أن $\mathbf{w_1}$ موازٍ للمتجه $\mathbf{v}$ ، فإن بإمكاننا كتابته على صورة حاصل ضرب عدد في المتجه $\mathbf{v}$. أو على صورة حاصل ضرب عدد في متجه الوحدة $\mathbf{v}_x$ باتجاه $\mathbf{v}$ ؛ أي أن $\mathbf{w_1} = |\mathbf{w_1}|\ \mathbf{v}_x$. وباستعمال المثلث القائم الزاوية الذي أضلاعه $\mathbf{u}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_1}$ ، وجيب التمام نجد $|\mathbf{w_1}|$

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{w_1}|}{|\mathbf{u}|}$$ تعريف جيب التمام

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = \cancel{|\mathbf{u}|}\,|\mathbf{v}|\,\frac{|\mathbf{w_1}|}{\cancel{|\mathbf{u}|}}$$ بضرب كلا الطرفين في العدد $|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\ |\mathbf{w_1}|$$ $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}$. لذا، $|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

$$|\mathbf{w_1}| = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$ بالحل بالنسبة إلى $|\mathbf{w_1}|$

والآن تستعمل $\mathbf{w_1} = |\mathbf{w_1}|\ \mathbf{v}_x$ ؛ لإيجاد $\mathbf{w_1}$ كحاصل ضرب عدد حقيقي في $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{w_1} = |\mathbf{w_1}| \cdot \mathbf{v}_x$$

$$\mathbf{w_1} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$ $|\mathbf{w_1}| = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, $\mathbf{v}_x = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

$$\mathbf{w_1} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$ بالضرب

مثال 4 إيجاد مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$ ، ثم اكتب $\mathbf{u}$ على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

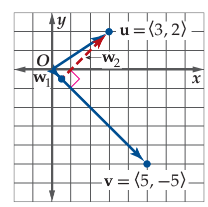
الخطوة 1 أوجد $\mathbf{w_1}$ (مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$).

$$\mathbf{w_1} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$
$$= \frac{\langle 3, 2\rangle \cdot \langle 5, -5\rangle}{|\langle 5, -5\rangle|^2}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \frac{5}{50}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w_2}$.

بما أن $\mathbf{u} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$ ،
فإن $\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1}$

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1}$$
$$= \langle 3, 2\rangle - \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$$



الشكل(5)

أي أن مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ هو $\mathbf{w_1} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ كما في الشكل (5)، $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$

تأكد

$$\mathbf{w_1} = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89}\right\rangle, \mathbf{u} = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89}\right\rangle + \left\langle -\frac{55}{89}, \frac{88}{89}\right\rangle$$

4) أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5\rangle$ ، ثم اكتب $\mathbf{u}$ على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

مسقط المتجه

المثالان 5 ,4 يُبيّنان كيفية إيجاد مسقط متجه على آخر.

مثال إضافي

4 أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle -1, 5\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$.
ثم اكتب $\mathbf{u}$ على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

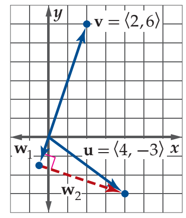
$\mathbf{w_1} = \langle 2, 3\rangle$,
$\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle + \langle -3, 2\rangle$

بالرغم من أن مسقط **u** على **v** هو متجه يوازي **v** ، فإنه ليس من الضروري أن يكون لهذا المتجه اتجاه **v** نفسه كما يوضح المثال الآتي.

مثال 5 مسقط متجه باتجاه يعاكس اتجاه v

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 2, 6 \rangle$ ، ثم اكتب **u** على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v** .

لاحظ أن الزاوية بين المتجهين **u** ، **v** منفرجة، لذا فإن مسقط **u** على **v** يقع على متجه يعاكس اتجاه المتجه **v** ، كما في الشكل (6)



الشكل(6)

الخطوة 1 أوجد مسقط **u** على **v** .

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$
$$= \frac{\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 2, 6 \rangle}{|\langle 2, 6 \rangle|^2} \langle 2, 6 \rangle$$
$$= \frac{-10}{40} \langle 2, 6 \rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_2$.

بما أن $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ ، فإن:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$
$$= \langle 4, -3 \rangle - \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

أي أن مسقط **u** على **v** هو $\mathbf{w}_1 = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$ ، ويكون $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$

تأكد $\mathbf{w}_1 = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle, \mathbf{u} = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle + \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \right\rangle$

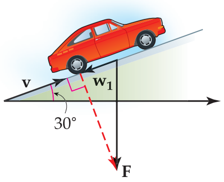
5) أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle -3, 4 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1 \rangle$ ، ثم اكتب **u** كناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v** .

إذا مثّل المتجه **u** قوة، فإن مسقط **u** على **v** يمثّل تأثير هذه القوة باتجاه **v** . فمثلًا، إذا كنت تدفع صندوقًا على أرض مائلة باتجاه **v** بقوة مقدارها **u** كما في الشكل (7) ، فإن مسقط **u** على **v** يمثّل القوة التي تدفع الصندوق باتجاه **v** .

الشكل (7)

مثال 6 من واقع الحياة استعمال مسقط متجه لإيجاد قوة

سيارات: تقف سيارة وزنها 1000 N على مرتفع يميل عن الأفقي بزاوية 30° ، كما في الشكل المجاور. إذا أُهملت قوة الاحتكاك، فما القوة المطلوبة لتمنع السيارة من الانزلاق للأسفل؟



وزن السيارة هو قوة جذب الأرض لها، $\mathbf{F} = \langle 0, -1000 \rangle$. ولإيجاد القوة اللازمة لمنع السيارة من الحركة للأسفل وهي $-\mathbf{w}_1$ ، أوجد مسقط **F** على متجه وحدة **v** باتجاه المرتفع.

الخطوة 1 أوجد متجه وحدة **v** باتجاه المرتفع.

الصورة الإحداثية للمتجه **v** بدلالة $|\mathbf{v}|$ و θ: $\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| (\cos \theta), |\mathbf{v}| (\sin \theta) \rangle$

$|\mathbf{v}| = 1, \theta = 30°$: $= \langle 1(\cos 30°), 1(\sin 30°) \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_1$ وهي مسقط **F** على متجه الوحدة **v** .

مسقط **F** على **v**: $\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$

لأن **v** متجه وحدة فيكون $|\mathbf{v}| = 1$: $= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$

$\mathbf{F} = \langle 0, -1000 \rangle, \mathbf{v} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$: $= \left(\langle 0, -1000 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle\right)\mathbf{v}$

أوجد الضرب الداخلي: $= -500\mathbf{v}$

فتكون القوة المطلوبة هي $-\mathbf{w}_1 = -(-500\,\mathbf{v})$ ، أو $500\,\mathbf{v}$. وبما أن **v** متجه وحدة، فإن مقدار القوة المطلوبة هو 500 N باتجاه المرتفع.

تأكد

6) **تزحلق:** يجلس شخص على عربة مخصصة للتزحلق على منحدر يميل عن الأفقي بزاوية 60° . أوجد القوة اللازمة لمنع العربة من الانزلاق للأسفل، إذا كان وزن الشخص والعربة معًا 80 N. **69.3 N تقريبًا**

مسقط المتجه

مثال 6 يُبيّن كيفية استعمال مسقط متجه لإيجاد قوة.

مثالان إضافيان

5 أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 4, 2 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle -3, 5 \rangle$، ثم اكتب **u** على صورة ناتج جمع متجهين أحدهما مسقط **u** على **v**.

$\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{3}{17}, \frac{-5}{17} \right\rangle,$

$\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{17}, \frac{-5}{17} \right\rangle + \left\langle \frac{65}{17}, \frac{39}{17} \right\rangle$

6 **صخور:** ترتكز صخرة وزنها 10 000 lb على أرض مرتفعة تميل عن المستوى الأفقي بزاوية 60° . أوجد القوة اللازمة لتمنع الصخرة من الحركة إلى أسفل المرتفع مع إهمال قوة الاحتكاك.

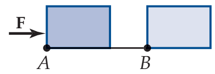
8660.3 lb باتجاه المرتفع.

تنويع التعليم

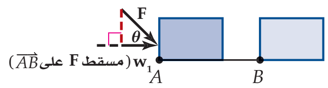
دون

المتعلمون السمعيون قسّم طلبة الصف إلى مجموعات صغيرة من ذوي قدرات لغوية متفاوتة، واطلب إليهم توضيح كيفية حل مسائل من واقع الحياة شبيهة بالمثال 6 باستعمال خطة التفكير بصوت عالٍ، وذلك من خلال شرح خطوات حل المسألة، وتفسير دور كل معلومة من معطيات المسألة في وضع مخطط للحل.

من التطبيقات الأخرى على مساقط المتجهات حساب الشغل الناتج عن قوة. فإذا كانت **F** قوة مؤثرة على جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه. وكانت **F** موازيةً لـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج من **F** يساوي مقدار القوة **F** مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة **F** ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال مسقط **F** على $\overrightarrow{AB}$.



قاعدة مسقط الشغل $\quad W = |\mathbf{w}_1|\,|\overrightarrow{AB}|$

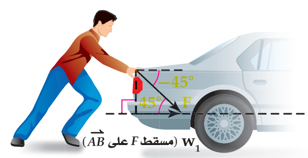
$|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{F}|\cos\theta$ لذا ، $\cos\theta = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{F}|}$ $\quad = |\mathbf{F}|\,(\cos\theta)\,|\overrightarrow{AB}|$

$|\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ لذا ، $\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|}$ $\quad = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$

أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة **F** ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

مثال 7 من واقع الحياة — حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة مقدارها **120 N** بزاوية **°45** كما في الشكل المجاور. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة **10 m** .



الطريقة 1 استعمل قاعدة مسقط الشغل.

مقدار مسقط **F** على $\overrightarrow{AB}$ هو $|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{F}|\cos\theta = 120\cos 45°$. مقدار المسافة $\overrightarrow{AB}$ هو 10 .

قاعدة مسقط الشغل $\quad W = |\mathbf{w}_1|\,|\overrightarrow{AB}|$

بالتعويض $\quad = (120\cos 45°)(10) \approx 848.5$

الطريقة 2 استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة **F** بدلالة مقدار القوة، واتجاه الزاوية هي : $\langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0\rangle$.

قاعدة الضرب الداخلي للشغل $\quad W = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$

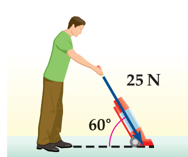
بالتعويض $\quad = \langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle \cdot \langle 10, 0\rangle$

الضرب الداخلي $\quad = [120\cos(-45°)](10) \approx 848.5$

أي أن الشخص يبذل 848.5J من الشغل؛ لدفع السيارة.

تأكد

7) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N. إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض °60 ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6m؟ **75 J**



إرشادات للدراسة

وحدات الشغل وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

مسقط المتجه

مثال 7 يُبيّن كيفية استعمال مسقط متجه في حساب الشغل.

مثال إضافي

7 **حركة:** يدفع شخص آلة قص العشب بقوة مقدارها 40 N بزاوية ثابتة °45. أوجد الشغل المبذول بالجول واللازم لتحريك آلة قص العشب 12 m. **339.4 J**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 22-1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء شائعة قد يقع الطلبة في أخطاء بسيطة عند حساب قياس الزاوية بين متجهين في المسائل 11–14. لذا، اقترح عليهم رسم المتجهات على المستوى الاحداثي لتحديد ما إذا كانت الزاوية بين المتجهين حادة أم منفرجة ومقارنتها مع الزاوية التي يحصلون عليها في الحل الجبري.

اكتشف الخطأ في التمرين 42 ، اقترح على الطلبة الرجوع إلى خصائص الضرب الداخلي صفحة 197 وشجِّع الطلبة على اختبار متجهات ذات قيم حقيقية لكلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ وإذا وجدوا مجموعة من المتجهات لا تحقق الخاصية التجميعية، فإن حاصل الضرب الداخلي للمتجهات ليس تجميعيًا.

تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$، ثم تحقق فيما إذا كانا متعامدين أو لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2\rangle$ **8 ، غير متعامدين**

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ **0 ، متعامدان**

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$ **8 ، غير متعامدين**

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ **0 ، متعامدان**

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2\rangle$ **8 ، غير متعامدين**

6) **زيت الزيتون:** يمثِّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297\rangle$ أعداد عبوتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر، ويمثِّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15\rangle$ سعر العبوة من كلا النوعين على الترتيب (مثال 1)

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. **15620** **ثمن العبوات جميعها هو 15620**

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11\rangle$ **$\sqrt{130} = 11.4$**

8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4\rangle$ **$\sqrt{97} \approx 9.8$**

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18\rangle$ **$5\sqrt{13}$**

10) $\mathbf{t} = \langle 23, -16\rangle$ **28.2**

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$ **14.0°**

12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4\rangle$ **100.0°**

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10\rangle$ **164.7°**

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **82.9°**

15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيمهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6\rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3) **161.6°**

أوجد مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ ، ثم اكتب $\mathbf{u}$ على صورة مجموع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$. (المثالان 4, 5)

16) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **انظر الهامش**

17) $\mathbf{u} = \langle 5, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 4\rangle$

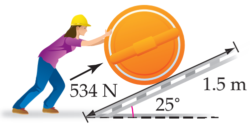
18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

19) $\mathbf{u} = \langle 2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 8\rangle$.

للتمرينات 17-19 انظر ملحق الإجابات

20) **عربة أطفال:** يدفع محمد عربة أخته الصغيرة على سطح يميل عن الأفقي بزاوية 15° . إذا كان وزن الطفلة والعربة معًا 30 lb ، فأوجد القوة اللازمة لمنع العربة من الانزلاق للأسفل، مقرِّبة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 6) **انظر ملحق الإجابات**

21) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا إلى أعلى سطح مائل مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534 N ؛ ليضعه في سيارة شحن. إذا كان السطح يميل عن الأفقي بزاوية 25°، فأوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، قرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (مثال 7) **انظر الهامش**



22) **عربة:** يدفع شخص عربة من أسفل أرض منحدرة إلى الأعلى بقوة مقدارها 125 N. إذا كانت زاوية ميل المنحدر 52° . فأوجد الشغل الذي يبذله الشخص، إذا دفع العربة مسافة 200 m . (مثال 7) **انظر ملحق الإجابات**

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

23) $\langle -2, -8\rangle$ **انظر الهامش**

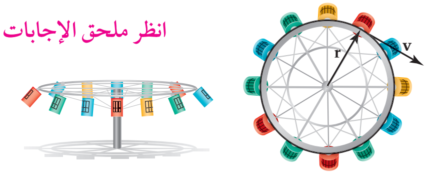
24) $\langle 3, 5\rangle$ **$\langle 10, -6\rangle$**

25) $\langle 7, -4\rangle$ **$\langle 8, 14\rangle$**

26) $\langle -1, 6\rangle$ **$\langle 6, 1\rangle$**

للتمارين 24-26 إجابات ممكنة

27) **عجلة دوارة:** يعامد المتجه $\mathbf{r}$ في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية $\mathbf{v}$ عند أية نقطة من نقاط الدائرة. **انظر ملحق الإجابات**



منظر أمامي　　منظر علوي

a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft ، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/sec . فاكتب الزوج المرتب للمتجه $\mathbf{r}$ في الوضع القياسي إذا كان يصنع زاوية قياسها 35° مع الأفقي، ثم اكتب الزوج المرتب لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه $\mathbf{r}$ ، ومتجه السرعة باستعمال الزوجين المرتبين اللّذين أوجدتهما في الفرع a؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، فأوجد $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي: **للتمرينين 29-28 إجابات ممكنة:**

28) $\mathbf{v} = \langle 3, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$ **$\mathbf{u} = \langle 5, -3\rangle$**

29) $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$ **$\mathbf{u} = \langle -1, 7\rangle$**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	41، 42، 44–56
ضمن المتوسط	23–29 فردي ، 30، 31–39 فردي، 40–42، 44–56
فوق المتوسط	23–56

إجابة:

16) $\vec{u} = \langle 3,6\rangle , \vec{v} = \langle -5,2\rangle$

$\vec{w}_1 = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$

$= \frac{-15+12}{(\sqrt{29})^2}\langle -5, 2\rangle$

$= \frac{-3}{29}\langle -5,2\rangle = \left\langle \frac{15}{29}, \frac{-6}{29}\right\rangle$

$\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$

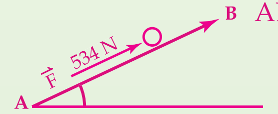
$\Rightarrow \vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{w}_1$

$= \langle 3,6\rangle - \left\langle \frac{15}{29}, \frac{-6}{29}\right\rangle$

$= \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29}\right\rangle$

$\therefore \vec{u} = \left\langle \frac{15}{29}, \frac{-6}{29}\right\rangle + \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29}\right\rangle$

21) $AB = 1.5\text{m}$



$w = |\overline{AB}|.|$ مسقط $\vec{f}$ على $\overline{AB}|$

$= (534.\cos 25°)\,(1.5)$

$= 726\text{J}$

23) ليكن $\vec{b} = \langle x,y\rangle$ عموديًّا على $\vec{a} = \langle -2,-8\rangle$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\Rightarrow -2x - 8y = 0 \Rightarrow y = \frac{-x}{4}$

وإذا افترضنا أن $x = -12$، فإن $y = 3$

$\therefore$ $\langle -12,3\rangle$ هو متجه عمودي على $\langle -2,-8\rangle$

ملاحظة: (يوجد عدد لانهائي من الحلول).

30) **مدرسة:** يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها $100\,N$.

a) إذا بذل الطالب شغلًا مقداره $1747\,J$ ، لسحب حقيبته مسافة $31\,m$، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي؟ $55.7°$

b) إذا بذل الطالب $1000\,J$ بزاوية قياسها $60°$، فما المسافة التي سحب الطالب فيها حقيبته؟ $20\ m$

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غيز ذلك، وبرر إجابتك. للتمرينين 31,32 انظر الهامش

31) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$

32) $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كل مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشر.

33) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ $29.7°$

34) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ $164.9°$

35) **شغل:** رفع سلطان ابن أخيه الذي كتلته $16\,kg$ رأسيًّا إلى أعلى مسافة مقدارها $0.9\,m$. إذا علمت أنه يمكن إيجاد قوة الوزن بالنيوتن باستعمال الصيغة $F = mg$ ، حيث m الكتلة بالكيلو جرام، g تساوي $9.8\,m/sec^2$ ، فكم من الشغل يبذل سلطان لرفع ابن أخيه؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. انظر ملحق الإجابات

تُمثِّل كل مجموعة من النقاط الآتية رؤوس مثلث، أوجد قياسات زوايا كل مثلث منها باستعمال المتجهات.

36) $(2, 3), (4, 7), (8, 1)$ انظر ملحق الإجابات

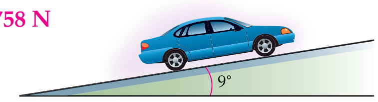
37) $(-4, -3), (-8, -2), (2, 1)$ $34.6°, 35.2°, 110.2°$

إذا علمت كلًّا من $|\mathbf{v}|$, $\mathbf{u}$ والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، فأوجد قيمًا ممكنة للمتجه $\mathbf{v}$ ، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

38) $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, \theta = 45°$ $\langle 9.49, 3.16 \rangle, \langle 3.16, -9.49 \rangle$

39) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, \theta = 121°$ انظر ملحق الإجابات

40) **سيارات:** تقف سيارة في حالة سكون على سطح يميل بمقدار $9°$ عن الأفقي. على فرض أن القوى المؤثِّرة على السيارة هي الجاذبية الأرضية، و $275\,N$ ناتجة عن قوة الفرامل، فكم تزن السيارة تقريبًا؟ $1758\ N$



مسائل مهارات التفكير العليا

41) **تبرير:** اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية: انظر الهامش

إذا كانت $|\mathbf{d}|, |\mathbf{e}|, |\mathbf{f}|$ تُمثِّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين كل من $\mathbf{d}$ ، $\mathbf{e}$ وبين $\mathbf{e}$ ، $\mathbf{f}$ حادتين، فإن الزاوية بين $\mathbf{d}$ ، $\mathbf{f}$ يجب أن تكون قائمة. فسِّر تبريرك.

42) **اكتشف الخطأ:** يدرس كل من فهد وفيصل خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية أي أن: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$. ولكن فيصل عارضه. أيهما على صواب؟ وضِّح إجابتك. فيصل؛ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ عدد ثابت، وعليه فإن $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ ليس معرفًا.

43) **تحدٍّ:** إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين متعامدين، فما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$؟ 0

44) **اكتب:** وضِّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين. انظر الهامش

برهان: إذا كان $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية: للتمارين 45-47 انظر ملحق الإجابات

45) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

46) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

47) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{u}$

48) **برهان:** إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ يساوي $90°$، فأثبت أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين. انظر ملحق الاجابات

مراجعة تراكمية

إذا علمت أن $\mathbf{a} = \langle 10, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2.8 \rangle$, $\mathbf{c} = \left\langle \frac{3}{4}, -9 \right\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-4)

49) $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ $\langle -12, -34.2 \rangle$

50) $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\left\langle -\frac{137}{4}, -9.2 \right\rangle$

51) $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$ $\left\langle \frac{163}{4}, -18.2 \right\rangle$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع المحور x الموجب: (الدرس 2-4)

52) $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ $251.6°$ تقريبًا

53) $\langle -9, 5 \rangle$ $150.95°$ تقريبًا

54) $\langle -7, 7 \rangle$ $135°$ تقريبًا

تدريب على اختبار معياري

55) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -9, 0 \rangle$ ، $\langle -1, -1 \rangle$؟ B

A $0°$ C $90°$

B $45°$ D $135°$

56) إذا كان $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$ ، $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل r، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$؟ C

A $\langle 14, 8 \rangle$ C $\langle -14, 8 \rangle$

B $\langle 14, 6 \rangle$ D $\langle -14, -8 \rangle$

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة كتابة متجه وتوضيح طريقة إيجاد طول المتجه باستعمال الضرب الداخلي، واطلب إليهم تسليم حلولهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 3-4 بإعطائهم اختبار قصير 2 من مصادر الفصل 4.

إجابات:

31) بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان.

32) ليسا متعامدين، ولا متوازيين، حيث إن الزاوية بين متجهين $\theta = 167°$.

41) العبارة خاطئة؛ إذ قد تكون نقطة البداية للمتجهات الثلاثة واحدة ولا تشكل هذه المتجهات مثلثاً مطلقًا، إذا كان الأمر كذلك، فإن الزاوية بين المتجهين $\mathbf{d}$ و $\mathbf{f}$ تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

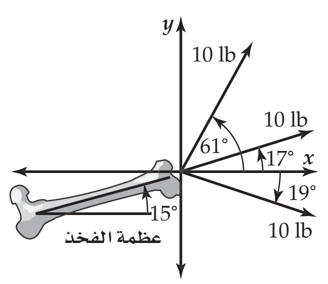
44) إجابة ممكنة: لأي متجهين غير صفريين $\langle c, b \rangle$ ، $\langle a, d \rangle$ يكون الضرب الداخلي لهما يساوي مجموع حاصل ضرب الاحداثيين السينيين والإحداثيين الصاديين أو $ac + bd$.

تنويع التعليم

فوق

توسّع يتم سحب عظم الفخذ أحياناً بقوة لتثبيته عند كسره. ويتأثر العظم بثلاث قوى أثناء عملية السحب. إذا كانت زاوية ميل العظم $15°$ كما في الشكل المجاور فأوجد مقدار محصلة القوى R واتجاهها (إرشاد: حلل كل قوة إلى مركبتيها الأفقية والرأسية).

$R_x \approx 23.9, R_y \approx 8.4, R \approx 25.3$ lb



التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل للتحقق من مدى فهم الطلبة للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

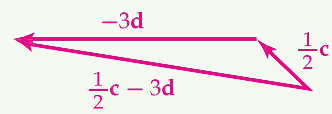
بناء الاختبارات

التقـويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار منتصف الفصل مع مفاتيح إجاباتها.

إجابات:

4)



22) $w_1 = \left\langle -\frac{2}{29}, -\frac{5}{29} \right\rangle$,

$u = \left\langle -\frac{2}{29}, -\frac{5}{29} \right\rangle + \left\langle \frac{205}{29}, -\frac{82}{29} \right\rangle$

23) $w_1 = \left\langle \frac{7}{5}, \frac{21}{5} \right\rangle$,

$u = \left\langle \frac{7}{5}, \frac{21}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \right\rangle$

24) $w_1 = \left\langle \frac{99}{85}, -\frac{22}{85} \right\rangle$,

$u = \left\langle \frac{99}{85}, -\frac{22}{85} \right\rangle + \left\langle \frac{156}{85}, \frac{702}{85} \right\rangle$

25) $w_1 = \left\langle -\frac{60}{37}, \frac{10}{37} \right\rangle$,

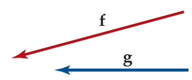
$u = \left\langle -\frac{60}{37}, \frac{10}{37} \right\rangle + \left\langle \frac{23}{37}, \frac{138}{37} \right\rangle$

الفصل 4 اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-4 إلى 3-4

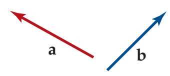
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب سنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة. (الدرس 1-4)

1)



6.2 cm, 185°

2)

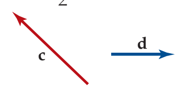


1.1 cm, 57°

3) **التزلج:** يسحب شخص مزلجة على الجليد بقوة مقدارها 50 N بزاوية 35° مع الأفقي. أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة، قرِّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-4)

40.96 N, 28.68 N

4) ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$. (الدرس 1-4) انظر الهامش



اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته، في كل مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. (الدرس 2-4)

5) $B(3,-1), C(4,-7)$ $\mathbf{i} + -6\mathbf{j}$

6) $B(10,-6), C(-8,2)$ $-18\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

7) $B(1,12), C(-2,-9)$ $-3\mathbf{i} + -21\mathbf{j}$

8) $B(4,-10), C(4,-10)$ 0

9) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لـ $\overline{AB}$، حيث $A(-5,3)$ نقطة بدايته و $B(2,-1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 2-4) B

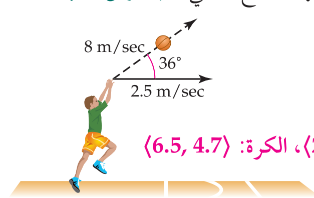
A $\langle 4, -1 \rangle$

B $\langle 7, -4 \rangle$

C $\langle -4, 7 \rangle$

D $\langle -6, 4 \rangle$

10) **كرة سلة:** أثناء لعبة كرة سلة، ركض راشد باتجاه السلة بسرعة 2.5 m/sec، ومن منتصف الملعب صوَّب كرة بسرعة 8 m/sec بزاوية قياسها 36° مع الأفقي. (الدرس 2-4)



a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللّذين يُمثّلان سرعة راشد، ومسار الكرة، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

a) راشد: $\langle 2.5, 0 \rangle$، الكرة: $\langle 6.5, 4.7 \rangle$

b) 10.2 m/sec بزاوية قياسها 27.6° مع الأفقي تقريبًا.

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطى نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 2-4)

11) $A(-4,2), B(3,6)$ $\langle 7, 4 \rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$

12) $Q(1,-5), R(-7,8)$ $\langle -8, 13 \rangle, \sqrt{233} \approx 15.3$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، قرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 3-4)

13) $\mathbf{u} = \langle 9, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -2 \rangle$ 93°

14) $\mathbf{u} = \langle 8, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 4 \rangle$ 90°

15) $\mathbf{u} = \langle 2, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 8 \rangle$ 114°

16) **اختيار من متعدد:** إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 4 \rangle, \mathbf{w} = \langle 8, -5 \rangle$، فما ناتج $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$؟ (الدرس 3-4) B

A -2

B -18

C 15

D 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كل مما يأتي، ثم تحقّق فيما إذا كانا متعامدين أو لا: (الدرس 3-4)

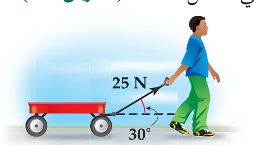
17) $\langle 2, -5 \rangle \cdot \langle 4, 2 \rangle$ −2، غير متعامدين

18) $\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 7, 4 \rangle$ 16، غير متعامدين

19) $\langle 1, -6 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle$ −43، غير متعامدين

20) $\langle 3, -6 \rangle \cdot \langle 10, 5 \rangle$ 0، متعامدان

21) **عربة:** يسحب أحمد عربة بقوة مقدارها 25 N، وبزاوية 30° مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 3-4)



a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. 3247.6 J

b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي 40°، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أو أقل؟ فسّر إجابتك. أقل؛ سيبذل 2872.7 J

أوجد مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ ، ثم اكتب $\mathbf{u}$ على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$. (الدرس 3-4) للأسئلة 22-25 انظر الهامش

22) $\mathbf{u} = \langle 7, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 5 \rangle$

23) $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$

24) $\mathbf{u} = \langle 3, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 2 \rangle$

25) $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1 \rangle$

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة	**إذا** أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	**فاختر** أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب الدروس 1-4 ، 2-4 ، 3-4	**مصادر الفصل** دليل الدراسة والمراجعة
كتاب التمارين الفصل 4	**زيارة الموقع** www.obeikaneducation.com
دليل المعلم مشروع الفصل، ص (178)	
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

4-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد
Vectors in Three-Dimensional Space

فيما سبق

درست المتجهات في النظام ثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أعيِّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد.
- أعبِّرُ عن المتجهات جبريًا، وأجري العمليات عليها في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

المفردات الأساسية

نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system

المحور z
z-axis

الثُمن
octant

الثلاثي المرتب
ordered triple

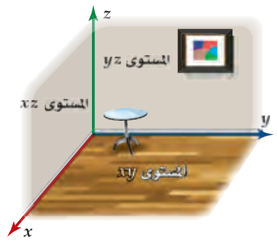
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

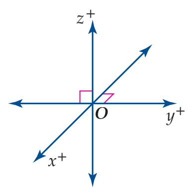
يتحدّد اتجاه الصاروخ بعد إطلاقه بدلالة اتجاهه في المستوى الإحداثي، وزاوية في الفضاء تحدّد اتجاهه بالنسبة إلى الأفقي. وبما أن مفاهيم المسافة، والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء ثلاثي الأبعاد.

الإحداثيات في الفضاء ثلاثي الأبعاد يتكوّن المستوى الإحداثي ثنائي الأبعاد من خطي أعداد متعامدين، المحور x والمحور y اللّذين يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاط في المستوى. وتحتاج إلى **نظام إحداثيٍّ مكوَّن من ثلاثة أبعاد**؛ لتعيين نقطة في الفضاء.

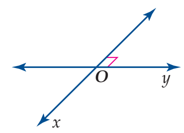
ابدأ بالمستوى $x\,y$، وضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل (1). ثم أضف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y، كما في الشكل (2). ويقسم المحور الإضافي الفضاء إلى 8 مناطق يُسمَّى كلٌّ منها **الثُمن**، حيث يمثِّل سطح الأرض المستوى $x\,y$، ويمثِّل الجداران المستويين xz، yz كما في الشكل (3).



الشكل(3)



الشكل(2)



الشكل(1)

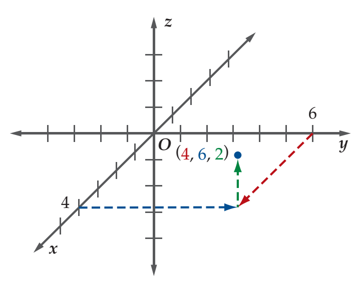
تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z). ولتعيين مثل هذه النقطة، عيِّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى $x\,y$، ثم تحرك للأعلى، أو الأسفل موازيًا للمحور z حسب المسافة المتجهة التي يُمثِّلها z.

مثال 1 تعيين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

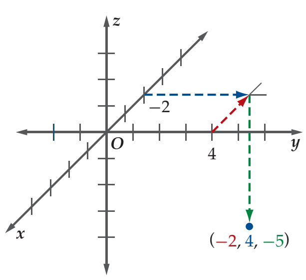
a) $(4, 6, 2)$

عيِّن $(4, 6)$ في المستوى $x\,y$ بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطة على بُعد وحدتين للأعلى من الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



b) $(-2, 4, -5)$

عيِّن $(4, -2)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطة على بُعد 5 وحدات للأسفل من الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



تأكد انظر ملحق الإجابات

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثية الأبعاد:

1A) $(-3, -4, 2)$ **1B)** $(3, 2, -3)$ **1C)** $(5, -4, -1)$

4-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-4

تمثيل المتجهات في النظام ثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا.

الدرس 4-4

تعيين النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد.

التعبير عن المتجهات جبريًّا، واجراء العمليات عليها في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

ما بعد الدرس 4-4

إيجاد الضرب الداخلي والزاوية بين متجهين في الفضاء.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- كم عدد أجزاء المستوى الاحداثي؟ وماذا يسمى كل جزء منها؟ أربعة ، ربع
- ما الإشارات الممكنة للأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي ثنائي الأبعاد؟ $(+,+), (-,+), (-,-), (+,-)$
- ما عدد أجزاء نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد؟ وماذا يسمى كل جزء منها؟ ثمانية ، ثمن
- ما الإشارات الممكنة للثلاثيات المرتبة في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد.

$(+,+,+), (-,-,-), (-,-,+),$
$(+,-,-), (+,-,+), (-,+,-),$
$(+,+,-), (-,+,+)$

مصادر الدرس 4-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (208)	• تنويع التعليم ، ص (208)	• تنويع التعليم ، ص (207,210)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (25) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (25) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (25) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الإحداثيات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

مثال 1 يُبيّن كيفية تعيين نقطة في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 عين كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد.
للفرعين a ,b انظر الهامش

a) $(1, 5, 3)$.

b) $(-1, -5, 2)$.

2 **هندسة معمارية :** صمم مهندس معماري غرفة خشبية على سطح أحد المنازل، واستعمل قطعة خشب طويلة؛ لتثبيت السقف بحيث ينتهي طرفاها بنقطتين إحداثياتهما $(70, 80, 20)$ ، $(30, 40, 10)$ ، وكانت الإحداثيات معطاة بالقدم، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول قطعة الخشب.
57.45ft

b) يرغب صاحب المنزل بتثبيت مصباح كهربائي في منتصف قطعة الخشب. أوجد إحداثيات موقع المصباح. $(50, 60, 15)$

تشبه عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

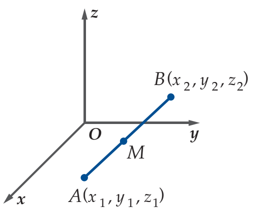
مفهوم أساسي: قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالقانون:

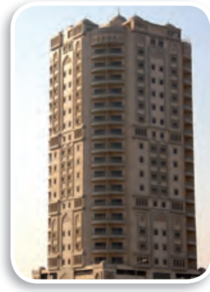
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالقانون:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



سوف تبرهن قانون المسافة في التمرين 60

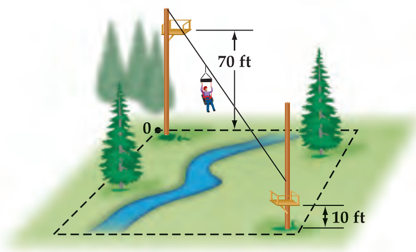


الربط مع واقع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

مثال 2 من واقع الحياة: المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

رحلة : تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة تربط بين منصتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين $(10, 12, 50)$ ، $(70, 92, 30)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصتين إلى أقرب قدم.

استعمل قانون المسافة بين نقطتين.

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$ قانون المسافة

$$= \sqrt{(70-10)^2+(92-12)^2+(30-50)^2}$$ $(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$, $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$

$$\approx 101.98$$ بالتبسيط

أي أننا نحتاج إلى حبل طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين.

استعمل قانون نقطة المنتصف في الفضاء .

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$ قانون المنتصف

$$= \left(\frac{10+70}{2}, \frac{12+92}{2}, \frac{50+30}{2}\right)$$ $(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$, $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$

$$= (40, 52, 40)$$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي $(40, 52, 40)$

تأكد

2A) نعم؛ تبعُد الطائرتان 2045 ft تقريبًا، وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها وهي نصف ميل تقريبًا.

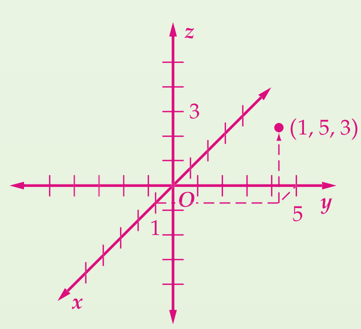
2) **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها. إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين $(300, 150, 30000)$ ، $(450, -250, 28000)$، مع العلم أن الإحداثيات معطاة بالأقدام.

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

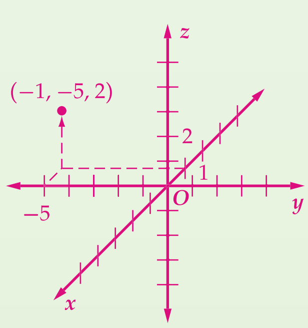
B) إذا أطلق ألعابٌ نارية، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟ $(375, -50, 29000)$

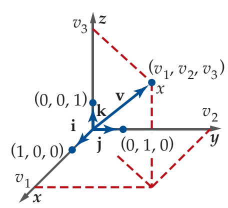
إجابات (مثال إضافي):

1a)



1b)





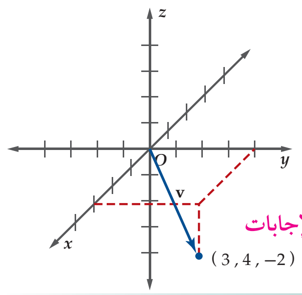
الشكل(4)

المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالثلاثي المرتب $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$. كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالثلاثي $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$، وعن متجهات الوحدة القياسية بالثلاثيات $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$، كما في الشكل (4). ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة متجهات الوحدة $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ بالصورة $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال 3 تعيين متجه في الفضاء

عيّن موقع المتجه $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2\rangle$، ومثّله بيانيًّا.

عيّن النقطة $(3, 4, -2)$، ثم مثّل بيانيًّا المتجه $\mathbf{v}$، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



✓ تأكد

عيّن كلًّا من المتجهين الآتيين في الفضاء، ومثّله بيانيًّا:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3\rangle$ للتدريبين 3A-3B انظر ملحق الإجابات

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + -3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

و كما في المتجهات ذات البُعدين نجد الصورة الإحداثية لقطعة مستقيمة متجهة من $A(x_1, y_1, z_1)$ إلى $B(x_2, y_2, z_2)$، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

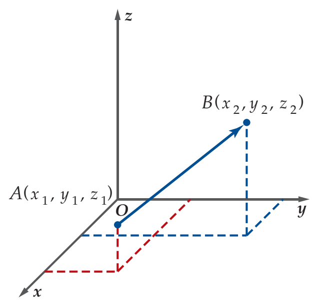
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

وعندها يكون $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$،

وهذا يعني أنه إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$



مثال 4 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

الصورة الإحداثية لمتجه

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

$(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1), (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

$$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1\rangle = \langle 7, 8, -7\rangle$$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو:

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7\rangle$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2} = 9\sqrt{2}$$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7\rangle, |\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

$$= \frac{\langle 7, 8, -7\rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18}\right\rangle$$

✓ تأكد

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

4A) $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$ **4B)** $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

4A) $\langle 1, 9, 3\rangle, \sqrt{91}, \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91}\right\rangle$

4B) $\langle 4, -1, 2\rangle, \sqrt{21}, \left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}\right\rangle$

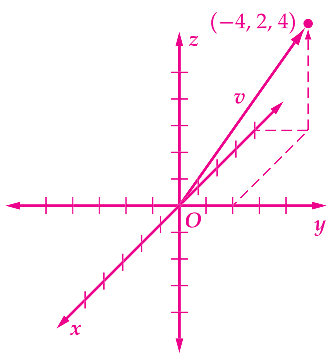
المتجهات في الفضاء

مثال 3 يُبيّن كيفية تعيين متجه في الفضاء.

مثال 4 يُبيّن كيفية التعبير عن المتجهات في الفضاءجبريًّا.

مثالان إضافيان

3 عيّن موقع المتجه $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 4\rangle$، ومثّله بيانيًّا.



4 أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2, -1)$ ونقطة نهايته $B(1, 5, -3)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\langle -2, 7, -2\rangle, \sqrt{57}, \left\langle -\frac{2\sqrt{57}}{57}, \frac{7\sqrt{57}}{57}, -\frac{2\sqrt{57}}{57}\right\rangle$

إرشادات للمعلم الجديد

ترتيب الإحداثيات في المثال 4، ذكّر الطلبة بأن عكس ترتيب نقطتي البداية والنهاية يغير المتجه من $\overrightarrow{AB}$ إلى $\overrightarrow{BA}$، وهما متجهان لهما الطول نفسه، ولكن في اتجاهين متعاكسين.

تنويع التعليم

فوق

توسّع ما الشكل ثلاثي الأبعاد الذي رؤوسه:

$A(0, 4, 5), B(0, 5, -1), C(4, 5, -1), D(0, 3, 3), E(0, 4, -3), F(4, 4, -3)$؟ منشور ثلاثي

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، أو بدلالة متجهات الوحدة، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح، والضرب في عدد حقيقي كما هو الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي **العمليات على المتجهات في الفضاء**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

مـثال 5 **العمليات على المتجهات في الفضاء**

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$ بالتعويض

$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$ ضرب متجه في عدد حقيقي، وجمع متجهين

$= \langle 8, -24, 18 \rangle$

b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$ بالتعويض

$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$ ضرب متجه في عدد حقيقي

$= \langle 9, -10, -7 \rangle$ بجمع المتجهات

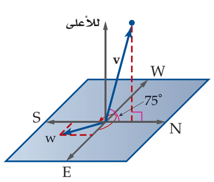
تأكد

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

5A) $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ $\langle 12, 16, -56 \rangle$

5B) $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$ $\langle 9, -42, 45 \rangle$

مثال 6 من واقع الحياة **استعمال المتجهات في الفضاء**



صواريخ: أُطلق صاروخ بسرعة 200 mi/h باتجاه الشمال، وبزاوية قياسها 75° بالنسبة للأفقي. إذا هبت الرياح من الشمال الغربي بسرعة 5 mi/h، فأوجد المتجه الذي يمثِّل محصِّلة السرعة بالنسبة إلى نقطة الإطلاق.

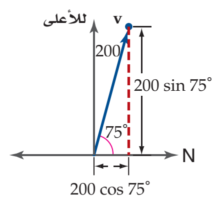
افترض أن $\mathbf{i}$ تشير إلى الشرق، $\mathbf{j}$ إلى الشمال، و $\mathbf{k}$ إلى أعلى.

يشير المتجه $\mathbf{v}$ إلى سرعة الصاروخ، $\mathbf{w}$ إلى سرعة الرياح كما في الشكل المجاور.

لاحظ أن $\mathbf{w}$ يكون باتجاه الجنوب الشرقي، لأن الرياح تهب من جهة الشمال الغربي.

وبما أن اتجاه $\mathbf{v}$ هو 75° ، وطوله 200، يمكنك إيجاد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ كما في الشكل (5) .

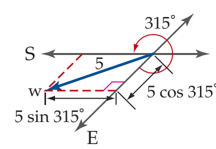
$\mathbf{v} = \langle 0, 200 \cos 75°, 200 \sin 75° \rangle \approx \langle 0, 51.8, 193.2 \rangle$ ،



الشكل(5)

زاوية $\mathbf{w}$ بالنسبة للشرق قياسها 315° . وبما أن $|\mathbf{w}| = 5$ ، فإن الصورة الإحداثية لهذا المتجه هي:

$\mathbf{w} = \langle 5 \cos 315°, 5 \sin 315°, 0 \rangle \approx \langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$ ، كما في الشكل (6) .



الشكل(6)

وتكون محصِّلة سرعة الصاروخ هي $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 0, 51.8, 193.2 \rangle + \langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$

$= \langle 3.5, 48.3, 193.2 \rangle = 3.5\mathbf{i} + 48.3\mathbf{j} + 193.2\mathbf{k}$

تأكد

6) **ملاحة جوية :** أقلعت طائرة بسرعة 250 mi/h باتجاه الشرق، وبزاوية قياسها 18° بالنسبة للأفقي. وكانت الرياح تهب من الشمال الشرقي بسرعة 10 mi/h ، أوجد المتجه الذي يُمثّل محصلة السرعة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. افترض أن $\mathbf{i}$ تشير إلى الشرق، $\mathbf{j}$ إلى الشمال، و $\mathbf{k}$ إلى أعلى. انظر الهامش

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض نموذجًا للفضاء الإحداثي ثلاثي الأبعاد على السبورة. عين نقطة وكلف أحد الطلبة بإيجاد إحداثياتها. اسحب النقطة إلى أعلى أو إلى أسفل باتجاه المحور z، وإلى الأمام أو إلى الخلف باتجاه المحور x، وإلى اليسار أو إلى اليمين باتجاه المحور y. وكلف الطلبة بإيجاد إحداثيات النقطة على صورة ثلاثي مرتب بعد كل مرة تسحب فيها النقطة. ناقش أوجه الشبه والاختلاف بين الزوج والثلاثية المرتبة.

المتجهات في الفضاء

المثالان 6 , 5 يُبيّنان كيفية إجراء العمليات على المتجهات في الفضاء.

مثالان إضافيان

5 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 2 \rangle$، $\mathbf{w} = \langle -6, 3, -2 \rangle$، $\mathbf{z} = \langle 0, 5, -1 \rangle$:

a) $3\mathbf{v} - \mathbf{w} - \mathbf{z}$ $\langle 9, 7, 9 \rangle$

b) $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w} + 3\mathbf{z}$ $\langle -13, 16, -9 \rangle$

6 **صواريخ:** أطلق صاروخ بسرعة 100m /sec باتجاه الجنوب، وبزاوية قياسها 80° بالنسبة للأفقي. إذا هبت الرياح من الاتجاه S 38° W بسرعة 5m /sec ، فأوجد المتجه الذي يمثل محصلة السرعة بالنسبة إلى نقطة الإطلاق.

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 3.94, -14.29, 98.48 \rangle$، أو $3.94\mathbf{i} - 14.29\mathbf{j} + 98.48\mathbf{k}$

تنويع التعليم دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة بناء نظام إحداثيات ثلاثي الأبعاد باستعمال أعوادٍ من الخشب، ثم اطلب إليهم تدريج محاوره وتلوين الجزء السالب منها. وفي الوقت الذي يرفع فيه أحد الطلبة النموذج كلف طلبةً آخرين بتعيين نقاط وتسميتها بثلاثيات مرتبة.

إجابة (تأكد):

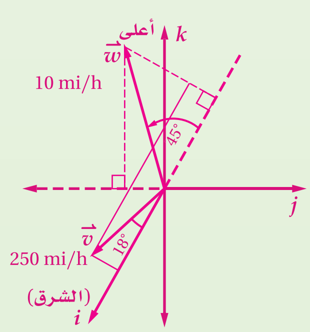
6) $\vec{v} = \langle 250 \cos 18°, 0, 250 \sin 18° \rangle$

$\approx \langle 237.8, 0, 77.3 \rangle$

$\vec{w} = \langle -10\cos 45°, -10\sin 45, 0 \rangle$

$\approx \langle -7.1, -7.1, 0 \rangle$

$\vec{r} = \vec{v} + \vec{w} = \langle 230.7, -7.1, 77.3 \rangle$



التركيز في المحتوى الرياضي

خصائص المتجهات في الفضاء

تشبه خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء مثيلاتها في المستوى. ويمكن تعريف عمليات الجمع والطرح والضرب في ثابت ومقدار المتجه بالإضافة إلى المساواة بدلالة مركبات المتجه $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$، وكان n أي عدد حقيقي فإن:

- $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ إذا وفقط إذا كانت $a_1 = b_1$، $a_2 = b_2$، $a_3 = b_3$.

$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \langle a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\rangle$

- $n\mathbf{a} = \langle na_1, na_2, na_3\rangle$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–45 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء شائعة قد يجد بعض الطلبة صعوبة في البدء بحل التمارين 53–51. ذكرهم أن المثلث القائم الزاوية فيه زاوية قياسها 90° وضلعان متعامدان، وأن المثلث متطابق الضلعين فيه ضلعان لهما الطول نفسه، وأن أطوال أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع متساوية في الطول، وأنه لا يوجد ضلعان لهما الطول نفسه في المثلث مختلف الأضلاع.

تدرب وحل المسائل

للتمارين 8-1 انظر ملحق الإجابات

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات ثلاثية الأبعاد: (مثال 1)

1) $(1, -2, -4)$ 2) $(3, 2, 1)$

3) $(-5, -4, -2)$ 4) $(-2, -5, 3)$

5) $(-5, 3, 1)$ 6) $(2, -2, 3)$

7) $(4, -10, -2)$ 8) $(-16, 12, -13)$

للتمارين 12-9 انظر ملحق الإجابات

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطى نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

9) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$ 10) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

11) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$ 12) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

13) **طيارون:** في أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(675, -121, 19300)$، وإحداثيات موقع طائرة أخرى $(-289, 715, 16100)$، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم. **3445 ft**

b) عيِّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة. **(193, 297, 17700)**

للتمارين 21-14 انظر ملحق الإجابات

عيِّن موقع كلٍّ من المتجهات الآتية في الفضاء، ثم مثِّله بيانيًّا: (مثال 3)

14) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4\rangle$ 15) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2\rangle$

16) $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4\rangle$ 17) $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3\rangle$

18) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 19) $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

20) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 21) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overline{AB}$. (مثال 4)

للتمارين 31-22 انظر ملحق الإجابات

22) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

23) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

24) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$

25) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$

26) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$

27) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$

28) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$

29) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

30) $A(-5, 12, 17), B(6, -11, 4)$

31) $A(9, 3, 7), B(-5, -7, 2)$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: **34) $\langle 38, -36, -65\rangle$**

$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3\rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7\rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4\rangle$. (مثال 5)

32) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ **$\langle 88, 6, 99\rangle$** 33) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ **$\langle -65, -18, 56\rangle$**

34) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$ 35) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$ **$\langle 48, 12, -38\rangle$**

36) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$ **$\langle -68, -24, 55\rangle$** 37) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ **$\langle 22, 36, 3\rangle$**

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: **40) $\langle -22, 14, -1\rangle$**

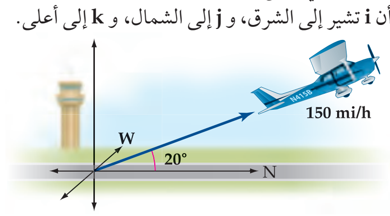
$\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (مثال 5)

38) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$ **$\langle -27, 16, -21\rangle$** 39) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$ **$\langle -63, 28, 56\rangle$**

40) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ 41) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$ **$\langle 50, -18, 10\rangle$**

42) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$ **$\langle -18, -6, 6\rangle$** 43) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ **$\langle -13, 2, 21\rangle$**

44) **طائرات:** أقلعت طائرة باتجاه الشمال بسرعة مقدارها 150 mi/h وبزاوية قياسها 20° بالنسبة للأفقي كما في الشكل أدناه. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 8 mi/h من الجنوب الغربي، فأوجد المتجه الذي يمثِّل محصِّلة السرعة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. افترض أن **i** تشير إلى الشرق، و **j** إلى الشمال، و **k** إلى أعلى. (مثال 6)



5.7i + 146.6j + 51.3k

45) **ألعاب القوى:** رمى حسن الرمح باتجاه الجنوب بسرعة 18 mi/h، وبزاوية قياسها 48° بالنسبة للأفقي. إذا كانت الرياح تهب بسرعة مقدارها 12 mi/h، وبزاوية S 15° E، فأوجد المتجه الذي يُمثِّل محصلة سرعة الرمح. افرض أن **i** تشير إلى الشرق، و **j** إلى الشمال، و **k** إلى أعلى. (مثال 6) **انظر ملحق الإجابات**

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$، فأوجد إحداثيات النقطة P في كل مما يأتي:

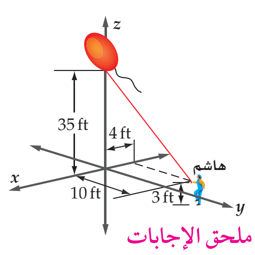
46) $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$ **(4, −2, −1)**

47) $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$ **(−3, 6, −1)**

48) $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$ **(3, −2, 7)**

49) $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ **$\left(-\frac{11}{2}, -8, 2\right)$**

50) **تطوُّع:** تَطوَّع هاشم لحمل بالون كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل المجاور، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدم. **انظر ملحق الإجابات**



تحقَّق فيما إذا كانت النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي تكوِّن رؤوسًا لمثلث قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع:

51) $A(3, 1, 2), B(5, -1, 1), C(1, 3, 1)$ **متطابق الضلعين**

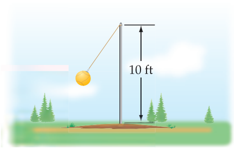
52) $A(4, 3, 4), B(4, 6, 4), C(4, 3, 6)$ **قائم الزاوية**

53) $A(-1, 4, 3), B(2, 5, 1), C(0, -6, 6)$ **مختلف الأضلاع**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	60، 74–63
ضمن المتوسط	53–47 فردي ، 54، 55، 57، 59، 60، 74–63
فوق المتوسط	74 – 46

54) **ألعاب:** في اللعبة الظاهرة أدناه تُربط كرة بطرف حبل ويثبت الطرف الآخر للحبل برأس عمود ارتفاعه 10 ft. ويقف لاعبان في اتجاهين معاكسين، ويضرب أحدهما الكرة بحيث تدور حول العمود وتصل إلى اللاعب الآخر ليصدها، فترتد إلى اللاعب الأول. إذا كانت إحداثيات نقطة التقاء الحبل مع العمود (0,0,10) وضرب اللاعب الكرة من نقطة إحداثياتها (5,3.6,4.9) ، فأوجد مقدار المتجه الذي يمثل طول الحبل إذا كانت الإحداثيات المعطاة بالأقدام. **8 ft**



55) **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء، لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r . **انظر ملحق الإجابات**

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في التمرين 55؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي: **56-59 للتمارين انظر الهامش**

56) مركزها $(-4, -2, 3)$ ، طول نصف قطرها 4

57) مركزها $(6, 0, -1)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

58) مركزها $(5, -3, 4)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

59) مركزها $(0, 7, -1)$ ، طول نصف قطرها 12

مسائل مهارات التفكير العليا

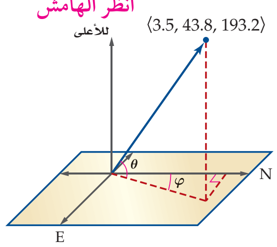
60) **تبرير:** أثبت صحة قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء. (إرشاد: استعمل نظرية فيثاغورس مرتين) **انظر ملحق الإجابات**

61) **تحدٍّ:** اعتمد على المثال 6 والشكل أدناه للإجابة عما يأتي: **انظر الهامش**

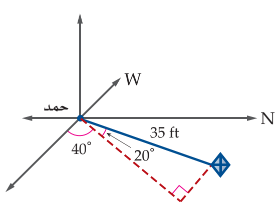
a) احسب محصلة سرعة الصاروخ.

b) أوجد زاوية الاتجاه الربعي لحركة الصاروخ .

c) أوجد قياس الزاوية θ التي يميل بها خط سير الصاروخ عن الأفقي .



62) **تحدٍّ:** يقف حمد في أرض مفتوحة باتجاه N 50° E كما في الشكل المجاور. ويمسك بيده خيط طائرة ورقية طوله 35 ft. إذا كان الخيط يصنع زاوية قياسها 20° مع سطح الأرض، فأوجد مركبات المتجه الذي يُمثّل المسافة بين حمد والطائرة. (إرشاد: استعمل النسب المثلثية؛ لإيجاد x, y, z). **$\langle 25.2, 21.14, 11.97\rangle$**



63) **اكتب:** اشرح موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر معقولية، وآخر يكون فيه استعمال نظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد أكثر معقولية. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

أوجد مسقط u على v في كل مما يأتي، ثم اكتب u على صورة جمع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط u على v : (الدرس 4-3) **للتمارين 64-66 انظر الهامش**

64) $\mathbf{u} = \langle 6, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$

65) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1\rangle$

66) $\mathbf{u} = \langle 5, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -2\rangle$

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

67) $A(6, -4), B(-7, -7)$ **$\langle -13, 3\rangle, \sqrt{178} \approx 13.3$**

68) $A(-4, -8), B(1, 6)$ **$\langle 5, 14\rangle, \sqrt{221} \approx 14.9$**

69) $A(-5, -12), B(1, 6)$ **$\langle 6, 18\rangle, \sqrt{360} \approx 19.0$**

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطى نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة i , j في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

70) $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ **$\frac{21}{5}\mathbf{i} + -\frac{2}{3}\mathbf{j}$**

71) $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$ **$-\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{7}\mathbf{j}$**

72) $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$ **$-15.8\mathbf{i} + -6.1\mathbf{j}$**

تدريب على اختبار معياري

73) مانوع المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(-2.2,4.3,5.6)$، $B(0.7,9.3,15.6)$، $C(3.6,14.3,5.6)$ ؟ **B**

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

74) تطير طائرة بسرعة 100 m/sec باتجاه الغرب. إذا علمت أن الرياح تهب من الجنوب بسرعة 30 m/sec، فما القيمة التقريبية لمقدار محصِّلة سرعة الطائرة؟ **C**

A 4 m/sec

B 95.4 m/sec

C 104.4 m/sec

D 100 m/sec

تنويع التعليم

فوق

توسّع يكون الجسم في وضع اتزان إذا كانت محصلة القوى المؤثرة عليه صفرًا. اسأل الطلبة إذا أثرت ثلاث قوى على جسم ومُثلت بالمتجهات $\langle -6, 2, -1\rangle, \langle 5, 2, 3\rangle, \langle 4, -1, 3\rangle$. فما المتجه الرابع الذي يؤثر على الجسم ويجعله في حالة اتزان. **$\langle -8, -3, 0\rangle$**

64) $\langle 1.6, -0.8\rangle$, $\mathbf{u} = \langle 1.6, -0.8\rangle + \langle 4.4, 8.8\rangle$

65) $\langle -0.19, -0.04\rangle$, $\mathbf{u} = \langle -0.19, -0.04\rangle + \langle -0.81, 4.04\rangle$

66) $\langle 2.4, -1.2\rangle$, $\mathbf{u} = \langle 2.4, -1.2\rangle + \langle 2.6, 5.2\rangle$

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة كتابة فقرة حول ما تعلموه في هذا الدرس، وكيف سيساعدهم في الدرس القادم المتعلق بإيجاد الزاوية بين متجهين.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 4-4 بإعطائهم اختبار قصير 3 من مصادر الفصل 4.

إجابات:

56) $(x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$

57) $(x-6)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{4}$

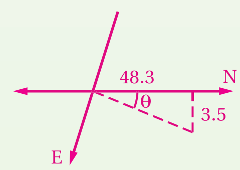
58) $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 3$

59) $x^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 144$

61)

a) $|\vec{v}| = \sqrt{3.5^2 + 48.3^3 + 193.2^2}$
$\approx 199.2 \text{mi/h}$

b) زاوية الاتجاه الربعي للصاروخ، هي الزاوية في المستوى xy والتي يصنعها اتجاه حركة الصاروخ مع المحور y الموجب كما في الشكل أدناه



$\tan\theta = \frac{3.5}{48.3}$

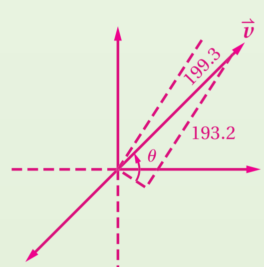
$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3.5}{48.3}\right) \approx 4.1°$

أي أن الاتجاه الربعي للصاروخ هو N 4.1° E

c) لاحظ أن متجه السرعة $\vec{v}$ يشكل مع مركبتيه (الأفقية والرأسية) مثلثًا قائم الزاوية.

$\sin\theta = \frac{193.2}{199.2} \approx 0.97$

$\Rightarrow \theta \approx 76°$



4-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء
Dot and Cross Products of Vectors in Space

فيما سبق
درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى.

والآن
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء.
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات الأساسية
الضرب الاتجاهي
cross product
العزم
torque
متوازي السطوح
parallelepiped
الضرب القياسي الثلاثي
triple scalar product

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
لإيجاد فعالية قوة رافعة تسبب دورانًا حول محور يستعمل الضرب الاتجاهي لحساب كمية يطلق عليها العزم.

الضرب الداخلي في الفضاء يشبه إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هو الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

مفهوم أساسي **الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء**

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. ويكون المتجهان $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال 1 **إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة**

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد فيما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$-35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متعامدان.

تأكد

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد فيما إذا كانا متعامدين:

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$ **0، متعامدان**

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$ **4، غير متعامدين**

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، فإن $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

مثال 2 **الزاوية بين متجهين في الفضاء**

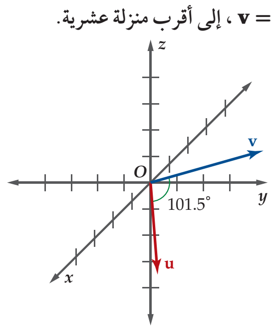
أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ ، إلى أقرب منزلة عشرية.

الزاوية بين متجهين
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

$\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$
$$\cos \theta = \frac{\langle 3, 2, -1 \rangle \cdot \langle -4, 3, -2 \rangle}{|\langle 3, 2, -1 \rangle|\,|\langle -4, 3, -2 \rangle|}$$

بإيجاد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين
$$\cos \theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}$$

بالتبسيط، والحل بالنسبة إلى θ
$$\theta = \cos^{-1} \frac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$$



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ هي $101.5°$ تقريبًا.

تأكد

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلة عشرية. **124.6°**

4-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-5
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي .

الدرس 4-5
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين والزاوية بينهما في الفضاء.
إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهات واستعماله في إيجاد المساحات والحجوم.

ما بعد الدرس 4-5
تحليل حقل المتجهات .

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل :
- ما القوى التي تجعل فتح الباب صعبًا؟ **إجابة ممكنة : وزن الباب، الاحتكاك في مفصلات الباب**
- ما أفضل علاقة يجب أن تكون بين اتجاه القوة والباب لتحريكه؟ **التعامد**
- كلما تحركت يدك مقتربة من المفصلات ماذا يحدث للقوى اللازمة لتحريك الباب؟

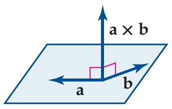
إجابة ممكنة: كلما اقتربت نقطة دفع الباب من المفصلات، تحتاج إلى قوة أكبر .

الضرب الداخلي في الفضاء
مثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء للتحقق من كونهما متعامدين.
مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد الزاوية بين متجهين في الفضاء.

مصادر الدرس 4-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (214)	• تنويع التعليم ، ص (214)	• تنويع التعليم ، ص (214, 216)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (26) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (26) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين ، ص (26) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء. وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ a cross b . ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.



مفهوم أساسي **الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء**

إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو المتجه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّد مصفوفة من الرتبة 3×3 باستعمال قاعدة الأقطار على المحدّد أدناه، الذي يتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} & \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_3 & \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} & \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_3 & \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 \end{array}\right|$$

$$= (\mathrm{i}a_2b_3 + \mathrm{j}a_3b_1 + \mathrm{k}a_1b_2) - (\mathrm{k}a_2b_1 + \mathrm{i}a_3b_2 + \mathrm{j}a_1b_3)$$

بتطبيق قاعدة الأقطار لإيجاد قيمة محدّد مصفوفة من الرتبة 3×3

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

تنبيه!

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى ثنائي الأبعاد.

مثال 3 إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$= \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right|$$

بتطبيق قاعدة الأقطار لإيجاد قيمة محدّد مصفوفة من الرتبة 3×3

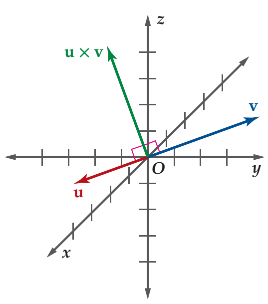
$$= (-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) - (6\mathbf{k} + 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$ بالتبسيط

$$= \langle -5, -6, 3\rangle$$ الصورة الإحداثية

نلاحظ من التمثيل البياني المجاور أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

ولإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.



$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$

$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle 3, -2, 1\rangle$

$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$

$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✓

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle -3, 3, 1\rangle$

$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$

$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✓

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{v}, \mathbf{u}$.

تأكد 3A, 3B للإثبات انظر ملحق الإجابات

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3A) $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

3A) $\langle 9, -21, -6\rangle$

3B) $\langle -1, -7, 3\rangle$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدد فيما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -1, 6, -3\rangle$، $\mathbf{v} = \langle 3, -1, -3\rangle$.

0، متعامدان

b) $\mathbf{u} = \langle 2, 4, -6\rangle$، $\mathbf{v} = \langle -3, 2, 4\rangle$.

-22، غير متعامدين

2 أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ إذا كان $\mathbf{u} = \langle -4, -1, -3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 3, 4\rangle$ إلى أقرب منزلة عشرية. $168.6°$

الضرب الاتجاهي

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء.

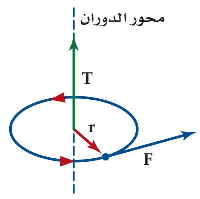
مثال 4 يُبيّن كيفية استعمال الضرب الاتجاهي لحساب العزم.

مثال إضافي

3 أوجد الضرب الإتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يُعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. $\langle -10, -10, -25\rangle$،

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \langle -10, -10, -25\rangle \cdot \langle 6, -1, -2\rangle$$
$$= -60 + 10 + 50 = 0$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \langle -10, -10, -25\rangle \cdot \langle -1, -4, 2\rangle$$
$$= 10 + 40 - 50 = 0$$

يمكنك استعمال الضرب الاتجاهي؛ لإيجاد مقدار متجه **العزم** الذي يقيس فعالية قوة تؤثر على رافعة، وتسبِّب دورانًا حول محور الدوران. ويكون متجه العزم **T** عموديًّا على المستوى المتكوّن من المسافة المتجهة **r** من محور الدوران إلى نقطة تأثير القوة، والقوة المؤثرة **F** كما في الشكل المجاور. لذا، فإن متجه العزم هو **T = r × F**، ووحدة قياسه هي (N • m) .



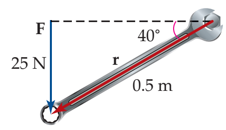
الربط مع واقع الحياة

ميكانيكي السيارات

يقوم ميكانيكيو السيارات بإصلاح أعطال السيارات، بدءًا من الأعطال البسيطة وانتهاءً بالأعطال الكبيرة. ويجب أن يكون لدى الميكانيكي مهارات جيدة في حَلِّ المشكلات، واستعداد لهذا العمل .

مثال 4 من واقع الحياة العزم باستعمال الضرب الاتجاهي

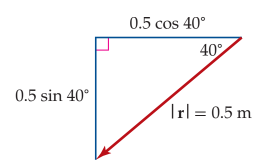
إصلاح سيارات: يستعمل ميكانيكي مفتاحًا طوله 0.5 m ؛ لتثبيت صامولة في إحدى السيارات. أوجد مقدار واتجاه متجه العزم حول الصامولة، إذا بذل الميكانيكي قوة مقدارها 25 N للأسفل من نهاية المقبض، وتصنع زاوية قياسها 40° أسفل الأفقي كما في الشكل المجاور.



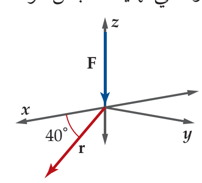
الخطوة 1 مثِّل بيانيًّا متجه بالوضع القياسي كما في الشكل (1).

الخطوة 2 حدّد الصورة الإحداثية لكل متجه.

يمكن إيجاد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثِّل المسافة المتجهة من محور الدوران إلى نهاية مقبض المفتاح باستعمال المثلث كما في الشكل (2) ، وحساب المثلثات. المتجه **r** هو ⟨0.5 cos 40°, 0, −0.5 sin 40°⟩ ، أو ⟨0.38, 0, −0.32⟩ تقريبًا. وبما أن اتجاه المتجه الذي يُمثِّل القوة المبذولة في نهاية المقبض هو 25 N إلى الأسفل . لذا ، فإن **F** = ⟨0, 0, −25⟩.



الشكل(2)



الشكل(1)

الخطوة 3 استعمل الضرب الاتجاهي لهذه المتجهات؛ لإيجاد المتجه الذي يمثِّل العزم حول الصامولة.

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$ قاعدة الضرب الاتجاهي للعزم

$$= \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.38 & 0 & -0.32 \\ 0 & 0 & -25 \end{array}\right| \begin{array}{cc} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 0.38 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$ الضرب الاتجاهي للمتجهين **r , F**

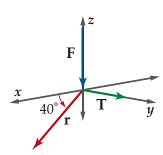
$$= (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) - (0\mathbf{k} - 0\mathbf{i} - (25)\,(038)\mathbf{j})$$ محدّد مصفوفة من الرتبة 3 × 3

$$= 0\mathbf{i} - (-9.5)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$ بالتبسيط

$$= \langle 0, +9.5, 0\rangle$$ الصورة الإحداثية

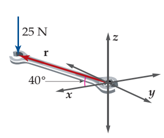
الخطوة 4 إيجاد مقدار متجه العزم، واتجاهه.

الصورة الإحداثية لمتجه العزم هي $T = \langle 0, 9.5, 0\rangle$ فيكون مقداره $|T| = \sqrt{0^2 + (9.5)^2 + 0^2} = 9.5$ ويكون موازيًا للمحور y كما في الشكل المجاور، ومقدار العزم هو 9.5 N.m .



تأكد

4) **إصلاح سيارات:** أوجد مقدار متجه العزم إذا استعمل الميكانيكي المقدار نفسه من القوة عند نهاية المقبض باتجاه الأسفل، ويصنع زاوية قياسها 40° فوق الأفقي. كما في الشكل المجاور. **9.5 N • m ويكون موازيًا للمحور y**



إرشادات للمعلم الجديد

صورة المحدد استعمل مصطلح صورة المحدد في المثال 3؛ لأنه لايمثل محددًا حقيقيًّا، فحسب التعريف يجب أن تكون مدخلات المصفوفة المرتبطة بالمحدد أعدادًا. إلا أن **i, j, k** متجهات، وبالتالي استعمال المحدد يعتبر غير دقيق الا أنه ضروري عند حساب الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء.

مثال إضافي

4 **إصلاح سيارات:** يستعمل ميكانيكي مفتاحًا طوله 0.4 m لتثبيت صامولة. أوجد مقدار واتجاه العزم حول الصامولة إذا بذل الميكانيكي قوة مقدارها 30 N للأسفل من نهاية المقبض، وتصنع زاوية قياسها 35° أسفل الأفقي. 9.9 N • m موازيًا للمحور Y

إرشادات للمعلم الجديد

الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي

لاحظ أن عملية الضرب الداخلي إبدالية بخلاف عملية الضرب الاتجاهي.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة الطالب زوّد الطلبة بعدد من الأمثلة على مصفوفات من الرتبة 2 × 2 مثل

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

واسأل الطلبة أن يحددوا ما إذا كانت قيمة محدد كل من المصفوفات أعلاه موجبة أو سالبة. واختيار الرمز A إذا كانت سالبة والرمز B إذا كانت موجبة.

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا يُعبِّر المقدار $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عن مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل (3).

مثـال 5 مساحة سطح متوازي أضلاع في الفضاء

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} , \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right.$$

بتطبيق قاعدة الأقطار لإيجاد قيمة محدِّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= (12\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}) - (4\mathbf{k} + 15\mathbf{i} + 6\mathbf{j})$$

بالتبسيط

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$

الخطوة 2 أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

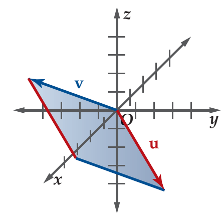
طول متجه في الفضاء

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$

بالتبسيط

$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع في الشكل (3) تساوي 16.91 وحدة مربعة تقريبًا.



الشكل (3)

تأكد $\sqrt{545}$ أو 23.35 وحدة مربعة تقريبًا

5) أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوِّن أحرفًا متجاورة **لمتوازي سطوح**، وهو عبارة عن مجسم متعدِّد الأوجه، كل وجه منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل (4) أدناه إن القيمة المطلقة **للضرب القياسي للثلاثيات** لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.

مفهوم أساسي الضرب القياسي للثلاثيات

إذا كان $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب القياسي للثلاثيات يُعرف كالآتي

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثـال 6 حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

$\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right.$$

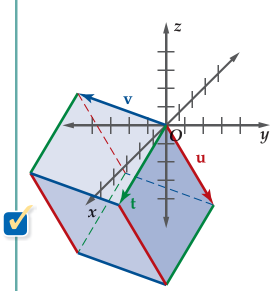
بتطبيق قاعدة الأقطار لإيجاد قيمة محدِّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= (48 + 6 + 20) - (-8 + 60 - 12)$$

بالتبسيط

$$= 74 - 40 = 34$$

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل (4) هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ ، ويساوي 34 وحدة مكعبة.



الشكل (4)

تأكد

6) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ، $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة. 86 وحدة مكعبة

الضرب الاتجاهي

مثال 5 يُبيِّن كيفية إيجاد مساحة سطح متوازي أضلاع في الفضاء.

مثال 6 يُبيِّن كيفية إيجاد حجم متوازي سطوح.

مثالان إضافيان

5 أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران. 34.89 وحدة مربعة تقريبًا

6 أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ أحرف متجاورة. 49 وحدة مكعبة

التركيز في المحتوى الرياضي

متوازي السطوح هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء، له ستة أوجه، كل منها على شكل متوازي أضلاع، وإذا التقت ثلاثة متجهات من الأحرف الإثني عشر في مستويات مختلفة في نقطة واحدة، فإنها تشكل أحرفًا متجاورة لمتوازي السطوح.

وحجم متوازي السطوح يساوي ناتج ضرب مساحة سطح القاعدة في الإرتفاع، كما يساوي الضرب القياسي لثلاثيات المتجهات.

وهناك حالات خاصة من متوازي السطوح منها:

متوازي المستطيلات (جميع أوجهه مستطيلات)، المكعب (جميع أوجهه مربعات)، ومتعدد المعيّنات (جميع أوجهه معيّنات).

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة إيجاد الضرب الإتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ بوضع العدد المناسب في الفراغات في المعادلة الآتية، ثم أعد الحل في ضرب إتجاهي لمتجهات أخرى.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \boxed{\mathbf{j}} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & -2 & \boxed{-5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \boxed{-2} & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} \boxed{-} \begin{vmatrix} \boxed{2} & 4 \\ \boxed{3} & -2 \end{vmatrix}\boxed{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & \boxed{-2} \end{vmatrix}\mathbf{k} = \boxed{23}\,\mathbf{i} - \boxed{-16}\,\mathbf{j} + \boxed{5}\,\mathbf{k}$$

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدِّد فيما إذا كانا متعامدين أو لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$ **0، متعامدان**

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$ **14، غير متعامدين**

3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$ **0، متعامدان**

4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$ **-15، غير متعامدين**

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ **-8، غير متعامدين**

6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ **0، متعامدان**

7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتي الهيدروجين في جزيء الماء عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5\rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5\rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 2) **انظر الهامش**

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$ **$88.9°$**

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$ **$45.4°$**

10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$ **$37.5°$**

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ **$152.3°$**

12-15 للتحقق انظر ملحق الإجابات

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (مثال 3)

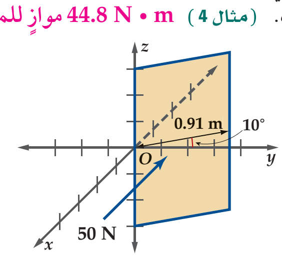
12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$ **$\langle 21, 7, 0\rangle$**

13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$ **$\langle 25, 6, 71\rangle$**

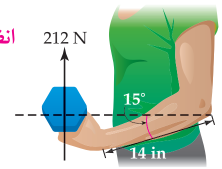
14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$ **$\langle 38, 26, 21\rangle$**

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ **$\langle 7, 23, 12\rangle$**

16) **مطعم:** يدفع عامل في مطعم باب المطبخ بقوة مقدارها 50 N لفتحه. كما في الشكل أدناه، أوجد مقدار واتجاه متجه العزم حول مفصلة الباب. (مثال 4) **$44.8\ \mathrm{N \cdot m}$ موازٍ للمحور z**



17) **رفع الأثقال:** يُحرك شخص عضلة يده؛ لرفع كرة حديدية بهدف التمرين بقوة مقدارها 212 N. إذا كان طول ساعده 0.356 m، وبدأ بتحريك عضلته عندما كان قياس الزاوية بين ساعده وبين الأفقي من الأسفل $15°$ بالاتجاه الموجب للمحور x، فأجب عما يأتي: (مثال 4) **انظر ملحق الإجابات**



a) اكتب متجه العزم حول مرفق الشخص.

b) أوجد مقدار متجه العزم.

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كل مما يأتي: (مثال 5) **للتمارين 18-21 انظر الهامش**

18) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2\rangle , \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3\rangle$

19) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1\rangle , \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2\rangle$

20) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} , \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

21) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k} , \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t, u, v}$ أحرف متجاورة في كل مما يأتي: (مثال 6)

22) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$ **429 وحدة مكعبة**

23) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$ **85 وحدة مكعبة**

24) $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ **40 وحدة مكعبة**

25) $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ **69 وحدة مكعبة**

للتمارين 26-29 إجابات ممكنة

أوجد متجهًا يعامد المتجه المُعطى في كل مما يأتي:

26) $\langle 3, -8, 4\rangle$ **$\langle 4, 3, 3\rangle$**

27) $\langle -1, -2, 5\rangle$ **$\langle 5, 5, 3\rangle$**

28) $\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\rangle$ **$\langle 1, 9, 1\rangle$**

29) $\langle 7, 0, 8\rangle$ **$\langle -8, 0, -7\rangle$**

إذا عُلم كل من $\mathbf{v}$، $\mathbf{u \cdot v}$، فأوجد $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

30) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6\rangle , \mathbf{u \cdot v} = -22$ **إجابة ممكنة: $\langle 3, 4, 2\rangle$**

31) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4\right\rangle, \mathbf{u \cdot v} = \frac{31}{2}$ **إجابة ممكنة: $\langle -1, -3, 4\rangle$**

32) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5\rangle, \mathbf{u \cdot v} = 35$ **إجابة ممكنة: $\langle -3, 1, -7\rangle$**

تحقَّق فيما إذا كانت النقاط المعطاة واقعة على استقامة واحدة:

33) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$ **انظر ملحق الإجابات**

34) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$ **ليست على استقامة واحدة**

3 تدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–25 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء شائعة في التمارين 22–25، قد يعتبر بعض الطلبة أن قيمة حجم متوازي السطوح يمكن أن تكون سالبة عند تطبيق الضرب القياسي لثلاثيات المتجهات. لذا، ذكرهم بأن الحجم هو قياس والقياس موجب، لذلك فالحجم هو القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات.

إجابات ممكنة قد يكون هناك أكثر من إجابة ممكنة للتمارين 26–32.

إجابات:

7) افرض أن

$\mathbf{u} = \langle 55.5, 55.5, -55.5\rangle$,

$\mathbf{v} = \langle -55.5, -55.5, -55.5\rangle$

أولًا: احسب كلًّا من $\mathbf{u \cdot v}, |\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u \cdot v} = 55.5 \cdot (-55.5) + 55.5(-55.5) + (-55.5)(-55.5) = -3080.25$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{55.5^2 + 55.5^2 + (-55.5)^2} = \sqrt{3(55.5)^2} = 55.5\sqrt{3}$$

$$|\mathbf{v}| = 55.5\sqrt{3}$$

ثانيًا: استعمل صيغة الزاوية بين متجهين:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u \cdot v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\cos\theta = \frac{-3080.25}{(55.5\sqrt{3})(55.5\sqrt{3})}$$

$$\cos\theta = \frac{-3080.25}{3 \cdot 3080.25}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1} -\frac{1}{3} \approx 109.5°$$

إذن، الزاوية بين المتجهين اللّذين يكونان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقربة إلى أقرب عشر هي $109.5°$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	47، 48، 50–59
ضمن المتوسط	27–39 فردي، 41–45 (فردي)، 46–48، 50–59
فوق المتوسط	26–59

18) $13\sqrt{19}$ أو 56.7 وحدة مربعة تقريبًا.

19) $\sqrt{186}$ أو 13.6 وحدة مربعة تقريبًا.

20) $\sqrt{6821}$ أو 82.6 وحدة مربعة تقريبًا.

21) $3\sqrt{74}$ أو 25.8 وحدة مربعة تقريبًا.

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة تحديد أي من الآتية (قانون المسافة، الضرب في عدد حقيقي، المتجه، المحدد) ترتبط بالضرب الإتجاهي؟ **المحددأو المتجه**

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرس 5-4 بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل 4.

إجابات:

41) لا؛ إجابة ممكنة: لأن النسبة بين إحداثيات مركبات المتجهين ليست نفسها وعليه فالمتجهان غير متوازيين.

48) دائمًا، إجابة ممكنة: الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء يعطي متجهًا يعامد كلًا من المتجهين الأصليين.

50) إجابة ممكنة: إن تعريف الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه عمودي على المستوى الذي يحتوي كلًا من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. وللحصول على متجه عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد تحتاج لبعد ثالث.

49) أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ 4 & 6 & c \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & c \\ -2 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 4 & c \\ -3 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} k$$

لكن $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34i - 26j + 10k$

أوجد قيمة c بمقارنة المركبات المتناظرة

$30 + 2c = 34$

$c = 2$

$-(20+3c) = -26$

$c = 2$

إذن، $c = 2$

حدّد إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أو لا:

35) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6\rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9\rangle$ **متوازيان**

36) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7\rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3\rangle$ **غير متوازيين**

اكتب الصورة الإحداثية لكل متجه مما يأتي:

37) $\mathbf{u}$ يقع في المستوى yz، طوله 8، ويصنع زاوية قياسها $60°$ فوق الاتجاه الموجب للمحور y. **$\langle 0, 4, 4\sqrt{3}\rangle$**

38) $\mathbf{v}$ يقع في المستوى xy، طوله 11، ويصنع زاوية قياسها $30°$ أسفل الاتجاه السالب للمحور x. **انظر ملحق الإجابات**

تحقّق فيما إذا كان المضلّع الرباعي $ABCD$ المُعطى إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحة سطحه، وحدِّد إن كان مستطيلًا أو لا:

39) $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, -2, 4)$ **متوازي أضلاع ؛ 32.2 وحدة مربعة**

40) $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$ **انظر ملحق الإجابات**

41) **عرض جوي:** أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فانطلقت الطائرة الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$، وبعد 3 sec وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$، في حين انطلقت الطائرة الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$ وبعد 3 sec وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازى خطا سير الطائرتين؟ وضِّح إجابتك. **انظر الهامش**

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5\rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

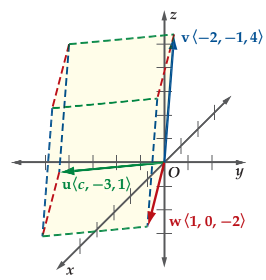
42) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ **0**

43) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ **ليس ممكنًا**

44) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ **$\langle 0, 0, 0\rangle$**

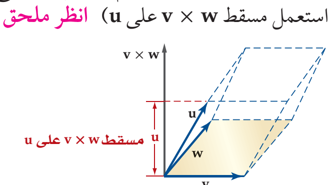
45) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **ليس ممكنًا**

46) إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل أدناه، وكان حجمه 7 وحدات مكعبة، فما قيمة c؟ **3**



مسائل مهارات التفكير العليا

47) **برهان:** أثبت صحة قاعدة إيجاد حجم متوازي السطوح. (إرشاد: استعمل مسقط $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ على $\mathbf{u}$) **انظر ملحق الإجابات**



48) **تبرير:** تحقق فيما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك.
"لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين". **انظر الهامش**

49) **تحدٍّ:** إذا كان $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5\rangle$، فأوجد قيمة c التي تجعل $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. **انظر الهامش**

50) **تبرير:** فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى. **انظر الهامش**

51) **اكتب:** بيِّن طرق الكشف عن توازي متجهين أو تعامدهما. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي، والمعطى نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 4-4)

52) $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$ **$22.67, \left(-\frac{1}{2}, 16, \frac{7}{2}\right)$**

53) $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$ **$23.71, \left(\frac{33}{2}, 9, -\frac{37}{2}\right)$**

54) $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$ **$36.62, \left(-6, 17, \frac{-7}{2}\right)$**

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم تحقق فيما إذا كانا متعامدين أو لا: (الدرس 4-3)

55) $\langle -8, -7\rangle \cdot \langle 1, 2\rangle$ **-22 ، ليسا متعامدين**

56) $\langle -4, -6\rangle \cdot \langle 7, 5\rangle$ **-58 ، ليسا متعامدين**

57) $\langle 6, -3\rangle \cdot \langle -3, 5\rangle$ **-33 ، ليسا متعامدين**

تدريب على اختبار معياري

58) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟ **D**

A $\langle 0, 0, 0\rangle , \langle 1, 2, 3\rangle$

B $\langle 1, -2, 3\rangle , \langle 2, -4, 6\rangle$

C $\langle 3, 4, 6\rangle , \langle 6, 4, 3\rangle$

D $\langle 3, -5, 4\rangle , \langle 6, 2, -2\rangle$

59) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0\rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 2, 6\rangle$؟ **A**

A $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

216 الفصل 4 المتجهات

تنويع التعليم

دون ضمن

توسّع اطلب إلى الطلبة استعمال ما تعلموه حول إيجاد مساحة سطح متوازي الأضلاع؛ لإثبات أن مساحة سطح المثلث الذي ضلعاه المتجهان $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ هي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو 12.63 وحدة مربعة تقريبًا. **إجابة ممكنة: مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k} , \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران فيه تساوي $\sqrt{638}$ وحدة مربعة. ومساحة سطح المثلث الذي يشكل ضلعان منه ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع، تساوي نصف مساحة سطح متوازي الأضلاع، وهي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو 12.63 وحدة مربعة تقريبًا.**

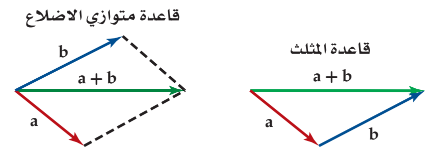
الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 4-1)

- يُعبَّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصِّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 4-2)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y\rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
- يمكن استعمال متجهي الوحدة $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي ومسقطا المتجه (الدرس 4-3)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، فإن: $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد (الدرس 4-4)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالقانون:
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالقانون:
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 4-5)

- يُعرّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ويساوي $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات الأساسية

- المتجه ص 180
- نقطة البداية ص 180
- نقطة النهاية ص 180
- الوضع القياسي ص 180
- الاتجاه ص 180
- الطول ص 180
- الاتجاه الربعي ص 180
- الاتجاه الحقيقي ص 180
- المتجهات المتوازية ص 180
- المتجهات المتكافئة ص 180
- المتجهان المتعاكسان ص 180
- المحصلة ص 182
- قاعدة المثلث ص 182
- قاعدة متوازي الأضلاع ص 182
- المتجه الصفري ص 183
- المركبات ص 185
- المركبات المتعامدة ص 185
- الصورة الإحداثية ص 189
- متجه الوحدة ص 191
- توافق خطي ص 192
- الضرب الداخلي ص 196
- المتجهان المتعامدان ص 196
- مسقط المتجه ص 199
- الشغل ص 201
- نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد ص 205
- المحور z ص 205
- الثُمن ص 205
- الثلاثي المرتب ص 205
- الضرب الاتجاهي ص 212
- العزم ص 213
- متوازي السطوح ص 214
- الضرب القياسي الثلاثي ص 214

اختبر مفرداتك

حدّد إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه . خاطئة، ينتهي عنده
2) إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle$، $\mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle$، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$. خاطئة، $-4(3) + 1(2)$
3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$. صحيحة
4) طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6\rangle$. خاطئة، الصورة الإحداثية للمتجه
5) يتكافأ متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه ، والاتجاه نفسه. صحيحة
6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$. خاطئة، $90°$
7) المتجه الذي يوازي $\mathbf{v}$ ، وطوله مركبة $\mathbf{u}$ باتجاه $\mathbf{v}$ هو مركبة $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$. خاطئة، مسقط
8) لتجد على الأقل متجهًا يعامد أي متجهين في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين. صحيحة
9) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه. صحيحة
10) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$. خاطئة، $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة، إذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 10-1، فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكر هذه المفردات.

التقويم الختامي

CRM اختبار المفردات في مصادر الفصل

أحاجي المفردات

تُعَزِّز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات.

ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

4-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 180—188)

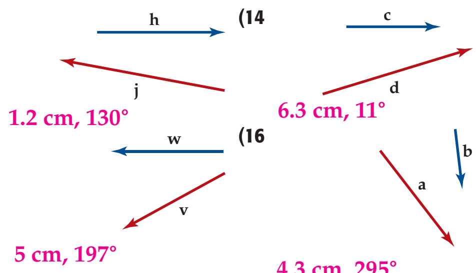
حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

11) سيارة تسير بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق. كمية متجهة

12) شجرة طولها 20 ft. كمية قياسية

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

13) 14) 15) 16)



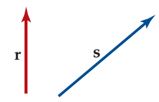
أوجد طول واتجاه المحصِّلة لناتج جمع المتجهين في كلٍّ مما يأتي:

17) 70 m باتجاه الغرب، ثم 150 m باتجاه الشرق. 80 m للشرق

18) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف. 20 N للخلف

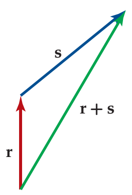
مثال 1

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



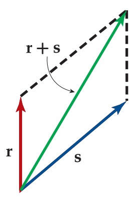
قاعدة المثلث

اسحب s، بحيث تلتقي نقطة نهاية r مع نقطة بداية s، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية r، وينتهي عند نقطة نهاية s.



قاعدة متوازي الأضلاع

اسحب s، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية r، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه r، s ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.



فيكون طول المحصلة 3.4 cm وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

4-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 189—195)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطى نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

19) $A(-1, 3), B(5, 4)$ — $\langle 6, 1\rangle, \sqrt{37} \approx 6.1$

20) $A(7, -2), B(-9, 6)$ — $\langle -16, 8\rangle, \sqrt{320} \approx 17.9$

21) $A(-8, -4), B(6, 1)$ — $\langle 14, 5\rangle, \sqrt{221} \approx 14.9$

22) $A(2, -10), B(3, -5)$ — $\langle 1, 5\rangle, \sqrt{26} \approx 5.1$

إذا كان $\mathbf{p} = \langle 4, 0\rangle$ ، $\mathbf{q} = \langle -2, -3\rangle$ ، $\mathbf{t} = \langle -4, 2\rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

23) $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$ — $\langle -8, -6\rangle$

24) $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$ — $\langle -4, 4\rangle$

25) $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$ — $\langle -18, -1\rangle$

26) $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$ — $\langle 10, 11\rangle$

أوجد متجه وحدة **u** باتجاه **v** في كلٍّ مما يأتي: للتمارين 27-30 انظر الهامش.

27) $\mathbf{v} = \langle -7, 2\rangle$

28) $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

29) $\mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

30) $\mathbf{v} = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$ بالتعويض

$= \langle 1, 1\rangle$ بالطرح

أوجد طول المتجه باستعمال قانون المسافة.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{[(4 - 3)]^2 + [-1 - (-2)]^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{2} \approx 1.4$ بالتبسيط

مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

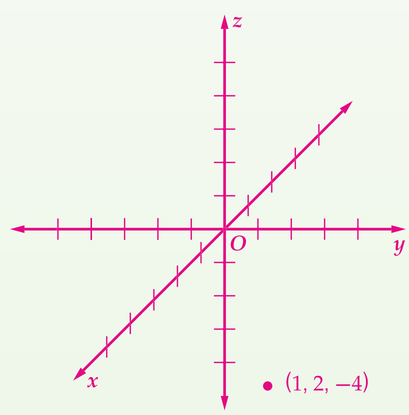
27) $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

28) $\left\langle \frac{\sqrt{18}}{6}, -\frac{\sqrt{18}}{6} \right\rangle$

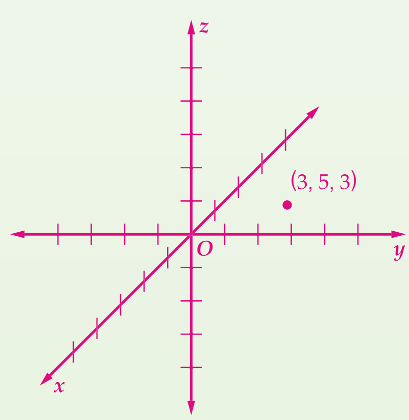
29) $\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, -\frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle$

30) $\left\langle \frac{9\sqrt{90}}{90}, \frac{3\sqrt{90}}{90} \right\rangle$

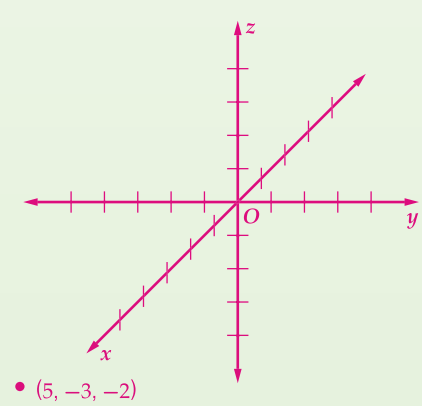
37)



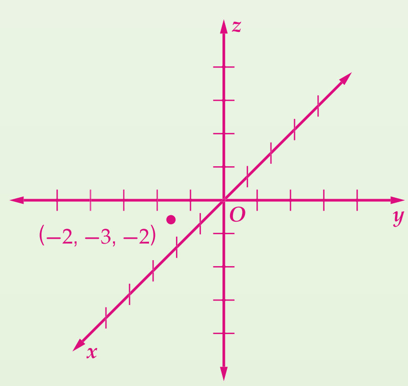
38)



39)



40)



الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

4-3 الضرب الداخلي ومسقط المتجه (الصفحات 196–203)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم تحقَّق فيما إذا كانا متعامدين أو لا:

31) $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$ -1 ، غير متعامدين

32) $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7\rangle$ 48 ، غير متعامدين

33) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2\rangle$ 0 ، متعامدان

34) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ 7 ، غير متعامدين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي:

35) $\mathbf{u} = \langle 5, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$ $135°$

36) $\mathbf{u} = \langle -1, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$ $70.6°$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{x} = \langle 2, -5\rangle , \mathbf{y} = \langle -4, 7\rangle$ ، ثم تحقق فيما إذا كانا متعامدين أو لا .

$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ الضرب الداخلي

$= 2(-4) + -5(7)$ بالتعويض

$= -8 + (-35) = -43$ بالتبسيط

بما أن $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \neq 0$ ، فإن المتجهين $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ غير متعامدين.

4-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 205–210)

عيِّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد: للتمارين 37-40 انظر هامش الصفحة السابقة

37) $(1, 2, -4)$ 38) $(3, 5, 3)$

39) $(5, -3, -2)$ 40) $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطى نقطتا طرفيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها. للتمارين 41-44 انظر الهامش

41) $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$ 42) $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

43) $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$ 44) $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء: للتمارين 45-48 انظر الهامش

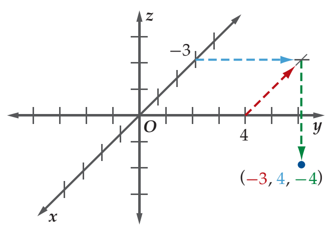
45) $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4\rangle$ 46) $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

47) $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ 48) $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3\rangle$

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء ثلاثي الأبعاد .

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطة تبعد 4 وحدات للأسفل عن هذه النقطة باتجاه موازٍ للمحور z .



4-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 211–216)

أوجد الضرب الداخلي $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدّد فيما إذا كانا متعامدين أو لا .

49) $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13\rangle$ 0 ، متعامدان

50) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3\rangle$ -48 ، غير متعامدين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} , \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u} , \mathbf{v}$: للتمرينين 51,52 انظر الهامش

51) $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3\rangle$

52) $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1\rangle$

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2\rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & -3 \\ 7 & 11 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{matrix}$$

$$= (4\mathbf{i} - 21\mathbf{j} - 44\mathbf{k}) - (14\mathbf{k} - 33\mathbf{i} - 8\mathbf{j})$$

$$= 37\mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 58\mathbf{k} = \langle 37, -13, -58\rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58\rangle \bullet \langle -4, 2, -3\rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58\rangle \bullet \langle 7, 11, 2\rangle$$

$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

41) $12.33, (-1, 5, 6)$

42) $10.77, (-7, 2, 1)$

43) $17.44, (-3, -4, 2)$

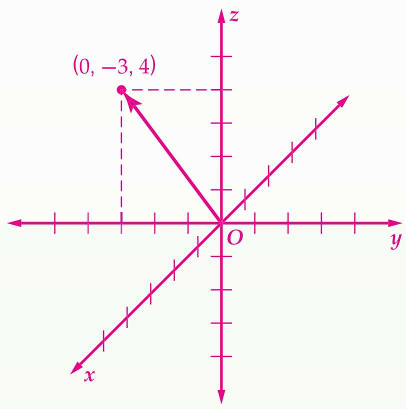
44) $15.52, (2, -1.5, 4)$

51) $\langle 17, -1, 10\rangle \bullet \langle 2, 4, -3\rangle = 0$ ، $\langle 17, -1, 10\rangle \langle 1, -3, -2\rangle = 0$ ، $\langle 17, -1, 10\rangle$

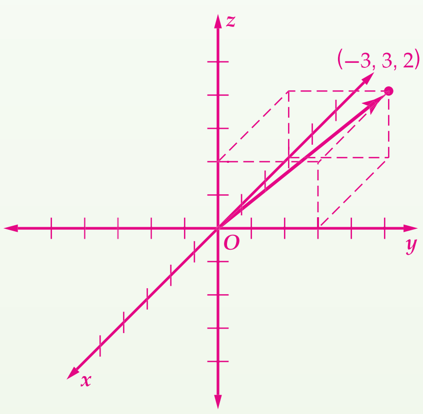
52) $\langle -9, -6, -21\rangle \bullet \langle 5, -4, -1\rangle = 0$ ، $\langle -9, -6, -21\rangle \bullet \langle 4, 1, -2\rangle = 0$ ، $\langle -9, -6, -21\rangle$

إجابات:

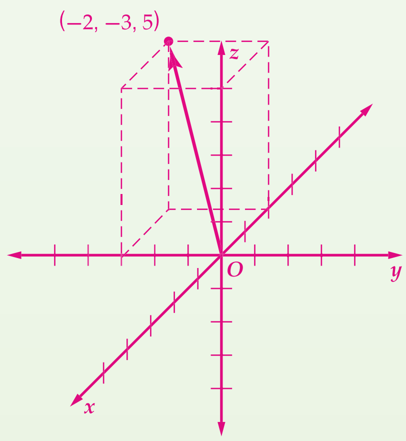
45)



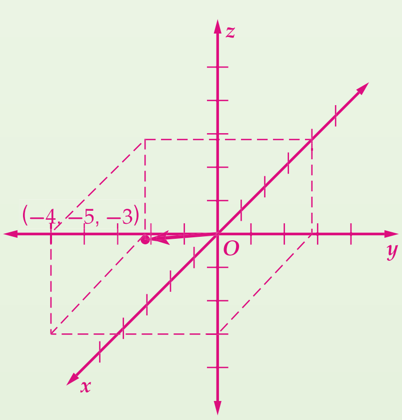
46)



47)

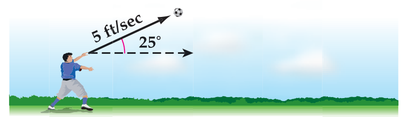


48)



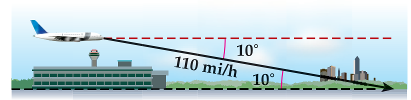
تطبيقات ومسائل

54) كرة قدم: تلقَّى لاعب كرة قدم الكرة برأسه، فارتدت بسرعة ابتدائية مقدارها 5 ft/sec، وبزاوية قياسها 25° فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 4-1)

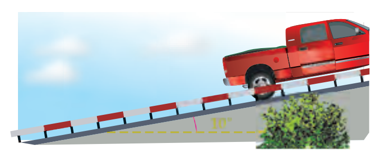


المركبة الأفقية 4.5 ft/sec تقريبًا
المركبة الرأسية 2.1 ft/sec تقريبًا

55) طيران: تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h، وبزاوية قياسها 10° تحت الأفقي. أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثّل سرعة الطائرة. (الدرس 4-2) ⟨108.3, −19.1⟩



56) حركة المرور: تقف سيارة وزنها 1500 N على أرض مرتفعة، تميل عن الأفقي بزاوية قياسها 10°. أوجد القوة اللازمة لمنع السيارة من الانزلاق إلى الخلف. (الدرس 4-3) 260.5 N



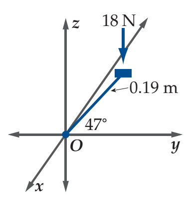
57) أقمار اصطناعية: إذامَثَّلت النقطتان (28625, 32461, −38426)، (−31613, −29218, 43015) موقعي قمرين اصطناعيين، والنقطة (0, 0, 0) مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل. وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عما يأتي: (الدرس 4 - 4)

a) أوجد المسافة بين القمرين. 118598 mi تقريبًا

b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موضعه؟ (−1494, 1621.5, 2294.5)

c) اشرح إمكانية وضع القمر الثالث في الفرع b. انظر الهامش

58) دراجات هوائية: يضغط شخص على دواسة دراجة هوائية بقوة مقدارها 18 N؛ لوضع الدراجة في حالة حركة. إذا كانت الدواسة تصنع زاوية قياسها 47° فوق المحور y، وطول محورها 0.19 m كما في الشكل أدناه، فأجب عما يأتي: (الدرس 4-5)



a) أوجد متجه العزم حول محور الدواسة. ⟨−2.5, 0, 0⟩

b) أوجد مقدار العزم. 2.5 N • m

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة حَلّ المسائل

إذا احتاج الطلبة إلى تدريبات إضافية على حَلّ المسألة، فذكّرهم بخطوات حَلّ المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيداً من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقّع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 1، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجابتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 1.

قبل الاختبار

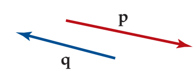
اطلب إلى الطلبة دراسة الصفحات 217 – 220 من دليل الدراسة؛ لمراجعة المواضيع، والمهمات الواردة في الفصل.

إجابة:

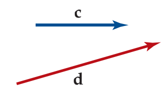
57c) إجابة ممكنة : لا يمكن وجود قمر ثالث؛ لأن إحداثياته داخل الأرض.

الفصل 4 اختبار الفصل

أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملاً المسطرة، والمنقلة.

1) 

0.8 cm, 25°

2) 

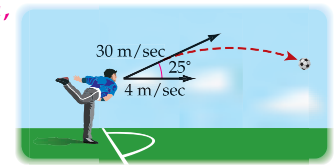
6 cm, 8°

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المعطى نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

3) $A(1, -3), B(-5, 1)$ **3) $\langle -6, 4\rangle, \sqrt{52} \approx 7.2$**

4) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$ **4) $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right\rangle, \sqrt{32.5} \approx 5.7$**

5) **كرة قدم:** ركض لاعب بسرعة 4 m/sec ؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/sec ، وبزاوية قياسها °25 مع الأفقي، ما محصّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟ **33.7 m/sec, 22°**



أوجد متجه وحدة باتجاه **u** في كلٍّ مما يأتي:

6) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$ **$\left\langle -\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right\rangle$**

7) $\mathbf{u} = \langle 6, -3\rangle$ **$\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$**

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن فيما إذا كانا متعامدين أو لا:

8) $\mathbf{u} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ **−16 ، متعامدين**

9) $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8\rangle$ **0 ، متعامدان**

10) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ **−14 ، غير متعامدين**

11) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأي مما يأتي تُمثّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v** ؟ **D**

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right\rangle$

D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$

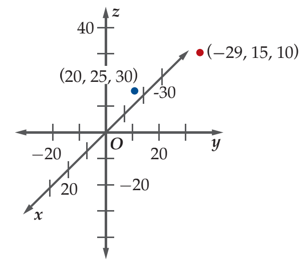
12) **حركة :** يدفع شخص صندوقًا على سطح أرض غرفة بقوة مقدارها 120 N إلى الأسفل ، وبزاوية قياسها °20 تحت الأفقي. أوجد الشغل الذي بذله الشخص، إذا حرك الصندوق مسافة 25 ft. **2819.08 ft—lb**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle$ ، $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$ ، فأوجد كلًا مما يأتي:

13) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ **$\langle -45, -42, 26\rangle$**

14) $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ **$\langle -1, -21, 1\rangle$**

15) **بالونات الهواء الساخن:** أطلق 12 بالونًا تحتوي هواء ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي $(-29, 15, 10)$ ، $(20, 25, 30)$ كما في الشكل أدناه ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول، والثاني في تلك اللحظة. **53.9 ft**

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته. **$\left(-\frac{9}{2}, 20, 20\right)$**

أوجد الزاوية θ بين المتجهين **u, v** في كل مما يأتي:

16) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12\rangle$ **27.9°**

17) $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ **110.8°**

أوجد الضرب الإتجاهي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من **u, v** : **للسؤالين 18,19 انظر الهامش**

18) $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11\rangle$

19) $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

20) **قيادة الزوارق:** يقوم رُبّان الزورق بتحريك ذراع تسمى ذراع الدفة، والتي تدور حول محور ثابت، لكي يتحكم باتجاه حركة الزورق، حيث أن التأثير بقوة على الذراع في اتجاه معين، يجعل الزورق يتحرك باتجاه معاكس. إذا كان طول ذراع الدفة في أحد الزوارق 0.75 m ، ويصنع زاوية قياسها °15 مع الأفقي، فأوجد متجه العزم على محور الذراع، إذا أثّرت عليه قوة مقدارها 50 N في المستوى xy. **36.22 N • m**

بناء الاختبارات
التقـــويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أنّ جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 4 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

إجابات:

18) $\langle 65, 16, -59\rangle,$

$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 1, 7, 3\rangle$
$= 65(1) + 16(7) + (-59)(3)$
$= 0$

$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 9, 4, 11\rangle$
$= 65(9) + 16(4) + (-59)11)$
$= 0$

19) $-7\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k},$

$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle -6, 2, -1\rangle$
$= (-7)(-6) + (-17)(2) + 8(-1)$
$= 0$

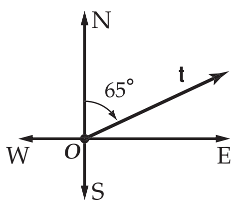
$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle 5, -3, -2\rangle$
$= (-7)(5) + (-17)(-3) + 8(-2)$
$= 0$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب	الدروس 1-4, 2-4, 3-4, 4-4, 5-4	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
كتاب التمارين	الفصل 4	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (178)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

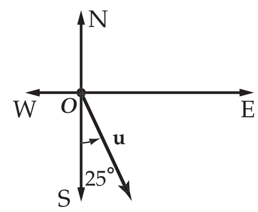
الدرس 4-1 (تأكد) ص 181

2A)



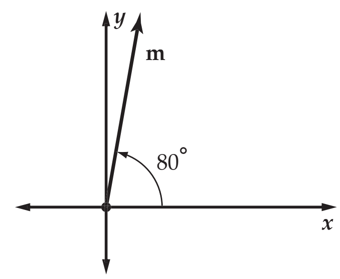
1 in = 10 ft/s

2B)



1 in = 10 mi/h

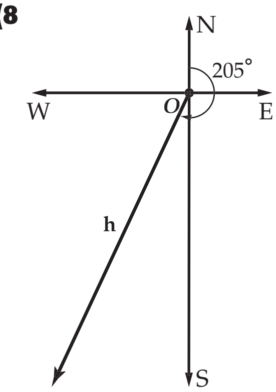
2C)



1 cm = 30 lb

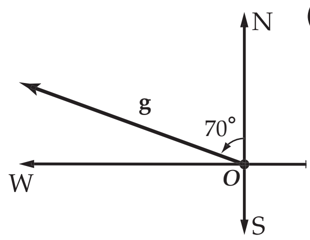
الدرس 4-1 ، ص 180–188

7)



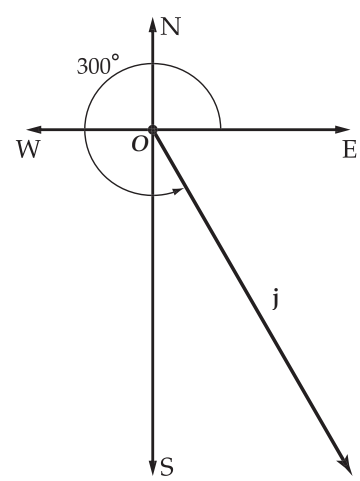
1 cm = 3 in/sec

8)



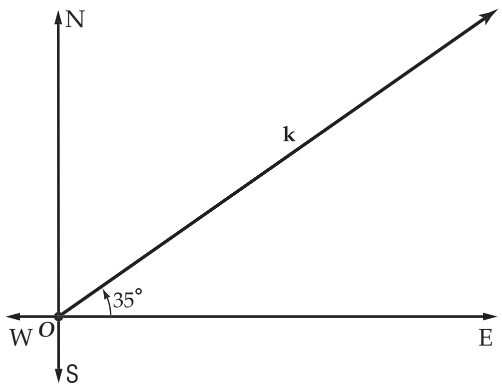
1 cm = 2 km/h

9)



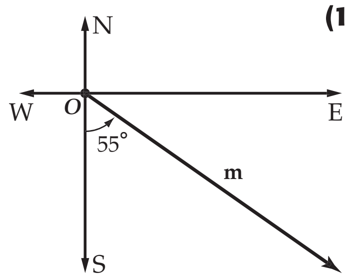
1 cm = 1 ft/sec

10)



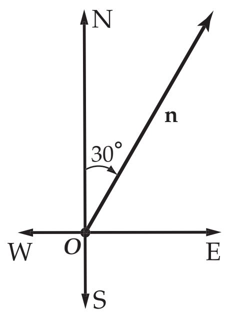
1 in = 10 km

11)



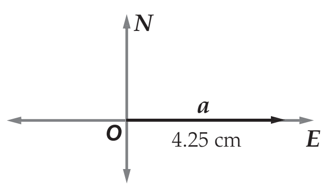
1 cm = 10 m

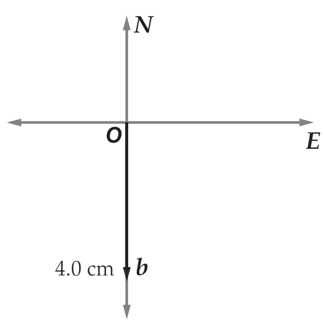
12)



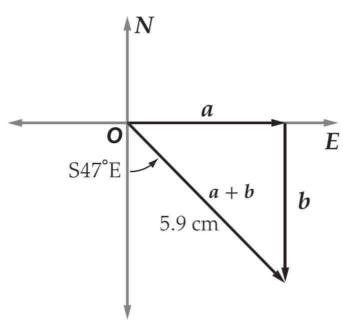
1 cm = 10 yd/s

20 افرض أن a تساوي 17 mi شرقًا، b تساوي 16 mi جنوبًا. ارسم شكلًا لتمثيل a ، b باستعمال المقياس 1 cm: 4 mi



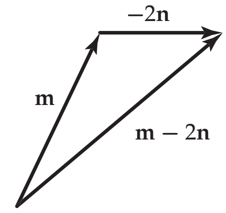


أجر انسحابًا للمتجه b بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه a. ارسم المتجه الناتج $a + b$

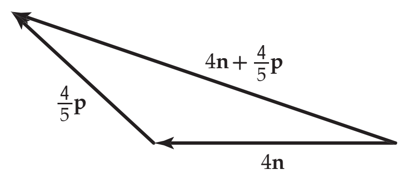


أوجد طول المتجه $a + b$ ثم أوجد قياس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الأفقي (شرق – غرب). طول المتجه 5.9cm تقريبًا. وتعني $5.9 \times 4\,mi = 23.6\,mi$ ، إذن مقدار المتجه الناتج 23.6 mi باتجاه S47° E.

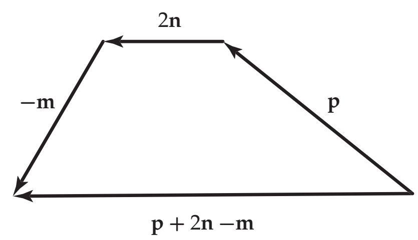
(22



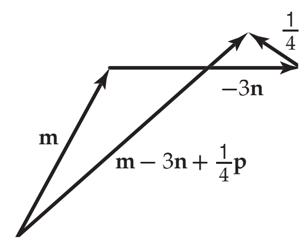
(23



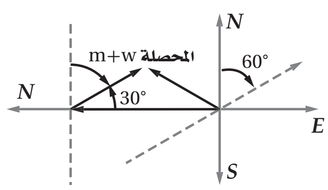
(24



(25

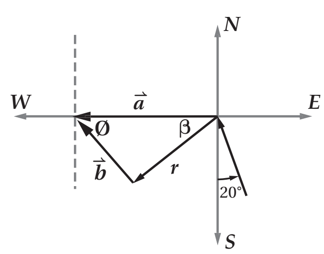


26 افترض أن المتجه m يمثل سرعة الطائرة، وأن المتجه w يمثل سرعة الرياح، وارسم شكلًا يلخص الموقف كما مبين جانبًا (رسم تقريبي).



$$|m+w|^2 = |m|^2 + |w|^2 - 2\,|m|\,.\,|w|\cos 30^\circ$$
$$\approx 225 + 25 - 2(15)\,(5)\,(0.87)$$
$$= 120$$
$$\therefore\ |m+w| = \sqrt{120} \approx 11\ \text{mi/h}$$

27 ارسم شكلًا تقريبيًّا يمثل سرعة أحمد $\vec{a}$، وسرعة التيار البحري $\vec{b}$، كما هو مبين جانبًا.



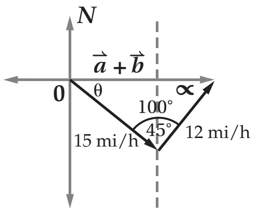
$$\theta = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$
$$|\vec{r}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|\cos 70^\circ$$
$$\approx (1.5)^2 + (1)^2 - 2(1.5)(1)(0.342)$$
$$\Rightarrow |\vec{r}| \approx 1.49$$

لإيجاد الزاوية β ، فإن

$$\frac{\sin\beta}{|\vec{b}|} = \frac{\sin\theta}{|\vec{r}|}$$
$$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{1} = \frac{\sin 70^\circ}{1.49}$$
$$\Rightarrow \sin\beta \approx 0.63$$
$$\Rightarrow B \approx 39.1$$
$$90 - 39.1 \approx 51^\circ$$

∴ محصلة سرعة أحمد تساوي 1.49mi/h باتجاه S51°w (تقريبًا).

37 $\theta = 125^\circ - 90^\circ = 35^\circ$



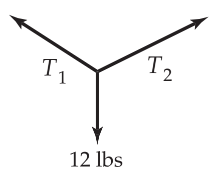
$$\propto = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

∴ الزاوية بين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ هي :

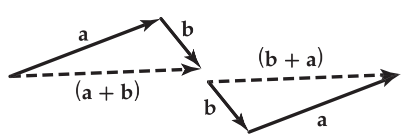
$$180^\circ - 35^\circ - 45^\circ = 100^\circ$$
$$|\vec{a}+\vec{b}| = (15)^2 + (12)^2 - 2(15)(12)\cos 100^\circ$$
$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| \approx 20.77$$

واتجاه المحصلة $\vec{a}+\vec{b}$ هو (125° − 35°) أي 090° (الشرق)، وبما أن المتجه الموازن يكون له مقدار المحصلة نفسه ولكن باتجاه معاكس، فإن المتجه الموازن مقداره 20.77mi/h، باتجاه 270° (الغرب).

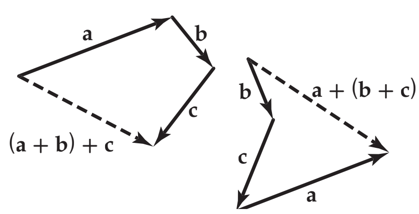
(39a



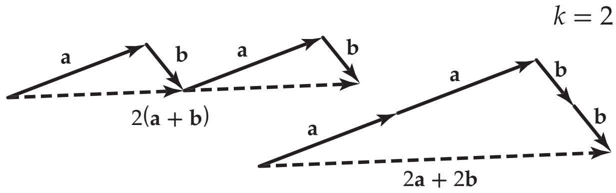
(43



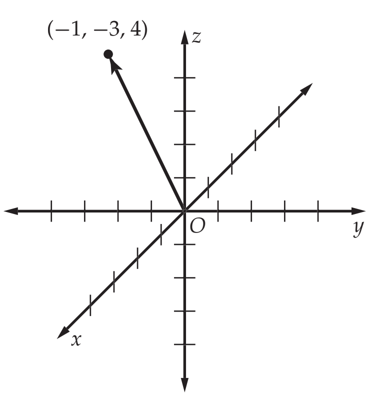
(44



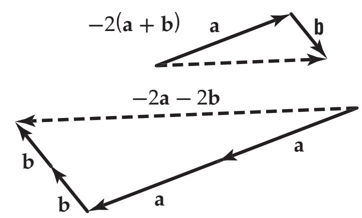
(45 $k = 2$



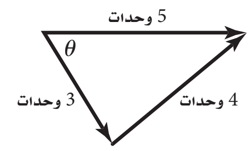
$k = 0.5$



$k = -2$



46) إجابة ممكنة:



49) مصطفى، إجابة ممكنة: وضع مصطفى نقطة بداية المتجه الثاني عند نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستعمال قاعدة المثلث. أما حسين فقد وضع نقطتي بداية المتجهين معاً، وهي الخطوة الأولى لاستعمال قاعدة متوازي الأضلاع. لكنه لم يكمل متوازي الأضلاع.

50) نعم، إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون حاصل جمع متجهين يساوي أحد المتجهين، ويحدث ذلك عندما يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري.

51) إجابة ممكنة: عند استعمال قاعدة المثلث، تضع نقطة بداية المتجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه، وهكذا مع باقي المتجهات، ثم ترسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير. أما عند استعمال طريقة متوازي الأضلاع، فتضع نقطة بداية المتجهين عند النقطة نفسها، ثم تكمل متوازي الأضلاع وترسم المحصلة من نقطة البداية المشتركة للمتجهين إلى الرأس المقابل لمتوازي الأضلاع، يمكن استعمال كلتا القاعدتين، المثلث ومتوازي الأضلاع لإيجاد المحصلة لمتجهين أو أكثر.

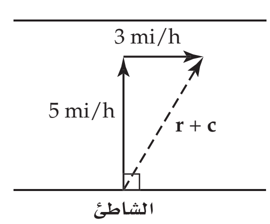
55) $A = 32°$ ، $a \approx 11.2$ ، $b \approx 19.8$

56) $a \approx 9$ ، $B \approx 63°$ ، $C \approx 75°$

الدرس 2-4 ، ص 189–195

27) a يمكن تمثيل تجذيف الشخص بالمتجه $\mathbf{r} = \langle 0, 5\rangle$ ، ويمكن تمثيل التيار المائي بالمتجه $\mathbf{c} = \langle 3, 0\rangle$.

اجمع المتجهين $\mathbf{r}, \mathbf{c}$ لتجد المتجه الناتج $\mathbf{v}$.



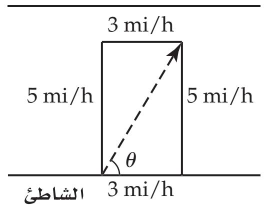
$$\mathbf{v} = \mathbf{r} + \mathbf{c} = \langle 0, 5\rangle + \langle 3, 0\rangle = \langle 3, 5\rangle$$

السرعة التي يتحرك بها الشخص هي مقدار المتجه $\mathbf{v}$.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{34} \approx 5.8$$

إذن، السرعة التي يتحرك بها الشخص هي 5.8 mi/h تقريبًا.

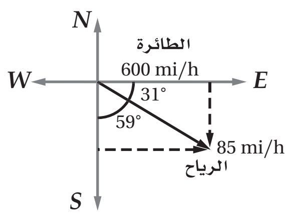
b) أوجد θ بإنشاء زاوية قائمة من المتجهات المعطاة واستعمال النسبة المثلثية $\tan\theta$



$$\tan\theta = \frac{5}{3}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{5}{3}$$
$$\theta \approx 59°$$

إذن يتحرك الشخص بزاوية قياسها 59° بالنسبة للشاطئ.

36) a ليكن $\vec{v}_1$ يمثل سرعة الطائرة



$$\Rightarrow v_1 = \langle 600.0\rangle$$

وليكن $\vec{v}_2$ يمثل سرعة الرياح

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \langle\, 85\cos 31°, -85\sin 31°\rangle$$
$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \langle\, 72.9, -43.8\rangle$$
$$\vec{r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \langle 600, 0\rangle + \langle 72.9, -43.8\rangle$$
$$= \langle 672.9, -43.8\rangle$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{672.9^2 + (-43.8)^2} \approx 674.3\text{mi/h}$$

b) لإيجاد زاوية اتجاه الطائرة

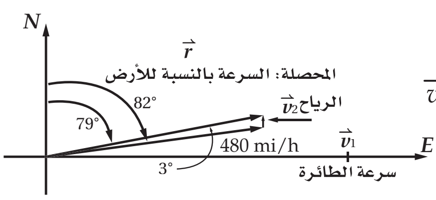
$$\tan\theta = \frac{-43.8}{672.9} \approx -0.0651$$
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-0.0651) \approx -3.7°$$

وبما أن المحصلة تقع في الربع الرابع، فإن

$$\theta = 360 + (-3.7) = 356.3°$$

أو باتجاه S86E تقريبًا.

37) a لتكن $\vec{v}_1$ سرعة الطائرة



وسرعة الرياح $\vec{v}_2$

ومحصلة سرعة الطائرة $\vec{r}$

الزاوية بين $\vec{r}$ ، $\vec{v}_1$ $\qquad$ $82° - 79° = 3°$

الزاوية بين $\vec{v}_1$ والأفقي 8°، والزاوية بين r والأفقي 11°

b) $v_1 = \langle |\vec{v}_1|\cos\theta, |v_1|\sin\theta\rangle$

$$= \langle 480.\cos 8°, 480.\sin 8°\rangle$$
$$\approx \langle 475.3, 66.8\rangle$$
$$\vec{r} = \langle 518.\cos 11°, 518.\sin 11°\rangle$$

$\approx \langle 508.5, 98.8\rangle$

$\vec{r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{r} - \vec{v}_1$

$\therefore \vec{v}_2 = \langle 508.5, 98.8\rangle - \langle 475.3, 66.8\rangle$

$= \langle 33.2, 32\rangle$

$|\vec{v}|_2 = \sqrt{(33.2)^2 + 32^2} \approx 46.1$

لإيجاد زاوية اتجاه الرياح مع الأفقي:

$\tan \propto = \frac{32}{33.2} \Rightarrow \propto \approx 44^\circ$

أي أن الرياح تهب بسرعة 46.1mi/h باتجاه N46°E تقريبًا

c) بعد زيادة السرعة $\vec{v}_1 = \langle 500.\cos 8^\circ, 500.\sin 8^\circ\rangle$

$\approx \langle 495.1, 69.6\rangle$

$\vec{r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \langle 495.1, 69.6\rangle + \langle 33.2, 32\rangle$

$= \langle 528.3, 101.6\rangle$

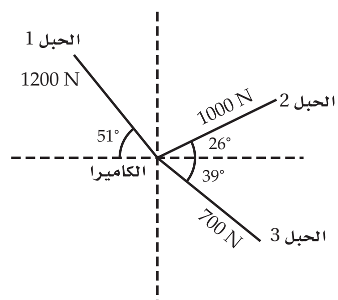
$|\vec{r}| = \sqrt{(528.3)^2 + (101.6)^2} \approx 538\text{mi/h}$

وتكون زاوية اتجاه المحصلة الجديدة مع الأفقي

$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{101.6}{528.3}\right) \approx 10.9^\circ$

أي أن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة للأرض تزيد لتصبح 538mi/h باتجاه N78.1°E تقريبًا.

43



a) بالنسبة للحبل 1 نجد أن:

$\theta = 180^\circ - 51^\circ = 129^\circ$

$\vec{v}_1 = \langle 1200\cos 129^\circ, 1200\sin 129^\circ\rangle$

$= \langle -755.2, 932.6\rangle$

بالنسبة للحبل 2 نجد أن:

$\vec{v}_2 = \langle 1000.\cos 26^\circ, 1000.\sin 26^\circ\rangle$

$= \langle 898.8, 438.4\rangle$

بالنسبة للحبل 3 نجد أن:

$\theta = 360^\circ - 39^\circ = 321^\circ$

$\vec{v}_3 = \langle 700\cos 321^\circ, 700\sin 321^\circ\rangle$

$= \langle 544, -440.5\rangle$

b) $\vec{r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

$= \langle -755.2, 932.6\rangle + \langle 898.8, 438.4\rangle + \langle 544, -440.5\rangle$

c) $= \langle 687.6, 930.5\rangle$

$|\vec{r}| = \sqrt{(687.6)^2 + (930.5)^2}$

$\approx 1157\text{N}$

ولإيجاد زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي:

$\tan\theta = \frac{930.5}{687.6} \Rightarrow \theta \approx 53.5^\circ$

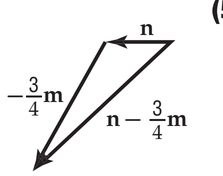
49)
$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_2 + x_1, y_2 + y_1\rangle \\ &= \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_1\rangle \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a}\end{aligned}$$

50)
$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= (\langle x_1, y_1\rangle + x_2, y_2\rangle) + \langle x_3, y_3\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2 + x_3, y_2 + y_3\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + (\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle) \\ &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})\end{aligned}$$

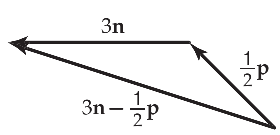
51)
$$\begin{aligned}k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= k(\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) \\ &= k\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle k(x_1 + x_2), k(y_1 + y_2)\rangle \\ &= \langle kx_1 + kx_2, ky_1 + ky_2\rangle \\ &= \langle kx_1, ky_1\rangle + \langle kx_2, ky_2\rangle \\ &= k\langle x_1, y_1\rangle + k\langle x_2, y_2\rangle \\ &= k\mathbf{a} + k\mathbf{b}\end{aligned}$$

52)
$$\begin{aligned}k\mathbf{a}| &= |k\langle x_1, y_1\rangle|| \\ &= |\langle kx_1, ky_1\rangle| \\ &= \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2} \\ &= \sqrt{k^2 {x_1}^2 + k^2 {y_1}^2} \\ &= \sqrt{k^2({x_1}^2 + {y_1}^2)} \\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \\ &= |k|\,|x_1, y_1|\rangle \\ &= |k|\,|\mathbf{a}|\end{aligned}$$

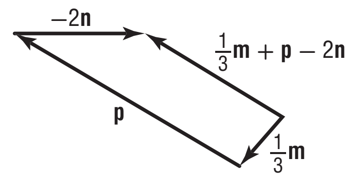
54)



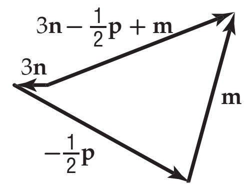
55)



(56



(57



الدرس 3-4 ، ص 196−203

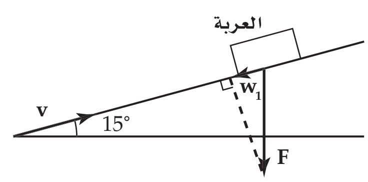
(17 $\mathbf{w_1} = \langle -1 , 1\rangle$, $\mathbf{u} = \langle -1 , 1\rangle + \langle 6 , 6\rangle$

(18 $\mathbf{w_1} = \left\langle \frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right\rangle, \mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right\rangle + \left\langle \frac{57}{10}, \frac{19}{10}\right\rangle$

(19 $\mathbf{w_1} = \left\langle -\frac{78}{73}, \frac{208}{73}\right\rangle, \mathbf{u} = \left\langle -\frac{78}{73}, \frac{208}{73}\right\rangle + \left\langle \frac{224}{73}, \frac{84}{73}\right\rangle$

20 وزن العربة والطفلة معًا هما قوة جذب الأرض لهما، $\langle 0, -78\rangle = \mathbf{F}$. لإيجاد القوة اللازمة لمنع العربة من الانزلاق لأسفل، وهي $-\mathrm{w}_1$ ،

أوجد مسقط **F** على متجه وحدة **v** باتجاه المرتفع.



خطوة 1: أوجد متجه وحدة **v** باتجاه المرتفع.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta\rangle$

$= \langle 1 \cdot \cos 15°, 1 \cdot \sin 15°\rangle$

$= \langle 0.966, 0.259\rangle$

خطوة 2: أوجد $\mathbf{w_1}$ وهي مسقط **F** على متجه الوحدة **v**.

$\mathbf{w_1} = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$

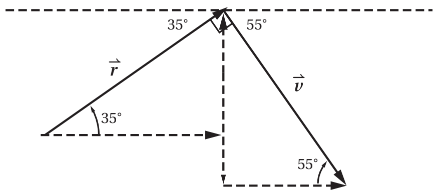
$= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$

$= (\langle 0, -78\rangle \cdot \langle 0.966, 0.259\rangle)\mathbf{v}$

$\approx -20.2\mathbf{v}$

فتكون القوة المطلوبة هي $-\mathbf{w_1} = -(-20.2\mathbf{v})$ ، وبما أن **v** متجه وحدة، فإن مقدار القوة المطلوبة هو 20.2N باتجاه المرتفع.

27



(a $\vec{r} = \langle 20 \cos 35°, 20 \sin 35°\rangle$

$\approx \langle 16.38, 11.47\rangle$

$\vec{v} = \langle 40 \cos 55°, -40 \sin 55°\rangle$

$\approx \langle 22.94, -32.77\rangle$

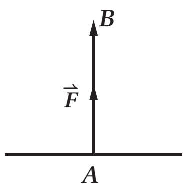
(b استعمل الضرب الداخلي، فإذا كان $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$

فإن المتجهين يكونان متعامدين فعلًا.

$\vec{r} \cdot \vec{v} = \langle 16.38, 11.47\rangle \cdot \langle 22.94, -32.77\rangle$

$= (16.38)(22.94) + (11.47)(-32.77) \approx 0$

35 AB = 0.9m



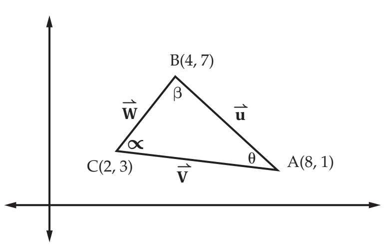
$|\vec{F}| = 16\,(9.8) = 156.8$

وبما أن القوة $\vec{F}$ في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ نفسه

$\therefore \mathrm{w} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}|$

$= (156.8)(0.9) = 141.12\text{J}$

36 لتكن $\mathbf{A}(8,1)$ ، $\mathbf{B}(4,7)$ ، $\mathbf{C}(2,3)$



ولتكن **A** نقطة بداية كلٍّ من $\vec{\mathbf{u}}$، $\vec{\mathbf{v}}$ فإن:

$\vec{\mathbf{u}} = \langle -4, 6\rangle$

$\vec{\mathbf{v}} = \langle -6, 2\rangle$

$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}|} = \frac{24+12}{\sqrt{16+36}\,\sqrt{36+4}}$

$\approx \frac{36}{45.61} \approx 0.79$

$\Rightarrow \theta \approx 37.88°$

وعندما تكون **c** نقطة بداية كلٍّ من $\vec{\mathbf{v}}$، $\vec{\mathbf{w}}$ فإن:

$\vec{\mathbf{v}} = \langle 6, -2\rangle$ ، $\vec{\mathbf{w}} = \langle 2, 4\rangle$

$\cos\propto = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}| \cdot |\vec{\mathbf{w}}|} = \frac{12-8}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{800}} \approx 0.14$

$\Rightarrow \propto \approx 81.95°$

$\therefore \beta = 180° - (37.88° + 81.95°) = 60.17°$

39 ليكن $\vec{\mathbf{v}} = \langle x, y\rangle$

$\cos 121° = \frac{\langle 3,4\rangle \cdot \langle x,y\rangle}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{29}} = \frac{3x+4y}{5\sqrt{29}}$

$\Rightarrow 3x+4y = -13.87 \Rightarrow y = \frac{-13.87-3x}{4}$ ....**(1)**

$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{29} \Rightarrow x^2+y^2 = 29$ ....**(2)**

وبالتعويض $x^2 + \left(\frac{-13.87-3x}{4}\right)^2 = 29$

بالتبسيط $\Rightarrow 25x^2 + 83.22x - 271.62 = 0$

$\therefore x = \frac{-83.22 \pm \sqrt{(83.22)^2 - 4(25)(-271.62)}}{2(25)}$

$\Rightarrow x \approx 2.03 \text{ or } -5.36$

وعندها $y \approx -4.99$ or 0.55

$\therefore \vec{\mathbf{v}} = \langle 2.03, -4.99\rangle$ or $\langle -5.36, 0.55\rangle$

45)

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$$
$$\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle$$
$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$$

46)

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$$
$$\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot (\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle + \langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle) \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle + \langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle$$
$$\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2+\mathbf{w}_2\rangle \stackrel{?}{=} (\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2) + (\mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2)$$
$$\mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1) + \mathbf{u}_2(\mathbf{v}_2+\mathbf{w}_2) \stackrel{?}{=} \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2$$
$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2$$

47) $k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = k\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot k\mathbf{v}$

$$k(\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle) \stackrel{?}{=} k\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot k\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle$$
$$k(\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2) \stackrel{?}{=} \langle k\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2\rangle$$
$$k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$$

48

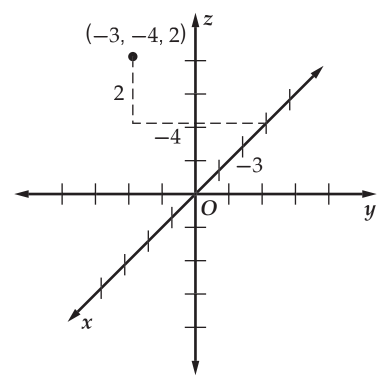
الزاوية بين **u** ، **v** هي $\theta = 90°$ $\qquad \cos 90° = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$

$\cos 90° = 0$ $\qquad 0 = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$

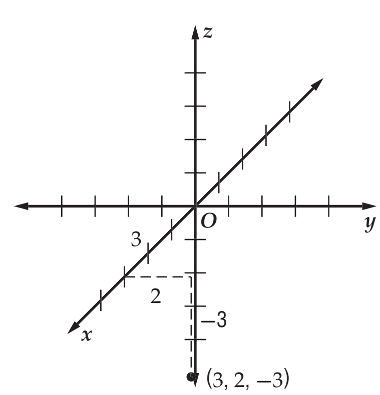
بضرب الطرفين في $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ $\qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0$

الدرس 4-4 (تأكد)، ص 205–207

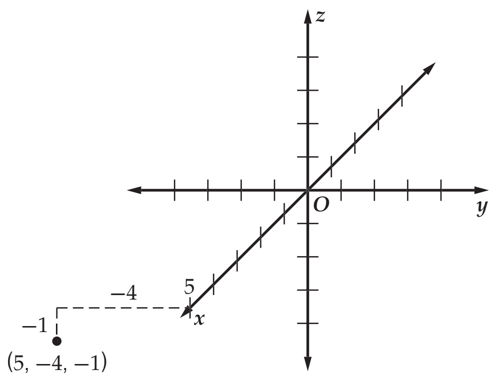
1A)



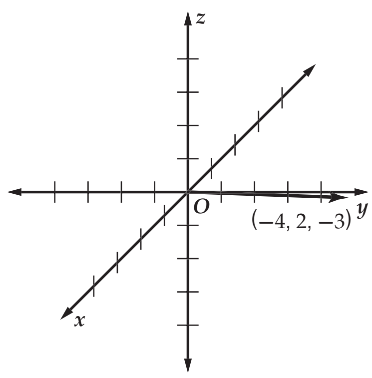
1B)



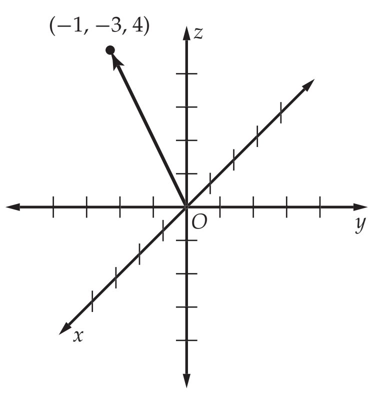
1C)



3A)

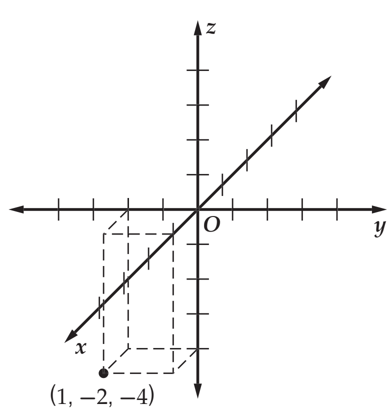


3B)

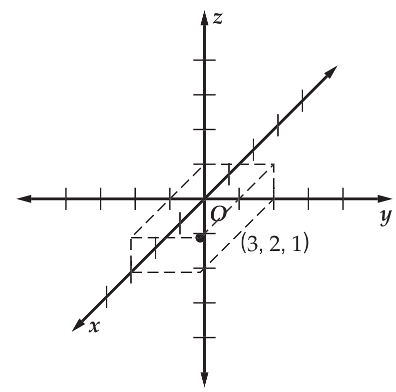


الدرس 4-4 ، ص 205–210

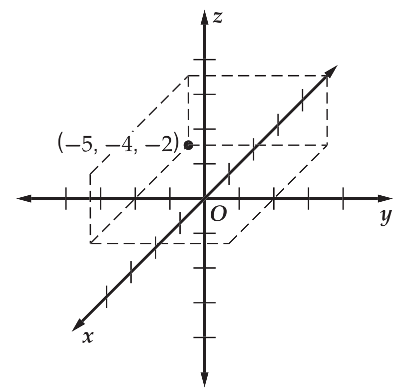
1)



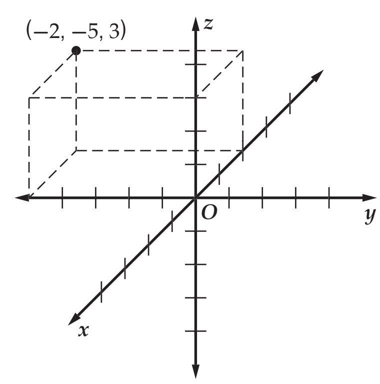
2)



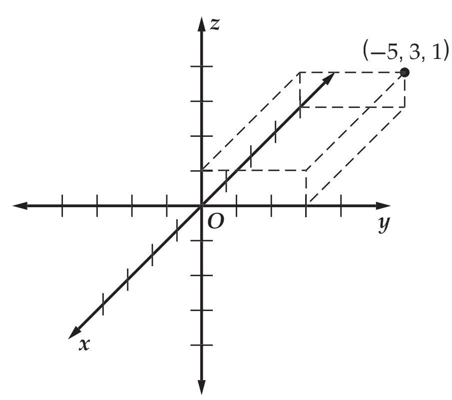
3)



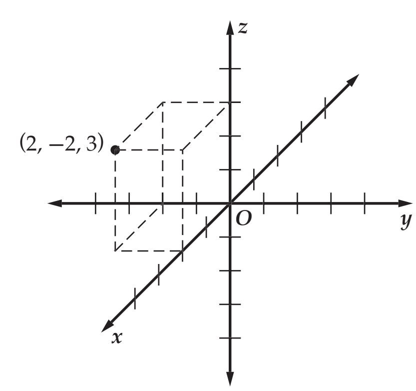
4)



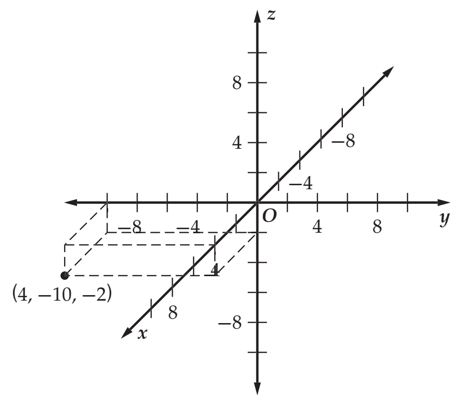
5)



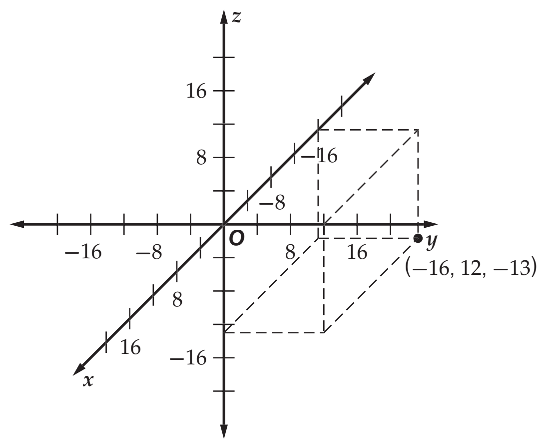
6)



7)



8)



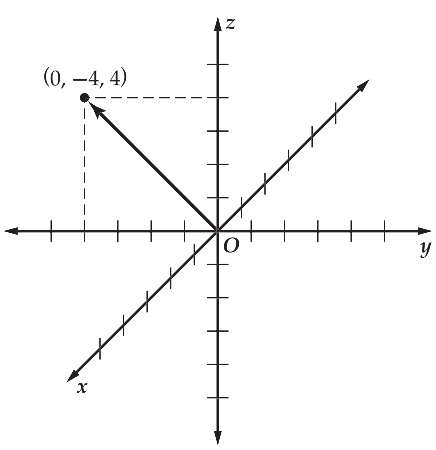
9) $12.25, \left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$

10) $9.90, \left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

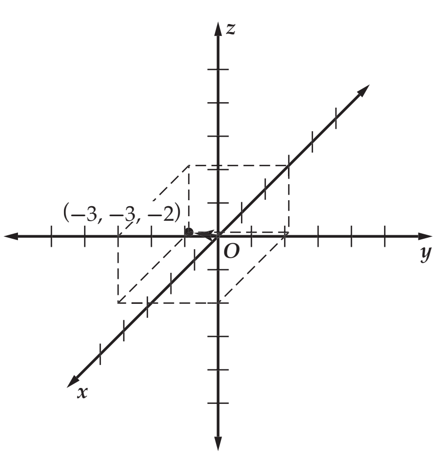
11) $15.65, \left(2, -2, \frac{9}{2}\right)$

12) $9.11, \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

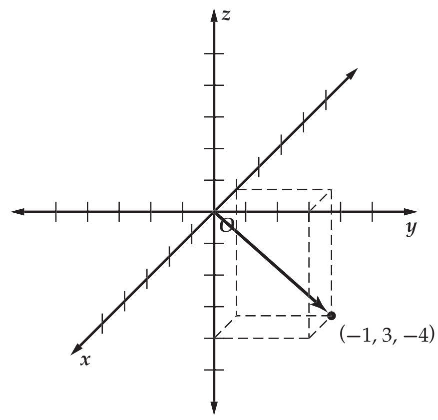
14)



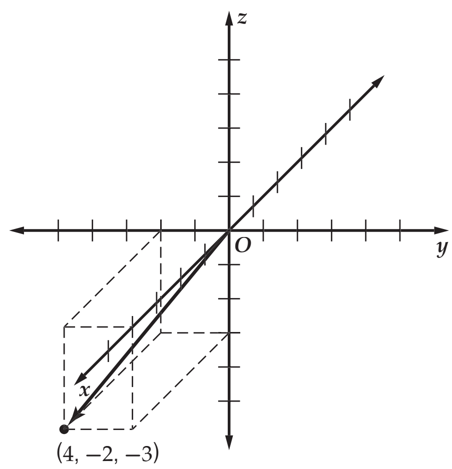
15)



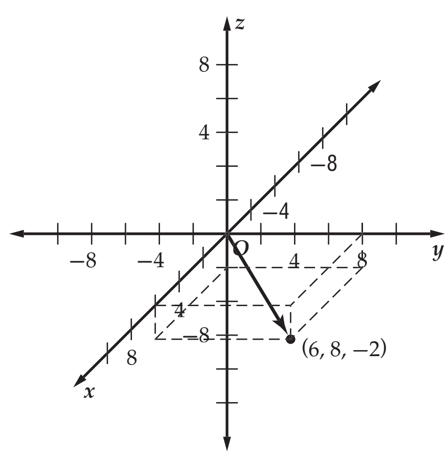
16)



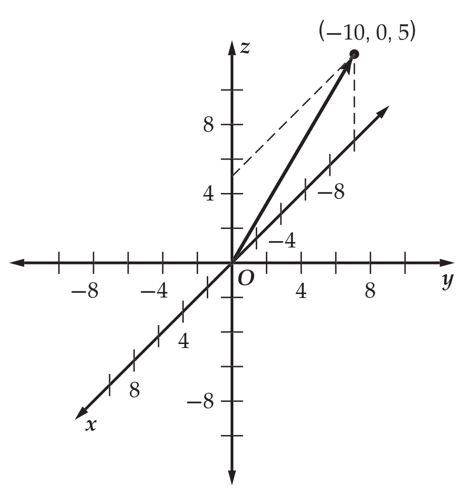
17)



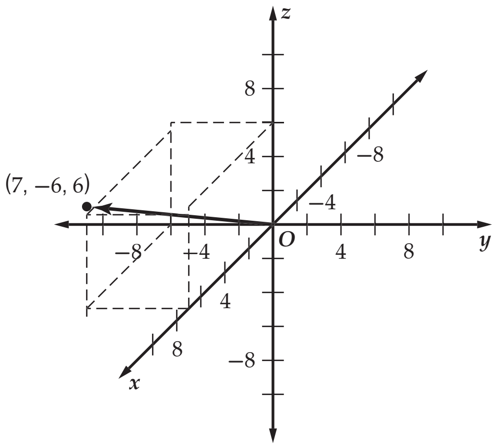
18)



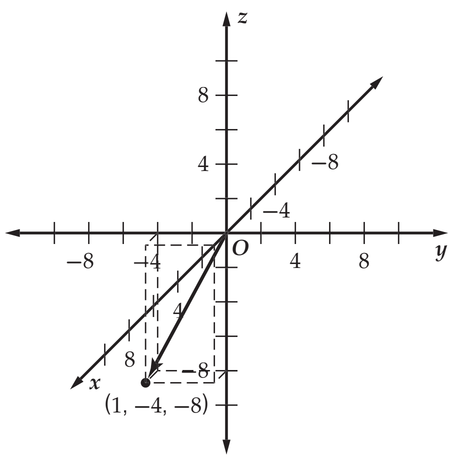
19)



20)



21)



22) $16\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}, 18, \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$ أو $\langle 16, 2, 8\rangle$

23) $-8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}, 4\sqrt{13}, \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$ أو $\langle 0, -8, 12\rangle$

24) $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 10\mathbf{k}, \sqrt{134},$ أو $\langle -3, -5, -10\rangle$

$\left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$

25) $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 20\mathbf{k}, 4\sqrt{30},$ أو $\langle -4, 8, 20\rangle$

$\left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$

26) $-\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}, \sqrt{165},$ أو $\langle -1, 8, -10\rangle$

$\left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle$

27) $-6\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \sqrt{277},$ أو $\langle -6, -15, 4\rangle$

$\left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277} \right\rangle$

28) $4\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \sqrt{266},$ أو $\langle 4, -15, 5\rangle$

$\left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266} \right\rangle$

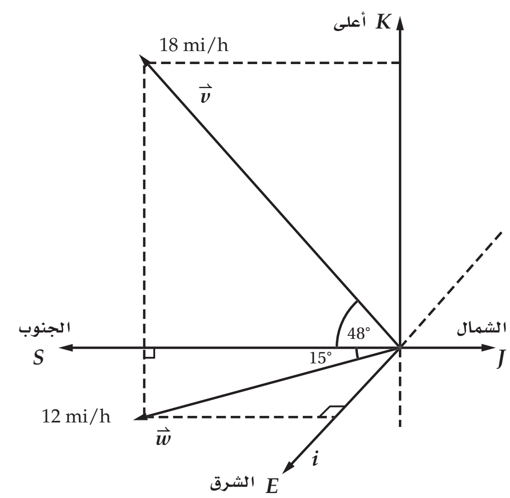
29) $20\mathbf{i} + 32\mathbf{j} + 42\mathbf{k}, 2\sqrt{797},$ أو $\langle 20, 32, 42\rangle$

$\left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797} \right\rangle$

30) $\langle 11, -23, -13\rangle$ أو $11\mathbf{i} - 23\mathbf{j} - 13\mathbf{k}, 3\sqrt{91},$
$\left\langle \frac{11\sqrt{91}}{273}, -\frac{23\sqrt{91}}{273}, -\frac{\sqrt{91}}{21}\right\rangle$

31) $\langle -14, -10, -5\rangle$ أو $-14\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \sqrt{321},$
$\left\langle -\frac{14\sqrt{321}}{321}, -\frac{10\sqrt{321}}{321}, -\frac{5\sqrt{321}}{321}\right\rangle$

45)
$$\vec{v} = \langle 0, -18\cos 48°, 18\sin 48°\rangle \approx \langle 0, -12, 13.4\rangle$$
$$\vec{w} = \langle 12\sin 15°, -12\cos 15°, 0\rangle \approx \langle 3.1, -11.6, 0\rangle$$
$$\vec{r} = \vec{v}+\vec{w} = \langle 3.1, -23.6, 13.4\rangle$$



50) إحداثيات موقع البالون $A(0, 0, 35)$

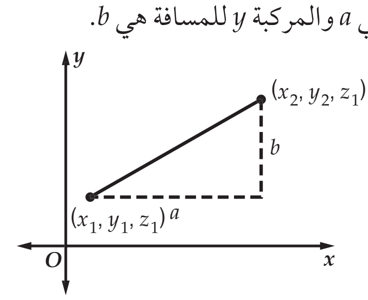
إحداثيات طرف الحبل الذي يمسك به هشام $B(-4, 10, 3)$

$\therefore AB = \sqrt{(0+4)^2+(0-10)^2+(35-3)^2} \approx 33.8 \approx 34$ ft

54a) $\langle -2.2\times 10^6, -9.4\times 10^5, -6.5\times 10^5\rangle,$
$\langle -2.2\times 10^6, 9.4\times 10^5, -6.5\times 10^5\rangle$

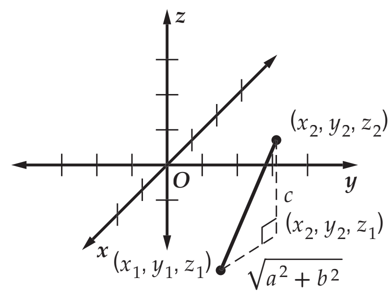
55)
$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+(z-\ell)^2}$$
$$r^2 = (x-h)^2+(y-k)^2+(z-\ell)^2$$

60) إجابة ممكنة: افرض أن النقطتين هما (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2). النقطة التي تقع مباشرة تحت النقطة الثانية في المستوى xy هي (x_2, y_2, z_1). استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_1). أفرض أن المركبة x للمسافة هي a والمركبة y للمسافة هي b.



لذلك تكون المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_1) هي $\sqrt{a^2+b^2}$

استعمل نظرية فيثاغورس مرة أخرى؛ لإيجاد المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2). مركبة المسافة في المستوى xy هي $\sqrt{a^2+b^2}$. افرض أن المركبة z للمسافة هي c.



وعليه تكون المسافة من النقطة (x_1, y_1, z_1) إلى النقطة (x_2, y_2, z_2)

هي $\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

بما أن، $a = x_2 - x_1, b = y_2 - y_1, c = z_2 - z_1$،

فإن المسافة بين النقطتين (x_2, y_2, z_2) ، (x_1, y_1, z_1) هي
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

63) إجابة ممكنة: يكون استعمال بُعدين أكثر منطقية عند وصف موقع على الخارطة؛ لأن الخارطة نفسها مرسومة ببعدين. ويكون استعمال ثلاثة أبعاد أكثر منطقية عند وصف موقع على الكرة الأرضية؛ لأن للكرة الأرضية أبعادًا ثلاثة.

الدرس 5-4 (تأكد)، ص 212

3A)

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}$	$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$
$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 4, 2, -1\rangle$	$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$
$= 9(4) + (-21)(2) + (-6)(-1)$	$= 9(5) + (-21)(1) + (-6)(4)$
$= 36 + (-42) + 6$	$= 45 + (-21) + (-24)$
$= 0$	$= 0$

3B)

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}$	$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$
$= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle -2, -1, -3\rangle$	$= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$
$= (-1)(-2) + (-7)(-1) + 3(-3)$	$= (-1)(5) + (-7)(1) + 3(4)$
$= 2 + 7 + (-9)$	$= -5 + (-7) + 12$
$= 0$	$= 0$

الدرس 5-4، ص 211-216

12) $\langle 21, 7, 0\rangle$

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}$	$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$
$= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle -1, 3, 5\rangle$	$= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle 2, -6, -3\rangle$
$= 21(-1) + 7(3) + 0(5)$	$= 21(2) + 7(-6) + 0(-3)$
$= 0$	$= 0$

13) $\langle 25, 6, 71\rangle$

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}$	$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$
$= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle 4, 7, -2\rangle$	$= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle -5, 9, 1\rangle$
$= 25(4) + 6(7) + 71(-2)$	$= 25(-5) + 6(9) + 71(1)$
$= 0$	$= 0$

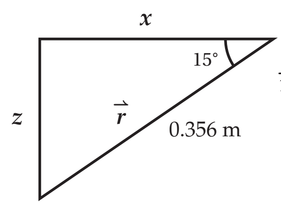
14) $\langle 38, 26, 21\rangle$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\&=\langle 38, 26, 21\rangle\cdot\langle 3, -6, 2\rangle\\&=38(3)+26(-6)+21(2)\\&=0\end{aligned}\qquad\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\&=\langle 38, 26, 21\rangle\cdot\langle 1, 5, -8\rangle\\&=38(1)+26(5)+21(-8)\\&=0\end{aligned}$$

15) $\langle 7, 23, 12\rangle$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\&=\langle 7, 23, 12\rangle\cdot\langle -2, -2, 5\rangle\\&=7(-2)+23(-2)+12(5)\\&=0\end{aligned}\qquad\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\&=\langle 7, 23, 12\rangle\cdot\langle 7, 1, -6\rangle\\&=7(7)+23(1)+12(-6)\\&=0\end{aligned}$$

17 انظر إلى الشكل المجاور



a) $\vec{r}=\langle 0.356\cos 15^\circ, 0, -0.356\sin 15^\circ\rangle$

$\approx\langle 0.34, 0, -0.09\rangle$

$\vec{F}=\langle 0, 0, 212\rangle$

$$\vec{T}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0.34 & 0 & -0.09\\ 0 & 0 & 212\end{vmatrix}=0i-72.08-0k$$

$=\langle 0, -72.08, 0\rangle$

b) مقدار متجه العزم $|\vec{T}|=72.08$ N/m

باتجاه موازٍ لمحور y السالب.

33 لتكن $A(-1, 7, 7), B(-3, 9, 11), C(-5, 11, 13)$

$\overrightarrow{BA}=\langle -1+3, 7-9, 7-11\rangle=\langle 2, -2, 4\rangle$

$\overrightarrow{BC}=\langle -5+3, 11-9, 13-11\rangle=\langle -2, 2, 2\rangle$

ولتكن θ الزاوية بين $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$

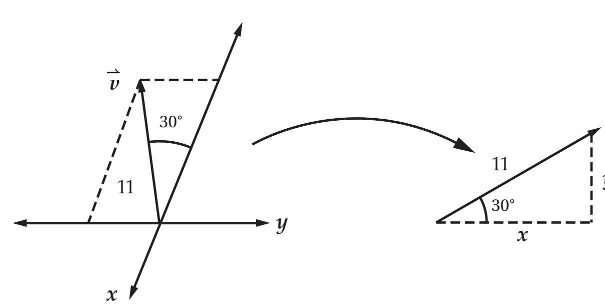
$$=\frac{\langle 2, -2, 4\rangle\cdot\langle -2, 2, 2\rangle}{\sqrt{24}\,\sqrt{12}}=0$$

$\Rightarrow\theta=90^\circ$

أي أن $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$

وعليه فإن النقاط A ،B ،C، ليست على استقامة واحدة، وإذا كانت على استقامة واحدة، فإن الزاوية بين المتجهين لكانت إما 0° وإما 180°.

38



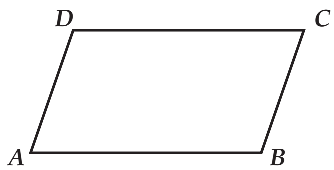
$$\cos 30^\circ=\frac{x}{11}\Rightarrow x=\frac{11\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{y}{11}\Rightarrow y=\frac{11}{2}$$

وبما أن **v** يقع في مستوى امتدادي المحورين y ، x ، فإن:

$$v=\langle\frac{-11\sqrt{3}}{2}, \frac{-11}{2}, 0\rangle$$

40



$$AB=\sqrt{(4-7)^2+(4-5)^2+(4-5)^2}=\sqrt{11}$$

$$BC=\sqrt{(4-4)^2+(6-4)^2+(2-4)^2}=\sqrt{8}$$

$$CD=\sqrt{(7-4)^2+(7-6)^2+(3-2)^2}=\sqrt{11}$$

$$DA=\sqrt{(7-7)^2+(5-7)^2+(5-3)^2}=\sqrt{8}$$

وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فالمضلع متوازي أضلاع.

أوجد الزاوية بين $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}=\langle 7-4, 5-4, 5-4\rangle=\langle 3, 1, 1\rangle$

$\overrightarrow{BC}=\langle 4-4, 6-4, 2-4\rangle=\langle 0,2, -2\rangle$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3(0)+1(2)+1(-2)=0$

$\therefore$ $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$ ، وهذا يعني أن المضلع ABCD مستطيل.

$\therefore$ المساحة هي

$(AB)(BC)=(\sqrt{11})(\sqrt{8})=2\sqrt{22}$ وحدة مربعة

47) إجابة ممكنة: مساحة سطح قاعدة متوازي السطوح هي $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ وارتفاعه هو مسقط $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ على $\mathbf{u}$. استعمل قانون حساب الحجم.

$$\begin{aligned}V&=A_{base}\cdot h\\&=(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot(\mathrm{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\,\mathbf{u})\\&=(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\left(\frac{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\right)\\&=(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{u}\\&=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\end{aligned}$$

51) إجابة ممكنة: للتحقق من توازي أو تعامد متجهين، يمكنك استعمال قاعدة حساب الزاوية بين متجهين . إذا كان قياس الزاوية 0° يكونان متوازيين وإذا كان قياسها 90° يكونان متعامدين. يمكنك كذلك إيجاد الصيغة الإحداثية للمتجهين واستعمال النسب بين الإحداثيات للتحقق إذا كان المتجهان متوازيين، إذا كانت النسب بين الإحداثيات الثلاثة في الصيغة المركبة نفسها يكون المتجهان متوازيين، ولا يمكن استعمال هذه الطريقة إذا كان المتجهان متعامدين. وللتحقق من تعامد متجهين يمكنك إيجاد الضرب الداخلي بينهما، فإذا كان الناتج صفرًا يكون المتجهان متعامدين، لا يمكن استعمال طريقة الضرب الداخلي هذه للتحقق من التوازي.

الفصل 5

مخطط الفصل

	الدرس 5-1 حصتان التقويم التشخيصي اختبار سريع، ص(223)
العنوان	**الإحداثيات القطبية**
الأهداف	• تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية. • تمثيل معادلات قطبية بسيطة.
المفردات الأساسية	نظام الإحداثيات القطبية، القطب، المحور القطبي، الإحداثيات القطبية، المعادلة القطبية، التمثيل القطبي.
تمثيلات متعددة	ص (229)
مصادر الفصل 5	**مصادر الفصل 5** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين، ص (27) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• الكاميرا التوثيقية
تنويع التعليم	ص (227,230)

المفتاح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الخطة الزمنية		
التدريس	مراجعة وتقويم	المجموع
(6) حصص	(2) حصة	(8) حصص

الدرس 2-5 حصتان	الدرس 3-5 حصتان
الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات	**الأعداد المركبة ونظرية ديموافر**
• التحويل بين الإحداثيات القطبية و الديكارتية. • تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.	• تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس. • إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها بالصورة القطبية.
	المستوى المركب، المحور الحقيقي، المحور التخيلي، مستوى أرجاند، القيمة المطلقة لعدد مركب، الصورة القطبية، الصورة المثلثية، المقياس، السعة، الجذور النونية للعدد واحد.
ص (238)	
مصادر الفصل 5 • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين، ص (28) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراس الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 5** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين، ص (29) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية ضمن • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراس الطالب دون ضمن فوق
• السبورة التفاعلية	• مدونة
ص (233,239)	ص (243,250)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (251-254)
- اختبار الفصل ، ص (255)

الفصل 5

التقويم والمعالجة

	التشخيص		إرشادات المعالجة	
	بداية الفصل 5	**المرجع**		**المرجع**
التقويم التشخيصي	التهيئة للفصل الخامس، ص (223)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (223)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس**			
	الأمثلة، تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! (الخطوة 4)، التقويم اختبارات قصيرة زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب كتاب الطالب دليل المعلم دليل المعلم دليل المعلم مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1: الفصل 5 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2: تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
	منتصف الفصل			
	برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1: الفصل 5 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2: تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 5، ص (251-254) اختبار الفصل، ص (255) برنامج بناء الاختبارات زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب كتاب الطالب مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1: الفصل 5 زيارة الموقع www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2: تنويع التعليم دليل الدراسة والمعالجة	كتاب التمارين دليل المعلم مصادر الفصل
التقويم الختامي	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد نماذج اختبارات الإجابة الحرة اختبار المفردات اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	مصادر الفصل

الفصل 5

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون المكانيون اطلب مجموعات من الطلبة استعمال فرجار وخريطة مدينة؛ لتعيين بعض المواقع باستعمال الإحداثيات القطبية والديكارتية. فمثلاً، تقع مكتبة المدينة عند النقطة $(2, 45°)$ أو $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

المتعلمون الفرديون اطلب إلى كل طالب كتابة إحداثيات قطبية على ورقة وتقديمها لزميله الذي يقوم بتحويلها إلى الإحداثيات الديكارتية، ثم يعطيها لزميل ثالث يقوم بإعادة تحويلها مرة أخرى إلى الصورة القطبية.
اطلب إلى الطلبة مقارنة الصورتين القطبيتين، وإذا لم تكونا متساويتين، فاسألهم: أين الخطأ؟

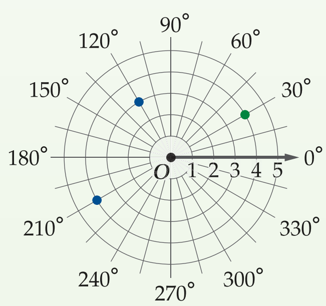
- اطلب إليهم إعادة النشاط مرة أخرى مع صورة ديكارتية لعدد مركب؛ لتحويلها إلى صورة قطبية لعدد مركب، ثم إعادتها إلى صورة ديكارتية ومقارنة الصورتين الديكارتيتين.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلبة تعيين بعض النقاط على منحنى قطبي، ثم تحويل كل نقطة إلى الإحداثيات الديكارتية، وتمثيلها على المستوى الديكارتي. ثم اطلب إليهم أن يطوروا كلا المنحنيين؛ ليلاحظوا أنهم حصلوا على المنحنى القطبي نفسه.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

المتعلمون الحركيون دع الطلبة يلعبوا لعبة "الصيد القطبي" في مجموعات، وزوّد كل مجموعة بشبكة قطبية كبيرة، ونوعين مختلفين من حبوب البقوليات الناشفة كالفاصوليا والفول. يكتب كل طالب 10 نقاط قطبية على بطاقات ويضعونها. في كومة على طاولة، اطلب إلى أحد الطلبة من كل مجموعة أن يسحب بطاقة عشوائيًا ويُعيّن النقطة على الشبكة القطبية. بوضع نوع حبوب البقوليات الخاص به ثم يتبادل الدور مع زميله. وفي الأثناء، إذا اكتشف أحد الطلبة خطأ في تمثيل زميله، فإنه يصحح الموقع ويضع حبة من حباته عندها. وحال الانتهاء من تمثيل النقاط جميعها بصورة صحيحة يربح الطالب الذي له أكبر عدد من الحبوب على الشبكة.



$(3, 120°)$

$(-4, 30°)$

$(4, 30°)$

الفصل 5

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 5

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال صيغة المسافة؛ لإيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي (نظام الإحداثيات الديكارتية).
- تعريف الأعداد التخيلية وتبسيطها، وجمعها وضربها، وحل معادلات ذات حلول تخيلية.
- جمع الأعداد المركبة وطرحها.
  إيجاد مرافق العدد المركب.
- إيجاد الجذر النوني للأعداد والتعابير الجبرية.

الفصل 5

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية.
- تمثيل المعادلات القطبية البسيطة بيانيًا.
- التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية.
- التحويل بين المعادلات الديكارتية والقطبية.
- تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية، والعكس.
- إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها بالصورة القطبية.

ما بعد الفصل 5

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى معادلته معطاة على الصورة القطبية.
- إيجاد الطول التقريبي لقوس من منحنى.
- إيجاد ميل المماس لمنحنى معادلته معطاة على الصورة القطبية.
- حل نظام معادلات قطبية.

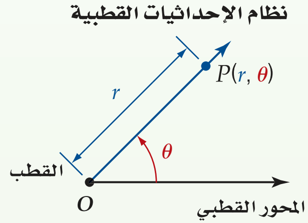
نظرة على الدروس

5-1 الإحداثيات القطبية

يتكون نظام الإحداثيات القطبية مما يأتي:

- نقطة الأصل، نقطة ثابتة O تُسمَّى القطب.
- المحور القطبي، شعاع يمتد أفقيًا من القطب ويكون متجهًا إلى اليمين.
- الإحداثيات القطبية لنقطة هي $P(r, \theta)$، حيث r المسافة المتجهة من O إلى النقطة، θ الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية



في نظام الإحداثيات القطبية، لكل نقطة إحداثيات قطبية هي (r, θ)، و لها أيضًا الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°n)$ أو $(-r, \theta\,(2n+1)180°)$، حيث n عددًا صحيحًا.

المعادلة القطبية هي معادلة معطاة بدلالة الإحداثيات القطبية، ويمكن تمثيلها بيانيًا بتعيين جميع النقاط (r, θ) التي تحققها.

أبسط معادلة يمكن تمثيلها في نظام الإحداثيات القطبية هي المعادلة $r = k$ (وهي دائرة مركزها القطب)، والمعادلة $\theta = k$ (وهو مستقيم يمر بالقطب)، حيث k ثابت.

ويمكن إيجاد المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$ ، $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}\ .$$

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

5-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

لتحويل الإحداثيات القطبية (r, θ) إلى الإحداثيات الديكارتية (x, y)، استعمل صيغتي التحويل الآتيتين:

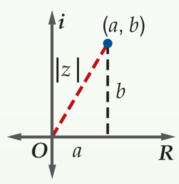
- $x = r\cos\theta$
- $y = r\sin\theta$

لتحويل الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ)، استعمل صيغ التحويل الآتية:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$ أو $\tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

5-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الجزء الحقيقي للعدد المركب z المُعطى بالصورة الديكارتية $a + bi$ هو a، والجزء التخيلي bi. يمكن تمثيل العدد المركب في المستوى الديكارتي بتعيين الزوج المرتب (a, b). حيث يُعيَّن الجزء الحقيقي على المحور الأفقي والجزء التخيلي على المحور الرأسي والذي يسمى المحور التخيلي. القيمة المطلقة للعدد المركّب $z = a + bi$ هي المسافة بين العدد ونقطة الأصل في المستوى المركّب، وتساوي $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



الصورة القطبية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث تمثل r القيمة المطلقة أو المقياس، والزاوية θ سعة العدد المركّب.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$$

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$، $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

تُسهِّل الصورة القطبية للعدد المركب عملية ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وصيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية هي

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

أما صيغة قسمتها فهي:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$، $r_2 \neq 0$

اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي ديموافر نمطًا في ضرب العدد المركب في نفسه عدة مرات، وقاده ذلك النمط إلى وضع نظرية سميت بإسمه. ونصت نظريته على أنه إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددا صحيحًا موجبًا، فإن:

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos^n\theta + i\sin^n\theta)$$

ويمكن استعمال نظرية ديموافر لإيجاد جذور الأعداد المركبة.

الفصل 5 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة
Polar Coordinates and Complex Numbers

فيما سبق

درست القطوع المخروطية ومعادلاتها وتمثيلها بيانيًّا.

والآن:

الأفكار العامة

- أُمثِّلُ الإحداثيات القطبية بيانيًّا.
- أحولُ بين الإحداثيات والمعادلات الديكارتية والقطبية.
- أكتب الأعداد المركبة بالصورة القطبية والصورة الديكارتية وأحول بينهما.

لماذا؟

مسارح يمكن استعمال المعادلات القطبية لنمذجة أنماط الصوت التي تساعد في تحديد وضعية تجهيزات المسرح، مثل السماعات ومكبرات الصوت، وتحديد قوة الصوت ومستوى التسجيل ، كما يمكن استعمال المعادلات القطبية للتحكم في الإضاءة وتحديد زوايا آلات التصوير عند تصوير مشهد ما.

قبل القراءة استعمل مقدمة كل درس في هذا الفصل ؛ لتساعدك على التنبؤ بالأفكار التي ستتعلمها في هذا الفصل.

انظر أعمال الطلبة

الفصل 5 ملاحظات

مشروع الفصل

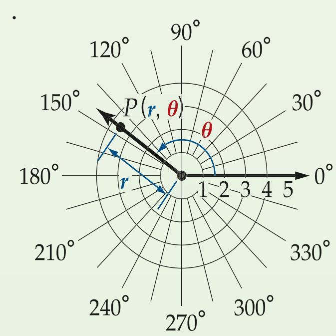
يستعمل الطلبة التمثيل القطبي للإحداثيات والمعادلات، والتحويل بين الإحداثيات والمعادلات القطبية والديكارتية؛ لتصميم تشكيلات هندسية. لذا، اطلب إليهم:

- تصميم لوحة سهام تتكون من حلقتين بالإضافة إلى منطقة المركز، في مستوى قطبي، واطلب إليهم تحديد أنصاف أقطار الحلقات ، والنقاط التي يحصل عليها اللاعب عند إصابة أي موقع على اللوحة. اطلب إليهم تحديد موقع سهمين على اللوحة، وتسميتهما، وإيجاد المسافة بينهما.
- عمل مخطط لمسرح، وتمثيل المنطقة التي يغطيها مكبر صوت بمنحنى قطبي على شكل عروة. وكتابة معادلته.
- عمل مخطط لقاعة حاسوب في مستوى مركب. بحيث تمثل مواقع الحواسيب بوصفها أعدادًا مركبة على الصورتين القطبية والديكارتية.

المفردات الأساسية قدّم مفردات الفصل مستعملاً الخطوات الآتية:

تعريف: نظام الإحداثيات القطبية هو نظام يستعمل الإحداثيات القطبية (r , θ). حيث r المسافة المتجهة من القطب إلى النقطة P، θ الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{PO}$.

مثال:



سؤال: إلامَ يشير الزوج المرتب (r , θ)؟

إجابة ممكنة: تقع النقطة على بُعد r وحدة من القطب، وعلى الشعاع الذي يصنع زاوية قياسها θ مع المحور القطبي.

قراءة سابقة

شجع الطلبة على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة الفصل الخامس

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر معالجة لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — **ضمن المتوسط**

إذا أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريباً من التمارين

فاختر أحد المصادر الآتية:

كتاب الطالب	الدروس 4-2 , 2-2
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (222)
كتاب التمارين	الفصل 2
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — **دون المتوسط**

إذا أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،

فاختر أحد المصدرين الآتيين:

مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

8) صغرى مطلقة: $(2.5, -1)$.

9) عظمى مطلقة: $(2.25, 9.13)$.

10) عظمى محلية: $(1, 0)$، صغرى محلية: $(-1, -4)$

11) عظمى محلية: $(-1.67, 6.48)$، صغرى محلية: $(1, -3)$.

التهيئة للفصل الخامس

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

مَثِّل كل دالة بيانيًا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. وحدِّد ما إذا كانت الدالة زوجية، أو فردية أو غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًا. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية، فصِف تماثل منحنى الدالة. (الدرس 2-2)

1) $f(x) = x^2 + 10$ 2) $f(x) = -2x^3 + 5x$

3) $g(x) = \sqrt{x + 9}$ 4) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

5) $g(x) = 3x^5 - 7x$ 6) $h(x) = \sqrt{x^2} - 5$

للأسئلة 1-6 انظر ملحق الإجابات

7) **منطاد:** تُعطى المسافة بين منطاد وشخص على سطح الأرض بالعلاقة $d(t) = \sqrt{t^2 + 3000}$، حيث t الزمن بالثواني. حدِّد ما إذا كانت الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك باستعمال التمثيل البياني. (الدرس 2-2) غير ذلك

للأسئلة 8-11 انظر الهامش

أوجد القيم القصوى المحلية أو المطلقة لكل دالة مما يأتي، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تحقق هذه القيم. (الدرس 4-2)

8) $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$ 9) $g(x) = -2x^2 + 9x - 1$

10) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ 11) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

12) **صاروخ:** يُعطى ارتفاع صاروخ عن سطح الأرض بـ $h(t) = -16t^2 + 35t + 15$، حيث h الارتفاع بالأقدام، t الزمن بالثواني. أوجد القيم القصوى لهذه الدالة. (الدرس 4-2) عظمى محلية: $(1.09, 34.14)$

أوجد صيغة جميع الزوايا المشتركة مع الزاوية في الضلع النهائي، ثم مثّل زاويتين منهما، إحداهما بقياس سالب والأخرى بقياس موجب. (مهارة سابقة) للأسئلة 13-16 انظر ملحق الإجابات

13) $165°$ 14) $-10°$ 15) $\frac{4\pi}{3}$ 16) $-\frac{\pi}{4}$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

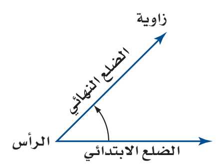
المفردات العامة

نظام الإحداثيات القطبية	ص 224	polar coordinate system
القطب	ص 224	pole
المحور القطبي	ص 224	polar axis
الإحداثيات القطبية	ص 224	polar coordinates
المعادلة القطبية	ص 226	polar equation
التمثيل القطبي	ص 226	polar graph
المستوى المركب	ص 240	complex plane
المحور الحقيقي	ص 240	real axis
المحور التخيلي	ص 240	imaginary axis
مستوى أرجاند	ص 240	Argand plane
القيمة المطلقة لعدد مركب	ص 240	absolute value of a complex number
الصورة القطبية	ص 241	polar form
الصورة المثلثية	ص 241	trigonometric form
المقياس	ص 241	modulus
السعة	ص 241	argument
الجذور النونية للعدد 1	ص 247	nth roots of unity

مراجعة المفردات

الضلع الابتدائي للزاوية (Initial Side of an Angle) الضلع المنطبق على المحور x عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

الضلع النهائي للزاوية (Terminal Side of an Angle) الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل.



قياس الزاوية (Measure of an Angle) مقدار واتجاه الدوران اللازم للانتقال من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي للزاوية.

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلبة عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها أثناء دراستهم للفصل 5، ويمكن استعمال هذه القائمة كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

5-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

رسم زوايا موجبة وسالبة معطاة بالدرجات والراديان في الوضع القياسي.

الدرس 5-1

تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية.

تمثيل معادلات قطبية بسيطة بيانيًا.

ما بعد الدرس 5-1

التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.

2 التدريس

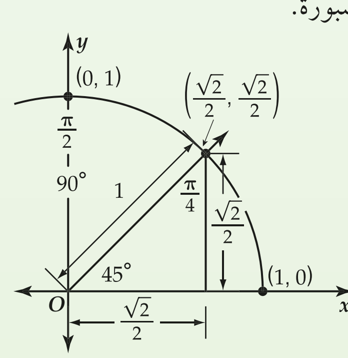
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- إلامَ يشير الإحداثيان في الزوج المرتب (x, y)؟ المسافة الأفقية والرأسية بالنسبة لنقطة الأصل.
- ما قياس الزاوية الناتجة عن المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$؟ $45°$

ارسم الجزء الآتي من دائرة الوحدة على السبورة.



- إلامَ يشير الزوج المرتب $(1, 45°)$؟ إجابة ممكنة: تقع النقطة على بُعد وحدة واحدة من نقطة الأصل وعلى الشعاع الذي يصنع زاوية قياسها $45°$ مع المحور x.

5-1 الإحداثيات القطبية
Polar Coordinates

فيما سبق

درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها بالدرجات والراديان في الوضع القياسي.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أُمثل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أُمثل بيانيًا معادلات قطبية بسيطة.

المفردات الأساسية

نظام الإحداثيات القطبية
polar coordinate system

القطب
pole

المحور القطبي
polar axis

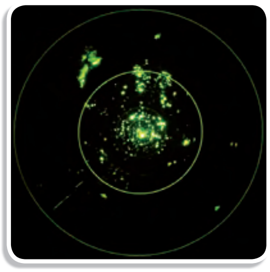
الإحداثيات القطبية
polar coordinates

المعادلة القطبية
polar equation

التمثيل القطبي
polar graph

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

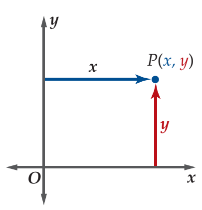


يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، وللحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات، والتضاريس الأرضية. يستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.

تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). عندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

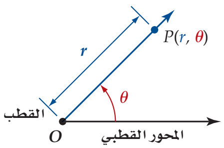
في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x، y هما المحوران الأفقي والعمودي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما O نقطة الأصل. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x, y)، حيث x، y المسافة المتّجهة الأفقية، والعمودية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(3, -4)$ على بُعد 3 وحدات إلى يمين المحور y، وعلى بُعد 4 وحدات إلى أسفل المحور x.

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**. و**المحور القطبي** هو شعاع يمتد أفقيًا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات القطبيّة** (r, θ)، حيث r المسافة المتّجهة من القطب إلى النقطة P، θ الزاوية المتّجهة من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية



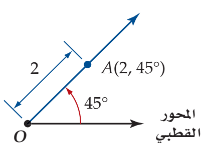
لتمثيل نقطة معطاة بإحداثيات قطبيّة، فإن القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، وإذا كانت r موجبة، فإن P واقعة على الضلع النهائي للزاوية θ. أما إذا كانت سالبة، فإن P واقعة على الشعاع المقابل (الامتداد) للضلع النهائي للزاوية θ.

مثال 1 تمثيل الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

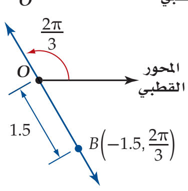
a) $A(2, 45°)$

بما أن $\theta = 45°$، فارسم ضلع للزاوية $45°$، بحيث يكون المحور القطبي هو الضلع الابتدائي لها، لأن $r = 2$، عيِّن نقطةً A تبعُد 2 وحدة عن القطب على الضلع النهائي للزاوية $45°$، كما في الشكل المجاور.



b) $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

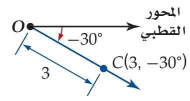
بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، ارسم الضلع النهائي للزاوية $\frac{2\pi}{3}$، بحيث يكون المحور القطبي هو الضلع الابتدائي لها، ولأن r سالبة، مُدَّ الضلع النهائي في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً B تبعُد 1.5 وحدة عن القطب على امتداد الضلع النهائي، كما في الشكل المجاور.



مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (227)	• تنويع التعليم، ص (227)	• تنويع التعليم، ص (230)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (27) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (27) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (27) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

$C(3, -30°)$ (c



بما أن $\theta = -30°$ ، ارسم الضلع النهائي للزاوية $-30°$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو الضلع الابتدائي لها، ولأن $r = 3$ ، عيِّن نقطةً C تبعُد 3 وحدات عن القطب على الضلع النهائي للزاوية، كما في الشكل المجاور.

تأكـد للتدريبات **1A–1C** انظر ملحق الإجابات

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

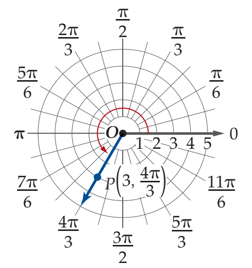
1A) $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ **1B)** $E(2.5, 240°)$ **1C)** $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

تُعيَّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًّا، كما تُعيَّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.

مثال 2 تمثيل النقاط في المستوى القطبي

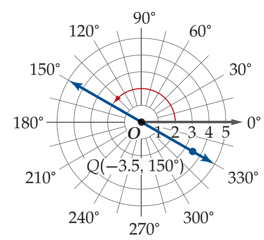
مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

a) $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$



بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ، ارسم الضلع النهائي للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو الضلع الابتدائي لها، ولأن $r = 3$ ، عيِّن نقطةً P تبعُد 3 وحدات عن القطب على الضلع النهائي للزاوية، كما في الشكل المجاور.

b) $Q(-3.5, 150°)$



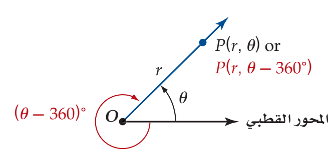
بما أن $\theta = 150°$ ، ارسم الضلع النهائي للزاوية $150°$ ، بحيث يكون المحور القطبي ضلعها الابتدائي، ولأن r سالبة، مُدَّ الضلع النهائي للزاوية في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً Q تبعد 3.5 وحدات عن القطب على امتداد الضلع النهائي للزاوية، كما في الشكل المجاور.

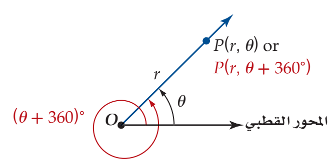
تأكـد

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي: للتدريبين **2A ,2B** انظر ملحق الإجابات

2A) $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **2B)** $S(-2, -135°)$

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرق. وعليه، فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ كما في الشكل أدناه.





إرشادات للدراسة

القطب يمكن تمثيل القطب بالنقطة $(0, \theta)$ ، حيث θ أي زاوية.

تمثيل الإحداثيات القطبية

المثالان 1, 2 يُبيّنان كيفية تمثيل الإحداثيات القطبية على الصورة (r, θ)، عندما تُعطى θ بالدرجات أو الراديان في نظام الإحداثيات القطبية.

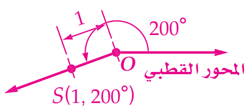
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

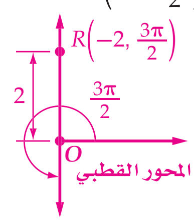
مثال إضافي

1 مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

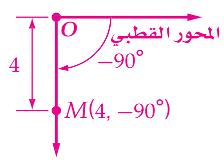
a) $S(1, 200°)$



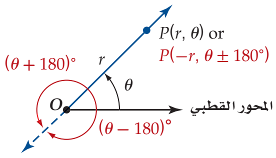
b) $R\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$



c) $M(4, -90°)$



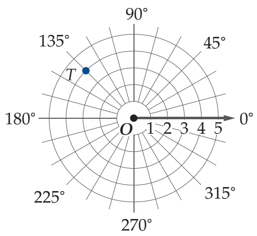
وكذلك؛ لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ ، $(-r, \theta \pm \pi)$ أو تمثِّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.



وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$.

مثال 3 تمثيلات قطبية متعددة

إذا كانت $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثِّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



أحد الأزواج القطبية التي تمثل النقطة T هو $(4, 135°)$.
وفيما يأتي التمثيلات الثلاثة الأخرى.

بطرح $360°$ من θ
$$(4, 135°) = (4, 135° - 360°) = (4, -225°)$$

بوضع $-r$ بدلًا من r، وإضافة $180°$ إلى θ
$$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°) = (-4, 315°)$$

بوضع $-r$ بدلًا من r، بطرح $180°$ من θ
$$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°) = (-4, -45°)$$

تأكد

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثِّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، أو $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

3A) $(5, 240°)$ **3B)** $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

3A) $(5, -120°), (-5, 60°), (-5, -300°)$

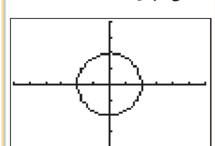
3B) $\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{7\pi}{6}\right), \left(-2, -\frac{5\pi}{6}\right)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلة قطبية**. فمثلًا، $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي يحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = 2$ ، و $y = -3$ أساسيًّا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل، فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$ ، و $\theta = k$ ، حيث k عدد حقيقي، يُعَدُّ أساسيًّا في نظام الإحداثيات القطبية.

إرشاد تقني

تمثيل المعادلات القطبية
لتمثيل المعادلة القطبية $r = 2$ على الآلة الحاسبة البيانية، اضغط MODE أولًا، وغيِّر وضع الرسم من FUNC إلى POL . عند الضغط على Y= ، لاحظ أن المتغيِّر التابع تغيَّر من Y إلى r، والمتغيِّر المستقل من x إلى θ. مثل $r = 2$.


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{16}$ by $[-6, 6]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

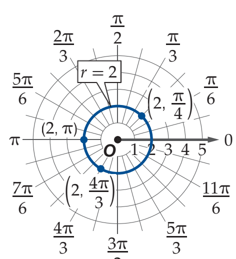
مثال 4 التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

a) $r = 2$

تتكون حلول المعادلة $r = 2$ من جميع النقاط على الصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي.

يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعُد 2 وحدة عن القطب. وعليه ، فإن المنحنى هو دائرة مركزها نقطة الأصل (القطب) ، ونصف قطرها 2 كما في الشكل المجاور.



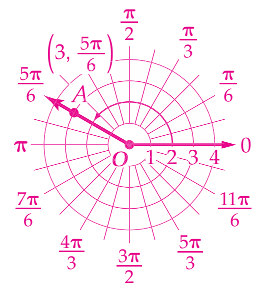
تمثيل الإحداثيات القطبية

مثال 3 يبيِّن كيفية إيجاد إحداثيات قطبية متعددة تمثل نقطة واحدة.

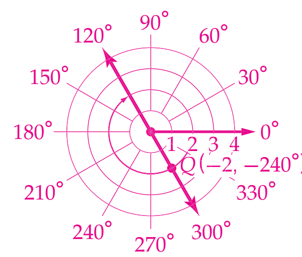
مثالان إضافيان

2 مثل كلًّا من النقطتين الآتيتين في المستوى القطبي:

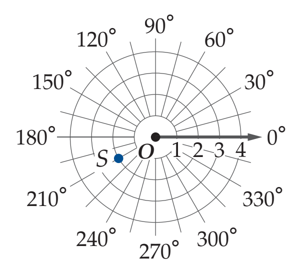
a) $A\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$



b) $Q(-2, -240°)$



3 أوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة S ، إذا كانت $-360° < \theta < 360°$.



$(2, -150°), (2, 210°), (-2, 30°), (-2, -330°)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية

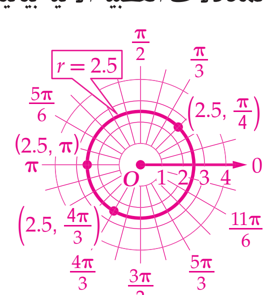
مثال 4 يُبيِّن كيفية تمثيل معادلات قطبية بسيطة مثل الدوائر والمستقيمات.

مثال 5 يُبيِّن كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين معطاتين بالإحداثيات القطبية باستعمال الصيغة القطبية للمسافة.

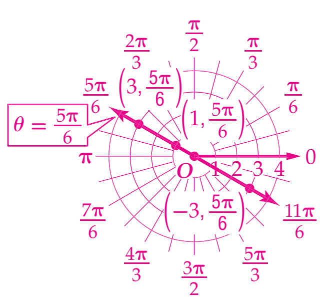
مثال إضافي

4 مثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

a) $r = 2.5$

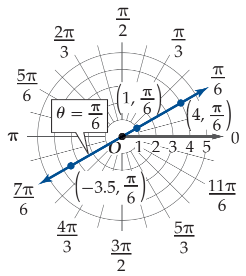


b) $\theta = \frac{5\pi}{6}$



b) $\theta = \frac{\pi}{6}$

تكوّن حلول المعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$ من جميع النقاط $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r أي عدد حقيقي. وعليه، فإن التمثيل البياني عبارة عن جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي الموجب.



تأكد للتدريبين 4A-4B انظر ملحق الإجابات

مثّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًا:

4A) $r = 3$ 4B) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

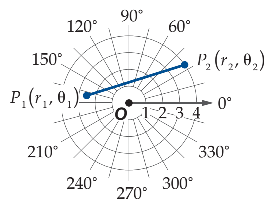
تنبيه!

تهيئة الآلة الحاسبة البيانية عند استعمال صيغة المسافة القطبية، تأكد من ضبط الآلة الحاسبة البيانية على وضعية الدرجات، أو الراديان حسب قياسات الزوايا المعطاة.

مفهوم أساسي — المسافة بالصيغة القطبية

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$، $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



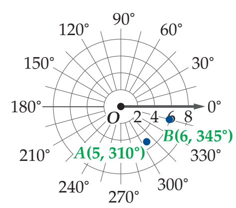
سوف تبرهن هذه الصيغة في التمرين 56

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

حركة جوية: يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°)$، $B(6, 345°)$، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

تقع الطائرة A على بُعد 5 mi من القطب وعلى الضلع النهائي لزاوية قياسها 310°، في حين تقع الطائرة B على بُعد 6 mi من القطب وعلى الضلع النهائي لزاوية قياسها 345°، كما في الشكل المجاور.



b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

باستعمال الصيغة القطبية للمسافة، فإن:

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$ المسافة بالصيغة القطبية

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345° - 310°)} \approx 3.44$$ $(r_1, \theta_1) = (5, 310°)$، $(r_2, \theta_2) = (6, 345°)$

أي أن المسافة بين الطائرتين 3.44 mi تقريبًا. وعليه، فإنهما لا تخالفان تعليمات الطيران.

الربط مع واقع الحياة

لقد طوّرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 يستطيع رصد الطائرات ضمن دائرة نصف قطرها 80 mi.

المصدر: A History of the World Semiconductor Industry

تأكد

5) **قوارب:** يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(8, 150°)$، $(3, 65°)$، حيث r بالأميال.

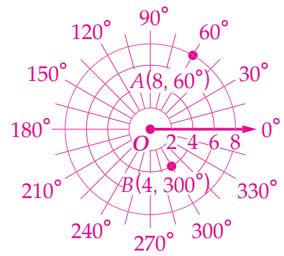
A) مثّل هذا الموقف في المستوى القطبي. A) انظر ملحق الإجابات

B) ما المسافة بين القاربين؟ 8.30 mi

مثال إضافي

5 حركة جويّة: يتابع مراقب الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(8, 60°)$، $B(4, 300°)$، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثل هذا الموقف في المستوى القطبي.



b) استعمل الصيغة القطبية للمسافة؛ لتجد المسافة بين الطائرتين؟ 10.6 mi تقريبًا

التركيز في المحتوى الرياضي

المسافة في المستوى القطبي

انظر إلى المسافة بين النقطتين في المستوى القطبي على أنها ضلع ثالث لمثلث، ضلعاه الآخران هما شعاعان من القطب إلى النقطتين. لاحظ أن صيغة المسافة في المستوى القطبي هي أحد صيغ قانون جيب التمام المستعملة؛ لإيجاد طول ضلع ثالث في مثلث بمعلومية كل من الزاوية المقابلة له وطولي الضلعين الآخرين.

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر طالبًا وأعطه مجموعة نقاط في المستوى القطبي. واطلب إليه استعمال الكاميرا التوثيقية؛ لتوضيح كيفية تمثيلها بيانيًا في مستوى قطبي، وإيجاد المسافة بين كل نقطتين منها.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون قسِّم الطلبة إلى مجموعات ثلاثية، وأعطِ كل مجموعة شريط قياس. مستعملًا قلمًا قابلًا للمسح، ارسم مستوى قطبيًا مكبرًا بمقياس رسم معلوم على سطح الأرض. يقف أحد طلبة المجموعة عند القطب، ويقف الطالبان الآخران عند نقطتين مختلفتين في المستوى القطبي، أحسب المسافة بينهما باستعمال شريط القياس ومقياس الرسم، وقارن النتيجة بنتيجة استعمال الصيغة القطبية للمسافة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 37 – 1 للتحقق من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل التمارين !

المستوى القطبي يحتاج الطلبة إلى ورقة فيها المستوى القطبي في كثير من تمارين هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة في التمارين 25–36، قد يحسبُ الطلبة المسافة بين نقطتين قطبيتين خطأً. لذا، اقترح عليهم التأكد مرتين من الإجابة عند تعويض قيم سالبة لـ θ في معادلة المسافة القطبية، وكذلك التأكد من ضبط الآلة الحاسبة على وضعية الدرجات أو الراديان بحسب التمرين.

إجابات:

12) $(-1, 330°), (1, -210°), (-1, -30°)$

13) $(2, 120°), (2, -240°), (-2, -60°)$

14) $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{-\pi}{6}\right)$

15) $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right), \left(3, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-3, \frac{-4\pi}{3}\right)$

16) $\left(5, \frac{-\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{-7\pi}{6}\right)$

17) $\left(5, \frac{5\pi}{3}\right), \left(5, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-5, \frac{2\pi}{3}\right)$

18) $(2, 330°), (-2, 150°), (-2, -210°)$

19) $(1, 300°), (1, -60°), (-1, 120°)$

تدرب وحل المسائل

للتمارين 10–1 انظر ملحق الإجابات

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (المثالان 1, 2)

1) $R(1, 120°)$ 2) $T(-2.5, 330°)$

3) $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$ 4) $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$

5) $B(5, -60°)$ 6) $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$

7) $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$ 8) $C(-4, \pi)$

9) $M(0.5, 270°)$ 10) $W(-1.5, 150°)$

11) **رماية:** يتكون هدف في منافسة للرماية من 10 دوائر متحدة المركز. ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 10 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب. افترض أن راميًا يستعمل هدفًا نصف قطره 120 cm، وأنه قد أطلق ثلاثة أسهم، فأصابت الهدف عند النقاط (114, 45°)، (82, 315°)، (30, 240°). إذا كان لجميع الحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي نصف قطر الدائرة الداخلية. (المثالان 1, 2)

a) فمثِّل النقاط التي أصابها الرّامي في المستوى القطبي. **a) انظر ملحق الإجابات**

b) ما مجموع النقاط التي حصل عليها الرّامي؟ **13 نقطة**

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثِّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

للتمارين 12–19 انظر الهامش

12) $(1, 150°)$ 13) $(-2, 300°)$

14) $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$ 15) $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$

16) $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$ 17) $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

18) $(2, -30°)$ 19) $(-1, -240°)$

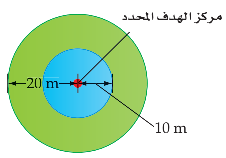
مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: (مثال 4)

للتمارين 20–23 انظر ملحق الإجابات

20) $r = 1.5$ 21) $\theta = 225°$

22) $\theta = -\frac{7\pi}{6}$ 23) $r = -3.5$

24) **فضاء:** في مسابقة لتحديد دقة موقع الهبوط، يحاول السباح الوصول إلى "مركز الهدف المحدد"؛ وهو مركز الهدف عبارة عن دائرة قطرها 2m. كما يُحاط الهدف بدائرتين نصفا قطريهما 10 m و 20 m. (مثال 4)



a) اكتب معادلات تمثِّل الهدف. $r = 1, r = 10, r = 20$

b) مَثِّل المعادلات في المستوى القطبي. **انظر ملحق الإجابات**

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي: (مثال 5)

25) $(2, 30°), (5, 120°)$ **5.39**

26) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$ **10.70**

27) $(6, 45°), (-3, 300°)$ **5.97**

28) $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ **8**

29) $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ **1**

30) $(4, -315°), (1, 60°)$ **3.05**

31) $(-2, -30°), (8, 210°)$ **7.21**

32) $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$ **5**

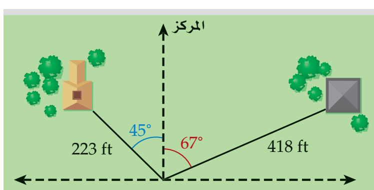
33) $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$ **4.84**

34) $(7, -90°), (-4, -330°)$ **6.08**

35) $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **4.26**

36) $(-5, 135°), (-1, 240°)$ **5.35**

37) **مسّاحون:** أراد مسّاح تحديد حدود قطعة أرض، فحدّد أثرًا يبعُد 223 ft، بزاوية 45° إلى يسار المركز، وأثرًا آخر على بُعد 418 ft، بزاوية 67° إلى يمين المركز، كما في الشكل أدناه، أوجد المسافة بين الأثرين. (مثال 5) **542.5 ft**



38) **مراقبة:** تراقب آلة تصوير مثبتة منطقة جبلية تمثِّل جزءًا من دائرة، وتُحدَّدُ بالمتباينات $0 \le r \le 40$ ، $-60° \le \theta \le 150°$، حيث r بالأمتار. **للفرعين a,b انظر ملحق الإجابات**

a) مثِّل في المستوى القطبي المنطقة التي يمكن لآلة التصوير مراقبتها.

b) أوجد مساحة المنطقة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	54، 56–73
ضمن المتوسط	39–45 (فردي)، 46، 48، 50، 51–54، 56–73
فوق المتوسط	38–73

إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$ ، فأوجد زوجًا مختلفًا من الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي:

39) $(5, 960°)$ $(-5, 60°)$

40) $\left(-2.5, \frac{15\pi}{6}\right)$ $\left(-2.5, \frac{\pi}{2}\right)$

41) $\left(4, \frac{33\pi}{12}\right)$ $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$

42) $(1.25, -920°)$ $(1.25, 160°)$

43) $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$ $\left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$

44) $(-6, -1460°)$ $(6, 160°)$

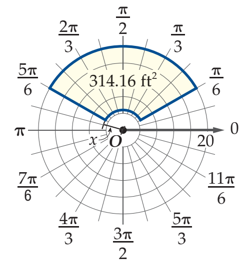
45) **مسرح:** يلقي شاعر قصيدة في مسرح. ويمكنُ وصف المسرح بمستوى قطبي، بحيث يقف الشاعر في القطب باتجاه المحور القطبي. افترض أن الجمهور يجلس في المنطقة المحددة بالمتباينات $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ ، $30 \le r \le 240$، حيث r بالأقدام.

a) انظر ملحق الإجابات

a) مثِّل المنطقة التي يجلس بها الجمهور في المستوى القطبي.

b) إذا كان كل شخص بحاجة إلى $5\,ft^2$، فكم مقعدٍ يتسع المسرح؟ **8906 مقعدًا تقريبًا**

46) **أمن:** يضيء مصباح مراقبة مثبت على سطح أحد المنازل منطقة على شكل جزء من قطاع دائري محدد بالمتباينات $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ ، $x \le r \le 20$ ، حيث r بالأقدام. إذا كانت مساحة المنطقة $314.16\,ft^2$ ،كما هو مبين في الشكل أدناه، فأوجد x . **10 ft تقريبًا**



أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

47) $P_1 = (3, 35°)\,,\, P_2 = (r, 75°)\,,\, P_1P_2 = 4.174$
$r = 6$ أو $r = -1.404$

48) $P_1 = (5, 125°)\,,\, P_2 = (2, \theta)\,,\, P_1P_2 = 4\,, 0 \le \theta \le 180°$ **$174.46°$**

49) $P_1 = (3, \theta)\,,\, P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right)\,,\, P_1P_2 = 5\,, 0 \le \theta \le \pi$ **$\frac{5\pi}{18}$**

50) $P_1 = (r, 120°)\,,\, P_2 = (4, 160°)\,,\, P_1P_2 = 3.297$ **انظر الهامش**

51) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين، سوف تتحقق من العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية. **للفروع a-e انظر ملحق الإجابات**

a) **تمثيل بياني:** عيِّن $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، وارسم نظام الإحداثيات الديكارتية فوق المستوى القطبي بحيث تنطبق نقطة الأصل على القطب، والمحور x على المحور القطبي. سينطبق المحور y على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ارسم مثلثًا قائمًا بوصل A مع نقطة الأصل، وارسم عمودًا على المحور x .

b) **عددي:** احسب طولي ضلعي الزاوية القائمة باستعمال طول الوتر والمتطابقات المثلثية.

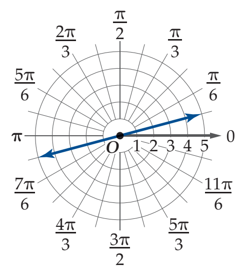
c) **تمثيل بياني:** عيِّن $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على المستوى القطبي نفسه، وارسم مثلثًا قائمًا بوصل B مع نقطة الأصل، وارسم عمودًا على المحور x .

d) **تحليل:** كيف ترتبط أطوال أضلاع المثلث بالإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

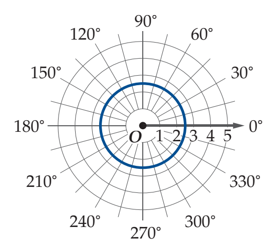
e) **تحليل:** اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) ، والإحداثيات الديكارتية (x, y) .

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي: **للتمرينين 53 , 52 انظر الهامش**

52)



53)



إجابات:

50) عوِّض القيم المعطاة في الصيغة القطبية للمسافة

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$3.297 = \sqrt{r^2 + 4^2 - 2r(4)\cos(160° - 120°)}$$

$$3.297^2 = r^2 + 16 - 8r\cos 40°$$

$$0 = r^2 - 8r\cos 40° + (16 - 3.297^2)$$

استعمل القانون العام لإيجاد قيمة r :

$$r = \frac{8\cos 40° \pm \sqrt{(-8\cos 40°)^2 - 4(1)(16 - 3.297^2)}}{2(1)}$$

$r \approx 5.13$ أو $r \approx 1$

52) إجابة ممكنة: $\theta = \frac{\pi}{12}$

53) $r = 2.5$ أو $r = -2.5$

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة كتابة بعض الجمل للمقارنة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية وإبراز التباين بينهما، واطلب إليهم تسليم إجاباتهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 58، على الطلبة ملاحظة أن عليًا قد رسم النقطة خطأً على بُعد 5 وحدات رأسيًا من المحور القطبي وتقع على شعاع يصنع زاوية قياسها 45° مع المحور القطبي.

مسائل مهارات التفكير العليا

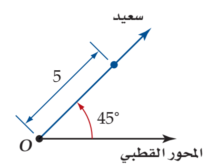
54) **تبرير:** وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًّا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟ **انظر ملحق الإجابات**

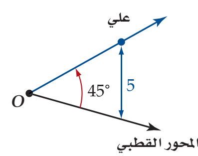
55) **تحدٍّ:** أوجد زوجًا مُرَتَّبًا من الإحداثيات القطبية؛ لتمثيل النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-3, -4)$. **$(5, 233°)$**

56) **برهان:** أثبت أن المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$ ، $P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.
(**إرشاد:** استعمل قانون جيب التمام). **انظر ملحق الإجابات**

57) **تبرير:** وضّح ماذا يحدث لمعادلة المسافة المعطاة بالصيغة القطبية عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. فسِّر هذا التغيّر. **انظر ملحق الإجابات**

58) **اكتشف الخطأ:** قام سعيد وعلي بتعيين النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما في الشكل أدناه. أيهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**





59) **اكتب:** خمِّن سبب عدم كفاية الإحداثيات القطبية لتحديد موقع طائرة بشكل دقيق. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u ، v ، ثم حدِّد ما إذا كان u ، v متعامدين، لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 5-4)

60) $\mathbf{u} = \langle 4, 10, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1, 7\rangle$ **-3، ليسا متعامدين**

61) $\mathbf{u} = \langle -5, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -9, 8\rangle$ **0، متعامدان**

62) $\mathbf{u} = \langle -8, -3, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -6, 0\rangle$ **-14، ليسا متعامدين**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 3, -2\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle 2, 5, 1\rangle$ ، $\mathbf{c} = \langle 3, -6, 5\rangle$. فأوجد كلًا مما يأتي: (الدرس 4 - 4)

63) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ **$\langle 16, -29, 36\rangle$**

64) $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$ **$\langle 1, 44, -17\rangle$**

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v لكل مما يأتي: (الدرس 5-4)

65) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, -8\rangle$ **$133.9°$**

66) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ **$144.3°$**

67) $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, -6, 9\rangle$ **$61.45°$**

لتكن D نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ ، و E نقطة نهايته. اكتب $\overrightarrow{DE}$ بدلالة متجهي الوحدة i ، j . (الدرس 2-4)

68) $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ **$\frac{21}{5}\mathbf{i} + -\frac{2}{3}\mathbf{j}$**

69) $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$ **$-\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{7}\mathbf{j}$**

70) $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$ **$-15.8\mathbf{i} + -6.1\mathbf{j}$**

تدريب على اختبار معياري

71) يقوم مراقب حركة الطيران بمراقبة طائرتين على الارتفاع نفسه، إذا كانت إحداثيات الطائرتين $(5,310°)$ ، $(6,345°)$ ، حيث r بالأميال، فما المسافة التقريبيّة بين الطائرتين؟ **C**

A 2.97 mi

B 3.25 mi

C 3.44 mi

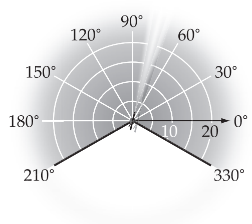
D 3.71 mi

72) أيُّ المتجهات الآتية يمثِّل $\overrightarrow{RS}$ ، حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$ ، ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟ **A**

A $\langle 7, -10\rangle$ **C** $\langle -7, 10\rangle$

B $\langle -3, 10\rangle$ **D** $\langle -3, -10\rangle$

73) يستطيع رشاش ماء رشّ منطقة على شكل قطاع دائري يمكن تحديدها بالمتباينات $0 \le r \le 20$ ، $-30° \le \theta \le 210°$ ، حيث r بالأقدام. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟ **B**



A 821 ft^2 **C** 852 ft^2

B 838 ft^2 **D** 866 ft^2

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

- $A\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ $A(0, 4)$
- $C(3, \pi)$ $C(-3, 0)$
- $B(2, 270°)$ $B(0, -2)$
- $D(1, 360°)$ $D(1, 0)$

5-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات
Polar and Rectangular Forms of Equations

فيما سبق

درستُ تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية.

والآن

الأفكار الرئيسة

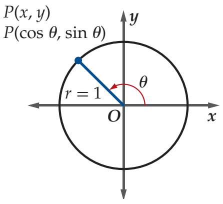
- أحوِّل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- أحوِّل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبعث مِجَس فوق صوتي مُثبَّت إلى رجل آلي شعاعًا يدور في دوائر كاملة، وعندما يصطدم الشعاع بجسم، فإن المِجَس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة r، والزاوية θ. ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.

الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$؛ لأن



$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة r، θ على النحو الآتي:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

بالضرب في r

$$r\cos\theta = x \quad , \quad r\sin\theta = y$$

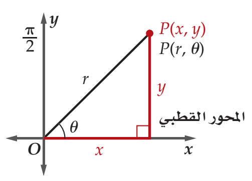
وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.

مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ)، فإن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P (x, y) هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



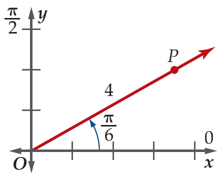
مثال 1 — تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلٍّ نقطة مما يأتي:

a) $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بما أن إحداثيات النقطة $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، فإن $r = 4$، $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 4\cos\frac{\pi}{6}$	$r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4\sin\frac{\pi}{6}$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	بالتبسيط	$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3}$		$= 2$



أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو $(3.46, 2)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

5-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-2

استعمال نظام الإحداثيات القطبية لتمثيل النقاط وبعض المعادلات البسيطة.

الدرس 5-2

التحويل بين الإحداثيات القطبية و الديكارتية.

تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

ما بعد الدرس 5-2

تحويل الأعداد المركبة من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- إذا وُضع نظام الإحداثيات الديكارتية منطبقًا على نظام الإحداثيات القطبية، فأي النقاط القطبية ستنطبق على نقطة الأصل؟ $(0, 0)$ أو $(0, 0°)$.
- أي النقاط القطبية ستنطبق على النقطة الديكارتية $(4, 0)$؟ $(4, 0)$ أو $(4, 0°)$.
- أي النقاط القطبية ستنطبق على النقطة الديكارتية $(0, 4)$؟ $(4, 90°)$ أو $\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$
- أي النقاط الديكارتية ستنطبق على النقطة القطبية $(4, \pi)$؟ $(-4, 0)$
- أي النقاط الديكارتية ستنطبق على النقطة القطبية $(4, 270°)$؟ $(0, -4)$

الإحداثيات القطبية والديكارتية

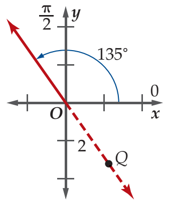
مثال 1 يُبيّن كيفية تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية.

مصادر الدرس 5-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (233)	• تنويع التعليم، ص (233)	• تنويع التعليم، ص (239)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (28) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (28) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين، ص (28) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

b) $Q(-2, 135°)$

بما أن إحداثيات النقطة $Q(-2, 135°)$، فإن $r = -2$ ، $\theta = 135°$.

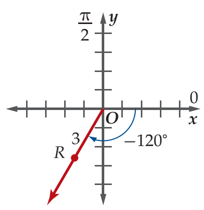


$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= -2\cos 135°$	$r = -2 , \theta = 135°$	$= -2\sin 135°$
$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$	بالتبسيط	$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو $(1.41, -1.41)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

c) $V(3, -120°)$

بما أن إحداثيات النقطة $V(3, -120°)$، فإن $r = 3$ ، $\theta = -120°$



$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 3\cos -120°$	$\theta = -120° , r = 3$	$= 3\sin -120°$
$= 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$	بالتبسيط	$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $(-1.5, -2.6)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

✓ تأكد

حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي: انظر الهامش

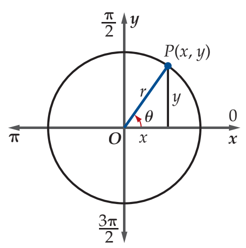
1A) $R(-6, -120°)$ **1B)** $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ **1C)** $T(-3, 45°)$

إرشادات للدراسة

تحويل الإحداثيات

العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتها العملية المتبعة لإيجاد طول المتجه واتجاهه.

ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية التي يصنعها موقع تلك النقطة مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.



استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.

$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

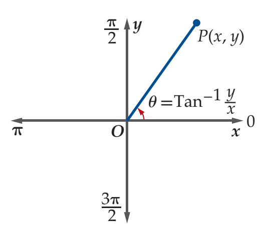
ترتبط الزاوية θ بكل من x ، y من خلال دالة الظل.

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ تعريف الظل

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ معكوس دالة الظل

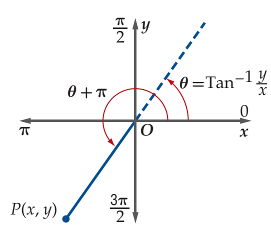
تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ أو $[-90°, 90°]$

في نظام الإحداثيات الديكارتية. وتعطي قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أو عندما تكون $x > 0$ ، كما في الشكل (1) . إذا كانت $x < 0$ ، فعليك إضافة π أو 180° إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل (2) .



$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

الشكل (1)



$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$

الشكل (2)

✓ التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي :

a) $D\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ $(1, \sqrt{3})$

b) $F(-5, 45°)$ $F\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $H(4, -240°)$ $H(-2, 2\sqrt{3})$

إرشادات للمعلم الجديد

ضبط الوضعية ذكِّر الطلبة بأن عليهم ضبط وضعية الآلة الحاسبة في المثال 1a لتكون RADIAN (راديان) ، وذلك بالضغط على MODE ثم الاختيار. أما في المثالين 1b,1c ، فإن عليهم ضبط الوضعية لتكون DEGREE (الدرجة) بنفس الطريقة.

إجابات (تأكد):

1A) $(3, 3\sqrt{3})$ أو $(3, 5.20)$ تقريبًا

1B) $(2.5, 2.5\sqrt{3})$ أو $(2.5, 4.33)$ تقريبًا

1C) $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(-2.1, -2.1)$ تقريبًا

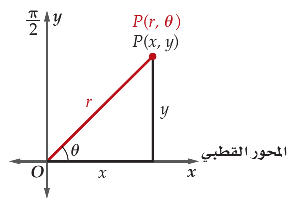
مفهوم أساسي: تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة P هي:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ ، عندما $x < 0$

أو ($\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$).



تذكَّر أن هناك عددًا لانهائيًّا من أزواج الإحداثيات القطبية للنقطة، والتحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية يعطي أحدها.

مثال 2 تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

a) $S(1, -\sqrt{3})$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (1, -\sqrt{3})$، فإن $x = 1$، $y = -\sqrt{3}$.

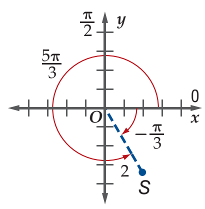
ولأن $x > 0$، استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$؛ لإيجاد الزاوية θ.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1, y = -\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بالتبسيط	$= -\frac{\pi}{3}$

أي أن $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة S.

ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة موجبة لـ θ، وذلك بإضافة 2π.

فيكون $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$، كما في الشكل المجاور.



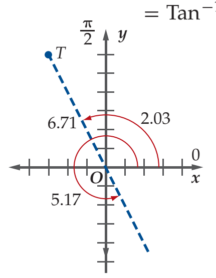
b) $T(-3, 6)$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (-3, 6)$، فإن $x = -3$، $y = 6$.

ولأن $x < 0$، استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$؛ لإيجاد الزاوية θ

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$x = -3$ و $y = 6$	$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + \pi$
$= \sqrt{45} \approx 6.71$	بالتبسيط	$= \text{Tan}^{-1}(-2) + \pi \approx 2.03$ rad

أي أن $(6.71, 2.03)$ تقريبًا هو زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة T، ويمكن إيجاد تمثيل آخر باستعمال قيمة سالبة لـ r من خلال $(-6.71, 2.03 + \pi)$ أو $(-6.71, 5.17)$، كما في الشكل المجاور.



تأكد

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2A) $V(8, 10)$ $(12.8, 0.90), (-12.8, 4.04)$

2B) $W(-9, -4)$ $(9.85, 3.56), (-9.85, 6.70)$

إرشاد تقني

تحويل الإحداثيات

لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى القطبية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، اضغط 2nd APPS لمشاهدة قائمة ANGLE اختر (R▸Pr وأدخل الإحداثيات، سيعطي هذا قيمة r. ولحساب قيمة θ أعد العملية، ولكن اختر (R▸Pθ.

الإحداثيات القطبية والديكارتية

مثال 2 يُبيّن كيفية تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية.

مثال إضافي

2 أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كلٍّ مما يأتي:

a) $E(2, -4)$ $E(4.47, -1.11)$ أو $E(4.47, 5.17)$

b) $G(-2, -4)$ $G(4.47, 4.25)$ أو $G(-4.47, 5.17)$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حل عدة أمثلة على التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية. وخزِّن حلولك في ملف وأرسله إلى الطلبة؛ لاتخاذه مرجعًا إضافيًا.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الفرديون قسِّم الطلبة إلى مجموعات ثلاثية. واطلب إلى أحد طلبة كل مجموعة تسمية إحداثيات قطبية لنقطة ما. ثم يقوم طالب آخر بتحويل إحداثيات النقطة إلى إحداثيات ديكارتية ويُمرِّرُها إلى الطالب الثالث الذي يعيد تحويلها إلى إحداثيات قطبية. اطلب إليهم المقارنة بين الصورتين القطبيتين للنقطة. إذا لم تكونا متساويتين، فاسأل الطلبة عن الخطأ الذي أدى إلى ذلك. كرر النشاط مبتدئًا بإحداثيات ديكارتية.

الإحداثيات القطبية والديكارتية

مثال 3 يُبيّن كيفية التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.

مثال إضافي

3 **رجل آلي:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أن الرجل الآلي متجه إلى الشرق وأن المِجَسّ قد رصد جسمًا عند النقطة $(3, 280°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟ $(0.52, -2.95)$

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة $(4, 9)$، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟ $(9.85, 66.0°)$

التركيز في المحتوى الرياضي

الإحداثيات القطبية ثلاثية الأبعاد كما هو الحال في النقاط والمتجهات في الفضاء الديكارتي ثلاثي الأبعاد، فإنه يمكن تمثيل الإحداثيات القطبية في فضاء ثلاثي الأبعاد؛ وذلك بتوسعة نظام الإحداثيات القطبية بإحدى الطريقتين الآتيتين: الطريقة الأولى، نضيف إحداثي ثالث يقيس ارتفاع النقطة عن المستوى، وهذه الطريقة تعرّف نظام الإحداثيات الأسطوانية. أما الطريقة الثانية، فهي إضافة إحداثي ثالث يقيس الزاوية مع المحور الثالث وهذه الطريقة تعرّف نظام الإحداثية الكرّوية. لاحظ أن نظام الإحداثيات الكرّوية يشبه نظام دوائر العرض وخطوط الطول لكرة نصف قطر ثابت.

في بعض ظواهر الحياة الطبيعية، قد يكون من المفيد أن تحوّل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

مثال 3 من واقع الحياة — التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟". افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسَّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

	صيغ التحويل	
$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 5\cos 295°$	$r = 5,\ \theta = 295°$	$= 5\sin 295°$
≈ 2.11	بالتبسيط	≈ -4.53

أي أن الإحداثيات الديكارتية لموقع الجسم هي $(2.11, -4.53)$ تقريبًا.

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة $(3, 7)$، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{3^2 + 7^2}$	$x = 3,\ y = 7$	$= \mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{3}$
≈ 7.62	بالتبسيط	$\approx 66.8°$

أي أن الإحداثيات القطبية لموقع الجسم هي $(7.62, 66.8°)$ تقريبًا.

الربط مع واقع الحياة

صممت وكالة ناسا رجلًا آليًا وزنه 3400 lb، وطوله 12 ft، وطول ذراعه 11 ft؛ لأداء بعض المهام في الفضاء الخارجي.

المصدر: The New York Times

تأكد

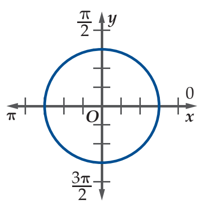
3) **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟ $(-3.44, 4.91)$

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة الديكارتية $(-2, 6)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟ $(6.32, 108°)$

المعادلات القطبية والديكارتية سوف تحتاج في التفاضل والتكامل إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية، والعكس، وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية المعقّدة صورتها القطبية أسهل بكثير. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

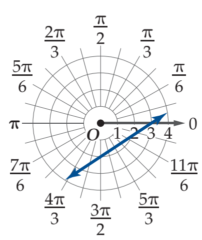
المعادلة على الصورة الديكارتية
$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية
$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقّدة صورتها الديكارتية أسهل بكثير، لاحظ معادلة المستقيم أدناه.

المعادلة القطبية
$r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$



المعادلة الديكارتية
$2x - 3y = 6$

المعادلات القطبية والديكارتية

مثال 4 يُبيّن كيفية تحويل المعادلات من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية.
مثال 5 يُبيّن كيفية تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية.

مثال إضافي

4 حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية فيما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية:

a) $(x+2)^2+y^2=4$
دائرة نصف قطرها 2 ، ومركزها $(-2, 0)$، $r=-4\cos\theta$

b) $2xy=4$
قطع زائد، خطّا تقاربه المحور x، والمحور y، $r^2=\frac{4}{\sin 2\theta}$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة، إذ نستبدل x بـ $r\cos\theta$، و y بـ $r\sin\theta$ ، ثم نبسط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

مثال 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية فيما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية:

a) $(x-4)^2+y^2=16$

التمثيل البياني للمعادلة $(x-4)^2+y^2=16$ هو دائرة نصف قطرها 4، ومركزها $(4, 0)$. ولإيجاد الصيغة القطبيّة للمعادلة، استبدل x بـ $r\cos\theta$ و y بـ $r\sin\theta$. ثم بَسِّط المعادلة.

$(x-4)^2+y^2=16$	المعادلة الأصلية
$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$	$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$	بالضرب
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$	بطرح 16 من الطرفين
$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$	بوضع الحدود المربعة في طرف واحد
$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$	بالتحليل
$r^2(1)=8r\cos\theta$	متطابقة فيثاغورس
$r=8\cos\theta$	بقسمة الطرفين على r

b) $y=x^2$

شكل المنحنى الممثل للمعادلة $y=x^2$ قطع مكافئ، رأسه نقطة الأصل، واتجاه فتحته إلى أعلى.

$y=x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta=(r\cos\theta)^2$	$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$
$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$	بالضرب
$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=r$	بقسمة الطرفين على $r\cos^2\theta$
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=r$	$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$
$\tan\theta\sec\theta=r$	متطابقة القسمة والمقلوب

إرشادات للدراسة

المتطابقات المثلثة
من المفيد أن تراجع المتطابقات المثلثية التي تعلمتها سابقًا؛ لمساعدتك على تبسيط الصورة القطبية للمعادلات الديكارتيّة.

تأكد

حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية فيما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية:

4A) $x^2+(y-3)^2=9$ 　 4B) $x^2-y^2=1$

4A) دائرة معادلتها، $r=6\sin\theta$
4B) قطع زائد معادلته، $r^2=\sec 2\theta$

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$r^2=x^2+y^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

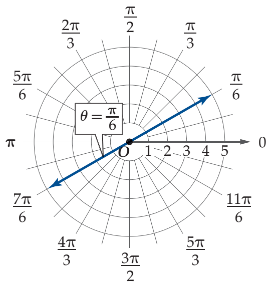
235 الدرس 2-5 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

مثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني:

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

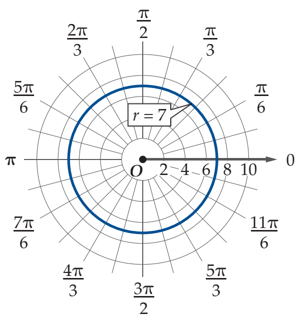
المعادلة الأصلية	$\theta = \frac{\pi}{6}$
بأخذ tan للطرفين	$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\tan \theta = \frac{y}{x}$	$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
بضرب الطرفين في x	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$



تمثيل هذه المعادلة هو مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $r = 7$

المعادلة الأصلية	$r = 7$
بتربيع الطرفين	$r^2 = 49$
$r^2 = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 49$



تمثل هذه المعادلة الديكارتية دائرة نصف قطرها 7، ومركزها نقطة الأصل.

c) $r = -5 \sin \theta$

المعادلة الأصلية	$r = -5 \sin \theta$
بضرب الطرفين في r	$r^2 = -5r \sin \theta$
$r^2 = x^2 + y^2,\ y = r \sin \theta$	$x^2 + y^2 = -5y$
بإضافة $5y$ إلى الطرفين	$x^2 + y^2 + 5y = 0$

ويمكن كتابة المعادلة الأخيرة على الصورة $x^2 + (y + 2.5)^2 = 6.25$، وتمثّل هذه المعادلة دائرة نصف قطرها 2.5، ومركزها $(0, -2.5)$.

تأكد للتدريبات 5A–5C انظر الهامش

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني:

5A) $r = -3$ **5B)** $\theta = \frac{\pi}{3}$ **5C)** $r = 3 \cos \theta$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة النقطتان $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ تقعان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$. والإحداثيات الديكارتية لهما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$. فتكون معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين هي: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

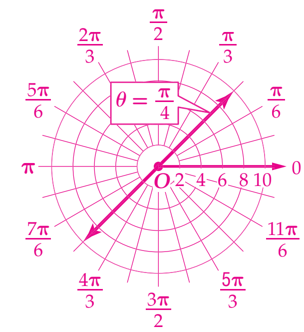
إرشادات للدراسة

التحويل إلى الصورة الديكارتية هناك بعض التعويضات التي يمكن استعمالها بدلًا من $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$، وهي: $r = \frac{x}{\cos \theta}, r = \frac{y}{\sin \theta}$.

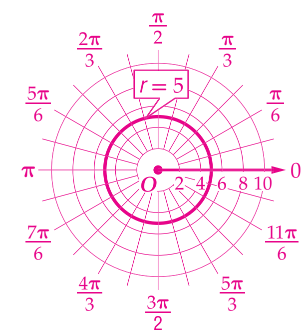
مثال إضافي

5 اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة الديكارتية وحدّد نوع تمثيلها البياني:

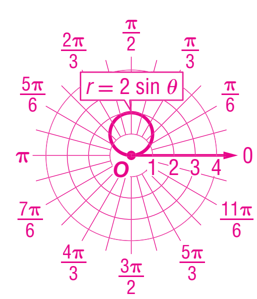
a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ مستقيم يمر بنقطة الأصل، وميله يساوي 1، ومعادلته $y = x$.



b) $r = 5$ دائرة نصف قطرها 5 ومركزها $(0, 0)$، ومعادلتها $x^2 + y^2 = 25$.

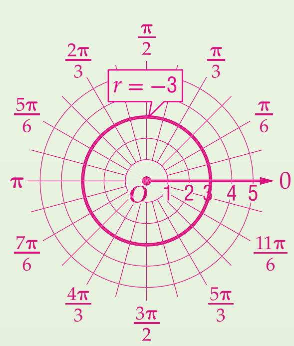


c) $r = 2 \sin \theta$ دائرة نصف قطرها 1، ومركزها $(0, 1)$، ومعادلتها $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

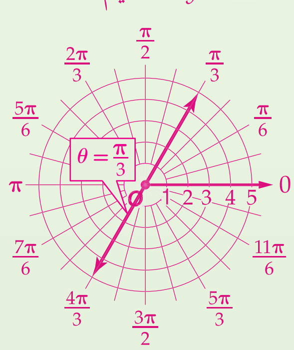


إجابات (تأكد):

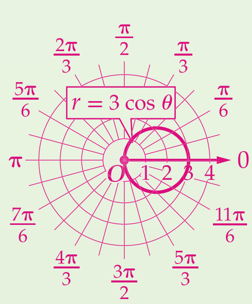
5A) $x^2 + y^2 = 9$، دائرة



5B) $y = \sqrt{3}\ x$، مستقيم



5C) $x^2 + y^2 - 3x = 0$، دائرة



3) $(-2.5, -4.33)$ أو $(-2.5, -2.5\sqrt{3})$

تدرب وحل المسائل

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلّ نقطة مما يأتي: (مثال 1)

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

3) $(5, 240^\circ)$ 4) $(2.5, 250^\circ)$ $(-0.86, -2.35)$

5) $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ $(1, \sqrt{3})$ 6) $(-13, -70^\circ)$ $(-4.45, 12.22)$

7) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 8) $(-2, 270^\circ)$ $(0, 2)$

9) $(4, 210^\circ)$ $(-2\sqrt{3}, -2)$ 10) $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2) للتمارين 11–22 انظر الهامش

11) $(7, 10)$ 12) $(-13, 4)$

13) $(-6, -12)$ 14) $(4, -12)$

15) $(2, -3)$ 16) $(0, -173)$

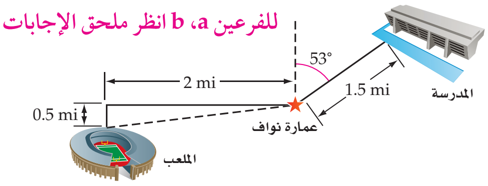
17) $(a, 3a)$، $a > 0$ 18) $(-14, 14)$

19) $(52, -31)$ 20) $(3b, -4b)$

21) $(1, -1)$ 22) $(2, \sqrt{2})$

23) **مسافات** يقف نواف على سطح عمارته؛ ليحدِّد موقع المدرسة بزاوية 53° من الشمال إلى الشرق. على افتراض أن المدرسة تبعُد 1.5 mi من العمارة، كما في الشكل أدناه. (مثال 3)

للفرعين a، b انظر ملحق الإجابات



a) إذا سلك نواف طريقًا للشرق، ثم للشمال كي يصل إلى المدرسة، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟

b) إذا كان الملعب على بُعد 2 mi غربًا، و 0.5 mi جنوبًا، وعمارة نواف تمثِّل القطب، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟

حدِّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية مما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية: (مثال 4) للتمارين 24–31 انظر ملحق الإجابات

24) $x = -2$ 25) $(x+5)^2 + y^2 = 25$

26) $y = -3$ 27) $x = y^2$

28) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 29) $x^2 + (y+3)^2 = 9$

30) $y = \sqrt{3}x$ 31) $x^2 + (y+1)^2 = 1$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني: (مثال 5) للتمارين 32–41 انظر ملحق الإجابات

32) $r = 3\sin\theta$ 33) $\theta = -\frac{\pi}{3}$

34) $r = 10$ 35) $r = 4\cos\theta$

36) $\tan\theta = 4$ 37) $r = 8\csc\theta$

38) $r = -4$ 39) $\cot\theta = -7$

40) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 41) $r = \sec\theta$

42) **زلازل** تُنمذَج حركة أمواج الزلازل بالمعادلة $r = 12.6\sin\theta$، حيث r مقاسه بالأميال. (مثال 5) للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

a) اكتب معادلة أمواج الزلازل على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني.

b) أوجد مركز الزلزال، وَصِف المنطقة المتأثرة به.

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني: للتمارين 43–50 انظر ملحق الإجابات

43) $r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$

44) $r = 10\csc\left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$

45) $r = 3\csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

46) $r = -2\sec\left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$

47) $r = 4\sec\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$

48) $r = \frac{5\cos\theta + 5\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

49) $r = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

50) $r = 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

حدِّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية مما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية: للتمارين 51–54 انظر ملحق الإجابات

51) $6x - 3y = 4$

52) $2x + 5y = 12$

53) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

54) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1 – 42 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل التمارين

المستوى القطبي يحتاج الطلبة إلى ورقة المستوى القطبي في كثير من تمارين هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة راقب الطلبة الذين يخطئون في التعويض عن x, y بما يكافئها عند التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية. واطلب إليهم كتابة صيغ التحويل بين x, y, r, θ على بطاقة والاحتفاظ بها في الكتاب.

إجابات:

11) $x = 7, y = 10$، وبما أن $x > 0$، استعمل $\text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$؛ لإيجاد θ

$\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{10}{7}\right) \approx 0.96 \text{ (rad)}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{49 + 100}$

$= \sqrt{149} \approx 12.21$

فيكون الزوج $(12.21, 0.96)$ هو تمثيل قطبي للنقطة $(7, 10)$ ويكون الزوج $(-12.21, 0.96 + \pi)$ أو $(-12.21, 4.1)$ هو تمثيل قطبي آخر لهذه النقطة.

12) $(13.6, 2.8)$ ، $(-13.6, 5.9)$

13) $(13.42, 4.25)$ ، $(-13.42, 1.11)$

14) $(12.65, 5.03)$ ، $(-12.65, 1.89)$

15) $(3.61, 5.30)$ ، $(-3.61\ 2.16)$

16) $\left(-173, \frac{\pi}{2}\right)$ ، $\left(173, \frac{3\pi}{2}\right)$

17) $(3.16a, 1.25)$ ، $(-3.16a, 4.39)$

18) $(14\sqrt{2}, 0.75\pi)$ ، $(-14\sqrt{2}, 1.75\pi)$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	61، 63–65، 67–85
ضمن المتوسط	43–49 (فردي)، 51–57 (فردي) ، 58–61 ، 63–65، 67–85
فوق المتوسط	43–85

19) $(60.54, 5.75)$ ، $(-60.54, 2.61)$

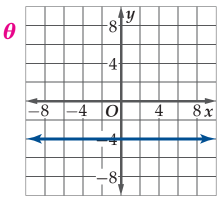
20) $(5b, 5.36)$ ، $(-5b, 2.21)$

21) $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ ، $\left(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

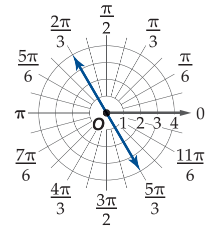
22) $(2.45, 0.62)$ ، $(-2.45, 3.76)$

اكتب معادلة ديكارتيّة، وأخرى قطبية لكل منحنى مما يأتي:

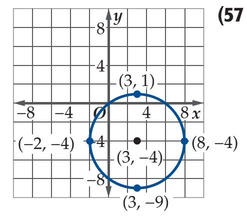
(55 $y = -4,\ r = -4 \csc \theta$



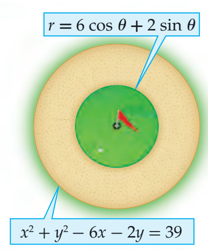
(56 $y = -\sqrt{3}x,\ \theta = \frac{2\pi}{3}$



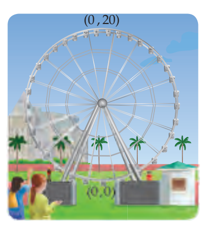
(57 انظر الهامش



58) **جولف:** في أحد ملاعب الجولف، يحيط بثقب الهدف منطقة خضراء محاطة بمنطقة رملية، كما في الشكل أدناه. أوجد مساحة المنطقة الرملية على فرض أن الثقب يمثِّل القطب لكلتا المعادلتين، وأن المسافات تُقاس بوحدة اليارده. انظر الهامش



(59 **عجلة دوّارة:** إذا كانت أدنى نقطة في عجلة دوّارة عند $(0, 0)$، وأعلى نقطة فيها عند $(0, 20)$.



(a اكتب معادلة العجلة الدوّارة الموضحة بالشكل المجاور على الصورة الديكارتية.
$x^2 + (y - 10)^2 = 100$

(b اكتب المعادلة في الفرع a بالصيغة القطبية. $r = 20 \sin \theta$

(60 **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين سوف تستكشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية. للفروع a–f انظر ملحق الإجابات

(a **تمثيل بياني:** يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ في المستوى الديكارتي بالنقطة (a, b). مَثِّل العدد المركب $6 + 8i$.

(b **عددي:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع a.

(c **تمثيل بياني:** عزِّز إجابتك في الفرع b بتمثيل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

(d **تمثيل بياني:** مَثِّل بيانيًّا العدد المركب $-3 + 3i$ في المستوى الديكارتي.

(e **تمثيل بياني:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع d. ومَثِّل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

(f **تحليل:** أوجد تعبيرًا جبريًّا لكتابة العدد المركب $a + bi$ بالإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا

(61 **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin \theta$ على الصورة الديكارتية، فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$. أيهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

62) **تحدٍّ:** اكتب معادلة الدائرة $r = 2a \cos \theta$ بالصورة الديكارتية، وأوجد مركزها ونصف قطرها. انظر الهامش

(63 **تبرير:** إذا أُعطيتَ مجموعة من الإحداثيات الديكارتية (x, y) وقيمة لـ r، اكتب تعبيرين؛ لإيجاد θ بدلالة الجيب وجيب التمام. (إرشاد: قد تحتاج إلى كتابة عدة تعابير لكل دالة، شبيهة بتعابير هذا الدرس مستعملًا الظل). انظر ملحق الإجابات

(64 **اكتب:** اكتب تخمينًا يبيِّن متى يكون تمثيل المعادلة على الصورة القطبيّة أسهل من تمثيلها على الصورة الديكارتية، ومتى يكون العكس صحيحًا. انظر ملحق الإجابات

(65 **برهان:** استعمل $x = r \cos \theta$، $y = r \sin \theta$؛ لإثبات أن $r = y \csc \theta$، $r = x \sec \theta$، حيث $\cos \theta \neq 0, \sin \theta \neq 0$. انظر ملحق الإجابات

66) **تحدٍّ:** اكتب المعادلة:
$$r^2(4 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) + r(-8a \cos \theta + 6b \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
بالصورة الديكارتية. (إرشاد: فك الأقواس قبل تعويض قيم r، r^2. تمثِّل المعادلة الديكارتية قطعًا مخروطيًا). انظر الهامش

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 61، اقترح على الطلبة البدء بتمثيل كل من المعادلة الأصلية، وإجابة باسل وتوفيق بيانيًا، ثم كتابة المعادلة $r = \sin \theta$ بالصورة الديكارتية.

إجابات:

(57 $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$، $r = 6 \cos \theta - 8 \sin \theta$.

58
$x^2 + y^2 - 6x - 2y = 39$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 39 + 9 + 1$
$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 49$

مساحة الدائرة الكبرى
$A_1 = \pi r_1^2 = 49\pi\ yd^2$
$r = 6 \cos\theta + 2 \sin\theta$
$r^2 = 6r \cos\theta + 2r \sin\theta$
$x^2 + y^2 = 6x + 2y$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 9 + 1$
$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$

مساحة الدائرة الصغرى
$A_2 = \pi r_2^2 = 10\pi\ yd^2$
∴ مساحة المنطقة الرملية
$A = A_1 - A_2 = 49\pi - 10\pi = 39\pi\ yd^2$
$\approx 122.52\ yd^2$

62
$r = 2a \cos\theta$
$r^2 = 2ar \cos\theta$
$x^2 + y^2 = 2ax$
$x^2 - 2ax + y^2 = 0$
$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$
$(x - a)^2 + y^2 = a^2$

دائرة مركزها $(a, 0)$، وطول نصف قطرها يساوي a وحدة.

66
$r^2(4 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) + r(-8a \cos \theta + 6b \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$

$4r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta - 8a\, r \cos \theta + 6br \sin \theta = 12 - 4a^2 - 3b^2$

$-4(r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2 8a(r \cos \theta) + 6\, b\, (r \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$

$4x^2 + 3y^2 - 8ax + 6by = 12 - 4a^2 - 3b^2$

$4x^2 - 8ax + 4a^2 + 3y^2 + 6by + 3b^2 = 12$

$4(x^2 - 2ax + a^2) + 3(y^2 + 2by + b^2) = 12$

$4(x - a)^2 + 3(y + b)^2 = 12$

$\frac{(x - a)^2}{3} + \frac{(y + b)^2}{4} = 1$

مراجعة تراكمية

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (الدرس 5-1)

67) $A(-2, 45°)$

68) $D(1, 315°)$

69) $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

للتمارين 67-69 انظر ملحق الإجابات

إذا كانت $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيي قطبي النقطة T : (الدرس 5-1)

70) $T(1.5, 180°)$ $(1.5, 540°), (-1.5, 0°), (-1.5, 360°)$

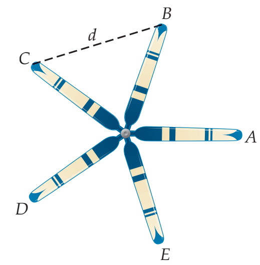
71) $U\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(-1, \frac{7\pi}{3}\right), \left(1, \frac{4\pi}{3}\right), \left(1, \frac{10\pi}{3}\right)$

أوجد الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كل مما يأتي: (الدرس 4-3)

72) $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7\rangle$ 91.8°، ليسا متعامدين

73) $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6\rangle$ 90°، متعامدان

74) **طائرات:** تتكون مروحة طائرة من 5 شفرات، المسافة بين أطرافها المتتالية متساوية. ويبلغ طول كل شفرة منها 11.5 ft . (الدرس 5-1)



$A(11.5, 3°)$,
$B(11.5, 75°)$,
$C(11.5, 147°)$,
$D(11.5, 219°)$,
$E(11.5, 291°)$

a) إذا كانت الزاوية التي تصنعها الشفرة A مع المحور القطبي 3°، فاكتب زوجًا يمثّل الإحداثيات القطبية لطرف كل شفرة، بفرض أن مركز المروحة ينطبق على القطب.

b) ما المسافة d بين رأسي شفرتين متتاليتين؟ 13.5 ft

حدّد فيما إذا كانت كل مجموعة نقاط مما يأتي تقع على استقامة واحدة أم لا؟ (الدرس 4-5)

75) $(-3, -1, 4), (3, 8, 1), (5, 12, 0)$ لا

76) $(4, 8, 6), (0, 6, 12), (8, 10, 0)$ نعم

77) $(0, -4, 3), (8, -10, 5), (12, -13, 2)$ لا

78) $(-7, 2, -1), (-9, 3, -4), (-5, 1, 2)$ نعم

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي، وأوجد منتصفها: (الدرس 4-4)

79) $(2, -15, 12), (1, -11, 15)$ 5.10; (1.5, −13, 13.5)

80) $(-4, 2, 8), (9, 6, 0)$ 15.78; (2.5, 4, 4)

81) $(7, 1, 5), (-2, -5, -11)$ 19.31; (2.5, −2, −3)

تدريب على اختبار معياري

82) أيٌّ من النقاط الآتية يعتبر تمثيلًا آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟ B

A $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

C $\left(2, \frac{-11\pi}{6}\right)$

D $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

83) إذا كان $\mathbf{m} = \langle 5, -4\rangle, \mathbf{n} = \langle -7, 3\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثّل $\mathbf{k}$ ، حيث $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 2\mathbf{m}$ ؟ A

A $\langle -17, 11\rangle$

B $\langle -17, -5\rangle$

C $\langle 17, -11\rangle$

D $\langle -17, 5\rangle$

84) ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ؟ C

A $r = \sin\theta$

B $r = 2\sin\theta$

C $r = 4\sin\theta$

D $r = 8\sin\theta$

85) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: C
$\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$

A $\langle -10, 10, 25\rangle$

B $\langle -10, -10, 25\rangle$

C $\langle -10, -10, -25\rangle$

D $\langle -10, 10, -25\rangle$

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى كل طالب كتابة فقرة يوضح فيها كيف سيساعد موضوع هذا الدرس على فهم موضوع الدرس التالي حول كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة لمفاهيم الدرس 2-5 بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 5.

تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة إثبات أن المعادلة $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ هي معادلة دائرة، وذلك بتحويلها إلى الصورة الديكارتية، ثم اطلب إليهم إيجاد مركزها ونصف قطرها.

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta$$
$$r^2 = ra\cos\theta + rb\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2$$

المركز $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ، نصف القطر $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

5-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3

إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة بالصورة الديكارتية.

الدرس 5-3

تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.

إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها بالصورة القطبية.

ما بعد الدرس 5-3

إثبات نظرية ديموافر.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

ارسم خمسة صناديق متداخلة على السبورة.

أسأل:

- استعمل شكل فن؛ لتوضيح العلاقة بين الأعداد المركبة، والحقيقية، والنسبيَّة، والصحيحة، والكلية. انظر الشكل أعلاه.
- هل يمكن كتابة أي عدد حقيقي على صورة عدد مركب؟ نعم، يمكن كتابة أي عدد حقيقي a على الصورة $a + 0i$.
- بما أن مجموعة الأعداد المركبة تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية، فهل تعتقد أنه بإمكاننا جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها؟ نعم

5-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

Complex Numbers and De Moivre's Theorem

فيما سبق

درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة بالصورة الديكارتية.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أحوِّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أجِدُ حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجِدُ جذورها وقواها بالصورة القطبية.

المفردات الأساسية

المستوى المركب complex plane

المحور الحقيقي real axis

المحور التخيلي imaginary axis

مستوى أرجاند Argand plane

القيمة المطلقة لعدد مركب absolute value of a complex number

الصورة القطبية polar form

الصورة المثلثية trigonometric form

المقياس modulus

السعة argument

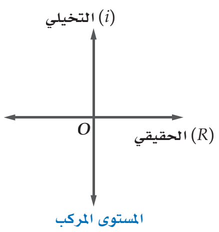
الجذور النونية للعدد واحد nth roots of unity

www.obeikaneducation.com

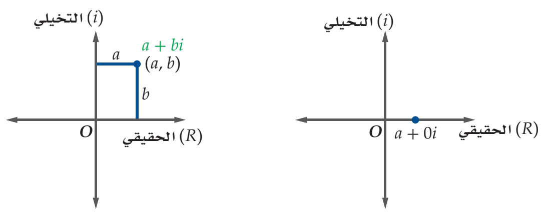
لماذا؟

يستعمل المهندسون الكهربائيون الأعداد المركبة، لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. وترتبط الكميات الجهد E، الممانعة Z، والتيار I بالعلاقة $E = I \cdot Z$، والمستعملة لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (يستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز التيار I). ويُمثّل الجزء الحقيقي a ممانعة تدفق التيار بسبب المقاومة، في حين يمثّل الجزء التخيلي b الممانعة الناتجة عن المحاثات والمكثفات.

الصيَغ القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي b. ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى البياني، فإننا نحتاج محورين لتمثيل العدد المركب. يُعيَّن الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي**، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي**. ويمكن تسمية المستوى المركب **بمستوى أرجاند**.



والجزء التخيلي للعدد المركب $a + 0i$ هو $b = 0$. ويكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.

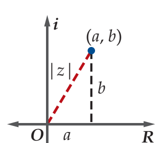


تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب. وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

مفهوم أساسي القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مصادر الدرس 5-3

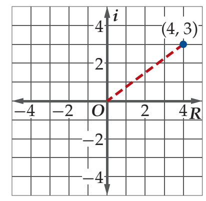
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (243)	• تنويع التعليم، ص (243)	• تنويع التعليم ، ص (250)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (29) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين، ص (29) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• كتاب التمارين، ص (29) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مثال 1 تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

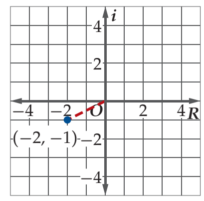
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4, b = 3$

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيط

القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$ تساوي 5.

b) $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ $a = -2, b = -1$

$= \sqrt{5} \approx 2.24$ بالتبسيط

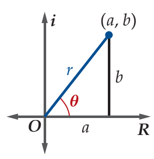
القيمة المطلقة للعدد $-2 - i$ تساوي 2.24 تقريبًا.

تأكد للتدريبين **1A,1B** انظر الهامش

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1A) $5 + 2i$ **1B)** $-3 + 4i$

كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق النسب المثلثية التي استُعملت لإيجاد قيم x، y لتمثيل قيم a، b.



$\cos\theta = \frac{a}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{b}{r}$

بضرب كل طرف في r: $r\cos\theta = a$ ، $r\sin\theta = b$

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a، b، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$ $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بأخذ العامل المشترك

في حالة العدد المركب، فإن r تمثل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب

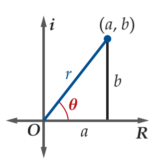
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$،

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



تنبيه!

الصورة القطبية يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

إرشادات للدراسة

السعة كما في الإحداثيات القطبية، فإن θ ليست وحيدة، مع أنها تُعطى عادة في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

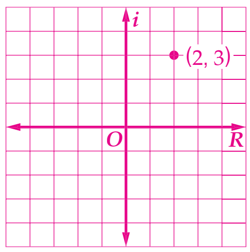
الصيغ القطبية للأعداد المركبة

مثال 1 يُبيّن كيفية تمثيل عدد مركب في المستوى المركب، وإيجاد قيمته المطلقة.

مثال إضافي

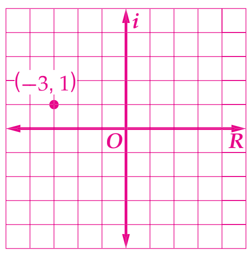
1 مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 2 + 3i$



$\sqrt{13} \approx 3.61$

b) $z = -3 + i$



$\sqrt{10} \approx 3.16$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من فهم مدى الطلبة للمفاهيم.

التعليم باستعمال التقنيات

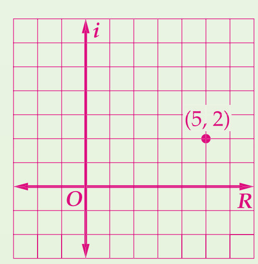
مدونة اطلب إلى الطلبة العمل بشكل مجموعات ثنائية لكتابة مدونة تصف كيفية التعبير عن العدد المركب على الصورة القطبية. تأكد من كيفية وصفهم لإيجاد المقياس والسعة.

إرشادات للمعلم الجديد

مستوى أرجاند يُسمى المستوى المركب أيضًا بمستوى أرجاند نسبة إلى العالم روبرت أرجاند (1768 – 1822). تستعمل ما تسمى بأشكال أرجاند؛ لتمثيل موقع القطب وأصفار الدالة بيانيًا في المستوى المركب.

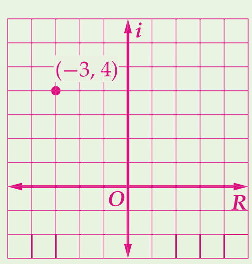
إجابة (تأكد):

1A)



5.39 تقريبًا

1B)



5

مثال 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a) $-6 + 8i$

أوجد المقياس r والسعة θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$
$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$	$a = -6, b = 8$	$= \text{Tan}^{-1} -\frac{8}{6} + \pi \approx 2.21 \text{ rad}$

لذا، فإن الصورة القطبية للعدد $-6 + 8i$ هي $10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$ تقريبًا.

b) $4 + \sqrt{3}i$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$	$a = 4, b = \sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$
$\sqrt{19} \approx 4.36$	بالتبسيط	$\approx 0.41 \text{ rad}$

لذا، فإن الصورة القطبية للعدد $4 + \sqrt{3}i$ هي $4.36(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$ تقريبًا.

تأكد

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

2A) $9 + 7i$ $\quad 11.4(\cos 0.66 + i \sin 0.66)$

2B) $-2 - 2i$ $\quad 2.83(\cos 3.93 + i \sin 3.93)$

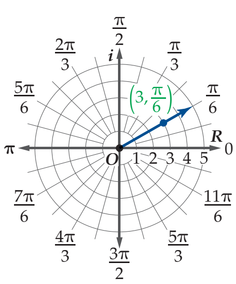
ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال قيم r، θ كما في الإحداثيات القطبية (r, θ) . كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r ، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثّل العدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.

عيّن الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.



ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بسِّط.

الصورة القطبية	$3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$
بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام	$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$
خاصية التوزيع	$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

تأكد للتدريبين 3A, 3B انظر الهامش

مَثّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

3A) $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

3B) $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right)$

قراءة الرياضيات

الصورة القطبية

$r(\cos\theta + i \sin\theta)$ تختصر عادةً على الصورة $r \text{ cis } \theta$. ففي مثال 2a ، يكتب العدد $-6 + 8i$ على النحو 10cis2.21 حيث $10 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$, $2.21 = \text{Tan}^{-1} -\frac{8}{6}$

إرشاد تقني

تحويل الأعداد المركبة

يمكن تحويل عدد مركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية بإدخال التعبير على الصورة القطبية، ثم اختر ENTER . ولكتابة العدد على الصورة القطبية اختر MODE ، ثم $a + bi$.

```
3(cos(π/6)+isin(
π/6))
2.598076211+1.5i
```


الصيغ القطبية للأعداد المركبة

مثال 2 يُبيّن كيفية كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.

مثال 3 يُبيّن كيفية تمثيل العدد المركب بيانيًا في المستوى القطبي، ثم تحويله إلى الصورة الديكارتية.

مثالان إضافيان

2 عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

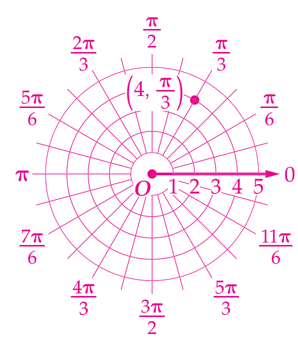
a) $-2 + 5i$

$5.39(\cos 1.95 + i \sin 1.95)$ تقريبًا

b) $6 + 2i$

$6.32(\cos 0.32 + i \sin 0.32)$ تقريبًا

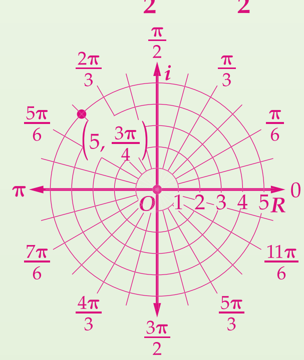
3 مثِّل العدد $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية.



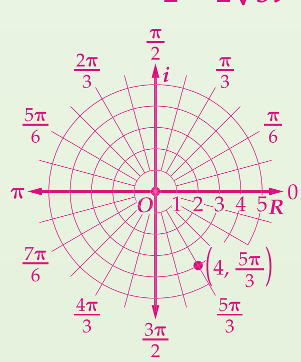
$2 + 2\sqrt{3}i$

إجابات:

3A) $-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$



3B) $2 - 2\sqrt{3}i$



ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وقواها وإيجاد جذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

الصورة القطبيّة للعددين المركبين z_1 ، z_2	$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
فك الأقواس	$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$
بتجميع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدال i^2 بـ -1	$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$
بإخراج i عاملًا مشتركًا	$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$
متطابقتا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع	$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

مفهوم أساسي ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

سوف تبرهن صيغة القسمة في التمرين 69

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقياسين وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقياسين وتطرح السعتين.

مثال 4 ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

التعبير المعطى	$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
صيغة الضرب	$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$
بالتبسيط	$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

الصورة القطبية	$8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$
بالتعويض عن قيم النسب المثلثية	$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$
خاصية التوزيع	$= 4\sqrt{3} - 4i$

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ ، والصورة الديكارتية $4\sqrt{3} - 4i$.

تأكد

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $15\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right), -3.88 + 14.49i$

(4B $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $12\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right), -3.11 - 11.59i$

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وقواها وإيجاد جذورها

مثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة بالصورة القطبية.

مثال إضافي

4 أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية. $10(\cos\pi + i\sin\pi), -10$

التركيز في المحتوى الرياضي

الضرب في عدد مركب يمكن فهم ضرب عدد في عدد مركب مُعطى على أنه نوع من أنواع الدوران والتمدد. فالضرب في i هو دوران بمقدار $90°$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة. وبالمثل فالضرب في $i^2 = -1$ هو دوران بمقدار $180°$ أو (π راديان).

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى مجموعات من الطلبة كتابة أدلة مفصّلة لحل مسائل معينة، تشبه مثال 4. واطلب إليهم تضمينها كل التفاصيل على اعتبار أن الشخص الذي سيقرأ الدليل لديه معرفة قليلة بالموضوع. ثم اطلب إلى مجموعات أخرى التحقق من منطقية تتابع خطوات الحل في الأدلة ومنطقيتها.

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها و قواها وإيجاد جذورها

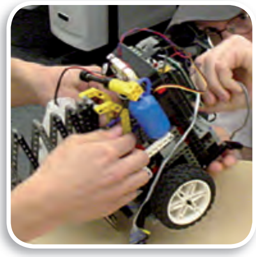
مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد حاصل قسمة عددين مركبين بالصورة القطبية.

مثال إضافي

5 **كهرباء:** إذا كان فرق الجهد E في دائرة كهربائية يساوي 100V وكانت ممانعتها Z تساوي $(4-3kj)\Omega$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة الديكارتية. باستعمال المعادلة $E = I \cdot Z$.

$(16+12j)$Amp تقريبًا

كما تقدم في مقدمة الدرس، فإنه يمكن استعمال قسمة الأعداد المركبة للتعبير عن العلاقات في الكهرباء.



الربط مع واقع الحياة

المهندسون الكهربائيون يطور المهندسون الكهربائيون تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغِّل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.

مثال 5 من واقع الحياة — قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

كهرباء: إذا كان فرق الجهد E في دائرة كهربائية يساوي 150 V، وكانت ممانعتها Z تساوي $(6-3j)\,\Omega$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة الديكارتية باستعمال المعادلة $E = I \cdot Z$.

اكتب كل عدد بالصورة القطبية.

$150 = 150\ (\cos 0 + j \sin 0)$ — $r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{150} = 0$

$6 - 3j = 3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$ — $r = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5},\ \theta = \text{Tan}^{-1} -\frac{3}{6} \approx -0.46$

حُلّ $E = I \cdot Z$ بالنسبة لـ I.

$I \cdot Z = E$ — المعادلة الأصلية

$I = \frac{E}{Z}$ — بقسمة كل طرف على Z

$I = \dfrac{150\ (\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$ — $E = 150(\cos 0 + j \sin 0)$, $Z = 3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$

$I = \frac{150}{3\sqrt{5}}\ \{\cos [0 - (-0.46)] + j \sin [0 - (-0.46)]\}$ — صيغة القسمة

$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ — بالتبسيط

والآن حَوِّل شدة التيار إلى الصورة الديكارتية.

$I = 10\sqrt{5}\ (\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ — الصورة القطبيّة

$= 10\sqrt{5}(0.90 + 0.44j)$ — بإيجاد قيم النسب المثلثية

$= 20.12 + 9.84j$ — خاصية التوزيع

أي أن شدة التيار تساوي $(20.12 + 9.84j)$Amp تقريبًا.

تأكد

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية 120 V، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$Amp، فأوجد ممانعتها على الصورة الديكارتية. $(9.6 - 7.2j)\,\Omega$ تقريبًا

قبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية. حيث يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النموذج الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا، أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

$z \cdot z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta)$ — بالضرب

$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)]$ — صيغة الضرب

$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ — بالتبسيط

والآن، أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta)$ — بالضرب

$z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)]$ — صيغة الضرب

$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ — بالتبسيط

لاحظ أنه عند حساب قوى العدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n.

244 الفصل 5 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

ويمكن تلخيص النمط على النحو الآتي:

نظرية — نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن: $z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر
(1667 م– 1754 م)

رياضي فرنسي عُرف بالنظرية المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات هو *Doctrine of Chances* . ويُعدّ ديموافر من الرياضيين الروّاد في الهندسة التحليلية والاحتمالات.

مثال 6 نظرية ديموافر

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$ وعبّر عنه بالصورة الديكارتية.

أولًا، اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$	$a = 4, b = 4\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{16 + 48}$	بالتبسيط	$= \text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$
$= 8$	بالتبسيط	$= \frac{\pi}{3}$

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن، استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6 \quad \text{الصورة القطبية}$$

$$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad \text{نظرية ديموافر}$$

$$= 262144(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= 262144(1 + 0i) \quad \text{بتعويض قيم النسب المثلثية}$$

$$= 262144 \quad \text{بالتبسيط}$$

أي أن $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262144$.

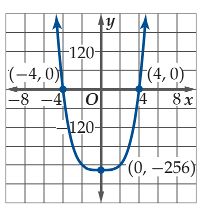
تأكد

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

(6A $(1 + \sqrt{3}i)^4$ $-8 - 8\sqrt{3}i$

(6B $(2\sqrt{3} - 2i)^8$ $-32768 + 32768\sqrt{3}i$

وتجدر الإشارة إلى أن نظرية ديموافر تبقى صحيحة في حالة كوْن n عددًا صحيحًا سالبًا، بشرط أن $z \neq 0$.



يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في نظام الأعداد الحقيقية هما 4 ، -4. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4, -4$. بينما في نظام الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.

درست سابقًا النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لكثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة. لذا، يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب بالصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$.

وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور للجذر الرابع...، وهكذا.

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها و قواها وإيجاد جذورها

مثال 6 يُبيّن كيفية استعمال نظرية ديموافر؛ لإيجاد قوى الأعداد المركبة.

مثال إضافي

6 أوجد $(3 + 3\sqrt{3}i)^4$ وعبّر عنه بالصورة الديكارتية.
$-648 - 648\sqrt{3}i$

إرشادات للمعلم الجديد

نظرية ديموافر يمكن للطلبة استعمال مبدأ الاستقراء الرياضي الذي درسوه سابقًا؛ لإثبات صحة نظرية ديموافر لجميع القوى الصحيحة الموجبة n .

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها و قواها وإيجاد جذورها

مثال 7 يُبيّن كيفية إيجاد جذور الأعداد المركبة.

مثال إضافي

7 أوجد الجذور الخماسيَّة للعدد المركب $-2-2i$

$-0.56+1.10i$ ، $0.87+0.87i$ ، $-0.19-1.22i$ ، $-1.22-0.19i$ ، $1.10-0.56i$ تقريبًا.

إرشادات للمعلم الجديد

معادلة الجذور المختلفة برهان معادلة الجذور المختلفة أعلى من مستوى هذا الكتاب.

إجابة:

7B) $1.51-0.16i$ ، $0.62+1.38i$ ، $-1.13+1.01i$ ، $-1.31-0.76i$ ، $0.32-1.48i$

مراجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر لأي كثيرة حدود من الدرجة n، حيث $n>0$، يوجد على الأقل صفر واحد (حقيقي أو مركب) في نظام الأعداد المركبة.

ولإيجاد جميع جذور كثيرة حدود من الصورة $y=x^n \pm a, a\in C$ ، يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح موجب n، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k=0,1,2,\dots,n-1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k=n-1$ ، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta+2\pi n}{n}=\frac{\theta}{n}+2\pi$$ وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k=0$

مثال 7 جذور العدد المركب

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4-4i$.

أولًا، اكتب $-4-4i$ على الصورة القطبية.

$r=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$, $\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{-4}{-4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$

$$-4-4i=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

والآن، اكتب الصيغة للجذور الرباعية.

$\theta=\frac{5\pi}{4}, n=4, r^{\frac{1}{n}}=(4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}$

$$(4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

بالتبسيط

$$=\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right]$$

لإيجاد الجذور الرباعية، عوّض $k=0,1,2,3$.

صيغة الجذور المختلفة

$$k=0 \qquad \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الأول

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16}+i\sin\frac{5\pi}{16}\right)=0.86+1.28i$$

$$k=1 \qquad \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الثاني

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16}+i\sin\frac{13\pi}{16}\right)=-1.28+0.86i$$

$$k=2 \qquad \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الثالث

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16}+i\sin\frac{21\pi}{16}\right)=-0.86-1.28i$$

$$k=3 \qquad \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الرابع

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16}+i\sin\frac{29\pi}{16}\right)=1.28-0.86i$$

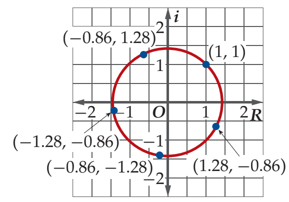
الجذور الرباعية للعدد $-4-4i$ هي $0.86+1.28i$, $-1.28+0.86i$, $-0.86-1.28i$, $1.28-0.86i$

✓ تأكد انظر الهامش

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2+2i$.
$1.37+0.37i$, $-1+i$, $-0.37-1.37i$

7B) أوجد الجذور الخماسية للعدد $4\sqrt{3}-4i$.

يمكننا إضافة الملاحظة الآتية حول الجذور المختلفة لعدد، وذلك بتمثيلها في المستوى الإحداثي، كما في الشكل المجاور، فإن الجذور الأربعة التي أوجدناها في مثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته 1.54 تقريبًا، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.



تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو نصف قطر الدائرة الناتجة من تمثيل الجذور في المستوى الإحداثي. لذا، فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

مثال 8 الجذور النونية للعدد واحد

أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

أولًا، اكتب 1 على الصورة القطبية.

$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{1} = 0$ $\qquad 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$

والآن، اكتب الصيغة للجذور الثمانيَّة.

$\theta = 0, n = 8, r^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$ $\qquad 1\left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{8} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{8}\right)$

بالتبسيط $\qquad = \cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4}$

افترض أن $k = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1 .

صيغة الجذور المختلفة $\qquad k = 0 \quad \cos \frac{(0)\pi}{4} + i \sin \frac{(0)\pi}{4}$

الجذر الأول $\qquad = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

لاحظ أن مقياس كل جذر هو 1. ويمكن إيجاد سعة الجذر الحالية بإضافة $\frac{k\pi}{4}$ إلى سعة الجذر السابق.

الجذر الأول $\qquad \cos 0 + i \sin 0 = 1$

الجذر الثاني $\qquad \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر الثالث $\qquad \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

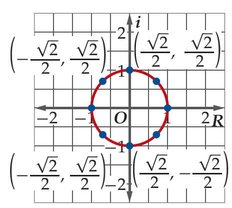
الجذر الرابع $\qquad \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر الخامس $\qquad \cos \pi + i \sin \pi = -1$

الجذر السادس $\qquad \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر السابع $\qquad \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$

الجذر الثامن $\qquad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$



الجذور الثُّمانيَّة للعدد 1 هي $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ كما هو موضح في الشكل أعلاه.

تأكد

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد. **8B)** أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$. سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

8A) $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

8B) $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها و قواها وإيجاد جذورها

مثال 8 يُبيِّن كيفية إيجاد الجذور للعدد واحد.

مثال إضافي

8 أوجد الجذور الخماسية للعدد واحد.
$1, 0.3090 + 0.9511i, -0.8090 + 0.5878i, -0.8090 - 0.5878i, 0.3090 - 0.9511i$ تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

الجذور النونية للعدد واحد التمثيل الهندسي للجذور النونية للعدد واحد تقع دائمًا على دائرة الوحدة في المستوى المركب، حيث تمثل هذه النقاط رؤوس مضلع منتظم له n ضلعًا. لاحظ أن أحد جذور الواحد هو 1 دائمًا.

247 الدرس 3-5 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تدرب وحل المسائل

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة: (مثال 1) للتمارين 1-6 انظر ملحق الإجابات للتمثيل البياني

1) $z = 4 + 4i$ 5.66 تقريبًا   2) $z = -3 + i$ 3.16 تقريبًا

3) $z = -4 - 6i$ 7.21 تقريبًا   4) $z = 2 - 5i$ 5.39 تقريبًا

5) $z = -7 + 5i$ 8.60 تقريبًا   6) $z = 8 - 2i$ 8.25 تقريبًا

7) **متجهات:** تُعطى القوة المؤثرة على جسم بالعلاقة $z = 10 + 15i$، حيث تُقاس كل مركبة القوة بالنيوتن (N). (مثال 1)

a) مَثِّل z كمتجه في المستوى المركب. a) انظر الهامش

b) أوجد مقياس واتجاه المتجه. مقياسه 18.03 N، اتجاهه محدد بالزاوية 56.31° شمال شرق

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (مثال 2) للتمارين 8-13 انظر الهامش

8) $4 + 4i$ 9) $-2 + i$

10) $4 - \sqrt{2}i$ 11) $2 - 2i$

12) $4 + 5i$ 13) $-1 - \sqrt{3}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3) للتمارين 14-19 انظر ملحق الإجابات

14) $2(\cos 3 + i\sin 3)$ 15) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

16) $\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ 17) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

18) $-3(\cos 180° + i\sin 180°)$ 19) $\frac{3}{2}(\cos 360° + i\sin 360°)$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 4 ,5) للتمارين 20-29 انظر ملحق الإجابات

20) $6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

21) $5(\cos 135° + i\sin 135°) \cdot 2(\cos 45° + i\sin 45°)$

22) $3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

23) $2(\cos 90° + i\sin 90°) \cdot 2(\cos 270° + i\sin 270°)$

24) $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

25) $4\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

26) $\frac{1}{2}(\cos 60° + i\sin 60°) \cdot 6(\cos 150° + i\sin 150°)$

27) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

28) $5(\cos 180° + i\sin 180°) \cdot 2(\cos 135° + i\sin 135°)$

29) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج لكل مما يأتي، وعبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

30) $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$ 4096   31) $(12i - 5)^3$ $2035 - 828i$

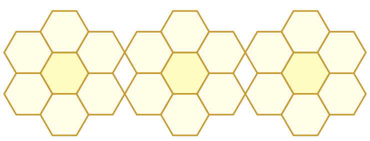
32) $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$ 256   33) $(\sqrt{3} - i)^3$ $-8i$

34) $(2 + 4i)^4$ $-112 - 384i$

35) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3$ $27i$

36) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$ -16

37) **تصميم:** يعمل سالم في وكالة للإعلانات. يرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية منتظمة. ويستطيع تعيين رؤوس السداسي بتمثيل حلول المعادلة $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية. (المثالان 7, 8) انظر الهامش



أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي: (المثالان 7, 8) للتمارين 38-42 انظر ملحق الإجابات

38) الجذور السداسية للعدد i

39) الجذور الخماسية للعدد $-i$

40) الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$

41) الجذور التكعيبية للعدد $-117 + 44i$

42) الجذور الخماسية للعدد $-1 + 11i\sqrt{2}$

43) الجذور التربيعية للعدد $-3 - 4i$ $-1 + 2i, 1 - 2i$

44) الجذور التربيعية للعدد واحد. ± 1

45) الجذور الرباعية للعدد واحد. $\pm 1, \pm i$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–45 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية ؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل التمارين

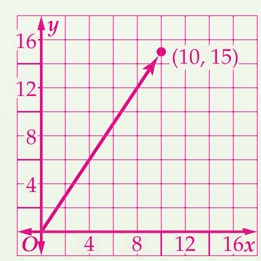
ورقة الشبكة القطبية يحتاج الطلبة إلى ورقة الشبكة القطبية في كثير من تمارين هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة عند حل التمرين 35، ذكِّر الطلبة أنه عند حل مسائل بقوى سالبة، فإننا لا نحسب القوى الموجبة، ثم نضرب النتيجة في سالب. فمثلًا، 2^{-5} لا تساوي $-(2^5)$. ولكن، 2^{-5} تساوي $\frac{1}{2^5}$.

إجابات:

7a)



8) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

9) $\sqrt{5}(\cos 2.68 + i\sin 2.68)$

10) $3\sqrt{2}(\cos -0.34 + i\sin -0.34)$

11) $2\sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right)$

12) $\sqrt{41}(\cos 0.90 + i\sin 0.90)$

13) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

37) حل المعادلة $x^6 - 1 = 0$ يعني إيجاد الجذور السداسية للعدد 1

$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{1} = 0$

$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

صيغة الجذور

$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

وحيث إن:

$r = 1, \theta = 0, n = 6$

تصبح $\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}$

الجذر الأول $k = 0 \Rightarrow \cos 0 + i\sin 0 = 1$

الجذر الثاني $k=1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

الجذر الثالث

$k=2 \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

الجذر الرابع $k=3 \Rightarrow \cos\pi + i\sin\pi = -1$

الجذر الخامس $k=4 \Rightarrow \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

الجذر السادس $k=5 \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

46) **كهرباء:** تُعطى ممانعة أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي بالتعبير $5(\cos 0.9 + j \sin 0.9)\Omega$، وتُعطى في الجزء الآخر من الدائرة بالتعبير $8(\cos 0.4 + j \sin 0.4)\Omega$.

a) حوِّل كلَّ تعبير إلى الصورة الديكارتية. **للفروع a–c انظر الهامش**

b) اجمع النواتج في الفرع a؛ لإيجاد الممانعة الكلية في الدائرة.

c) حوِّل الممانعة الكلية إلى الصورة القطبية.

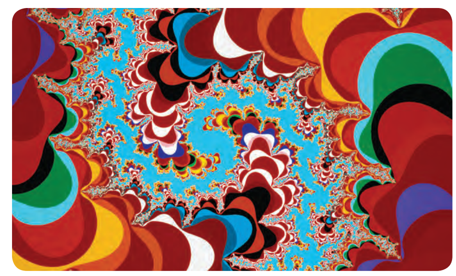
أوجد حاصل الضرب لكلٍّ مما يأتي: **للتمارين 47–52 انظر ملحق الإجابات**

47) $(1-i)(4+4i)$ 48) $(3+i)(3-i)$

49) $(4+i)(3-i)$ 50) $(-6+5i)(2-3i)$

51) $(\sqrt{2}+2i)(1+i)$ 52) $(3-2i)(1+\sqrt{3}i)$

53) **كسريات:** الكسريات شكل هندسي يتكون من نمط مكرر بشكل مستمر وبمقاسات متناقصة، كما في الشكل أدناه. **للفروع a–c انظر ملحق الإجابات**



في هذا التمرين سوف تنتج كسريات من خلال تكرار $f(z)=z^2$، حيث $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a) احسب z_1, z_2, z_3, z_4, z_5، حيث $z_1 = f(z_0)$، $z_2 = f(z_1)$، وهكذا.

b) مَثِّل كل عدد في المستوى المركب.

c) صِف النمط الناتج.

54) **تحويلات هندسية:** هناك بعض العمليات على الأعداد المركبة والتي تقابل تحويلات هندسية في المستوى المركب. صِف التحويل (التحويلات) التي يجب تطبيقها على النقطة z للحصول على النقطة w في المستوى المركب في كلٍّ من الحالات الآتية:

a) $w = z + (3-4i)$ b) w هو مرافق z

c) $w = i \cdot z$ d) $w = 0.25z$

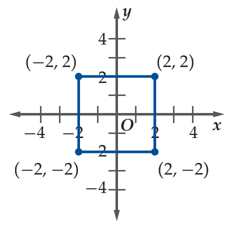
للفروع a–d انظر الهامش

أوجد z، والجذور النونية للعدد z في كل مما يأتي:

55) $n = 3$، أحد الجذور التكعيبية لـ z هو $\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$ **انظر الهامش**

56) $n = 4$، أحد الجذور الرباعية لـ z هو $-1-i$ **انظر ملحق الإجابات**

57) **رسم حاسوبي:** يستطيع مبرمجو الحاسوب استعمال الأعداد المركبة؛ لإنجاز تحويلات هندسية، إذا بدأ المبرمج بمربع كما في الشكل أدناه، فإن كلّ رأس يُخزَّنُ على شكل عدد مركب على الصورة القطبية. ثم يمكن استعمال الضرب؛ لتدوير المربع بمقدار $45°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة وتصغيره، بحيث تنطبق الرؤوس الجديدة على منتصفات أضلاع المربع الأصلية.



a) ما العدد المركب الذي يجبُ على المبرمج الضرب فيه لينتج هذا التحويل؟ **$0.5 + 0.5i$**

b) ماذا يحدث إذا ضُربت الرؤوس الأصلية في مربع إجابتك في الفرع a؟ **انظر الهامش**

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة:

58) $x^3 = i$ 59) $x^3 + 3 = -122$

60) $x^4 = 81i$ 61) $x^5 - 1 = 1023$

62) $x^3 + 1 = i$ 63) $x^4 - 2 + i = -1$

للتمارين 58–63 انظر ملحق الإجابات

مسائل مهارات التفكير العليا

64) **اكتشف الخطأ:** يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمٌ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

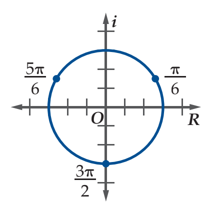
65) **تبرير:** افترض أن $z = a + bi$ هو أحد الجذور من الرتبة 29 للعدد 1.

a) ما أكبر قيمة ممكنة لـ a؟ **1**

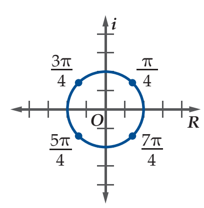
b) ما أكبر قيمة ممكنة لـ b؟ **$\sin\frac{14\pi}{29}$ ، $\sin\frac{15\pi}{29}$، 0.9985 تقريبًا**

تحدٍّ: أوجد الجذور المحدّدة على كل من المنحنيين أدناه وعبّر عنها على الصورة القطبية، ثم عيِّن العدد المركب الذي له هذه الجذور.

66)



67)



للتمرينين 66, 67 انظر ملحق الإجابات

إجابات:

46

a) احسب القيم المثلثية، ثم بسِّط.

$$5(\cos 0.9 + j\sin 0.9) = 5\cos 0.9 + 5j\sin 0.9 \approx (3.11 + 3.92j)\,\Omega$$

$$8(\cos 0.4 + j\sin 0.4) = 8\cos 0.4 + 8j\sin 0.4 \approx (7.37 + 3.12j)\,\Omega$$

b) أوجد المجموع

$$(3.11 + 3.92j) + (7.37 + 3.12j) = (10.48 + 7.04j)\,\Omega$$

c) أوجد المقياس، r، والسعة، θ.

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{10.48^2 + 7.04^2} \approx 12.63 \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{7.04}{10.48} \approx 0.59$$

الصورة القطبية لـ $10.48 + 7.04j$ هي $12.63(\cos 0.59 + j\sin 0.59)\Omega$

54a) انسحاب بمقدار 3 وحدات إلى اليمين، و 4 وحدات إلى الأسفل.

54b) انعكاس في المحور الحقيقي.

54c) دوران بمقدار $90°$ عكس إتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

54d) تمدد بمعامل قدره 0.25

55) -125, $2.5+2.5\sqrt{3}\,i$, $2.5-2.5\sqrt{3}$, -5

57b) سيدور المربع $90°$ عكس إتجاه دوران عقارب الساعة، ويمدد بمعامل مقداره 0.5

64) باسم؛ إجابة ممكنة؛ لقد قام أحمد بتحويل العدد المركب إلى الصورة القطبية فقط. ولذا، عليه استعمال نظرية ديموافر لحساب القوة الخامسة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	65، 68–84
ضمن المتوسط	47–53 (فردي)، 54، 56، 57، 59–65 (فردي)، 68–84
فوق المتوسط	47 – 84

68) **برهان:** إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، حيث $r_2 \neq 0$، فأثبت أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$. انظر ملحق الإجابات

تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة المعطاة صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا في التمرينين 70 ,69. وبرِّر إجابتك.

69) تقع الجذور النونية للعدد المركب z على أبعاد متساوية على دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $r^{\frac{1}{n}}$.

للتمرينين 69,70 انظر ملحق الإجابات

70) إذا كان مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو $\bar{z} = a - bi$. لأي عدد مركب z، فإن $z + \bar{z}$، $z \cdot \bar{z}$ أعداد حقيقية.

71) **مسألة مفتوحة:** أوجد عددين مركبين على الصورة $a + bi$، بحيث $a \neq 0$، $b \neq 0$، القيمة المطلقة لكل منهما $\sqrt{17}$.
إجابة ممكنة: $4 - i, 1 - 4i$

72) **اكتب:** وضّح لماذا يكون مجموع الأجزاء التخيلية لجذور عدد حقيقي موجب من الرتبة n يساوي الصفر. (**إرشاد:** الجذور هي رؤوس مضلع منتظم). انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: (الدرس 5-1)

73) $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$ للتمرينين 73,74 انظر ملحق الإجابات

74) $P(4.5, -210°)$

حدِّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية مما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية: (الدرس 5-2) للتمارين 75 - 77 انظر ملحق الإجابات

75) $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

76) $x^2 - y^2 = 1$

77) $x^2 + y^2 = 2y$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي: (الدرس 5-1)

78) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\sqrt{29}$

79) $(1, -45°), (-5, 210°)$ 4.84

حوّل الإحداثيات القطبيّة إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي: (الدرس 5-2)

80) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

81) $(4, 210°)$ $(-2\sqrt{3}, -2)$

تدريب على اختبار معياري

82) أي مما يأتي يمثّل $\overrightarrow{AB}$ وطوله، إذا كان $A(3, 4, -2)$, $B(-5, 2, 1)$؟ A

A $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

B $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

C $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

D $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

83) ما المسافة بين النقطة $\left(-3, \frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$؟ C

A 3.97

B 4.97

C 5.97

D 6.97

84) أي مما يأتي يمثل الصورة القطبية للعدد المركب $20 - 21i$؟ F

F $29(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

G $29(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

H $32(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

J $32(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

تنبيه!

اكتشف الخطأ عند حل التمرين 64، ذكِّر الطلبة بأن عليهم البداية بكتابة العدد المركب $\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ بالصورة القطبية، وملاحظة أن تمثيله البياني يقع في الرُّبع الرابع في المستوى المركب. عند استعمال نظرية ديموافر؛ لحساب القوى السالبة للأعداد المركبة، على الطلبة إيجاد مقلوب العدد ذو القوة الموجبة، ثم تطبيق النظرية؛ لأن النظرية معرفة فقط للأعداد الصحيحة الموجبة.

4 التقويم

بطاقة خروج اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة $(1 + i)^5$، واطلب إليهم تسليم إجاباتهم قبل مغادرتك غرفة الصف. $-4 - 4i$

التقويم التكويني

تحقّق من مدى استيعاب الطلبة لمفاهيم الدرس 3-5. بإعطائهم اختبار قصير 4 من مصادر الفصل5.

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد قيمة $\sqrt[3]{8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)}$ الفعلية وعبِّر عنها بالصورة الديكارتية.
$\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\, i$

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

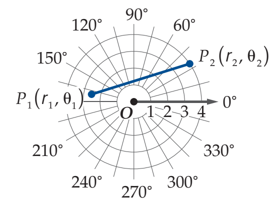
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 1-5)

- يُعيِّنُ موقع النقطة (r, θ) في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال المسافة المتجهة r والزاوية المتجهة θ .
- المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$ ، $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي هي:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الدرس 2-5)

- الإحداثيات الديكارتية للنقطة $P(r, \theta)$ هي $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
- لتحويل إحداثيات نقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية استعمل المعادلات $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$ ، أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الدرس 3-5)

- الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- صيغة الضرب لعددين مركبين z_1 ، z_2 هي: $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة القسمة لعددين مركبين z_1 ، z_2 هي: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)], r_2 \neq 0$
- تنص نظرية ديموافر على أنه إذا كانت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، هي الصورة القطبية لعدد مركب، فإن: $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ ، حيث n عدد صحيح موجب.

المفردات الأساسية

نظام الإحداثيات القطبية ص 224	مستوى أرجاند ص 240
القطب ص 224	القيمة المطلقة لعدد مركب ص 240
المحور القطبي ص 224	الصورة القطبية ص 241
الإحداثيات القطبية ص 224	الصورة المثلثيّة ص 241
المعادلة القطبية ص 226	المقياس ص 241
التمثيل القطبي ص 226	السعة ص 241
المستوى المركب ص 240	الجذور النونيّة للعدد واحد ص 247
المحور الحقيقي ص 240	
المحور التخيلي ص 240	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) ________ هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معطاة. **التمثيل القطبي**

2) المستوى الذي يحوي محورًا يمثِّل الجزء الحقيقي، وآخر يمثل الجزء التخيلي هو ________ . **المستوى المركب**

3) يُحدِّدُ موقع نقطة في ________ باستعمال بُعدها المتجه من نقطة ثابتة، وزاوية من محور ثابت. **نظام الإحداثيات القطبية**

4) ________ هي الزاوية الناتجة عن الجزء الحقيقي، والجزء المركب في تمثيل العدد المركب. **السعة**

5) تُسمَّى نقطة الأصل في نظام الإحداثيات القطبية بـ ________ . **القطب**

6) تُسمَّى القيمة المطلقة لعدد مركب بـ ________ . **المقياس**

7) ________ هو اسم آخر للمستوى المركب. **مستوى أرجاند**

8) ________ هو شعاع ممتد من القطب، وعادةً ما يكون أفقيًّا باتجاه اليمين. **المحور القطبي**

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 8-1 فنبههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

CRM اختبار المفردات في مصادر الفصل

أحاجي المفردات

أحاجي المفردات تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، الحروف المبعثرة، البحث عن كلمة باستعمال قائمة كلمات والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

5-1 الإحداثيات القطبية (الصفحات 224-230)

مَثّل كلّ نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

9) $W(-0.5, -210°)$ 10) $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$

11) $Y(4, -120°)$ 12) $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

للتمارين 9-12 انظر الهامش

مَثّل كلّ معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًا:

13) $\theta = -60°$ 14) $r = \frac{9}{2}$

15) $r = 7$ 16) $\theta = \frac{11\pi}{6}$

للتمارين 13-16 انظر الهامش

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

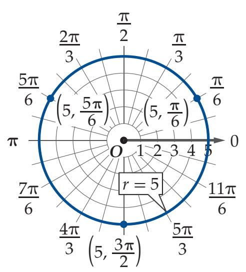
17) $\left(2, -\frac{7\pi}{6}\right), \left(5, \frac{\pi}{2}\right)$ **4.36** 18) $(4, 240°), (-3, 60°)$ **1**

19) $(6, 270°), (-1, -45°)$ **6.74** 20) $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right), \left(7, \frac{5\pi}{6}\right)$ **7.28**

مثال 1

مَثِّل المعادلة $r = 5$ بيانيًا في المستوى القطبي.

حلول المعادلة $r = 5$ هي الأزواج المرتبة $(5, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي. ويتكون التمثيل من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب. لذا، فإن التمثيل هو دائرة مركزها القطب، ونصف قطرها 5.



5-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الصفحات 231-239)

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

21) $(-1, 5)$ **(−5.10, 4.91) , (5.10, 1.77)**

22) $(3, 7)$ **(7.62, 1.17) , (−7.62, 4.31)**

23) $(2a, 0)$ **(2a, 0) , (−2a, 3.14)**

اكتب كلّ معادلة على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني:

24) $r = 5$

25) $r = -4 \sin \theta$

26) $r = 6 \sec \theta$

27) $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

للتمارين 24-27 انظر ملحق الإجابات

مثال 2

اكتب المعادلة $r = 2 \cos \theta$ على الصورة الديكارتية، ثم حدِّد نوع تمثيلها البياني.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	بضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = 2x$	$x = r\cos\theta,\ r^2 = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	بطرح $2x$ من الطرفين

أي أن الصورة القياسية هي:

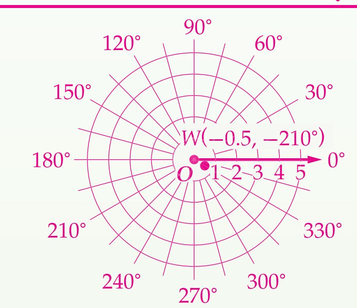
$(x-1)^2 + y^2 = 1$، معادلة دائرة مركزها $(1, 0)$ ونصف قطرها 1 .

مراجعة الدروس

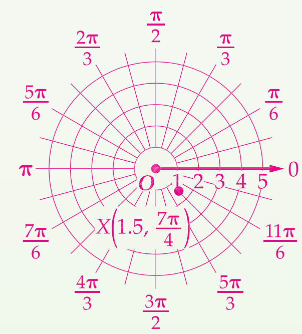
مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات :

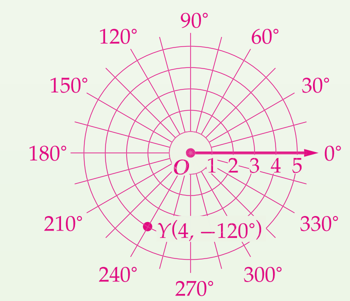
9)



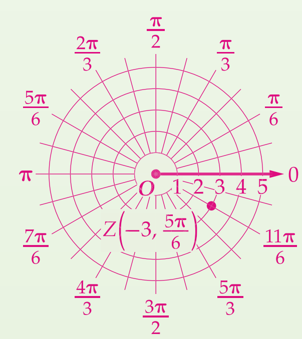
10)



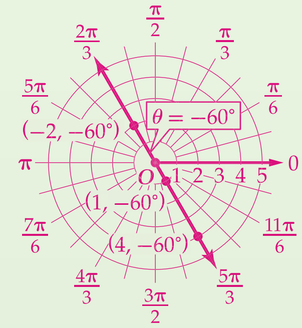
11)



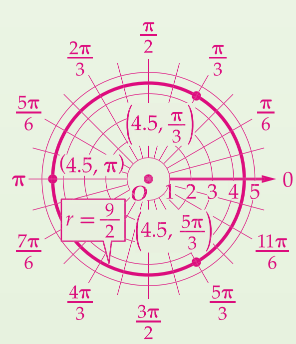
12)



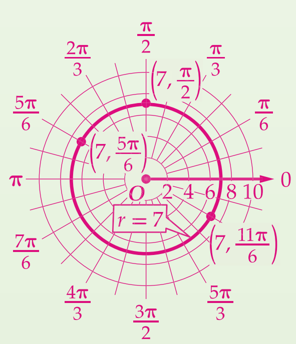
13)



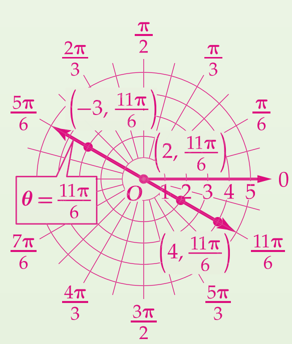
14)



15)



16)



الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

5-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الصفحات 240-250)

للتمارين 28-31 انظر ملحق الإجابات

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمتهُ المطلقة:

28) $z = 3 - i$ 29) $z = 4i$

30) $z = -4 + 2i$ 31) $z = 6 - 3i$

للتمارين 32-35 انظر الهامش

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

32) $3 + \sqrt{2}i$ 33) $-5 + 8i$

34) $-4 - \sqrt{3}i$ 35) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: للتمارين 36-39 انظر ملحق الإجابات

36) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

37) $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

38) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

39) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: للتمارين 40-43 انظر الهامش

40) $-2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot -4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

41) $8(\cos 225° + i\sin 225°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120° + i\sin 120°)$

42) $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

43) $6(\cos 210° + i\sin 210°) \div 3(\cos 150° + i\sin 150°)$

أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

44) $(4 - i)^5$ **$404 - 1121i$**

45) $(\sqrt{2} + 3i)^4$ **$-23 - 119i$**

أوجد الجذور المطلوبة لكلٍّ من العددين المركبين الآتيين:

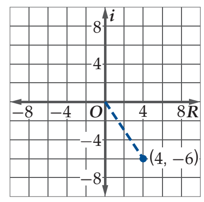
46) الجذور التكعيبية للعدد $6 - 4i$

47) الجذور الرباعية للعدد $1 + i$

للتمرينين 46, 47 انظر الهامش

مثال 3

مَثِّل $4 - 6i$ في المستوى المركب، وعبِّر عنه على الصورة القطبية.



أوجد المقياس.

صيغة التحويل $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = 4, b = -6$ $= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$

أوجد السعة.

صيغة التحويل $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$a = 4, b = -6$ $= \tan^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$

بالتبسيط ≈ -0.98

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 - 6i$ هي:

$2\sqrt{13}\,[(\cos(-0.98) + i\sin(-0.98)]$ تقريبًا.

مثال 4

أوجد ناتج $-3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم حوِّله إلى الصورة الديكارتية.

التعبير المعطى $-3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

صيغة الضرب $= (-3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$

بالتبسيط $= -15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

الصورة القطبية $-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

بتعويض قيم النسب المثلثية $= -15[-0.26 + i(-0.97)]$

خاصية التوزيع $= 3.9 + 14.5i$

فتكون الصورة الديكارتية لناتج الضرب $3.9 + 14.5i$

إجابات:

32) $3.317(\cos 0.441 + i\sin 0.441)$

33) $9.434[\cos(-1.012) + i\sin(-1.012)]$

34) $4.359(\cos -2.731 + i\sin -2.731)$

35) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

40) $-4\sqrt{3} - 4i$

41) $3.86 - 1.04i$

42) $\frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}i$

43) $1 + i\sqrt{3}$

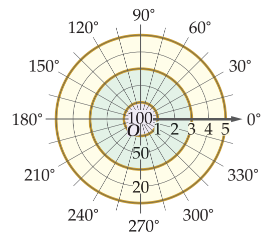
46) $1.895 - 0.376i, -0.622 + 1.829i, -1.273 - 1.453i$

47) $1.07 + 0.21i, -0.21 + 1.07i, -1.07 - 0.21i, 0.21 - 1.07i$

دليل الدراسة والمراجعة

تطبيقات ومسائل

48) **ألعاب:** قُسِّمت لوحة الأسهم إلى 3 مناطق كما هو موضّح في الشكل أدناه، بحيث يحصل اللاعب على 100 نقطة عند إصابته المنطقة القريبة من القطب، وعلى 50 نقطة عند إصابة المنطقة المتوسطة، و 20 نقطة عند إصابته المنطقة البعيدة. (الدرس 5-1)



a) إذا أصاب اللاعب النقطة $(3.5, 165°)$ ، فما عدد النقاط التي يحصل عليها؟ **20**

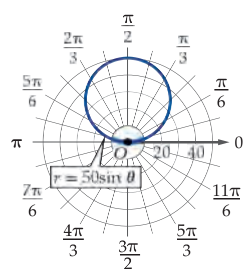
b) أعطِ موقعين ممكنين، بحيث يحصل اللاعب على 50 نقطة عند إصابة أحدهما؟ **إجابة ممكنة: $(2, 180°)$ أو $(2, 0°)$**

49) **حدائق:** تستعمل شركة عناية بالحدائق رشاشًا قابلًا للتعديل يستطيع الدوران $360°$ ، ويروي منطقة دائرية نصف قطرها 20 ft . (الدرس 5-1)

a) حدّد المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها في المستوى القطبي. **انظر الهامش**

b) أوجد مساحة المنطقة التي يستطيع الرشاش ريّها، إذا ضُبط ليدور في الفترة $-30° \leq \theta \leq 210°$. **$838\ ft^2$ تقريبًا**

50) **عجلة دوّارة:** يمكن تمثيل مسار العجلة الدوّارة بالمعادلة $r = 50 \sin \theta$. يُعطى موقع راكب عند الزاوية $\frac{13\pi}{12}$. (الدرس 5-2)



a) عيّن الإحداثيين القطبيين لموقع الراكب. مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك. $\left(-12.9, \frac{13\pi}{12}\right)$

b) عيّن الإحداثيين الديكارتيين لموقع الراكب. مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك. **(12.5, 3.3)**

c) إذا وقع القطب على سطح الأرض، فما ارتفاع ذلك الراكب مقرّبًا إلى أقرب قدم؟ **3 ft**

51) **كهرباء:** تُصنَّع معظم الدوائر الكهربائية في الوطن العربي لتتحمل جهدًا قدره 220V . للفرعين a ، b استعمل المعادلة $E = I \cdot Z$ ، حيث فرق الجهد E بالفولت، والممانعة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-3)

a) إذا كانت شدة التيار المار بالدائرة $(2 + 5j)$Amp ، فأوجد الممانعة مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة. **$(15.2 - 37.9j)\ \Omega$**

b) إذا كانت ممانعة الدائرة $(1 - 3j)\Omega$ ، فأوجد شدة التيارمقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة. **$(21.9 + 66.0j)$ Amp**

52) **ديناميكا هوائية:** يُعيِّن تحويل جوكوسكي (Jowkoski) لكل عدد مركب $z = a + bi$ عددًا مركبًا w يُعطى بالصيغة $w = z + \frac{1}{z}$. أوجد صورة كل من العددين المركبين الآتيين في هذا التحويل. (الدرس 5-3)

a) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ **1**

b) $z = 2 - 2i$ **$\frac{9}{4} - \frac{7}{4}i$**

53) **كهرباء ساكنة:** تُستعملُ دوال في متغيرات مركبة لدراسة الكهرباء الساكنة، وتحديد خطوط الجهد الثابت. للدالة $f(z)$ ، حيث $z = x + iy$ دالّتين $u(x, y)$ ، $v(x, y)$ ، بحيث $f(z) = u(x, y) + iv(x,y)$. إذا كانت: $f(z) = f(x + iy) = z^2 + z + 1$. فأوجد u ، v . (الدرس 5-3)
$u(x, y) = (x^2 - y^2 + x + 1)\ ,\ v(x, y) = (2xy + y)$

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة حَلّ المسائل

إذا احتاج الطلبة إلى تدريبات إضافية على حَلّ المسألة، فذكّرهم بخطوات حَلّ المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيداً من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقّع

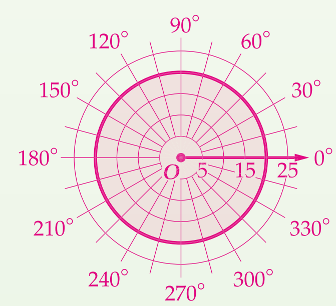
اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقّع من مصادر الفصل 5، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 5.

قبل الاختبار

اطلب إلى الطلبة دراسة الصفحات 251 – 254 من دليل الدراسة؛ لمراجعة المواضيع، والمهارات الواردة في الفصل.

إجابة:

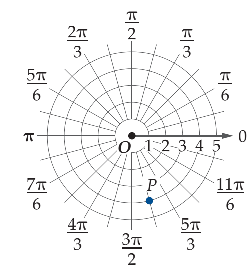
(49a



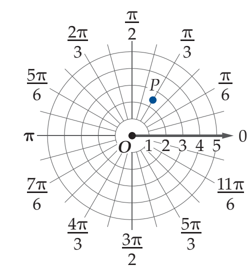
الفصل 5 اختبار الفصل

أوجد أربعة أزواج مختلفة تمثّل إحداثيات قطبية للنقطة P في التمثيلين 1, 2 ، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. للسؤالين 1, 2 انظر الهامش

(1



(2



مَثّل بيانيًا في المستوى القطبي كلًا من المعادلات الآتية: للأسئلة 6-3 انظر ملحق الإجابات

(3 $\theta = 30°$ (4 $r = 1$

(5 $r = 2.5$ (6 $\theta = \frac{5\pi}{3}$

(7 **رادار:** يقوم مراقب الحركة الجوية بتتبع مسار طائرة موقعها الحالي عند النقطة $(66, 115°)$ ، حيث r بالأميال.

a) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين للطائرة. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل. $(-28, 60)$

b) إذا وُجدت طائرة عند النقطة $(50, -75)$ ، فعيِّن الإحداثيين القطبيين لها. مقرِّبًا المسافة إلى أقرب ميل، والزاوية إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك. إجابة ممكنة: $(90, 303.7°)$

c) ما المسافة بين الطائرتين؟ مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل. 156 mi

حدِّد شكل التمثيل البياني لكل من المعادلتين الديكارتيتين الآتيتين، ثم عبِّر عنها على الصورة القطبية: للسؤالين 9, 8 انظر الهامش

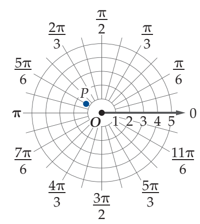
(8 $(x-7)^2 + y^2 = 49$

(9 $y = 3x^2$

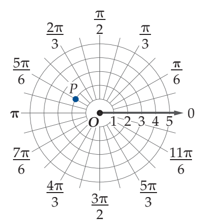
(10 **كهرباء:** إذا كان فرق الجهد E في دائرة كهربائية 135V، وكانت شدة التيار المار بها I $(3-4j)$Amp، فأوجد ممانعة الدائرة z بالإحداثيات الديكارتية. مستعملًا المعادلة $E = I \cdot Z$.
$(16.2 + 21.6j)\Omega$

(11 **اختيار من متعدد:** ما تمثيل العدد المركب $(-\sqrt{3}, -i)$ في المستوى القطبي؟ D

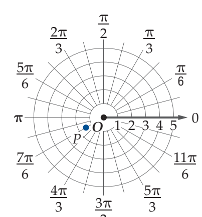
A



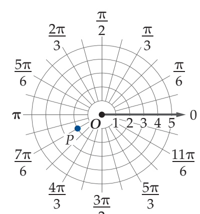
C



B



D



أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية. مقرِّبة إلى أقرب جزء من عشرة:

(12 $(-1+4i)^3$ $47 - 52i$

(13 $(-7-3i)^5$ $11228 - 23028i$

(14 $(6+i)^4$ $1081 + 840i$

(15 $(2-5i)^6$ $15939 - 18460i$

بناء الاختبارات
التقـــويم

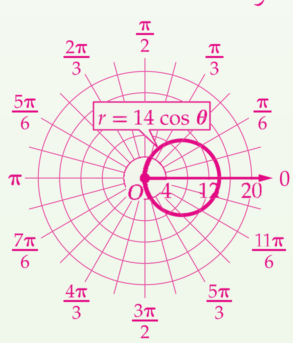
أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أنّ جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 5 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

إجابات:

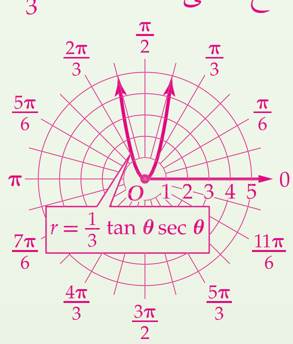
(1 $\left(2.5, \frac{\pi}{3}\right), \left(2.5, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-2.5, \frac{4\pi}{3}\right), \left(-2.5, -\frac{2\pi}{3}\right)$

(2 $\left(4, \frac{19\pi}{12}\right), \left(4, -\frac{5\pi}{12}\right), \left(-4, \frac{17\pi}{12}\right), \left(-4, -\frac{17\pi}{12}\right)$

(8 دائرة، $r = 14\cos\theta$



(9 قطع مكافئ، $r = \frac{1}{3}\tan\theta\sec\theta$

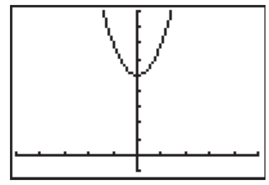


مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا: أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة،	إذا: أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر: أحد المصادر الآتية:	فاختر: أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب: الدروس 1-5، 2-5، 3-5	مصادر الفصل: دليل الدراسة والمعالجة
كتاب التمارين: الفصل 5	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com
دليل المعلم: مشروع الفصل، ص (222)	
زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com	

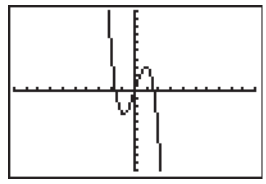
التهيئة للفصل 5 ص 223

1) زوجية؛ متماثل بالنسبة لمحور y



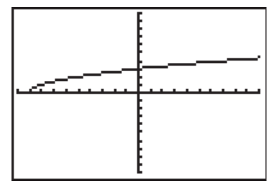
[−10, 10] scl: 2 by [−2, 18] scl: 2

2) فردية؛ متماثل بالنسبة لنقطة الأصل



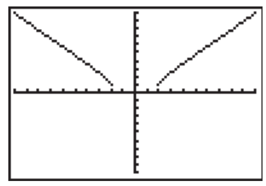
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

3) غير ذلك



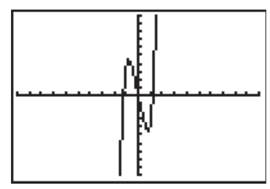
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

4) زوجية، متماثل بالنسبة لمحور y



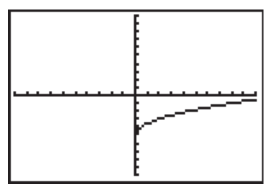
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

5) فردية؛ متماثل بالنسبة لنقطة الأصل



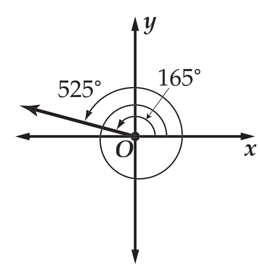
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

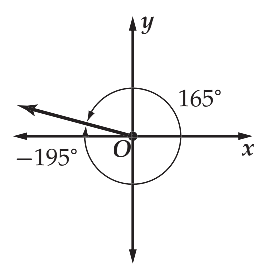
6) زوجية؛ متماثل بالنسبة لمحور y



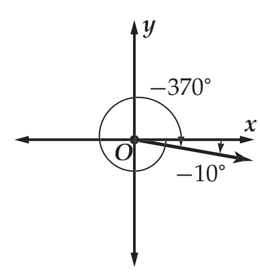
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

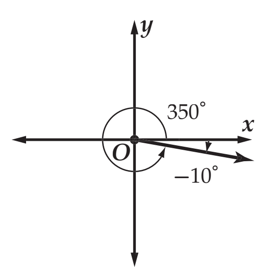
13) $165° + 360k°, 525°, -195°$



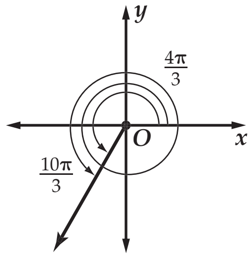


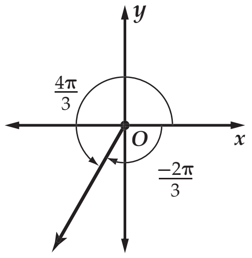
14) $-10° + 360k°, 350°, -370°$



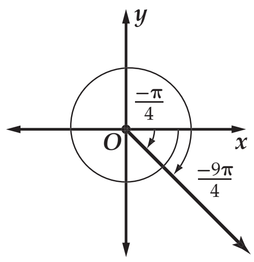


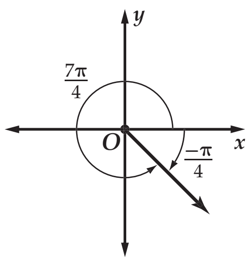
15) $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{10\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$





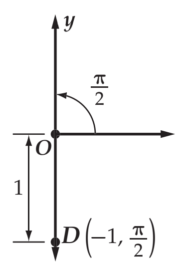
16) $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$



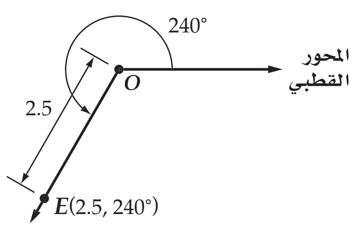


الدرس 1-5 (تأكد) ص 224–227

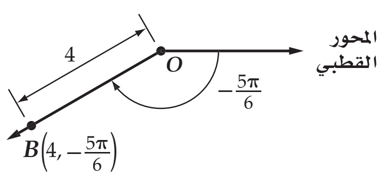
(1A



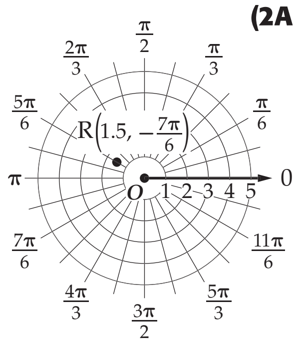
(1B



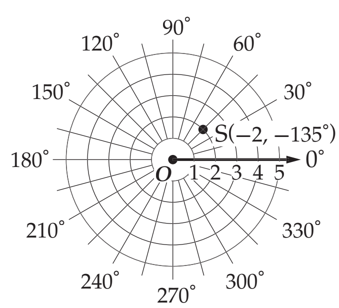
(1C



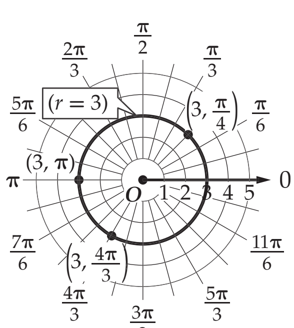
(2A



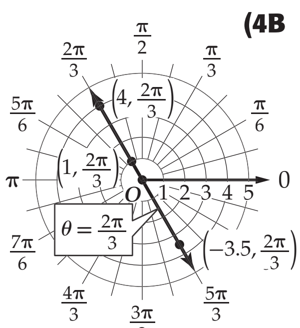
(2B



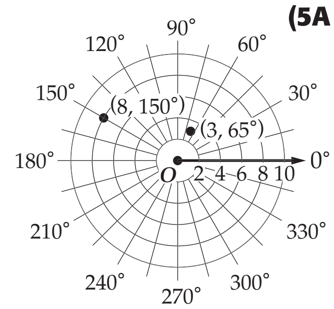
(4A



(4B

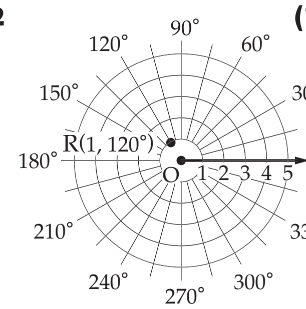


(5A

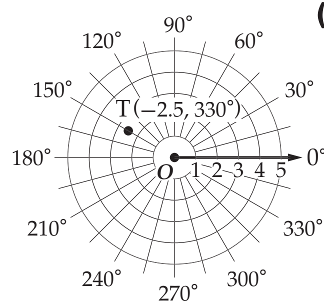


الدرس 5-1 ص 228–230

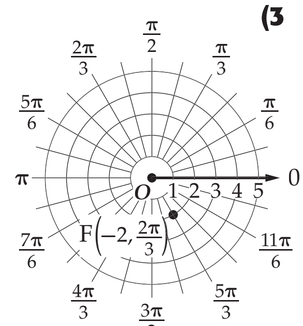
(1



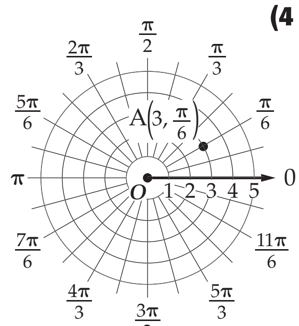
(2



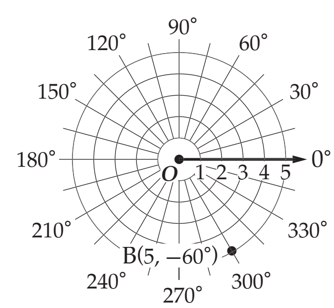
(3



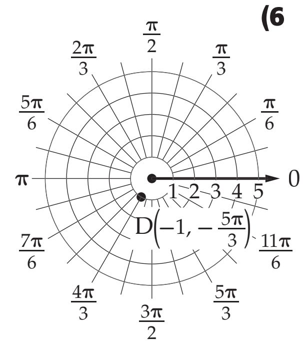
(4



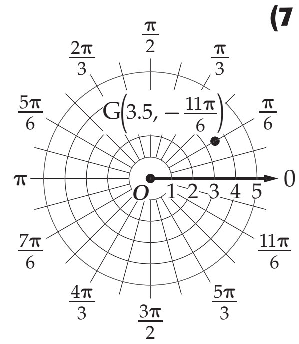
(5



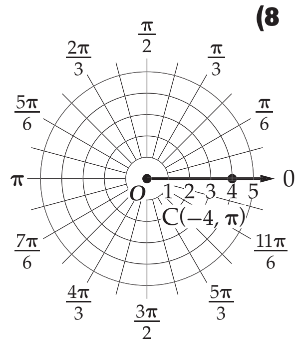
(6



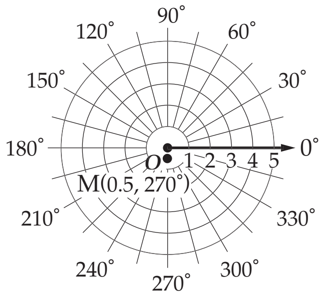
(7



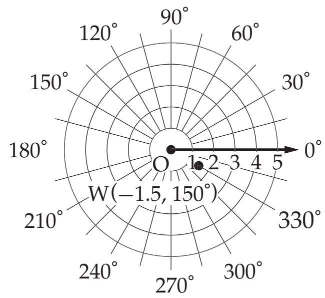
(8



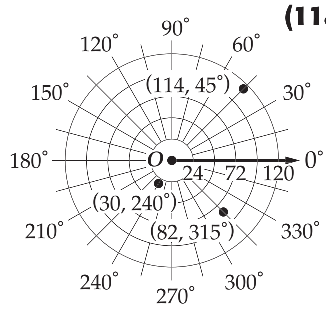
(9



(10



(11a



11b) بما أن الدوائر متحدة المركز، وكل دائرة تبعُد عن التي تليها مسافات متساوية، فكل مسافة منها تساوي $120 \div 10 = 12$

وعليه، فإن الجدول أدناه يلخص احتساب النقاط للرامي:

وتكون $(114, 45°)$ تستحق 1 نقطة

$(82, 315°)$ تستحق 4 نقاط

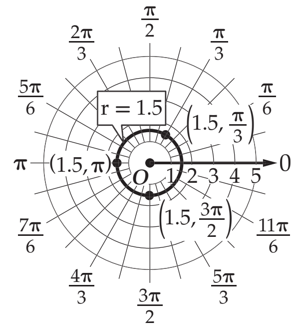
$(30, 240°)$ تستحق 8 نقاط

ويكون مجموع النقاط التي حصل عليها الرامي هو:

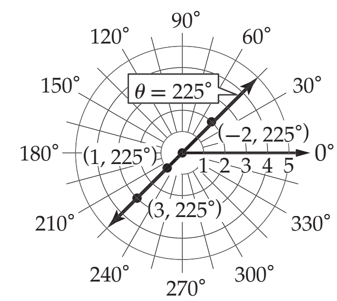
$1 + 4 + 8 = 13$ (نقطة)

0−<12 cm	10
12−<24 cm	9
24−<36 cm	8
36−<48 cm	7
48−<60 cm	6
60−<72 cm	5
72−<84 cm	4
84−<96 cm	3
96−<108 cm	2
108−<120 cm	1

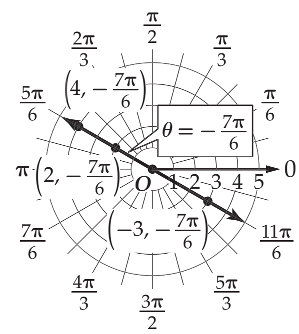
(20



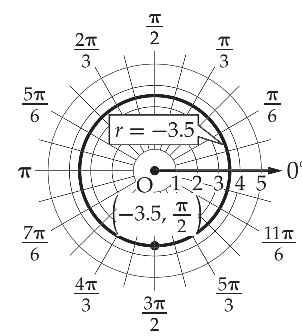
(21



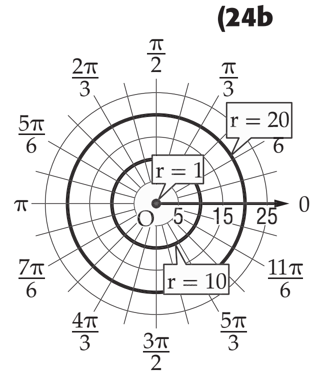
(22



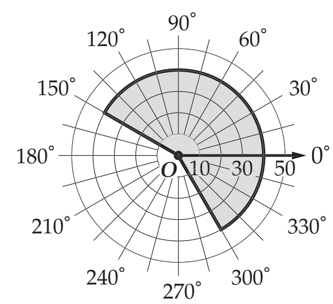
(23



(24b



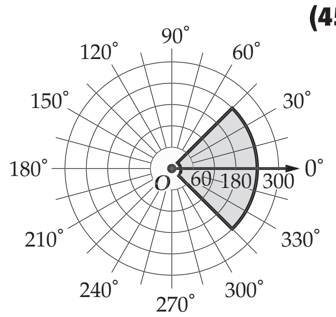
38 **a)** تمثل المتباينتان $0 \leq r \leq 40$ ، $-60° \leq \theta \leq 150°$ قطاعًا في دائرة نصف قطرها 40 وحدة، وينحصر بين نصفي المستقيمين $\theta = 60°, \theta = 150°$



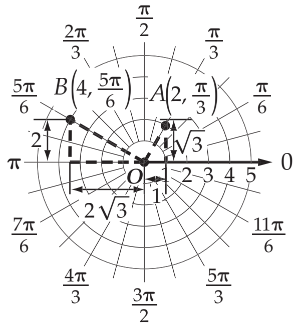
b) صيغة مساحة القطاع الدائري هي $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ ، حيث r نصف قطر الدائرة، θ زاوية القطاع المركزية مقيسة بالراديان. زاوية القطاع المركزية بالدرجات هي $150° - (-60°) = 210°$، وبالراديان $210° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{7\pi}{6}$

لذلك، مساحة القطاع الدائري هي $\frac{1}{2}(40)^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) \approx 2932.2\ ft^2$

(45a



(51a–c

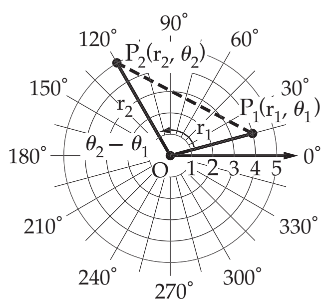


(51d يمثل طولا الضلعين الأفقي والرأسي الإحداثيين x ، y على الترتيب للنقطة القطبية.

(51e إذا كانت إحداثيات النقطة القطبية (r, θ)، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $(r \cos \theta , r \sin \theta)$.

(54 إجابة ممكنة: تحتوي صيغة المسافة على عمليتي ضرب قيم r وجمعها، وكلتا العمليتين إبدالية. والدالة $\cos \theta$ دالة زوجية. لذا، $\cos (-\theta) = \cos \theta$ ، ومنه $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$.

(56



في المثلث الذي رؤوسه P_1 ، P_2 والقطب، ضلعان معلومان وزاوية محصورة معلومة. لذا، وباستعمال قانون جيب التمام، فإن:

$(P_1P_2)^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$ أو

$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

(57 عندما $(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\pi}{2}$، فإن $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. وعليه فإن تبسيط قانون المسافة القطبية يعطي $\sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2}$. وهذه النتيجة تكافئ نظرية فيثاغورس، حيث تمثل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين وتر المثلث القائم الذي رؤوسه هاتان النقطتان ونقطة الأصل.

(58 سعيد؛ إجابة ممكنة: عيّن علي نقطة تبعُد 5 وحدات عن المحور القطبي. بينما كان عليه تعيين نقطة تبعُد 5 وحدات عن القطب على الضلع النهائي للزاوية.

(59 في الإحداثيات القطبية، لايؤخذ في الحسبان ارتفاع الطائرة . ويمكن حساب الزاوية والمسافة بين الرادار وإسقاط الطائرة على سطح الأرض، إلا أننا بحاجة إلى الارتفاع؛ لتحديد موقع الطائرة بشكل دقيق.

الدرس 2-5 ص 239–231

23 a) افترض أن عمارة نواف تقع عند القطب، واتجاه الشرق يمثل المحور القطبي، فتكون المدرسة عند $(1.5, 37°)$

$$x = r\cos\theta$$
$$= 1.5\cos 37° \approx 1.2$$
$$y = r\sin\theta$$
$$= 1.5\sin 37° \approx 0.9$$

أي أن نواف سوف يتحرك 1.2 mi شرقًا و 0.9 mi شمالًا تقريبًا كي يصل إلى المدرسة.

23 b) الإحداثيات الديكارتية للملعب هي $(-2, -0.5)$

وبما أن $x = -2 < 0$ استعمل $\text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180°$

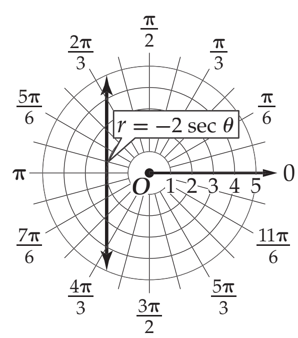
لإيجاد θ

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{-0.5}{-2}\right) + 180°$$
$$= \text{Tan}^{-1}(0.25) + 180°$$
$$\approx 194.04°$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-0.5)^2} \approx 2.06$$

أي أن الصورة القطبية لإحداثيات موقع الملعب هي

$(2.06, 194.04°)$

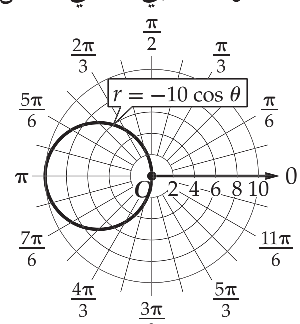
24) مستقيم، $r = -2\sec\theta$



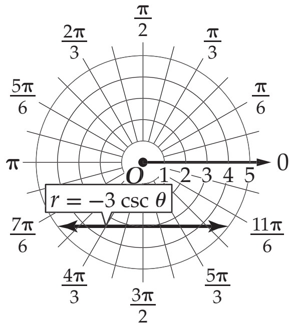
25) $(x+5)^2 + y^2 = 25$ تمثل دائرة مركزها $(-5, 0)$، وطول نصف قطرها 5 وحداتٍ.

$$(x+5)^2 + y^2 = 25$$
$$(r\cos\theta + 5)^2 + (r\sin\theta)^2 = 25$$
$$r^2\cos^2\theta + 10r\cos\theta + 25 + r^2\sin^2\theta = 25$$
$$r^2\cos^2\theta + 10r\cos\theta + r^2\sin^2\theta = 0$$
$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -10r\cos\theta$$
$$r = -10\cos\theta$$

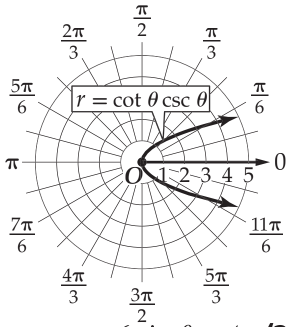
وبحساب قيمة r عند مجموعة من قيم θ، يمكن تمثيل الدائرة في المستوى القطبي كما في الشكل أدناه:



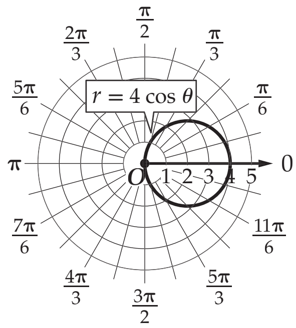
26) مستقيم، $r = -3\csc\theta$



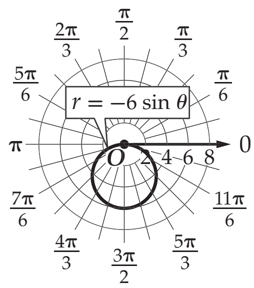
27) قطع مكافئ،
$r = \cot\theta\csc\theta$



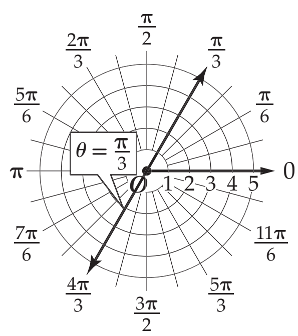
28) دائرة، $r = 4\cos\theta$



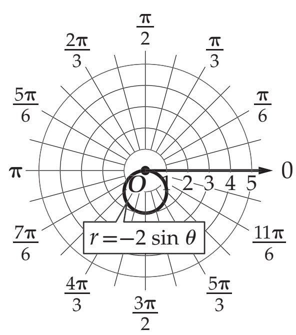
29) دائرة، $r = -6\sin\theta$



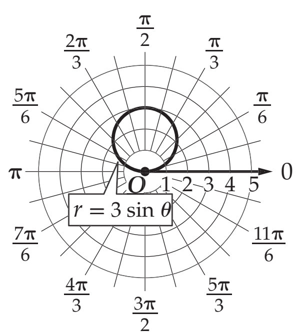
30) مستقيم، $\theta = \frac{\pi}{3}$



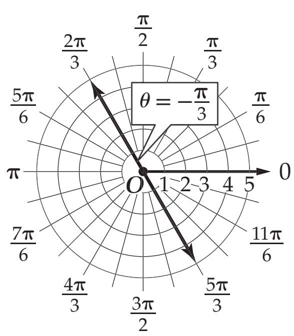
31) دائرة، $r = -2\sin\theta$



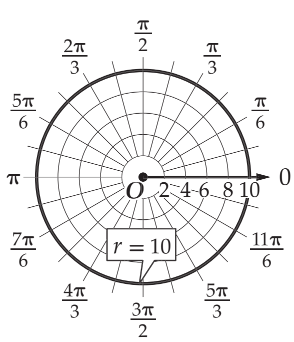
32) $x^2 + y^2 - 3y = 0$، دائرة



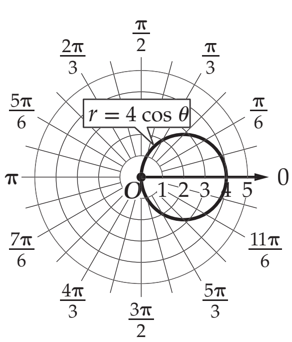
33) $y = -\sqrt{3}x$، مستقيم



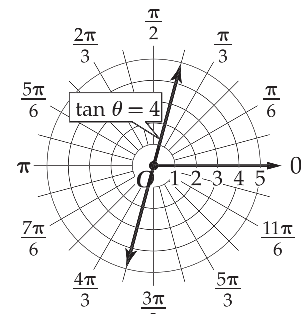
34) $x^2 + y^2 = 100$، دائرة



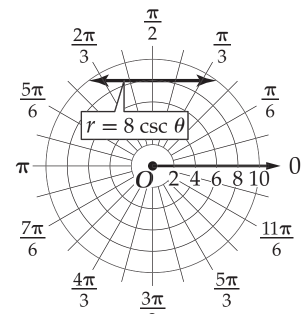
35) $x^2 - 4x + y^2 = 0$، دائرة



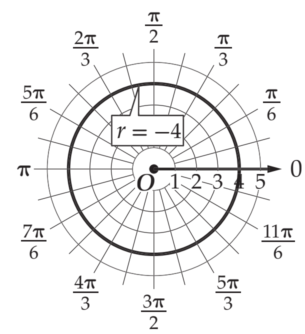
36) $y = 4x$ ، مستقيم



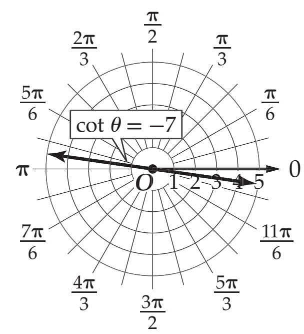
37) $y = 8$، مستقيم



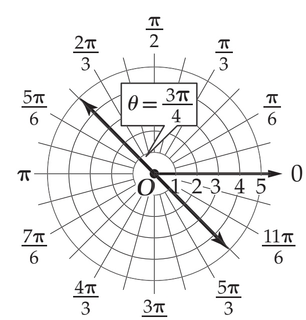
38) $x^2 + y^2 = 16$، دائرة



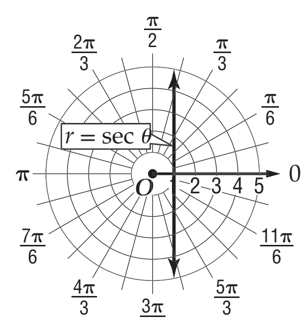
39) $x = -7y$ أو $-\frac{1}{7}x = y$ ، مستقيم



40) $y = -x$ ، مستقيم



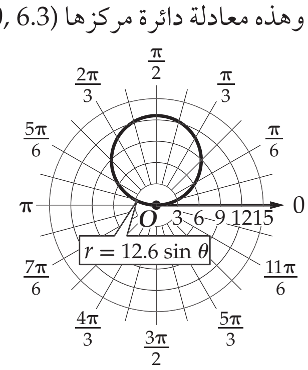
41) $x = 1$ ، مستقيم



42 **a)** $r = 12.6 \sin \theta$

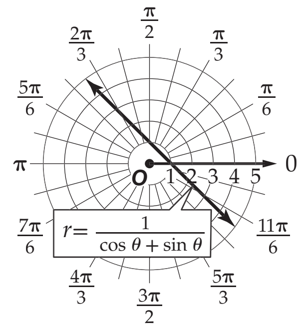
$$r^2 = 12.6\, r \sin \theta$$
$$x^2 + y^2 = 12.6y$$
$$x^2 + y^2 - 12.6y = 0$$
$$x^2 + (y - 6.3)^2 = (6.3)^2$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $(0, 6.3)$، ونصف قطرها 6.3 وحدات.



b) $(0, 6.3)$ ؛ إجابة ممكنة: سيشعر بالزلزال الذين يبعدون مسافة 6.3 mi فما دون عن مركزه.

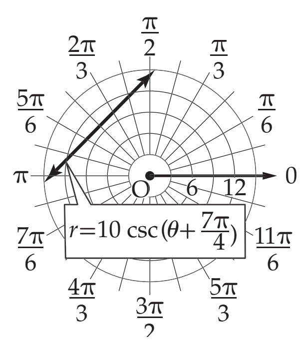
43) $x + y = 1$ أو $y = 1 - x$، مستقيم



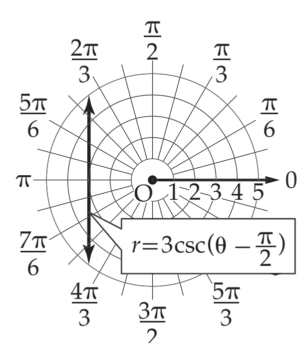
44

$$r = 10 \csc(\theta + \tfrac{7\pi}{4})$$
$$\Rightarrow r = \frac{10}{\sin(\theta + \frac{7\pi}{4})}$$
$$\Rightarrow r\,[\sin(\theta + \tfrac{7\pi}{4})] = 10$$
$$\Rightarrow r\,[\sin\theta \cos\tfrac{7\pi}{4} + \cos\theta \sin\tfrac{7\pi}{4}] = 10$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} r \sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} r \cos\theta = 10$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} y - \frac{\sqrt{2}}{2} x = 10$$
$$\Rightarrow y = x + 10\sqrt{2}$$

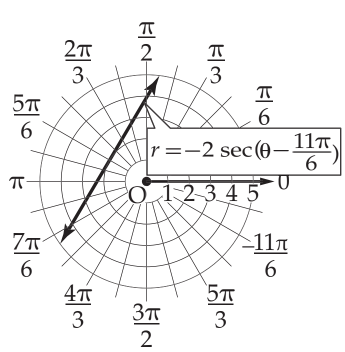
وهذه المعادلة تمثل مستقيمًا يمرُّ في $(0, 10\sqrt{2})$ وميله يساوي 1 كما هو في الشكل أدناه.



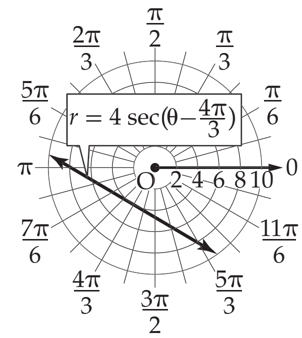
45) $x = -3$، مستقيم



46) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2$ أو $y = \sqrt{3}x + 4$ ، مستقيم



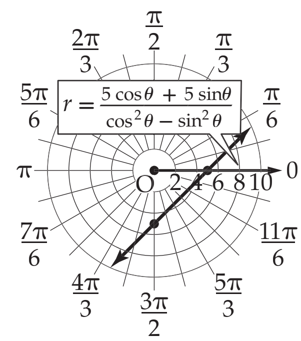
(47



$-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4$ أو

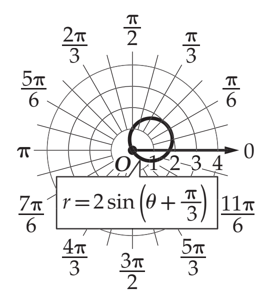
$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$ ،
مستقيم

(48



$x - y = 5$ أو $y = x - 5$ ،
مستقيم

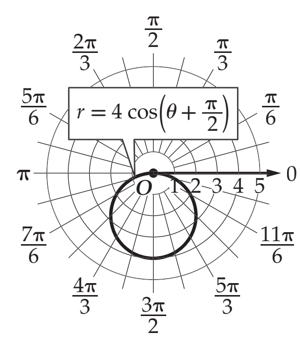
(49



$x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y = 0$ أو

$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ ، دائرة

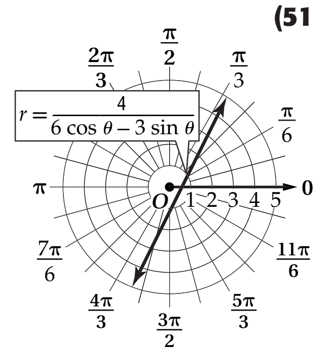
(50



$x^2 + y^2 + 4y = 0$ أو

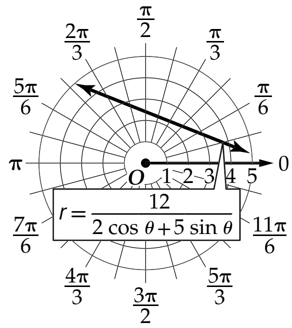
$x^2 + (y+2)^2 = 4$ ، دائرة

(51



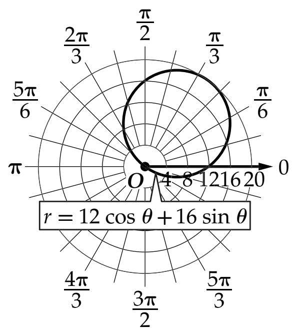
$r = \frac{4}{6\cos\theta - 3\sin\theta}$ ، مستقيم

(52



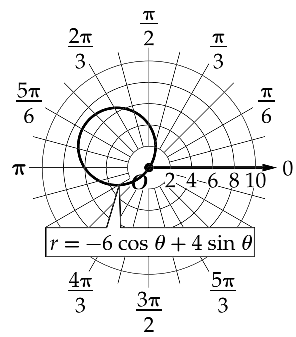
$r = \frac{12}{2\cos\theta + 5\sin\theta}$ ،
مستقيم

(53



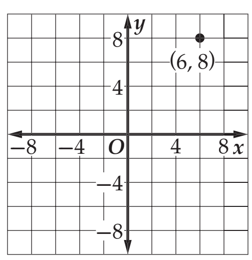
$r = 12\cos\theta + 16\sin\theta$ ،
دائرة

(54



$r = -6\cos\theta + 4\sin\theta$ ، دائرة

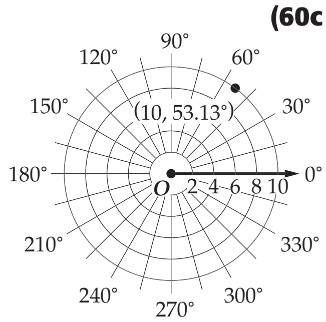
(60a



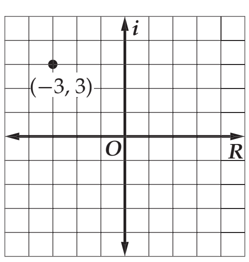
(60b

$(10, 0.93)$ أو $(10, 53.13°)$

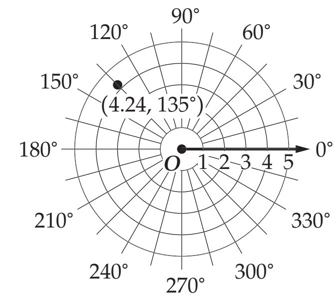
(60c



(60d



60e) $(4.24, 135°)$ أو $\left(4.24, \frac{3\pi}{4}\right)$



60f) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ،
$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a}$ عندما a موجبة،
$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ عندما a سالبة.

61) توفيق؛ إجابة ممكنة: استعمل توفيق التعويض الصحيح. وتمثيل معادلته يطابق المعادلة القطبية الأصلية. في حين تمثل إجابة باسل دالة الجيب، ولا تمثل الدائرة التي هي التمثيل البياني للمعادلة القطبية الأصلية.

63) $\theta = \sin^{-1} \frac{y}{r}$ عندما تكون x موجبة، $\theta = \sin^{-1} \frac{y}{r} + \pi$ عندما تكون x سالبـة، $\theta = \cos^{-1} \frac{x}{r}$ عندما تكون y موجبة، $\theta = \cos^{-1} \frac{x}{r} + \pi$ عندما تكون y سالبة.

64) إجابة ممكنة: تمثيل معادلات لا تمثل دوالًا، كمعادلات الدوائر أسهل باستعمال الصورة القطبية من استعمال الصورة الديكارتية. في حين أن تمثيل معادلات تمثل دوالًا كالدوال الخطية أسهل باستعمال الصورة الديكارتية.

65)

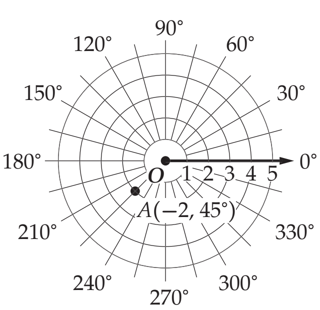
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\frac{x}{\cos\theta} = r \qquad \frac{y}{\sin\theta} = r$$

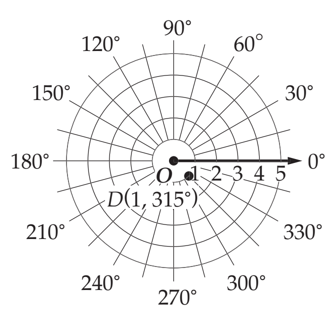
$$x \cdot \frac{1}{\cos\theta} = r \qquad y \cdot \frac{1}{\sin\theta} = r$$

$$x\sec\theta = r \qquad y\csc\theta = r$$

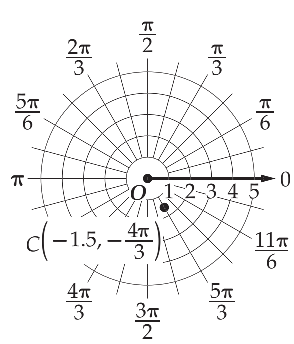
67)



68)

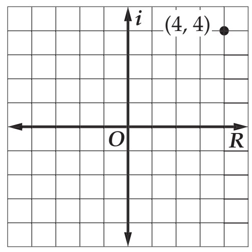


69)

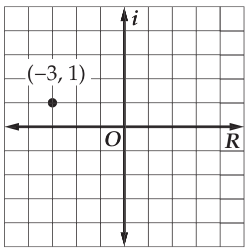


الدرس 3-5 ص 250–240

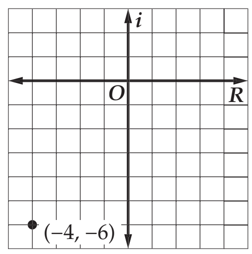
1)



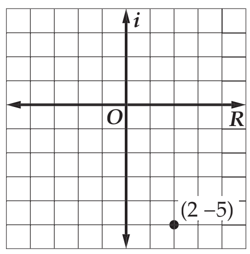
2)



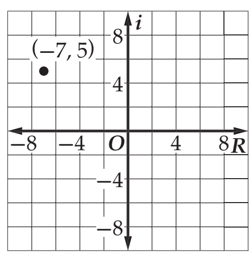
3)



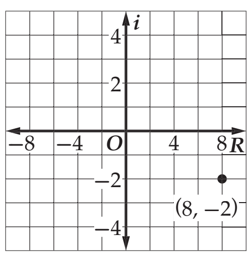
4)



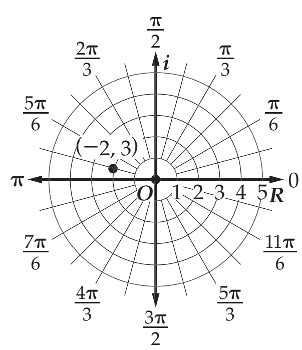
5)



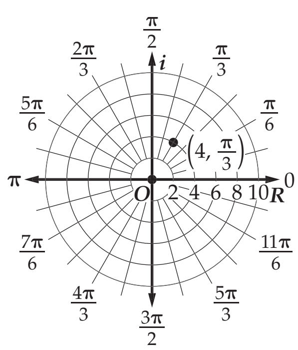
6)



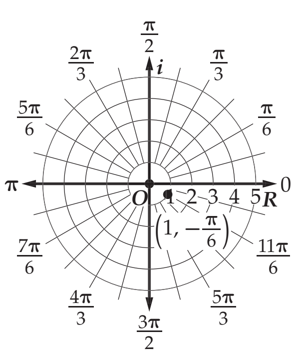
14) $-1.98 + 0.28i$



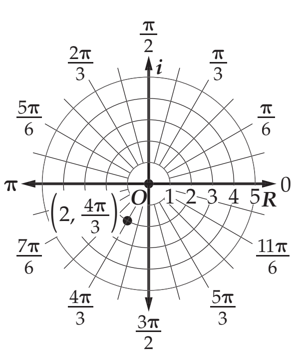
15) $2 + 2\sqrt{3}\,i$



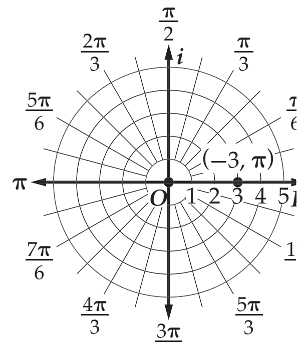
16) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$



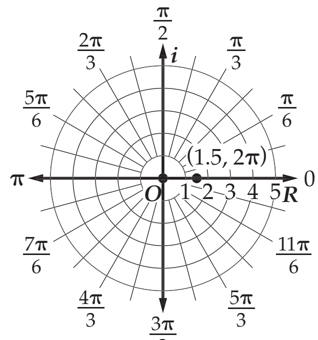
17) $-1 - \sqrt{3}i$



18) 3



19) $\frac{3}{2}$



20) $24\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -12\sqrt{2} + 12\sqrt{2}i$

21) $-10, 10(\cos 180° + i\sin 180°)$

22) $6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right], 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

23) $4(\cos 360° + i\sin 360°), 4$

24) $\frac{3}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right], -\frac{3}{4}i$

25) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

26) $3(\cos 210° + i\sin 210°), -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

27) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), 3i$

28) $10(\cos 315° + i\sin 315°), 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$

29) $\frac{1}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{12}i$

38) $0.9659 + 0.2588i$ تقريبًا,
$0.2588 + 0.9659i$ تقريبًا,
$-0.7071 + 0.7071i$ تقريبًا,
$-0.9659 - 0.2588i$ تقريبًا,
$-0.2588 - 0.9659i$ تقريبًا,
$0.7071 - 0.7071i$ تقريبًا

39) $0.5878 + 0.8090i$,
$-0.5878 + 0.8090i$,
$-0.9511 - 0.3090i$,
$-i, 0.9511 - 0.3090i$

40) $0.2195 + 1.6674i$ تقريبًا,
$-1.6674 + 0.2195i$ تقريبًا,
$-0.2195 - 1.6672i$ تقريبًا,
$1.6674 - 0.2195i$ تقريبًا

41) $3 + 4i, -4.9641 + 0.5981i$,
$1.9641 - 4.5981i$

42) $1.6403 + 0.5563i$,
$-0.0222 + 1.7319i$,
$-1.6540 + 0.5140i$,
$-1 - i\sqrt{2}, 1.0360 - 1.3881i$

47) $(1 - i)(4 + 4i) = 8$,
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \cdot 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8$

48) $(3 + i)(3 - i) = 10, \sqrt{10}(\cos 0.3218 + i\sin 0.3218) \cdot$
$\sqrt{10}(\cos(-0.3218) + i\sin(-0.3218)) = 10$

49) $(3 - i)(4 + i) = 13 - i, \sqrt{10}\cos(-0.3218) +$
$i\sin(-0.3218) \cdot \sqrt{17}(\cos 0.245 + i\sin 0.245) = 13 - i$

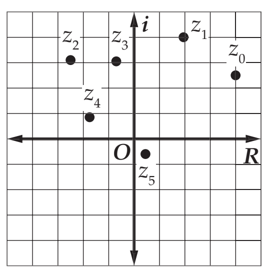
50) $(-6 + 5i)(2 - 3i) = 3 + 28i, \sqrt{61}(\cos 2.447 + i\sin 2.447) \cdot$
$\sqrt{13}(\cos(-0.9828) + i\sin(-0.9828)) \approx 3 + 28i$

51) $(\sqrt{2} + 2i)(1 + i) = -0.586 + 3.414i$,
$\sqrt{6}(\cos 0.955 + i\sin 0.955)$
$\cdot\sqrt{2}(\cos 0.785 + i\sin 0.785) = -0.586 + 3.414i$

52) $(3 - 2i)(1 + \sqrt{3}\,i) \approx 6.464 + 3.196i$ ؛
$\sqrt{13}\,[\cos(-0.5880) + i\sin(-0.5880)]$
$2(\cos 1.0472 + i\sin 1.0472) \approx 6.464 + 3.196i$

53a) $z_1 = 0.39 + 0.8i, z_2 = -0.49 + 0.62i$,
$z_3 = -0.14 + 0.61i, z_4 = -0.35 + 0.17i$
$, z_5 = 0.09 - 0.12i$

53b)



53c) عند تطبيق $f(z) = z^2$، في كل مرة، فإن العدد المركب الناتج يقترب من نقطة الأصل وتقترب قيمته المطلقة من الصفر.

56) $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi = \tan^{-1}\frac{-1}{-1} + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

∴ الصورة القطبية للجذر المركب $-1 - i$ هي:

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

وباستعمال نظرية ديموافر

$$z = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^4$$
$$= (\sqrt{2})^4\left[\cos 4\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin 4\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 4(-1 + 0i)$$
$$= -4$$

ولإيجاد الجذور الرباعية للعدد -4

$r = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4, \theta = \tan^{-1}\frac{0}{-4} + \pi = \pi$

والصورة القطبية للعدد -4 هي:

$4(\cos\pi + i\sin\pi)$

صيغة الجذور $4^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$

$k = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i)$$

الجذر الأول $= 1 + i$

$$k = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}\,(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i)$$

الجذر الثاني $= -1 + i$

$$k = 2 \Rightarrow \sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}\,(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i)$$

الجذر الثالث $= -1 - i$

$$k = 3 \Rightarrow \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i)$$

الجذر الرابع $= 1 - i$

أي أن $z = -4$، وجذوره الرباعية هي:

$$1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$$

58) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}$

59) $5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), 5(\cos\pi + i\sin\pi),$ $5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

60) $3\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right), 3\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right),$ $3\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right), 3\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$

61) $4\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right), 4\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right),$ $4\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right), 4\left(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$ $4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

62) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$ $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

63) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right), \sqrt[8]{2}\cos\left(\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$ $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23\pi}{16}\right), \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{16} + i\sin\frac{31\pi}{16}\right)$

66) ليكن r أي الجذور المحددة. بما أن r يقع على دائرة نصف قطرها 3، فإن $|r| = 3$.

يقع الجذر r_1 على الدائرة عند $\theta = \frac{\pi}{6}$،

ويمكن تمثيله بالصورة القطبية $r_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

يقع الجذر r_2 على الدائرة عند $\theta = \frac{5\pi}{6}$،

ويمكن تمثيله بالصورة القطبية $r_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

يقع الجذر r_3 على الدائرة عند $\theta = \frac{3\pi}{2}$،

ويمكن تمثيله بالصورة القطبية $r_3 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

لتحديد العدد الذي جذوره r_1, r_2, r_3 ؛ استعمل نظرية ديموافر لتكعيب أي من الجذور الثلاثة

$$r_1^{\,3} = [(3\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})]^3 = 27(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$
$$= 27\,i$$

67) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$ $2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right), -16$

68)

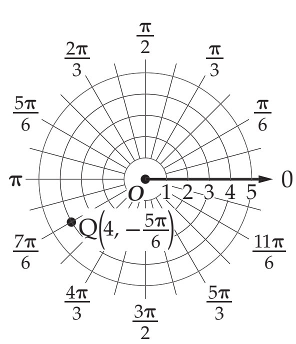
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\right)$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\right)\cdot\left(\frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}\right)$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot$$
$$\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_2 - i^2\sin^2\theta_2}\right)$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot$$
$$\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right)$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) - i(\sin\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

69) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان نصف القطر r مساويًا لواحد، فإن جذور العدد المركب تكون على أبعاد متساوية على دائرة الوحدة. عندما يكون $r < 1$ أو $r > 1$ فإنها لاتكون على أبعاد متساوية.

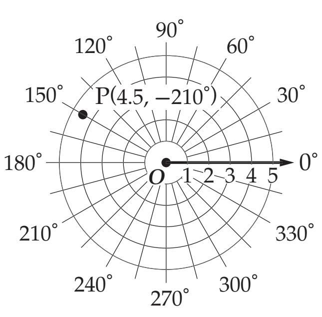
70) دائمًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان $z = a + bi$ ، $\overline{z} = a - bi$ ، فإن $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a$ ،
$(z\cdot\overline{z}) = (a + bi)\,(a - bi) = a^2 + b^2$

72) إجابة ممكنة: بما أن أحد الجذور يجب أن يكون عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن رأسًا من رؤوس المضلع يقع على المحور الحقيقي الموجب ويكون المضلع متماثلًا حول المحور الحقيقي. وهذا يعني أن الجذور غير الحقيقية تحدث على شكل مترافقات. وبما أن مجموع الجزئين التخيلية لعددين مركبين مترافقين 0 ، فإن الجزء التخيلي لحاصل جمع جميع الجذور هو صفر

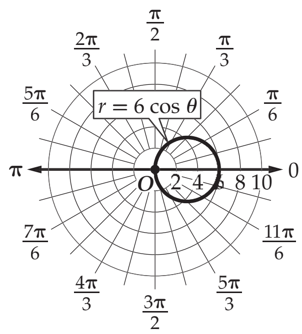
73)



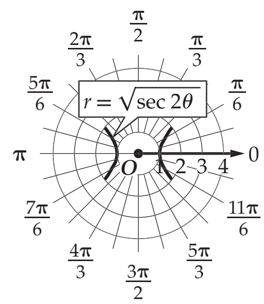
74)



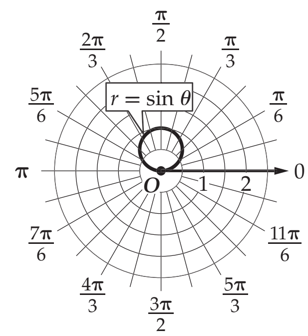
75) دائرة، $r = 6\cos\theta$



76) قطع زائد، $r^2 = \sec 2\theta$

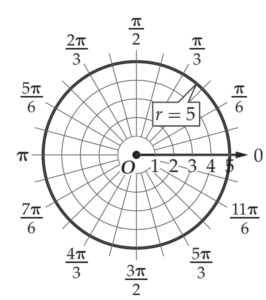


77) دائرة، $r = 2\sin\theta$

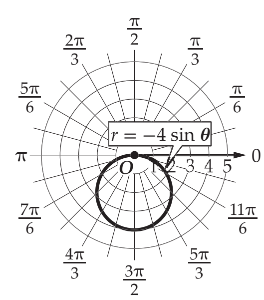


دليل الدراسة والمراجعة ص 254–251

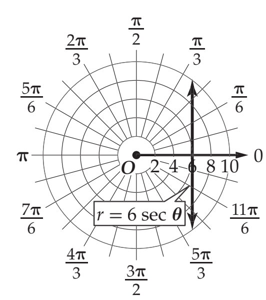
24) $x^2 + y^2 = 25$، دائرة



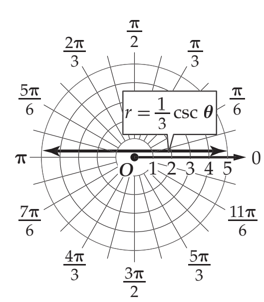
25) $x^2 + (y+2)^2 = 4$، دائرة



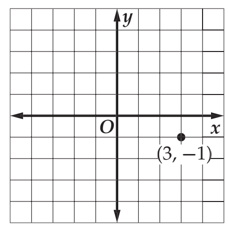
26) $x = 6$، مستقيم



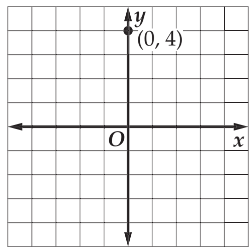
27) $y = \frac{1}{3}$، مستقيم



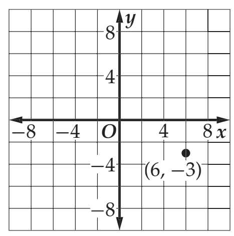
28) $\sqrt{10}$



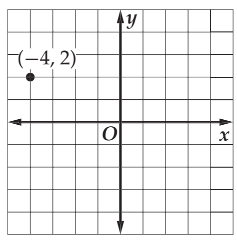
29) 4



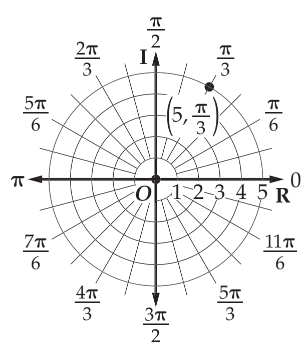
30) $3\sqrt{5}$



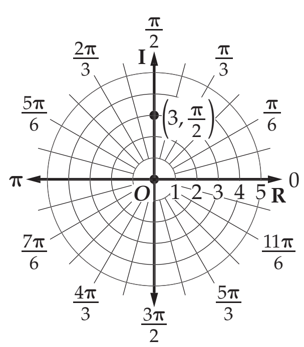
31) $2\sqrt{5}$



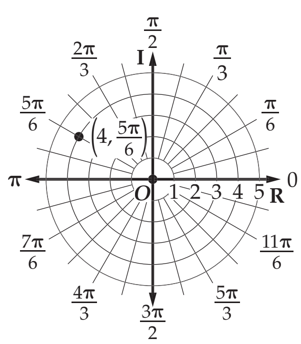
36) $3i$



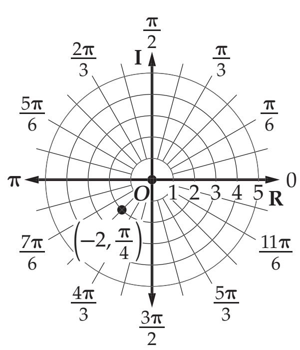
37) $2.5 + 2.5\sqrt{3}i$



38) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

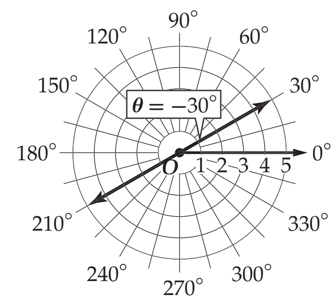


39) $-2\sqrt{3} + 2i$

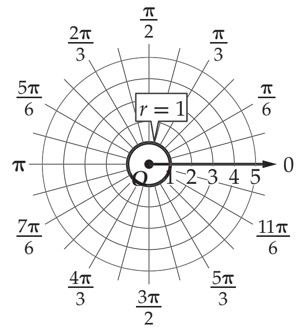


اختبار الفصل ص 255

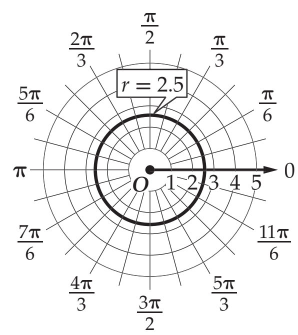
(3



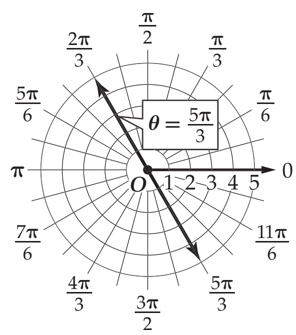
(4



(5



(6



ملاحظات

الفصل 6

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (257)

	الدرس 6-1 حصتان
العنوان	**الإحصاء الوصفي**
الأهداف	• تعرَّف أشكال التوزيعات؛ لاختيار المقاييس الإحصائية المناسبة. • المقارنة بين مجموعتين من البيانات باستعمال مقاييس الموقع.
المفردات الأساسية	وحيدة المتغير، التوزيع ذو الالتواء السالب، التوزيع المتماثل، التوزيع ذو الالتواء الموجب، إحصائي مقاوم، تجمع، التوزيع ثنائي المنوال، المئين، تمثيل المئين بيانيًا.
تمثيلات متعددة	ص (266)
مصادر الدرس	**مصادر الفصل 6** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن •كتاب التمارين ، ص (30) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• الجداول الإلكترونية
تنويع التعليم	ص (261, 267)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الإحصاء والتوزيعات الاحتمالية

الخطة الزمنية		
التدريس	مراجعة وتقويم	المجموع
(6) حصص	(2) حصة	(8) حصص

الدرس 2-6 حصتان	الدرس 3-6 حصتان
التوزيعات الاحتمالية	**التوزيع الطبيعي**
• تكوين توزيع احتمالي، وحساب ملخصاته الإحصائية. • تكوين توزيع ذات الحدين واستعماله، وحساب ملخصاته الإحصائية الأساسية.	• إيجاد المساحة تحت منحنيات توزيعات طبيعية. • إيجاد احتمالات ضمن توزيعات طبيعية، وإيجاد قيم بيانات عُلمت احتمالاتها.
المتغير العشوائي، المتغير العشوائي المنفصل، المتغير العشوائي المتصل، التوزيع الاحتمالي، القيمة المتوقعة (التوقع)، تجربة ذات الحدين، توزيع ذات الحدين، دالة التوزيع الاحتمالي ذي الحدين.	التوزيع الطبيعي، القانون التجريبي، قيمة z، التوزيع الطبيعي المعياري.
ص (276)	ص (285)
مصادر الفصل 6 • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (31) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ضمن فوق • اختبار قصير 1 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق	**مصادر الفصل 6** • دليل الدراسة والمعالجة دون ضمن • كتاب التمارين ، ص (32) دون ضمن فوق • تدريبات المسائل اللفظية دون ضمن فوق • تدريبات إثرائية ، ص (32) ضمن فوق • نشاط الآلة الحاسبة البيانية دون ضمن فوق • اختبار قصير 2 دون ضمن فوق **مصادر إضافية** • كراسة الطالب دون ضمن فوق
• الجداول الإلكترونية	• الآلة الحاسبة البيانية
ص (276 , 271)	ص (285 , 282)

التقويم الختامي

• دليل الدراسة والمراجعة، ص (286-290)

• اختبار الفصل، ص (291)

الفصل 6

التقويم والمعالجة

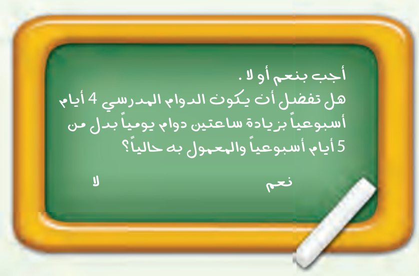
	التشخيص		إرشادات المعالجة	
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 6**	**المرجع**		**المرجع**
	التهيئة للفصل السادس، ص (257)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (257)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
التقويم التكويني	**خلال كل درس**			
	الأمثلة، تأكد	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1:	
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	الفصل 6	كتاب التمارين
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم	مستوى المعالجة 2: تنويع التعليم	دليل المعلم
	تنبيه!	دليل المعلم	دليل الدراسة والمراجعة	مصادر الفصل
	الخطوة 4: التقويم	دليل المعلم		
	اختبارات قصيرة	مصادر الفصل		
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل	مستوى المعالجة 1:	
			الفصل 6	كتاب التمارين
			زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
			مستوى المعالجة 2: تنويع التعليم	دليل المعلم
			دليل الدراسة والمراجعة	مصادر الفصل
	قبل اختبار الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 6،	كتاب الطالب	مستوى المعالجة 1: بنك المفاهيم والمهارات	مصادر الفصل
	ص (286 – 290)		تدريبات المهارات	مصادر الفصل
	اختبار الفصل، ص (290)	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	برنامج بناء الاختبارات		مستوى المعالجة 2: دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 6**			
	نماذج اختبارات الاختيار من متعدد	مصادر الفصل	دليل الدراسة والمعالجة	مصادر الفصل
	اختبارات الإجابة الحرة	مصادر الفصل	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	اختبار المفردات	مصادر الفصل		
	اختبار أسئلة ذات إجابات مطولة	مصادر الفصل		
	برنامج بناء الاختبارات	مصادر الفصل		

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية، بحيث تقوم كل مجموعة برسم منحنى طبيعي معياري، وكتابة النسب المئوية للمساحات عليه وفق القانون التجريبي، ثم اطلب إليهم تقدير بعض المساحات تحت المنحنى وعن يسار أو يمين بعض القيم لـ z، ثم إيجاد هذه المساحات باستعمال الآلة الحاسبة البيانية أو الجداول ومقارنتها مع إجاباتهم التقديرية.

المتعلمون اللُّغويون قسّم الطلبة إلى مجموعات ثلاثية أو رباعية، واطلب إليهم تكوين سؤال مسحي إجابته نعم/ لا. اكتب هذه الأسئلة على السبورة بأرقام متسلسلة، واطلب إلى طلبة الفصل جميعهم الإجابة عليها. وضع إشارة (✓) إذا كانت إجابة الطالب نعم، وضع إشارة (X) إذا كانت إجابته لا، وبعد الانتهاء من الإجابات، اسأل كل مجموعة عن توقعاتها لنسبة الذي قالوا: نعم، لكل سؤال. فمثلاً قد تخمّن إحدى المجموعات أن 70% من الطلبة يفضلون أن يكون الدوام المدرسي 4 أيام أسبوعيًّا. اكتب نتائج الإجابات عن كل سؤال على السبورة، وناقشها مع الطلبة.



البديل 2 دون المتوسط دون

قسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وزوِّد كلَّ مجموعة بمكعّبين مرقّمين، واطلب إليهم تكوين توزيع احتمالي للمتغير العشوائي (X) الذي يدل على مجموع العددين الظاهرين إذا ألقي المكعبين المرقّمين، وإيجاد القيمة المتوقّعة لمجموع العددين.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

زوِّد الطلبة بمجموعتين من البيانات (أطوال طلبة فصلين دراسيين مختلفين)، واطلب إليهم إنشاء الصندوق وطرفيه لكل توزيع؛ لوصف شكله، ثم تلخيص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري أو المقاييس الخمسة، وأخيرًا اطلب إليهم مقارنة مواقع البيانات في كل من مجموعتي البيانات.

الفصل 6

التركيز في المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 6

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- حساب الوسط والوسيط.
- إيجاد الاحتمالات.
- تمثيل النقاط بيانيًّا.
- تحديد فيما إذا كانت العلاقات خطية أو غير خطية.

الفصل 6

- تعيين أشكال التوزيع.
- تكوين توزيعات احتمالية بما فيها توزيعات ذات الحدين.
- إيجاد احتمالات لتوزيعات طبيعية، وإيجاد مشاهدات أُعطيت احتمالاتها.

ما بعد الفصل 6

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- إيجاد نسب العينات لتقدير نسب مجتمع الدراسة.

نظرة على الدروس

6-1 الإحصاء الوصفي

توجد أشكال مختلفة لتوزيعات المتغيرات، فالتوزيع ذو الالتواء السالب يمتد أحد طرفيه جهة اليسار، والتوزيع ذو الالتواء الموجب يمتد أحد طرفيه جهة اليمين، والتوزيع المتماثل، تتوزع المشاهدات فيه بالتساوي على طرفي الوسط.

إذا كان التوزيع متماثلًا، يُستعمل كل من الوسط والانحراف المعياري كملخصات إحصائية لوصف التوزيع. وأما إذا كان التوزيع ملتويًا، فتستعمل المقاييس الخمسة كملخصات إحصائية، والتي تصف التوزيع بشكل أدق.

من المفيد استعمال الصندوق وطرفيه؛ لعرض قيم المقاييس الخمسة كأداة للمقارنة بين توزيعين.

يوجد للتوزيعات ثنائية المنوال تجمعين من البيانات.

الإحصاء والتوزيعات الاحتمالية

6-2 التوزيعات الاحتمالية

تُحدَّد قيم التوزيعات الاحتمالية حسب فرصة ظهور قيم المتغير العشوائي، وقد تكون المتغيرات العشوائية منفصلة أو متصلة.

ولإيجاد وسط التوزيع الإحتمالي المنفصل، اضرب كل قيمة من قيم المتغير العشوائي باحتمال وقوعه، ثم أوجد مجموع نواتج الضرب.

ولإيجاد تباين توزيع احتمالي، اطرح وسط التوزيع من كل مشاهدة من المشاهدات، ثم ربع ناتج الطرح واضرب كل مربع فرق بالاحتمال المناظر له، ثم أوجد مجموع نواتج الضرب.

ولإيجاد الانحراف المعياري لتوزيع احتمالي، أوجد الجذر التربيعي للتباين.

القيمة المتوقعة (التوقع) $E(X)$ لتوزيع احتمالي تساوي وسط المتغير العشوائي.

وللتجربة ذات الحدين نتيجتان (نجاح)p، (فشل) q . لإيجاد احتمال النجاح X من المرات في n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات حدين، استعمل صيغة احتمال توزيع ذي حدين:

$$P(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

ويكون وسط هذا التوزيع np، وتباينه npq.

6-3 التوزيع الطبيعي

خصائص منحنى التوزيع الطبيعي

1) يتخذ شكل الجرس.

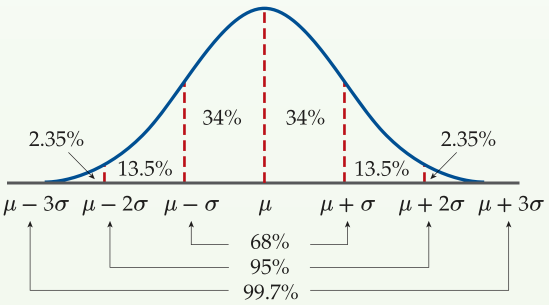
2) يتساوى فيه الوسط، والوسيط، والمنوال وتقع جميعها في المركز.

3) متصل.

4) يقترب من المحور x، ولكنه لا يمسه.

5) المساحة الكلية تحته تساوي 1 أو 100%.

يُعرِّف القانون التجريبي المساحة تحت المنحنى حسب بُعد الانحرافات المعيارية عن الوسط.



وهذا يعني أنه يمكن استعمال قيم z المعيارية للمقارنة بين المتغيرات والمقاييس الإحصائية. وعند تحديد قيمة z، يمكن إيجاد الاحتمالات المرتبطة بها.

الفصل 6 ملاحظات

الفصل 6 الإحصاء والتوزيعات الاحتمالية
Statistics and Probability Distributions

فيما سبق

درست مقاييس النزعة المركزية، والتشتت .

والآن

الأفكار العامة

- أستعملُ شكل التوزيع؛ لاختيار المقاييس الإحصائية المناسبة لوصف التوزيع.
- أكوِّنُ التوزيعات الاحتمالية، وأستعملها.

لماذا ؟

السكان غالبًا ما يستعمل الإحصاء، والتمثيل البياني لوصف التعداد السكاني، أو الإحصاءات العامة. فمثلًا، بلغ عدد سكان مملكة البحرين عام 1431هـ - 2010م 1100000 نسمة.

قراءة سابقة اقرأ عناوين الدروس والمفردات الموجودة في هذا الفصل، واستعملها للتنبُّؤ بما سوف تتعلمه في هذا الفصل.

انظر أعمال الطلبة

مشروع الفصل

عمل جاد

يستعمل الطلبة ما تعلموه حول الإحصاء الوصفي والتوزيعات الاحتمالية؛ لتقويم دراستهم ونشاطاتهم خارج أوقات الدوام المدرسي.

اطلب إلى كل طالب:

- تسجيل عدد أفراد (20) أسرةً من أقاربه.
- تكوين جدول تكراري يمثِّل هذه البيانات.
- إنشاء مدرَّج تكراري، واستعماله لوصف شكل التوزيع.
- تلخيص تمركز البيانات وتشتُّتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري أو المقاييس الخمسة.
- إيجاد قيم المتغير العشوائي X الذي يدل على عدد أفراد أسرة يتم اختيارها عشوائيًا من ألـ (20) أسرة، وتحديد نوع المتغير العشوائي من حيث كونه متصلًا أو منفصلًا.

وأخيرًا اطلب إلى كل طالب مقارنة ما توصَّل إليه من نتائج بنتائج زميل آخر له.

المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: المقياس الإحصائي المقاوم أقل تأثرًا بالقيم المتطرفة من المقياس غير المقاوم.

مثال: الوسط والوسيط للمشاهدات [11, 13, 15, 17, 19] هو نفسه (15).
الوسط والوسيط للمشاهدات [11, 13, 15, 17, 99] هما 31 ، 15 على الترتيب.

لاحظ أن الوسط تأثر كثيرًا بالقيمةالمتطرفة 99.

سؤال: لماذا يُنصح باستعمال الوسيط كمقياس للنزعة المركزية؛ لوصف البيانات ذات التوزيع الملتوي؟ القيم المتطرفة تقع في نهاية التوزيع الملتوي، وبالتالي هي أقل تأثيرًا على الوسيط منها على الوسط.

قراءة سابقة

شجع الطلبة على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة للفصل السادس

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

1) ${}_5P_2$ **20**
2) ${}_9P_4$ **3024**
3) ${}_8C_3$ **56**
4) ${}_6C_0$ **1**
5) ${}_5C_5$ **1**
6) ${}_8C_7$ **8**

7) **إنترنت:** يُبيّن الجدول أدناه عدد الساعات التي قضاها 18 طالبًا في تصفح الإنترنت في أحد الأسابيع. (مهارة سابقة)

عدد الساعات التي قضاها الطلبة في تصفح الإنترنت

7.5	2.5	8	1	3.5	2
1.5	7.5	3.5	5.5	4	10
6.5	8	5	3.5	11	4.5

a) مثّل هذه البيانات في مدرج تكراري.

b) أيهما أكبر، عدد الطلبة الذين يقضون أكثر من 6h في تصفح الإنترنت أم الذين يقضون أقل من 3h؟

للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

اكتب مفكوك كلٍّ من التعابير الآتية: (مهارة سابقة)

8) $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})^5$ **للسؤالين 8,9 انظر الهامش**

9) $(a-0.15)^4$

10) إذا كان احتمال نجاح طالب في اختبار 0.4، فما احتمال رسوبه في هذا الاختبار؟ (مهارة سابقة) **0.6**

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المفردات العامة

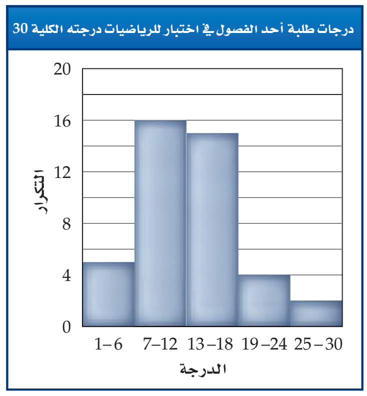
المئين	ص 262	percentile
المتغير العشوائي	ص 268	random variable
التوزيع الاحتمالي	ص 269	probability distribution
توزيع ذات الحدين	ص 273	binomial distribution
التوزيع الطبيعي	ص 277	normal distribution
قيمة z	ص 279	z-value

مراجعة المفردات

الإحصاء (Statistics) علم يعتمد على جمع البيانات، وتحليلها، وتفسيرها، وعرضها.

المدرج التكراري (Histogram) تمثيل بياني على شكل مستطيلات متساوية العرض لبيانات عددية.

مثال:



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعدك العبارة "إذا...فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر معالجة لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في ما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين

فاختر أحد المصادر الآتية:

- **دليل المعلم** مشروع الفصل، ص (256)
- **زيارة الموقع** www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،

فاختر أحد المصدرين الآتيين:

- **مصادر الفصل** دليل الدراسة والمعالجة
- **زيارة الموقع** www.obeikaneducation.com

إجابات:

8) 1

9) $a^4-0.6a^3+0.135a^2-0.0135a+0.00050625$

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلبة عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل 6؛ لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

6-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-1

إيجاد مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت.

الدرس 6-1

تعرّف أشكال التوزيعات؛ لاختيار المقاييس الإحصائية المناسبة.

المقارنة بين مجموعتين من البيانات باستعمال مقاييس الموقع.

ما بعد الدرس 6-1

دراسة التوزيعات الاحتمالية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة «لماذا؟».

اسأل:

- عرّف كلاً من الوسط والوسيط. الوسط هو مجموع القيم في مجموعة البيانات مقسومًا على عددها. الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة البيانات عندما ترتب البيانات تصاعديًّا أو تنازليًّا.
- ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لوصف تحصيل طالب درجاته متقاربة؟ الوسط؛ لأنه لا يوجد درجات متطرفة.
- يسجل لاعب كرة سلة أعدادًا متقاربة من النقاط في معظم المباريات التي خاضها، ولكنه في إحدى المباريات سجل ضعف النقاط التي يسجلها عادة في المباراة الواحدة. ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لوصف معدّل تسجيل هذا اللاعب للنقاط؟ الوسيط؛ لأنه يوجد درجة متطرفة.

6-1 الإحصاء الوصفي
Descriptive Statistics

فيما سبق

درست مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أتعرف أشكال التوزيعات؛ لأختار المقاييس الإحصائية المناسبة.
- أقارن بين مجموعتين من البيانات باستعمال مقاييس الموقع.

المفردات الأساسية

وحيدة المتغير
univariate

التوزيع ذو الالتواء السالب
negatively skewed distribution

التوزيع المتماثل
symmetrical distribution

التوزيع ذو الالتواء الموجب
positively skewed distribution

إحصائي مقاوم
resistant statistic

تجمع
cluster

التوزيع ثنائي المنوال
bimodal distribution

المئين
percentile

تمثيل المئين بيانيًا
percentile graph

www.obeikaneducation.com

لماذا ؟

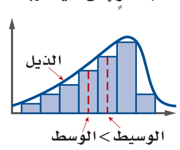
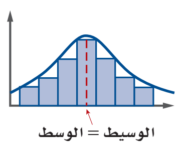
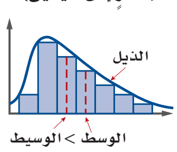
لوصف توزيع درجات طلبته؛ حسب معلم الرياضيات كلًّا من الوسط والوسيط، فوجد أنهما 82 ,77 على الترتيب. وبالرغم من إمكانية استعمال أي من هذين المقياسين لوصف تمركز الدرجات، إلا أن التمثيل البياني للدرجات هو الوحيد الذي يُبيِّن الأنسب منهما.

وصف التوزيعات تعلمت وصف التوزيعات لبيانات عددية في متغير واحد (**وحيدة المتغير**)؛ وذلك بحساب كلٍّ مما يأتي:

- مقاييس النزعة المركزية (الوسط ، الوسيط ، المنوال)
- مقاييس التشتت (المدى، الانحراف المعياري ، الربيعات)

ولتحديد المقياسين المناسبين لوصف النزعة المركزية، والتشتت لمجموعة بيانات، عليك التعرف على شكل التوزيع. وفيما يأتي أشكال توزيعات شائعة الاستعمال في الإحصاء.

مفهوم أساسي **التوزيعات المتماثلة والتوزيعات الملتوية**

توزيع ذو التواء سالب (ملتوٍ إلى اليسار)	توزيع متماثل	توزيع ذو التواء موجب (ملتوٍ إلى اليمين)
		
في **التوزيع ذي الالتواء السالب**، يكون الوسيط أكبر من الوسط، وتكون معظم البيانات جهة اليمين، ويمتد الذيل لليسار.	في **التوزيع المتماثل**، تتوزع البيانات على جانبي الوسط، ويكون الوسط والوسيط متساويين تقريبًا.	في **التوزيع ذي الالتواء الموجب**، يكون الوسيط أقل من الوسط، وتكون معظم البيانات جهة اليسار، ويمتد الذيل لليمين.

إذا وُجد تماثُلٌ للتوزيع بدرجة معقولة، يكون الوسط والوسيط متقاربين. وأما في التوزيعات الملتوية، فيكون الوسط أقرب إلى ذيل التوزيع من الوسيط. وتعمل القيم الكبيرة أو الصغيرة في مجموعة البيانات التي تُسمى قيمًا متطرفة، على سحب الوسط جهة ذيل التوزيع، ويكون أثر هذه القيم أقل على الوسيط. لهذا، يُسمى الوسط إحصائيًّا غير مقاوم ويُسمى الوسيط **إحصائيًّا مقاومًا**.

بما أن الانحراف المعياري قياس لتشتت التوزيع، وهو مقدار بُعد القيم عن الوسط، فهو مقياس غير مقاوِمٍ لأثر القيم المتطرفة. وهذا يقودنا إلى الإرشادات الآتية حول اختيار الملخص الإحصائي لوصف التوزيع.

تنبيه!

اتجاه الالتواء ذيل التوزيع يدل على اتجاه التواء التوزيع، وليس على القيمة العظمى.

مفهوم أساسي **اختيار الإحصائيات المناسبة**

عند اختيار مقاييس النزعة المركزية و التشتت لوصف التوزيع، تعرف أولًا على شكل التوزيع.

- إذا كان متماثلًا، ولا يتضمن قيمًا متطرفة، فاستعمل الوسط والانحراف المعياري.
- إذا كان ملتويًا، أو يتضمن قيمًا متطرفة قوية، فاستعمل المقاييس الخمسة (القيمة الصغرى، الرُّبيع 1، الوسيط ، الرُّبيع 3 ، القيمة العظمى) التي تعطي غالبًا وصفًا جيدًا للتوزيع.

مصادر الدرس 6-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (261)	• تنويع التعليم ، ص (261)	• تنويع التعليم ، ص (267)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (30) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (30) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (30) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

مراجعة المفردات

الرُّبيعات
الرُّبيعات هي قيم تقسّم البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية، الرُّبيع 1 (Q_1) هو الرُّبيع الأدنى، والرُّبيع 2 (Q_2) هو الوسيط، والرُّبيع 3 (Q_3) هو الرُّبيع الأعلى.

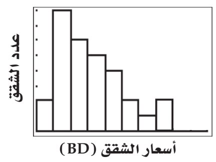
عند تعيين شكل التوزيع، ركِّز على القيم العظمى الأساسية (التي لها أكبر تكرار) في التمثيل البياني.

مثال 1 من واقع الحياة — التوزيع الملتوي

شقق سكنية: يوضح الجدول أدناه أسعار تأجير 30 شقة في مبنى سكني.

أسعار الشقق (BD)									
266	215	238	225	212	213	209	217	234	219
220	245	223	212	227	249	231	270	218	235
212	242	221	248	228	250	257	205	233	275

a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.



يُبيّن المدرج التكراري أعلاه أن التوزيع ذو التواء موجب.

b) لخِّص تمركز، وتشتت البيانات مستعملًا الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرِّر إجابتك.

بما أن التوزيع ملتوٍ، فاستعمل المقاييس الخمسة؛ لتلخيص تمركز وتشتت البيانات.

لإيجاد المقاييس الخمسة رتّب القيم تصاعديًا أو تنازليًا. والجدول أدناه يُبيّن الترتيب التصاعدي للقيم.

أسعار الشقق (BD)									
205	209	212	212	212	213	215	217	218	219
220	221	223	225	227	228	231	233	234	235
238	242	245	248	249	250	257	266	270	275

الوسيط

إذن، القيمة الصغرى 205 ، والرُّبيع 1 (Q_1) 217، والوسيط 227.5 ، والرُّبيع 3 (Q_3) 245 ، والقيمة العظمى 275 .

تدل المقاييس الخمسة على أنه عندما تتراوح الأسعار بين BD 205 ، BD 275 ، يكون الوسيط BD 227.5 ، ونصف الأسعار تقع بين BD 217 ، BD 245 .

قراءة الرياضيات

Q_3 ، Q_1
Q_1 هو اختصار لكلمة quartile 1 باللغة الإنجليزية، أي الرُّبيع 1.
وبالمثل Q_3 هو اختصار لكلمة quartile 3 أي الرُّبيع 3 .

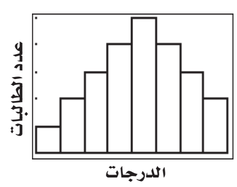
تأكد

1) يُمثّل الجدول أدناه درجات طالبات فصل دراسي في مادة الأحياء.

درجات طالبات فصل دراسي في مادة الأحياء											
87	75	80	67	84	72	74	96	91	89	76	86
98	63	76	80	83	68	78	94	88	80	73	92

A) استعمل المدرج التكراري المجاور؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.
التوزيع متماثل وله قيمة عظمى واحدة.

B) لخِّص تمركز، وتشتت البيانات باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرّر إجابتك.



1B) بما أن التوزيع متماثل فاستعمل الوسط والانحراف المعياري. الوسط هو 81.3% والانحراف المعياري 9.3% .

وصف التوزيعات

مثال 1 يُبيّن متى يكون مناسبًا استعمال الوسط أو الوسيط (للنزعة المركزية) والانحراف المعياري (للتشتت) أو استعمال المقاييس الخمسة (للتوزيع الاحتمالي).

مثال 2 يبيّن كيفية تلخيص بيانات ثنائية المنوال.

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال التمثيل بالصندوق وطرفيه لدراسة البيانات ووصف شكل توزيعها.

التقويم التكويني

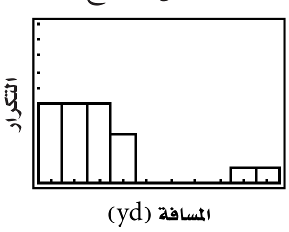
استعمل تدريبات «تأكد» بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **كرة القدم:** يوضح الجدول أدناه المسافات التي قطعتها كرة قدم بعد ضربها من حارس مرمى بشكل حرّ 20 مرّة في إحدى الفرق:

المسافة المقطوعة (yd)				
190	190	190	185	185
200	200	200	200	200
210	210	210	210	210
280	270	215	215	215

a) استعمل المدرج التكراري أدناه لوصف شكل التوزيع للجدول.



التوزيع ذو إلتواء موجب، معظم الضربات تتراوح بين 185 yd و 215 yd وهناك أعداد قلية من الركلات تزيد مسافتها عن ذلك.

b) لخص تمركز، وتشتت البيانات باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرر إجابتك.
المقاييس الخمسة: الوسيط 205 والمدى المئيني من 195 yd إلى 212.5 yd .

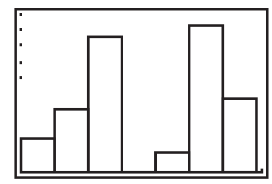
مثال إضافي

2 **هواتف محمولة:** سُئل 24 موظفًا يعملون في وظيفتين مختلفتين عن المبالغ التي يدفعونها شهريًّا لقاء مكالماتهم فكانت كما في الجدول أدناه.

تكاليف استعمال الهاتف (BD)				
55	55	55	50	50
60	60	60	60	60
95	95	90	70	65
100	100	100	100	100
	105	105	105	100

a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.

عدد الموظفين



التكاليف (BD)

التوزيع ثنائي المنوال.

b) لخِّص تمركز، وتشتت البيانات باستعمال الوسط و الانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرر إجابتك. إجابة ممكنة: المجموعة الدنيا من البيانات ذات التواء موجب. لذا، فالمقاييس الخمسة تبين أن مدى التكاليف BD 50 إلى BD 70 والوسيط BD 60، ونصف التكاليف بين BD 55 و BD 60. بما أن المجموعة العليا متماثلة تقريبًا، فإن الوسط BD 100 تقريبًا، والانحراف المعياري BD 4.50 تقريبًا. يمكن استعمالها لوصف تمركز البيانات وتشتتها على الترتيب.

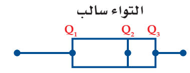
ليس من الضروري أن يكون التوزيع متماثلًا أو ملتويًّا، فقد يتضمن مجموعات جزئية أو **تجمعات** . فإذا وُجدت فجوة في منتصف التوزيع، تنتج مجموعتان منفصلتان من البيانات. ويكون لهذا التوزيع منوالان؛ أي اثنتان من القيم العظمى، ويسمى **توزيعًا ثنائي المنوال** .

غالبًا ما يدل التوزيع الثنائي المنوال على عينة من البيانات تأتي من توزيعين متداخلين أو أكثر.

يمكنك استعمال التمثيل بالصندوق وطرفيه؛ لدراسة البيانات، وتعيين شكل توزيعها حيث يوزِّع التمثيل بالصندوق وطرفيه البيانات إلى أربعة أجزاء، ومع أن أطوال هذه الأجزاء قد تكون غير متساوية، إلّا أن كل جزء منها يمثل ربع البيانات. ولاختبار التماثل أو الالتواء بهذه الطريقة، عليك الأخذ بعين الاعتبار موضع الخط الذي يُمثّل الوسيط وطول كل من الطرفين.

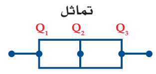
مفهوم أساسي — استعمال الصندوق وطرفيه للتماثل والالتواء

التواء سالب



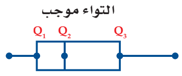
الطرف الأيسر أطول من الطرف الأيمن، والخط الذي يُمثّل الوسيط Q_2 أقرب إلى Q_3 منه إلى Q_1 .

تماثل



الطرفان لهما الطول نفسه، والخط الذي يُمثّل الوسيط Q_2 يقع تمامًا بين Q_1 و Q_3 .

التواء موجب



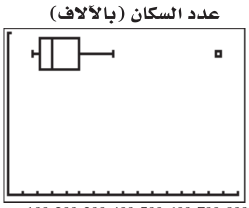
الطرف الأيمن أطول من الطرف الأيسر، والخط الذي يُمثّل الوسيط Q_2 أقرب إلى Q_1 منه إلى Q_3 .

مثال 2 وصف التوزيع باستعمال الصندوق وطرفيه

سكان: يُبيّن الجدول أدناه أعداد سكان 15 مدينة بالآلاف في بلد ما.

عدد السكان (بالآلاف)				
186	89	303	95	151
118	152	109	137	362
248	736	139	226	102

عدد السكان (بالآلاف)



a) استعمل الصندوق وطرفيه المجاور؛ لوصف شكل التوزيع.

بما أن الطرف الأيمن أطول من الطرف الأيسر، والخط الذي يُمثّل الوسيط أقرب إلى Q_1 منه إلى Q_3 ، فإن للتوزيع التواءً موجبًا. لاحظ أن القيمة 736 تُعدّ قيمة متطرفة في التوزيع.

b) لخِّص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرِّر إجابتك.

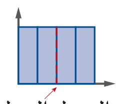
بما أن التوزيع ملتوٍ، فاستعمل المقاييس الخمسة. ولإيجادها رتّب القيم تصاعديًّا أو تنازليًّا، والجدول المجاور يبيِّن الترتيب التصاعدي للقيم.

عدد السكان (بالآلاف)				
89	95	102	109	118
137	139	151	152	186
226	248	303	362	736

المقاييس الخمسة هي: القيمة الصغرى **89**، و Q_1 يساوي **109**، والوسيط **151**، و Q_3 يساوي **248**، والقيمة العظمى **736** .
حيث تشير هذه المقاييس إلى أن أعداد السكان تتراوح بين 89000 و 736000 نسمة، وأن الوسيط هو 151000 نسمة .
والرُّبيعين الثالث والأول هما: 248000 و 109000 على الترتيب، والمدى الرُّبيعي هو 139000 نسمة .

إرشادات للدراسة

توزيع منتظم يوجد نوع آخر من التوزيعات يُسمى بالتوزيع المنتظم، ويكون فيه للقيم جميعها التكرار نفسه كما في الشكل أدناه.



إرشادات للدراسة

إذا كان Q_3-Q_2 أكبر من Q_2-Q_1 ، يكون للتوزيع التواء موجب، أي يكون الطرف الأيمن للصندوق أطول من الطرف الأيسر. وإذا كان Q_2-Q_1 أكبر من Q_3-Q_2 ، يكون للتوزيع التواء سالب، أي يكون الطرف الأيسر للصندوق أطول من الطرف الأيمن.

مراجعة المفردات

المدى الرُّبيعي الفرق بين الرُّبيع الأعلى (Q_3)، والرُّبيع الأدنى (Q_1).

إرشادات للمعلم الجديد

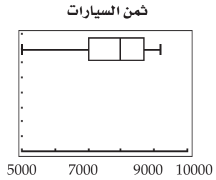
التوزيعات الملتوية قد يخلط بعض الطلبة بين التوزيعات ذات الالتواء الموجب والسالب، فذكرهم بأن التوزيع ذي الالتواء السالب أو الملتو إلى اليسار ينحرف من جهة اليسار وليس باتجاه اليسار.

التركيز في المحتوى الرياضي

الالتواء في التوزيع ذي الالتواء السالب، يكون الوسط أقل من الوسيط وهذا أقل من المنوال: الوسط < الوسيط < المنوال. وفي التوزيع ذي الالتواء الموجب، يكون الوسط أكبر من الوسيط وهذا أكبر من المنوال: المنوال < الوسيط < الوسط. أما التوزيعات المتماثلة، فتتجمع المقاييس الثلاثة عند بعضها.

تأكد

2) **سيارات:** استورد تاجر مجموعة سيارات منها 12 سيارة مستعملة من النوع نفسه، والشكل نفسه، وسنة الصنع نفسها، ويوضح الجدول أدناه أثمانها بالدينار.



ثمن السيارات					
9200	8200	9000	8500	8900	8000
7800	7500	6500	5000	6400	8000

A) استعمل الصندوق وطرفيه أعلاه؛ لوصف شكل التوزيع.

B) لخِّص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة.

2A) الطرف الأيسر أطول من الطرف الأيمن، والوسيط أقرب إلى Q_3. لذلك التوزيع له التواء سالب.

2B) بما أن للتوزيع التواء سالب؛ فإننا نستعمل المقاييس الخمسة.
القيمة الصغرى= BD 5000
القيمة العظمى= BD 9200
Q_1 = BD 7000
Q_2 = BD 8000
Q_3 = BD 8700
وهذا يدل على أن أثمان السيارات تراوحت بين BD 5000 و BD 9200، وكان وسيطها BD 8000، وكان نصف الأثمان يقع بين BD 7000 و BD 8700.

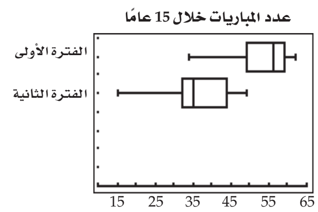
مقاييس الموقع (الترتيب) تحدّد الرُّبيعات المعطاة بالمقاييس الخمسة مواقع القيم في التوزيع. لهذا يكون التمثيل بالصندوق وطرفيه أكثر فائدة؛ لمقارنة توزيعين أو أكثر، وذلك بتمثيلهما أحدهما فوق الآخر على خط الأعداد.

مثال 3 مقارنة مواقع بيانات باستعمال الصندوق وطرفيه

كرة سلة: يوضح الجدولان أدناه عدد المباريات التي ربحها أحد فرق كرة السلة خلال فترتين مختلفتين، مدة كلٍّ منهما 15 عامًا. استعمل الصندوقين وطرفيهما أدناه، والمُمثّلين أحدهما فوق الآخر على خط الأعداد؛ للمقارنة بين التوزيعين.

الفترة الأولى خلال 15 عامًا				
60	57	59	52	49
58	59	62	54	60
56	44	34	48	54

الفترة الثانية خلال 15 عامًا				
15	33	35	32	48
49	35	36	19	36
24	33	45	36	44



مقارنة مقاييس الموقع

الوسيط لعدد المباريات التي ربحها الفريق في الفترة الأولى خلال 15 عامًا أكبر من تلك التي ربحها في الفترة الثانية، والرُّبيع 1 من الفترة الأولى يساوي تقريبًا القيمة العظمى للفترة الثانية، وهذا يعني أن 75% من قيم البيانات للفترة الأولى أكبر من أي قيمة في الفترة الثانية. لذا يمكننا القول بأن الفريق كان أكثر نجاحًا في الفترة الأولى من الفترة الثانية.

مقارنة التشتت

تشتت البيانات الممثلة بالصندوقين متشابهٌ تقريبًا في التوزيعين، لذا، فإن التباين في عدد المباريات التي ربحها الفريق في الفترتين تبدو نفسها تقريبًا.

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية اكتب البيانات الواردة في مثال 1، ص (259) على جدول إلكتروني، ثم اطلب إلى الطلبة استعمال دوال إحصائية لحساب الوسط والوسيط لمجموعة البيانات، ثم كلفهم بملاحظة أثر إضافة قيم متطرفة على الوسط والوسيط، وبعد مراجعة نتائجهم أكد على مفهوم الوسيط باعتباره إحصائي مقاوم للقيم المتطرفة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الطبيعيون اطلب إلى الطلبة تسجيل أعداد السيارات التي يرونها يوميًا أثناء القدوم للمدرسة، وبعد جمع بيانات خلال 14 يوماً، كلفهم بعمل ملخص عن هذه البيانات على أن تتضمن ما يأتي جدولًا تكراريًّا، تمثيل البيانات، ووصفها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة حسب شكل التوزيع.

مقاييس الموقع

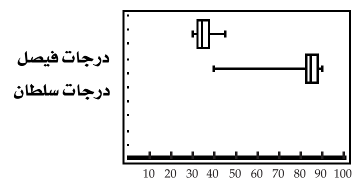
مثال 3 يُبيِّن كيفية استعمال الصندوق وطرفيه للمقارنة بين البيانات في توزيعين.

مثال إضافي

3 **ألعاب:** يوضّح الجدولان أدناه الدرجات التي كسبها كلٌّ من فيصل وسلطان في إحدى ألعاب الحاسوب الجديدة.
استعمل الصندوقين وطرفيهما أدناه، والممثلين أحدهما فوق الآخر على خط الأعداد؛ للمقارنة بين التوزيعين.

درجات فيصل					
35	35	34	32	30	30
45	40	38	38	36	35

درجات سلطان					
84	82	82	80	60	40
89	88	87	85	85	84



الوسيط لدرجات سلطان 84 أكبر من الوسيط لدرجات فيصل الذي قيمته 35. الرُّبيع الأول في درجات سلطان 81 وهو أكبر من الرُّبيع الثالث لفيصل الذي قيمته 38 مما يجعل الفرق بين متوسطي أدائهما جوهريًّا. توزيع درجات سلطان ملتوٍ التواءً سالبًا بينما توزيع درجات فيصل ملتوٍ التواءً موجبًا.

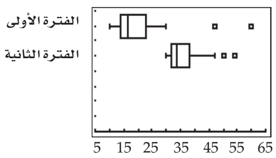
تأكد

3) **كرة قدم:** يوضِّح الجدولان أدناه عدد المباريات التي ربحها أحد فرق كرة القدم خلال فترتين مختلفتين، مدة كلٍّ منهما 20 عامًا. استعمل الصندوقين وطرفيهما أدناه، والمُمثَّلين أحدهما فوق الآخر على خط الأعداد؛ للمقارنة بين التوزيعين. انظر الهامش

الفترة الأولى 20 عامًا				
16	30	13	10	19
60	12	14	18	14
15	14	47	14	30
17	26	18	20	12

الفترة الثانية 20 عامًا				
34	31	47	32	40
46	30	35	33	34
32	33	31	54	32
35	50	34	31	36

عدد المباريات خلال 20 عامًا



إرشادات للدراسة

أجزاء متساوية الرُّبيعات والمئينات نوعان من التجزئة (أعداد تقسم مجموعة مرتبة إلى مجموعات جزئية متساوية). تقسم الأعشار مجموعة قيم إلى عشر مجموعات جزئية متساوية.

تنبيه!

النسبة المئوية والمئين النسبة المئوية ليست نفسها المئين. إذا أجاب طالب على 85 إجابة صحيحة من 100 إجابة، فيحصل على نسبة مئوية 85 ، وهذا لا يدل على أن هذه الدرجة عالية، أو متدنية بالنسبة لباقي درجات الصف.

إضافة إلى الرُّبيعات، يمكنك استعمال المئينات لتدل على الموقع النسبي لقيمة في التوزيع. المئينات ومفردها **المئين** تقسم التوزيع إلى 100 مجموعة يُرمز لها بالرمز $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{99}$. ويُعرف المئين النوني P_n بأنه القيمة التي يكون $n\%$ من القيم أقل منها، و $(100 - n)\%$ من القيم أكبر منها، أو يساويها. أكبر مئين يمكن أن تأخذه مجموعة بيانات هو المئين 99. ويتم **تمثيل المئين بيانيًّا** كما يُمثِّل المنحنى التكراري التراكمي، إلا أن التناسب يُحسب كنسبة مئوية .

يمكنك استعمال المنحنى المئيني لتحديد الرتبة المئينية لقيمة معطاة.

مثال 4 رسم المنحنى المئيني واستعماله

معدل تراكمي: يُبيِّن الجدول المجاور التوزيع التكراري لـ 200 طالب في إحدى الكليات الجامعية وفق معدلاتهم التراكمية.

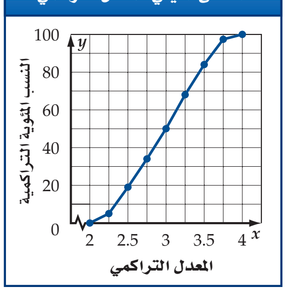
f	الفئات	f	الفئات
36	3.00 –	10	2.00 –
32	3.25 –	28	2.25 –
26	3.50 –	30	2.50 –
6	3.75 – 4.00	32	2.75 –

a) أنشئ المنحنى المئيني لهذه البيانات.

أولًا أوجد التكرار التراكمي، ثم أوجد النسب المئوية التراكمية بتحويل التكرار التراكمي إلى نسب مئوية.

النسب المئوية التراكمية	التكرار التراكمي	f	الفئات
$\frac{10}{200} = 5\%$	10	10	2.00 –
$\frac{38}{200} = 19\%$	$10 + 28 = 38$	28	2.25 –
34%	68	30	2.50 –
50%	100	32	2.75 –
68%	136	36	3.00 –
84%	168	32	3.25 –
97%	194	26	3.50 –
100%	200	6	3.75 – 4.00

المنحنى المئيني للمعدل التراكمي



إرشادات للدراسة

المنحنى المئيني لاحظ في مثال 4 الفرع a أنه عند رسم المنحنى المئيني، فإنا نبدأ من الحد الأدنى للفئة الأولى، ونعتبر أن التكرار التراكمي عنده يساوي صفرًا، ويرسم شكلًا متموّجًا للمنحنى قبل الحد الأدنى، حيث إن سلوك المنحنى ما قبل الحد الأدنى للفئة الأولى مجهول.

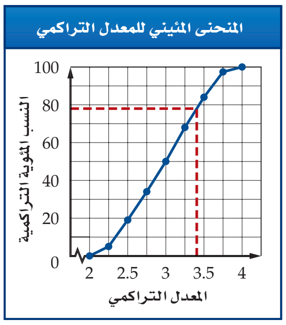
إجابة (تأكد):

إجابة ممكنة: الوسيط لعدد المباريات التي ربحها الفريق في الفترة الثانية خلال 20 عامًا أكبر من تلك التي ربحها في الفترة الأولى، والقيمة العظمى للفترة الأولى تساوي تقريبًا أصغر قيمة في بيانات الفترة الثانية، وهذا يعني أن 100% من قيم البيانات للفترة الثانية أكبر من أية قيمة في الفترة الأولى. لذا، يمكننا القول بأن الفريق كان أكثر نجاحًا في الفترة الثانية من الفترة الأولى. البيانات في كلا التوزيعين ملتوية التواءً موجبًا، ولكن تشتت البيانات بين Q_1 ، Q_3 في الفترة الثانية أقل من تلك في الفترة الأولى؛ لذلك تشتت البيانات في الفترة الأولى أكبر من الفترة الثانية.

أخيرًا، مثِّل البيانات على أن يمثِّل المحور x حدودَ الفئات، والمحور y النسبَ المئوية التراكمية كما في الشكل أعلاه .

b) قدِّر الرتبة المئينية للمعدل التراكمي 3.4 ضمن التوزيع، وفسِّر معناها.

عيِّن 3.4 على المحور x، وارسم خطًّا رأسيًّا حتى يلتقي المنحنى. تُمثِّل النقطة على المنحنى المئين 78 تقريبًا. لذا، فإن الطالب الذي معدله 3.4 ، أفضل من معدلات 78% من الطلبة في هذه الكلية.



تنبيه!

فهم المئينات عندما نقول: إن طول طالبة هو المئين 75، فإن ذلك لا يعني أن طولها 75% من طول محدد، بل يعني أنها أطول من 75% من طالبات الصف.

تأكد للفرعين A, B انظر الهامش

4) **أطوال:** يُبيِّن الجدول المجاور التوزيع التكراري لـ 60 طالبة وفق أطوالهن بالبوصة في أحد صفوف مدارس المرحلة الثانوية .

A) أنشئ المنحنى المئيني لهذه البيانات.

B) قدِّر الرتبة المئينية للطول 68 in ضمن التوزيع، وفسِّر معناها.

التكرار (f)	الفئات
11	58.5
15	61.5
15	64.5
12	67.5
7	70.5 – 73.5

تدرب وحل المسائل

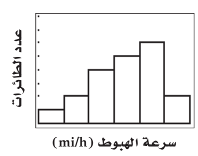
أجب عن الفرعين a, b لكلٍّ من التمرينين 1, 2 :

a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.

b) لخِّص تمركز البيانات، وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرِّر إجابتك. (المثالان 1,2)

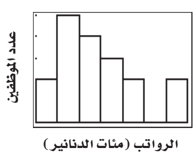
1) **ملاحة جوية :** يُبيِّن الجدول أدناه سرعة هبوط 20 طائرة تجارية في أحد المطارات، بالميل لكل ساعة. انظر هامش الصفحة التالية

سرعة الهبوط (mi/h)			
145	153	157	150
162	158	158	155
154	138	142	149
148	146	161	156
152	151	144	158



2) **رواتب:** يبدأ الراتب السنوي للموظف الجديد في إحدى الشركات ما بين BD 2000 و BD 9000 ، ويعتمد تحديد الراتب على الخبرة السابقة للموظف، والوظيفة التي سيشغلها. والجدول أدناه يُبيِّن رواتب مجموعة من الموظفين. انظر ملحق الإجابات

الرواتب (مئات الدنانير)			
59	34	40	24
54	65	52	48
32	85	26	68
45	33	42	36
		89	38



أجب عن الفرعين a, b في كلٍّ من التمرينين 3, 4 .

a) استعمل الصندوق وطرفيه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول أدناه.

b) لخِّص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرِّر إجابتك. (مثال 2)

مقاييس الموقع

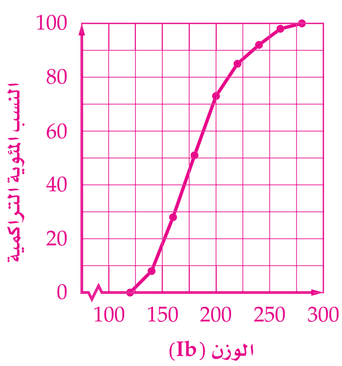
مثال 4 يُبيِّن كيفية إنشاء المنحنى المئيني واستعماله.

مثال إضافي

4 **كرة قدم:** يُبيِّن الجدول أدناه الوزن بالرطل (lb) للاعبي 11 فريق كرة قدم.

فئات الوزن	f
121 —	46
141 —	120
161 —	135
181 —	130
201 —	70
221 —	40
241 —	34
261–280	13

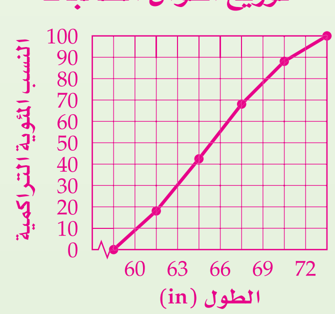
a) أنشئ المنحنى المئيني لهذه البيانات.



b) قدِّر الرتبة المئينية للوزن 210 lb ضمن التوزيع، وفسِّر معناها. المئين 79 تقريبًا ومعناه أن اللاعب الذي يزن 210 lb أثقل من 79% من اللاعبين الآخرين الذين أوزانهم ضمن التوزيع في الفرق.

إجابة (تأكد)

4A) **توزيع أطوال الطالبات**



4B) الطول 68 in يقابل المئين 70 تقريبًا. لذا، فالطالبة التي طولها 68 in أطول من 70% من طالبات الصف.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل للتمارين 7–1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

المقاييس الخمس عند إيجاد المقاييس الخمسة قد يجد بعض الطلبة صعوبة في التعامل مع البيانات ذات العدد الزوجي. اكتب الخطوات الآتية على السبورة.

1) رتب البيانات تصاعديًّا.

2) أوجد وسيط البيانات.

3) قسّم البيانات إلى مجموعتين متساويتين، وأعد خطوة 2 للمجموعتين؛ لإيجاد الرُّبيع 1 والرُّبيع 3 .

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية اطلب إلى الطلبة استعمال جدول إلكتروني؛ لإيجاد التكرار التراكمي في التمارين التي تتطلب إنشاء المنحنى المئيني.

إجابة:

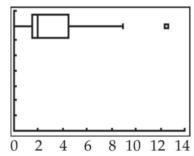
1a) التمثيل البياني ذو التواء سالب. أغلب سرعات الهبوط تكون بين 155 mi/h و 160 mi/h وعدد قليل أكبر من 160 mi/h أو أقل من 140 mi/h .

1b) إجابة ممكنة: بما أن التوزيع ملتوٍ، فإن المقاييس الخمس أفضل لوصف التوزيع. سرعات الهبوط تتراوح بين 138 mi/h و 162 mi/h . وسيط سرعات الهبوط هو 152.5 mi/h ونصف سرعات الهبوط بين 147 mi/h و 157.5 mi/h .

3 - 7) انظر ملحق الإجابات

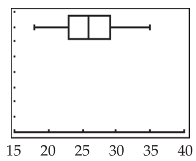
3) ألعاب فيديو: يُبيّن الجدول أدناه عدد الساعات التي يقضيها عدد من الشباب على ألعاب الفيديو أسبوعيًّا.

الزمن المستغرق على ألعاب الفيديو بالساعات					
1.5	2.5	0	4.5	12.5	1
2.5	4	2	8.5	1.5	9
1	0	2	1.5	5.5	2



4) درجات: يُبيّن الجدول أدناه درجات طلاب أحد الصفوف في أحد الأنشطة الصفية.

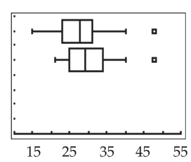
درجات الطلاب							
30	28	29	28	35	24	21	32
22	25	23	24	19	29	25	28
18	21	29	27	24	27	29	23



استعمل الصندوقين وطرفيهما المجاورين، والمُمثّلين أحدهما فوق الآخر على خط الأعداد للمقارنة بين التوزيعين في كلّ من التمرينين 5, 6 . (مثال 3)

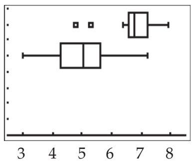
5) سيارات هجينة: يُبيّن الجدول أدناه استهلاك الوقود بالميل لكل جالون لِـ 18 سيارة هجينة صُنعت في كلٍّ من السنتين الأخيرتين.

السنة 1								
23	48	31	27	28	35	27	28	24
15	16	28	33	22	16	28	40	24
السنة 2								
29	34	25	33	26	35	27	40	27
22	48	29	34	21	24	29	21	34



6) هزات أرضية: يُبيّن الجدول أدناه قوة 18 هزة أرضية على مقياس ريختر وحدثت في كل من المنطقتين 1, 2.

المنطقة 1								
6.6	6.6	6.4	7.2	6.5	6.7	4.8	6.8	6.8
7.8	6.9	7.1	6.6	7.9	6.7	5.3	7.9	7.7
المنطقة 2								
5.4	5.4	5.6	4.4	4.2	4.3	5.2	4.5	4.7
6.6	4.9	7.2	5.2	4.1	6.0	3.0	6.6	3.5



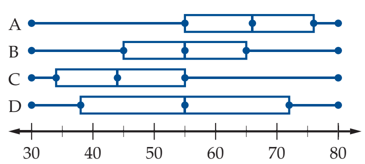
7) بيولوجيا بحرية: يُبيّن الجدول المجاور التوزيع التكراري لِـ 40 حيوانًا وفق أوزانهم بالرطل من إناث ثعالب الماء البالغة في أحد المحيطات. (مثال 4)

الفئات	f
– 40.5	4
– 45.5	5
– 50.5	7
– 55.5	12
– 60.5	9
70.5 – 65.5	3

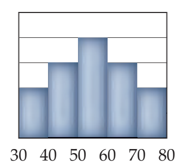
a) ارسم المنحنى المئيني لهذه البيانات.

b) قدّر الرُّتبة المئينية للوزن 55 lb ضمن التوزيع، وفسِّر معناها.

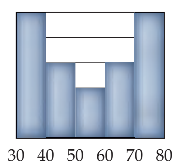
اكتب رمز الصندوق وطرفيه الذي يُمثّل كل مدرج تكراري مما يأتي:



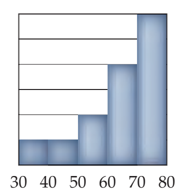
8) B



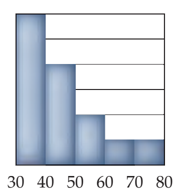
9) D



10) A



11) C



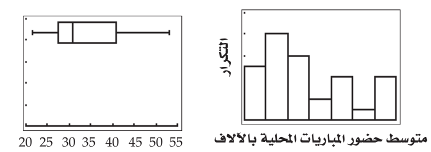
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	18، 30–20
ضمن المتوسط	12–8 زوجي، 15–13، 17، 18، 30–20
فوق المتوسط	30–8

12) حضور المباريات: يُبيّن الجدول أدناه متوسط حضور المباريات المحلية بالآلاف لمشجعي أحد أندية كرة القدم خلال الفترة من 1979 إلى 2008. **للفروع a, b, c, d انظر الهامش**

حضور المباريات المحلية					
22.5	27.9	25.2	30.2	32.4	31.7
24.8	27.0	32.7	30.0	28.0	27.5
27.8	23.5	29.7	29.8	21.6	23.0
42.7	40.8	38.0	40.7	36.5	31.9
53.1	52.7	51.9	50.5	47.8	42.8

a) استعمل المدرج التكراري، والصندوق وطرفيه أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول أعلاه.

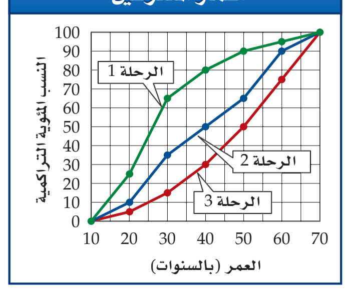


b) أوجد متوسط حضور المشجِّعين للمباريات المحلية خلال 30 عامًا.

c) أي التمثيلين أفضل لتقدير متوسط حضور المشجِّعين؟ فسّر إجابتك.

d) هل يمكن استعمال أي من التمثيلين في الفرع a؛ لوصف اتجاه أو نزعة حضور المباريات المحلية خلال هذه الفترة؟ برِّر إجابتك.

13) رحلة: يُبيّن التمثيل المئيني أدناه أعمار متنزِّهين في ثلاث مجموعات خرجت في رحلات مختلفة، مدة كل منها أسبوعان.



a) صِفْ شكل كل توزيع من هذه التوزيعات الثلاث.

b) أي الرحلات كان فيها أعمار المتنزِّهين أقل، وأيها أكبر؟ برِّر إجابتك. **للفرعين a, b انظر الهامش**

14) كرة سلة: يُبيّن الجدول أدناه أطوال الفريق الأول لكرة السلة في إحدى الدول، وأطوال فريق الشباب في الدولة نفسها في عام 2008 بالبوصة. **للفرعين a, b انظر الهامش**

أطوال الفريق الأول					
76	78	75	80	76	81
80	81	72	82	83	78
أطوال فريق الشباب					
77	73	68	69	73	69
76	71	78	72	74	72

a) أنشئ المنحنى المئيني لهذه البيانات.

b) قدِّر الرتبة المئينية للطول 75 in في كلٍّ من الفريق الأول، وفريق الشباب، وفسّر معناها.

c) على فرض أنه تم إخراج لاعب طوله 78 in من فريق الشباب، وحل مكانه لاعب آخر طوله 74 in، فقدِّر الرتبة المئينية لطول اللاعب الجديد في التوزيع الجديد. **78 تقريبًا**

يوجد مقياس آخر يسمى نصف المدى الرُّبيعي، ويُعطى بالصيغة $\frac{Q_1+Q_3}{2}$.
أوجد Q_1, Q_2, Q_3 **، ونصف المدى الرُّبيعي لكلٍّ من البيانات الآتية:**

15) **انظر الهامش**

0.12	0.25	0.19	0.38	0.28	0.16
0.41	0.29	0.32	0.11	0.04	0.25
0.29	0.07	0.26	0.09	0.31	0.23

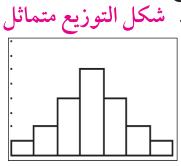
16) **127, 144.5, 191, 159**

112	101	138	200	176	199
105	127	146	128	116	154
167	202	191	143	205	130

17) **تمثيلات متعددة:** في التمرين الآتي سوف تستقصي أثر التحويلات الخطية على شكل البيانات وتمركزها وتشتتها. تأمل الجدول أدناه. **للفرع c-e انظر ملحق الإجابات**

45	31	59	37	52
39	65	42	48	23
56	49	14	53	40
28	44	77	32	68

a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول أعلاه. **شكل التوزيع متماثل.**



إجابات:

12

a) التوزيع ذي التواء موجب (لليمين).

b) إجابة ممكنة: اجمع أعداد الحضور الواردة في الجدول، ثم اقسم الناتج على 30؛ $1024.71 \div 30 = 34.157$ إذن، متوسط عدد حضور المشجعين للمباريات المحلية خلال 30 عامًا هو 34157 شخصًا تقريبًا.

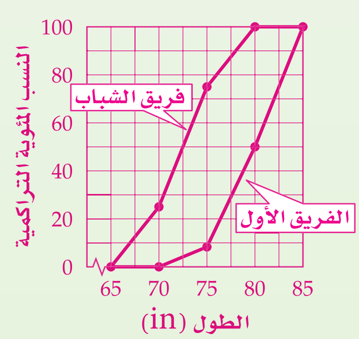
c) الصندوق وطرفيه، إجابة ممكنة: بما أن التوزيع ملتو، فإن الوسيط أفضل مقياس لتمركز البيانات، ويمكن الإشارة إليه بسهولة من خلال شكل الصندوق وطرفيه وهو أكبر بقليل من 30000.

d) لا؛ إجابة ممكنة: بما أن المدرج التكراري يعرض تكرار القيم فقط والصندوق وطرفيه يعرض النسبة المئوية للقيم التي تقع ضمن فترة معلومة فقط، لا يوجد طريقة لتحديد اتجاه أو نزعة الحضور خلال هذه الفترة باستعمال أي من هذين التمثيلين.

13a) التوزيع في الرحلة 1 ذو التواء موجب، والتوزيع في الرحلة 2 متماثل تقريباً أما التوزيع في الرحلة 3 فهو ذو التواء سالب.

13b) المنحنى المئيني يرتفع بحدة عند بدايته للرحلة 1، لذلك، فإن أكبر عدد في هذه الرحلة من الشباب. يرتفع المنحنى ببطء عند بدايته للرحلة 3 ويرتفع بحدة عند نهايته، لذلك، فإن أكبر عدد في هذه الرحلة من كبار السن.

14a)



15) $Q_1 = 0.12, Q_2 = 0.25, Q_3 = 0.29$

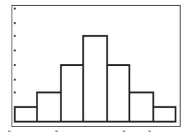
$$\frac{Q_1+Q_3}{2} = \frac{0.12+0.29}{2}$$
$$= 0.205$$

14b) إجابة ممكنة: الطول 75 in في الفريق الأول يقابل المئين 10 ويعني أن أطوال 10% من اللاعبين أقل من 75 in. الطول 75 in في فريق الشباب يقابل المئين 75 ويعني أن 75% من أطوال اللاعبين أقل من 75 in.

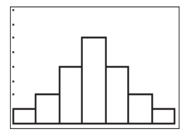
b) عددي: أوجد الوسط، والانحراف المعياري لمجموعة البيانات. الوسط = 45.1 ، الانحراف المعياري = 15.2

c) جدولة: أجرِ التحويلات الآتية على الصورة $X' = a + bX$ ، حيث X القيمة قبل التحويل، و X' القيمة بعد التحويل. واكتب مجموعة البيانات بعد التحويلات لكلٍّ من القيم الآتية في جداول منفصلة.

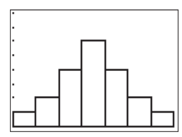
i) $a = 3, b = 5$



ii) $a = 10, b = 1$



iii) $a = 0, b = 5$



d) تمثيل بياني: استعمل المدرجات التكرارية الثلاثة أعلاه؛ لوصف شكل التوزيع لكل مجموعة من البيانات بعد تحويلها في كل حالة.

e) تعبير لفظي: صف أثر التحويلات في شكل البيانات، وتمركزها وتشتتها.

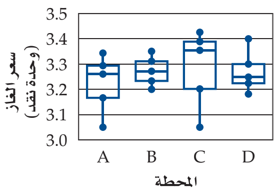
f) تحليل: إذا ضربت كل قيمة من التوزيع في عدد حقيقي c، فماذا يحدث للوسط والانحراف المعياري في التوزيع؟
ستُضرَب في c

مسائل مهارات التفكير العليا

18) اكتب: لماذا يكون استعمال المدى طريقة غير فعّالة لقياس تشتت البيانات في التوزيع؟ انظر الهامش

19) تحدٍّ: على فرض أن 20% من البيانات تقع بين القيمتين 35, 55. إذا أضيف 10 لكل قيمة في المجموعة، ثم ضُوعفت النتيجة. أوجد القيمتين اللّتين تحصران بينهما 10% من البيانات بعد التعديل؟
إجابة ممكنة: بين 90 ، 130

تبرير: يُبيّن التمثيل أدناه أسعار الغاز في 4 محطات مختلفة خلال شهر.



للتمارين 22-21 انظر الهامش

20) أي المحطات لها أكبر تشتت بأسعار الغاز؟ وأيها لها أقل تشتت؟ برِّر إجابتك.

21) أي التوزيعات ذو التواء موجب، وأيها ذو التواء سالب، وأيها متماثل؟ برِّر إجابتك.

22) اكتب: لماذا يتأثر الوسيط بدرجة أقل من تأثر الوسط بالقيم المتطرفة؟ برِّر إجابتك.

مراجعة تراكمية

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 5-4)

23) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ 136.7°

24) $\mathbf{u} = \langle 4, 4, -6\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, -5, 2\rangle$ 90°

25) $\mathbf{u} = \langle -7, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -5, 1\rangle$ 160.5°

إجابات:

18) إجابة ممكنة: يأخذ المدى بالحسبان قيم التوزيع العليا والدنيا فقط، وتؤثر القيم المتطرفة في فعالية قياس المدى لتشتت البيانات.

20) إجابة ممكنة: المحطة C فيها أكبر تشتت في الأسعار من 3.05 إلى 3.45 وحدة نقدية، والمحطة B لها أقل تشتت في الأسعار من 3.20 إلى 3.35 وحدة نقدية.

21) إجابة ممكنة: الأسعار في المحطة D ذات التواء موجب؛ لأن الطرف الأيمن أطول من الطرف الأيسر والوسيط أقرب إلى الرُّبيع الأول منه إلى الرُّبيع الثالث. والأسعار في المحطتين A, C لها توزيع ذو التواء سالب؛ لأن الطرف الأيسر في كل منهما أطول من الطرف الأيمن، والوسيط أقرب إلى الرُّبيع الثالث منه إلى الأول. أما الأسعار في المحطة B فمتماثلة؛ لأن للطرفين الطول نفسه، والخط الذي يمثل الوسيط يقع تمامًا بين الرُّبيع الأول والرُّبيع الثالث.

22) إجابة ممكنة: تشمل معادلة الوسط كل واحدة من البيانات، بينما تشمل معادلة الوسيط قيمة واحدة إذا كان عدد القيم فرديًّا أو وسط قيمتين إذا كان عدد القيم زوجيًّا. إذا وجُدت قيم متطرفة في التوزيع، فإن الوسط سيشمل هذه القيم وربما يُدفع إلى يمين أو يسار التوزيع، بينما لا يتأثر الوسيط كثيرًا بهذه القيم. فمثلاً وسط ووسيط المجموعة {30, 40, 50, 60, 70} يساوي 50 . إذا أضيفت القيمتان 98, 99 إلى القيم يزداد الوسيط قليلاً ليصبح 55، بينما يزداد الوسط ليصبح 63.9 .

اكتب كلًّا من النقاط المُعطاة بالإحداثيات الديكارتية على الصورة القطبية في كلٍّ مما يأتي : (الدرس 2-5) للتمارين 29-27 انظر الهامش

26) $(6, -8)$

27) $(-4, 1)$

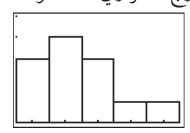
28) $(3, 2)$

تدريب على اختبار معياري

29) **كرة سلة :** تُبيِّن القائمة أدناه عدد الساعات التي يقضيها أعضاء فريق المدرسة لكرة السلة في التدريب الفردي، والجماعي أسبوعيًّا.

15, 18, 16, 20, 22, 18, 19, 20, 24, 18, 16, 18

a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع.



b) لخّص تمركز، وتشتت البيانات باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرّر إجابتك.

30) يُبيِّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لمجموعة من طالبات إحدى المدارس وفق درجاتهن في أحد الاختبارات. قدّر الرتبة المئينية للدرجة 72 في ذلك التوزيع. B

الفئات	f
60 –	12
65 –	3
70 –	4
75 –	1
80 –	9
85 –	13
90 –	8
95 – 100	6

A 27 %

B 30 %

C 34 %

D 72 %

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلبة رسم توزيع متماثل، توزيع ذي التواء موجب، توزيع ذي التواء سالب، وتحديد مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت؛ ليعطي معلومات أكثر دقة. سوف يختار الطلبة الوسط والانحراف المعياري للتوزيع المتماثل، والمقاييس الخمسة للتوزيعات الملتوية.

إجابات:

26) $(0, -53.1°)$

27) $(\sqrt{17}, 2.9\ \text{rad})$

28) $(\sqrt{13}, 0.59\ \text{rad})$

29a) التوزيع ذو التواء موجب. يمارس أغلبية اللاعبين التمرينات بين 15 h ، 20 h وفي حين يمارس عدد أقل التمرينات لمدة تزيد عن 20 h

29b) إجابة ممكنة: بما أن التوزيع ذي التواء موجب، فإنه يمكن استعمال المقاييس الخمسة لوصف توزيع البيانات. يتوزع الوقت من 15 h إلى 20 h ، الوسيط = 18 h ، ونصف الوقت يقع بين 12 h-16 h .

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلبة البحث في الإنترنت أو المكتبة؛ لتجميع بيانات حول مملكة البحرين: كاملة، ومحافظتين في المملكة، وربما تضمن هذا عدد السكان، ضرائب، مساحة المحافظة وبيانات أخرى. ثم اطلب إليهم تمثيل البيانات باستعمال الصندوق وطرفيه لكل منها والمقارنة بينها؛ على أن تتضمن هذه التحليلات مقارنة مقاييس الموقع (الترتيب) ومقاييس التشتت.

6-2 ملاحظات الدرس

6-2 التوزيعات الاحتمالية
Probability Distributions

فيما سبق

درست كيفية إيجاد احتمالات الأحداث باستعمال التوافيق.

والآن

الأفكار الرئيسة

- أكون توزيعًا احتماليًا، وأحسب ملخصاته الإحصائية.
- أكون توزيع ذات الحدين وأستعمله، وأحسب ملخصاته الإحصائية الأساسية.

المفردات الأساسية

المتغير العشوائي random variable

المتغير العشوائي المنفصل discrete random variable

المتغير العشوائي المتصل continuous random variable

التوزيع الاحتمالي probability distribution

القيمة المتوقعة (التوقع) expected value

تجربة ذات الحدين binomial experiment

توزيع ذات الحدين binomial distribution

دالة التوزيع الاحتمالي ذي الحدين binomial probability distribution function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل شركات تأمين السيارات الإحصاء؛ لقياس الآثار المرتبطة ببعض الحوادث كالاصطدام مثلًا. حيث تستعمل البيانات التي تم جمعها حول ما حصل في الماضي؛ لتحديد احتمالات كل النتائج المتعلقة بالحادث، وحساب إحصائيات تقوم على كيفية توزيع هذه الاحتمالات. ومن ثم التنبؤ بنتائج حوادث مشابهة باستعمال هذه الإحصائيات، واتخاذ قرارات بناءً على ذلك.

التوزيعات الاحتمالية استعملت الإحصاء الوصفي في الدرس السابق لتحليل المتغير، كَسِمة من سمات المجتمع وفي ذلك الدرس، اعتمدت قيم المتغير على البيانات التي يتم جمعها. وأما في هذا الدرس فسوف تتعامل مع متغيرات تعتمد قيمها على الفرص.

يُمثّل **المتغير العشوائي** X القيم العددية التي تُعطى لنتيجة تجربة إحتمالية. ويوجد نوعان من المتغيرات العشوائية؛ منفصلة ومتصلة.

مفهوم أساسي — المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة

للمتغير العشوائي المنفصل	للمتغير العشوائي المتصل
للمتغير العشوائي المنفصل عددٌ معدود أو منتهٍ من القيم الممكنة.	**للمتغير العشوائي المتصل** عددٌ غير منتهٍ من القيم الممكنة ضمن فترة محددة.
مثال	**مثال**
X يُمثّل عدد حوادث السيارات في السنة 0 1 2 3 4 5 6 7 8	X يُمثّل المسافة التي تقطعها سيارة بالكيلومتر 0 2 4 6 8 10

تُستعمل استراتيجيات إحصائية مختلفة لتحليل هذين النوعين من المتغيرات العشوائية، لذا فمن المهم أن تُميّز بينهما، ولتصنفهما بدقة، تأكد إذا كان المتغير يُمثّل قيمًا معدودة أو غير معدودة.

مثال 1 تصنيف المتغير العشوائي إلى متصل أو منفصل

صنّف كل متغير عشوائي مما يأتي من حيث كونه منفصلًا، أو متصلًا. وبرّر إجابتك.

a) X يُمثّل وزن حبة (بذرة) تم اختيارها عشوائيًا من صندوق فيه حبوب، وزن كل منها لا يتجاوز 15 g .

وزن الحبة يقع بين 0 g و 15 g. لذا، يكون X متغيرًا متصلًا.

b) X يُمثّل عدد السيارات في موقف مخصص لمدرسة في أوقات عشوائية خلال يوم دراسي.

عدد السيارات في الموقف معدود، فقد يكون 3 ,2 ,1 ,0 ، أو أي عدد آخر من السيارات، لذا يكون X متغيرًا منفصلًا.

تأكد

صنّف كل متغير عشوائي مما يأتي من حيث كونه منفصلًا، أو متصلًا. وبرّر إجابتك. **(1A, 1B** انظر الهامش**)**

1A) X يُمثّل الوقت اللازم لتقديم وجبة إلى أحد الزبائن اختير عشوائيًا في مطعم للوجبات السريعة.

1B) X يُمثّل عدد الحضور في أحد الاجتماعات الشهرية المدرسية تم اختياره عشوائيًا من بين الاجتماعات.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-2

إيجاد احتمالات أحداث باستعمال التوافيق.

الدرس 6-2

تكوين توزيع احتمالي، وحساب ملخصاته الإحصائية.

تكوين توزيع ذات الحدين واستعماله، وحساب ملخصاته الإحصائية الأساسية.

ما بعد الدرس 6-2

استعمال التوزيع الطبيعي؛ لإيجاد الاحتمالات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة «لماذا؟».

اسأل:

- إذا كان مع عشرة طلبة المبالغ الآتية: BD 2, BD 4, BD 6, BD 8, BD 8, BD 10, BD 10, BD 11, BD 15, BD 16. أوجد الوسط والانحراف المعياري لهذه البيانات. BD 9, BD 4.42
- ما احتمال اختيار طالب عشوائيًا من بين المجموعة ومعه أقل من BD 7؟ 0.30
- ما احتمال اختيار طالب عشوائيًا من بين المجموعة ومعه BD 7 أو أكثر؟ 0.70

التوزيعات الاحتمالية

مثال 1 يُبيّن كيفية تصنيف المتغيرات العشوائية إلى منفصلة ومتصلة.

مصادر الدرس 6-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (271)	• تنويع التعليم ، ص (271)	• تنويع التعليم ، ص (276)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (31) • تدريبات المسائل اللفظية	• دليل الدراسة والمعالجة • كتاب التمارين ، ص (31) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (31) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

إجابات:

1A) متصل؛ قد يكون الوقت اللازم لتقديم الوجبة من دقيقة إلى 10 دقائق مثلًا. لذا X متغير متصل.

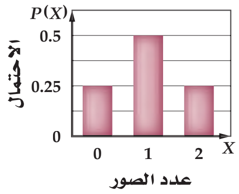
1B) منفصل؛ عدد الحضور معدود أو منتهٍ. لذا يكون X متغيرًا منفصلًا.

عند رمي قطعتي نقد متمايزتين مرَّةً واحدة، فإن فضاء العينة هو $\{TT, TH, HT, HH\}$ ، حيث يُمثِّل H الوجه الذي يحمل الصورة، و T الوجه الذي يحمل الكتابة، إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا يدل على عدد مرات ظهور الصورة، فإن X يأخذ القيم $0, 1, 2$. ويمكنك حساب الاحتمال النظري لعدم الحصول على صورة، أو الحصول على صورة واحدة، أو الحصول على صورتين .

$$P(0) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(1) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(2) = \frac{1}{4}$$

يُبيّن الجدول أدناه، والتمثيل بالأعمدة المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

عدد الصور X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



قراءة الرياضيات

احتمالات المتغيرات العشوائية يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن يكون المتغير العشوائي X مساويًا لـ 1 .

مفهوم أساسي — التوزيع الاحتمالي المنفصل

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو جدول، أو معادلة، أو تمثيل بياني يربط بين كل قيمة من قيم X الممكنة، مع احتمال وقوعها. يمكن تحديد هذه الاحتمالات نظريًّا، أو بالملاحظة.

ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1، أي أن $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1 ، أي أن $\sum P(X) = 1$.

لتكوين توزيع احتمالي منفصل، استعمل الملاحظة بدلًا من البيانات النظرية، واستعمل تكرار كل قيمة لحساب احتمالها.

مثال 2 — تكوين توزيع احتمالي منفصل

تقويم معلم: طُلِب من طلاب صف تقويم شرح معلمهم حسب نموذج مخصص، بحيث تتراوح الدرجات من 1 للأداء البسيط، و 5 للأداء الممتاز. استعمل التوزيع التكراري المجاور لتكوين توزيع احتمالي للمتغير X ، ومثِّله بالأعمدة مقربًا الاحتمالات إلى أقرب جزء من مئة.

الدرجة X	التكرار
1	1
2	8
3	20
4	16
5	5

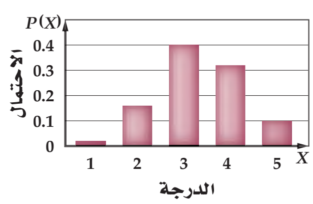
لإيجاد احتمالات قيم X اقسم تكرار كل قيمة على مجموع الطلبة الذين قوَّموا أداء المعلم، وهو $1 + 8 + 20 + 16 + 5 = 50$.

$$P(1) = \frac{1}{50} = 0.02 \qquad P(2) = \frac{8}{50} = 0.16 \qquad P(3) = \frac{20}{50} = 0.40$$

$$P(4) = \frac{16}{50} = 0.32 \qquad P(5) = \frac{5}{50} = 0.10$$

يُمثِّل الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، وتمثيله بالأعمدة موضح في الشكل المجاور.

الدرجة X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.02	0.16	0.40	0.32	0.10



التحقق لاحظ أن الاحتمالات في الجدول أعلاه محصورة بين 0 و 1 ، وأن $\sum P(X) = 0.02 + 0.16 + 0.4 + 0.32 + 0.1 = 1$ ✓

تأكد انظر ملحق الإجابات

2) **بيع سيارات:** رصد تاجر عدد السيارات التي باعها يوميًّا خلال 30 يومًا. استعمل التوزيع التكراري المجاور الذي يُمثِّل هذه النتائج؛ لتكوين توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X، ومثِّله بالأعمدة مقرّبًا الاحتمالات إلى أقرب جزء من مئة .

السيارات المبيعة X	0	1	2	3
التكرار	20	7	2	1

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

التوزيعات الاحتمالية

مثال 2 يُبيّن كيفية تكوين توزيع احتمالي.

مثال إضافي

1 صنف كل متغير عشوائي مما يأتي من حيث كونه منفصلًا أو متصلًا. وبرر إجابتك.

a) X يمثل عدد المرات التي رنَّ فيها جرس الهاتف قبل الرد على المكالمة. منفصل؛ لأن عدد الرنات معدود.

b) X يمثل مقدار الزمن بين رنة الهاتف في المرة الأولى و الرد على المكالمة.

متصل؛ يمكن أن يكون الزمن أية قيمة في فترة زمنية معقولة.

التركيز في المحتوى الرياضي

تحويلات التوزيعات الاحتمالية إذا أضيف عدد ثابت إلى جميع قيم التوزيع الاحتمالي، أي تم إزاحة القيم على المحور x ، فإن الوسط (القيمة المتوقعة) يزداد بمقدار ذلك الثابت، ولكن التباين والانحراف المعياري لا يتأثران. وإذا ضُربت كل قيم التوزيع الاحتمالي في عدد ثابت، فإن التباين يضرب في مربع ذلك العدد، والانحراف المعياري في العدد نفسه.

لحساب الوسط لتوزيع احتمالي، علينا استعمال معادلة تختلف عن التي تُستعمل لحساب وسط البيانات. افترض أنك تريد حساب عدد مرات ظهور الصور الناتجة من رمي قطعتي نقد عددًا لا نهائيًا من المرات. لا يمكننا حساب الوسط باستعمال المعادلة $\mu = \frac{\sum X}{N}$؛ لأن N ستكون ما لا نهاية. مع ذلك، يُبيّن لنا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الاحتمال المقابل للقيم $0, 1, 2$، والمتوقع الحصول عليها في التجربة الآتية:

عدد الصور المتوقَّع الحصول عليها بعد رمي قطعتي نقد متمايزتين

{TT, TT, …, TT, TT, HT, HT, …, HT, HT, TH, TH, …, TH, TH, HH, HH, …, HH, HH}
{0, 0 …, 0, 0, 1, 1, …, 1, 1, 1, 1, …, 1, 1, 2, 2, …, 2, 2}

$\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0}_{\frac{1}{4}}$ $\underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{\frac{1}{2}}$ $\underbrace{2, 2, \ldots, 2, 2}_{\frac{1}{4}}$

لذا، تكون **القيمة المتوقَّعة (التوقّع)** الوسط لعدد مرات ظهور الصور في عدد لا نهائي من رمي القطعتين $\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$. وفيما يأتي ملخص لطريقة الحصول على وسط التوزيع الاحتمالي.

مفهوم أساسي — الوسط لتوزيع احتمالي منفصل

التعبير اللفظي لإيجاد وسط التوزيع الاحتمالي μ، اضرب كل قيمة للمتغير العشوائي X في احتمالها، ثم أوجد مجموع نواتج الضرب.

بالرموز يُعطى وسط التوزيع الاحتمالي X بالمعادلة $\mu = \sum[X \cdot P(X)]$، حيث تُمثِّل $X_1, X_2, \ldots, X_n$ قيم X، و $P(X_1), P(X_2), \ldots, P(X_n)$ الاحتمالات المرتبطة بها.

مثال 3 — الوسط لتوزيع احتمالي منفصل

تقويم المعلم: يُبيّن الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي لتقويم المعلم الوارد في المثال 2 . أوجد الوسط للدرجات إلى أقرب جزء من مئة، وفسّر معناها في سياق الموقف.

الدرجة X	$P(X)$
1	0.02
2	0.16
3	0.40
4	0.32
5	0.10

اضرب كل درجة في احتمالها، ثم أوجد مجموع نواتج الضرب.

رتب حساباتك كما في الجدول أدناه.

الدرجة X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$
1	0.02	$1 \cdot 0.02 = 0.02$
2	0.16	$2 \cdot 0.16 = 0.32$
3	0.40	$3 \cdot 0.40 = 1.20$
4	0.32	$4 \cdot 0.32 = 1.28$
5	0.10	$5 \cdot 0.10 = 0.50$
		$\sum[X \cdot P(X)] = 3.32$

لذا، يكون الوسط μ لهذا التوزيع الاحتمالي 3.32 تقريبًا.

بما أن الدرجة 3 (درجة محايدة) تدل على أن أداء المعلم ليس سيِّئًا، وليس ممتازًا، فإن الوسط 3.3 يدل على أنه بالمتوسط، حيث يشعر الطلبة أن شرح معلمهم متوسط، ويميل قليلًا جهة الممتاز.

تأكد 0.46؛ إجابة ممكنة: متوسط عدد السيارات التي باعها التاجر هو سيارة واحدة كل يومين.

3) بيع سيارات: أوجد وسط التوزيع الاحتمالي الذي كوّنته في تأكد 2 ، وفسّر معناه في سياق الموقف.

التوزيعات الاحتمالية

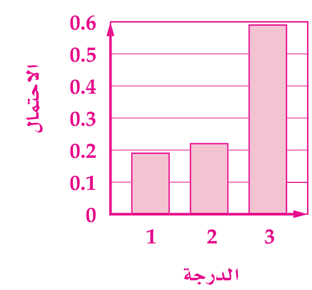
مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الوسط لتوزيع احتمالي.

مثالان إضافيان

2 برنامج تلفزيوني: سُئل 63 ناقدًا سينمائيًّا عن رأيهم حول برنامج تلفزيوني وثائقي، على أن يُعطى درجة واحدة إذا كان ضعيفًا، ودرجتين إذا كان متوسطًا، و3 درجات إذا كان جيدًا. استعمل التوزيع التكراري أدناه؛ لتكوين توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X لهذا الموقف، وتمثيله بيانيًّا.

الدرجة X	التكرار
1	12
2	14
3	37

الدرجة X	1	2	3
$P(X)$	0.19	0.22	0.59



3 برنامج تلفزيوني: اعتمد على التوزيع الاحتمالي في المثال الإضافي 2؛ لإيجاد وسط الدرجات، وفسّر معناه في سياق الموقف.

الدرجة X	1	2	3
$P(X)$	0.19	0.22	0.59

2.4، يصنف البرنامج على أنه بين المتوسط والجيد.

إرشادات للمعلم الجديد

التوزيع الاحتمالي يحدد التوزيع الاحتمالي احتمالاً لكل قيمة في المتغير العشوائي المنفصل، أو احتمال فترة للمتغير العشوائي المتصل.

لا يمكن استعمال معادلة التباين التي تستعمل للمجتمع الإحصائي لحساب التباين، والانحراف المعياري للتوزيعات الاحتمالية؛ لأن قيمة N قد تكون ما لانهاية. لذا تستعمل المعادلة الآتية؛ لإيجاد تشتت التوزيعات الاحتمالية.

مفهوم أساسي **التباين والانحراف المعياري للتوزيعات الاحتمالية**

التعبير اللفظي لإيجاد التباين لتوزيع احتمالي X، اطرح وسط التوزيع الاحتمالي من كل قيمة من قيم X، وربّع الفرق، ثم اضرب ناتج مربع كل فرق في الاحتمال المرتبط به، وأوجد مجموع نواتج الضرب. ويكون الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

بالرموز يُعطى تباين المتغير العشوائي X بالمعادلة $\sigma^2 = \sum[(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$، والانحراف المعياري بالمعادلة $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

إرشادات للدراسة

صيغة مكافئة
توجد صيغة رياضية مكافئة لتباين التوزيع الاحتمالي تجعل العمليات الحسابية أكثر سهولة هي:
$\sigma^2 = \sum[(X^2 \cdot P(X)] - \mu^2$

مثال 4 **التباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي**

تقويم المعلم: أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لتقويم المعلم في المثال 2 إلى أقرب جزء من مئة.

X الدرجة	$P(X)$
1	0.02
2	0.16
3	0.40
4	0.32
5	0.10

اطرح الوسط الذي أوجدته في المثال 3، وهو 3.32 من كل قيمة من قيم X، ثم ربّع الفرق، واضرب ناتج مربع كل فرق في الاحتمال المرتبط به، وأوجد مجموع نواتج الضرب.

X الدرجة	$P(X)$	$(X-\mu)^2$	$(X-\mu)^2 \cdot P(X)$
1	0.02	$(1-3.32)^2 \approx 5.38$	$5.38 \cdot 0.02 \approx 0.1076$
2	0.16	$(2-3.32)^2 \approx 1.74$	$1.74 \cdot 0.16 \approx 0.2784$
3	0.40	$(3-3.32)^2 \approx 0.10$	$0.10 \cdot 0.40 \approx 0.0400$
4	0.32	$(4-3.32)^2 \approx 0.46$	$0.46 \cdot 0.32 \approx 0.1472$
5	0.10	$(5-3.32)^2 \approx 2.82$	$2.82 \cdot 0.10 \approx 0.2820$
			$\sum[(X-\mu)^2 \cdot P(X)] = 0.8552$

إذن التباين $\sigma^2 \approx 0.86$، والانحراف المعياري $0.92 \approx \sqrt{0.8552}$.

تأكد

4) **بيع سيارات:** أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الذي كوّنته في تأكد 2 إلى أقرب جزء من مئة. **0.75 ، 0.57**

القيمة المتوقّعة (التوقّع) $E(X)$ للمتغير العشوائي لتوزيع احتمالي يساوي وسط المتغير العشوائي؛ أي أن:

$$E(X) = \mu = \sum[X \cdot P(X)]$$

مثال 5 **إيجاد التوقُّع للمتغير العشوائي**

مسابقة: قرّرت إدارة إحدى المجلات الجديدة إجراء سحب على 3 جوائز مالية مقدارها BD 10 ،BD 50، BD 100 لمن يجيب عن سؤال ثقافي في أحد إصداراتها الشهرية. إذا كان ثمن المجلة BD 1، وتم إجراء القرعة على 500 شخص اشتروا المجلة، وأجابوا بشكل صحيح على السؤال في ذلك الشهر. كوّن التوزيع الاحتمالي لربح شخص اشترى المجلة في ذلك الشهر، ثم أوجد التوقّع.

صافي الربح لكل جائزة يساوي قيمة الجائزة مطروحًا منه ثمن المجلة.

الربح X	$100-1=99$	$50-1=49$	$10-1=9$	$0-1=-1$
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{500}=0.002$	$\frac{1}{500}=0.002$	$\frac{1}{500}=0.002$	$\frac{497}{500}=0.994$

$$E(X) = \sum[X \cdot P(X)]$$
$$= (99 \cdot 0.002) + (49 \cdot 0.002) + (9 \cdot 0.002) + (-1 \cdot 0.994) \approx -0.68$$

هذا التوقّع يعني أن معدل خسارة الشخص الذي اشترك بالمسابقة هو BD 0.68 .

تنبيه!

لبس في تفسير التوقُّع
التوقّع الذي تم حسابه في المثال 5، لا يدل على المبلغ الذي قد يربحه الشخص، أو يخسره. ففي هذا المثال قد يخسر الشخص BD 1، وبإمكانه أن يربح BD 100، أو BD 50، أو BD 10، فقط.

التوزيعات الاحتمالية

مثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد التباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي.

مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد القيمة المتوقعة.

مثالان إضافيان

4 **برنامج تلفزيوني:** أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي للمثال الإضافي 2. 0.62 ، 0.7874 تقريبًا

5 **تعهدات:** يخسر أحد متعهدي البناء مبلغ BD 9000 في فصل الصيف إذا كانت درجة الحرارة أعلى من مُعدّلها الطبيعي، ويربح BD 45000 إذا كان الجو طبيعيًّا. إذا كان احتمال أن تكون درجة الحرارة أعلى من مُعدّلها يساوي 20% ، فأوجد توقع ربح المتعهد. BD 34200

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية عندما يحسب الطلبة وسط توزيع احتمالي لعدة قيم للمتغير العشوائي X، اطلب إليهم استعمال جدول إلكتروني.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، وبيّن لهم أن هناك مجسمًا ثمانيًّا منتظمًا له ثمان أوجه مرقمة من 1 إلى 8. أعطِ رقم كل وجه لإحدى المجموعات. إذا رمي المجسم مرة واحدة، اسأل الطلبة إيجاد احتمال الحصول على كل النتائج الممكنة ثم كلفهم بإيجاد الوسط، والتباين، والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي. $P(1)=0.125, P(2)=0.125, P(3)=0.125, P(4)=0.125,$ $P(5)=0.125, P(6)=0.125, P(7)=0.125, P(8)=0.125, \mu=4.125, \sigma^2 \approx 5.7, \sigma \approx 2.39$

توزيع ذو الحدين

مثال 6 يُبيّن كيفية تمييز التجربة ذات الحدين.

مثال 7 يُبيّن كيفية تكوين التوزيع الاحتمالي.

مثال إضافي

6 حدّد فيما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك، وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q . وقيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

a) أُجري مسح إحصائي لمعرفة عمل الزوج وزوجته، فتبيّن أن 65% من الأزواج لهما وظيفة أو وظيفتان. تم اختيار 50 من الأزواج. والمتغير العشوائي يدل على عدد الأزواج الذين لهم وظيفة أو وظيفتان.

التجربة ذات حدين فيها:
$n = 50 , p = 0.65 , q = 0.35 ,$
$X = 1, 2, 3, \dots , 50$

b) يحتوي صندوق على 10 رقاقات إلكترونية زرقاء اللون و 5 رقاقات حمراء اللون. تم سحب 3 رقاقات عشوائيًا الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. ويدل المتغير العشوائي على عدد الرقاقات الزرقاء المسحوبة.

الحوادث غير مستقلة؛ لأن احتمال سحب رقاقة زرقاء يختلف بعد كل سحب، وعليه فإن التجربة ليست ذات حدين.

5) BD 1995

✓ تأكد

5) **ميناء:** يحقق ميناء دخلًا مقداره BD 3500 في اليوم إذا كان الجو عاديًا، ويخسر BD 800 ، إذا كان الجو عاصفًا. إذا كان احتمال أن يكون الجو عاصفًا في أحد الأيام 35%، فأوجد توقّع دخل الميناء في ذلك اليوم.

توزيع ذو الحدين كثير من التجارب الاحتمالية يكون لها نتيجتان فقط؛ نجاح أو فشل. فمثلًا، في مسائل الاختيار من متعدد التي لها 5 إجابات، يمكن تصنيف نتائج الإجابة عن كل فقرة صح، أو خطأ، ويمكن تصنيف نتائج دواء طبي على أنه فعال أو غير فعّال.

مفهوم أساسي: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- **يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد من المحاولات المستقلة (المرات) n .**
- **لكل محاولة نتيجتان متوقعتان؛ نجاح S ، أو فشل F .**
- **احتمال النجاح $P(S)$، أو p نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$، أو q ويساوي $1 - p$.**
- **يُمثّل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.**

مثال 6: تمييز التجربة ذات الحدين

حدّد فيما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

a) تُبيّن نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلبة يمتلكون آلة حاسبة بيانية. إذا تم اختيار 6 طلبة عشوائيًا، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة. وكان المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الطلبة الذين يملكون الآلة الحاسبة البيانية.

إن هذه التجربة تحقق شروط التجربة ذات الحدين وهي:

- كل طالب تم اختياره يُمثّل محاولة، وعملية اختيار الطلبة محاولات مستقلة.
- للتجربة نتيجتان متوقعتان: الطالب يملك الآلة الحاسبة البيانية S، أو لا يملكها F .
- احتمال النجاح نفسه لكل طالب تم اختياره $P(S) = 0.68$.

وفي هذه التجربة $n = 6 , p = P(S) = 0.68$. احتمال الفشل $q = 1 - p$ ، أي أن: $q = 1 - 0.68 = 0.32$. ويُمثّل X عدد الطلبة الذين يملكون آلة حاسبة بيانية من الّذين تم اختيارهم، أي أن: $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

b) صندوق يحتوي على 52 بطاقة، وخصّص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض، سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة من اللون الأخضر.

في هذه التجربة، كل بطاقة يتم سحبها تُمثّل محاولة، واحتمال أن تكون البطاقة من اللون الأخضر $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. وبما أنه يتم الاحتفاظ بالبطاقة التي تم اختيارها، فإن المحاولات غير مستقلة، واحتمال النجاح في كل محاولة يختلف عن الأخرى. لذا فإن هذه التجربة ليست ذات حدين.

✓ تأكد

حدّد فيما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

6A) تُبيّن نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحَّد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلبة الذي يحبون الزي الجديد.

6B) أُجيب عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع الاختيار من متعدد لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة. ويدل المتغير العشوائي X على عدد الإجابات الصحيحة.

6A) ليست ذات حدين
$P(S) = 61\%,$
$P(F) = 1 - 61\% = 39\%$،
في حين أن 24% لا يحبون الزي الموحد، وهذا لا يساوي 39% .

6B) تجربة ذات حدين
$n = 20, p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4},$
$X = 0, 1, 2, \dots 20$

يُسمى توزيع النتائج المتوقَّعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيعًا ذا حدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة الآتية، والتي تُمثّل الحد $p^x q^{n-x}$ في مفكوك $(p+q)^n$.

مفهوم أساسي **صيغة احتمال ذات الحدين**

احتمال x نجاح من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$$

حيث p احتمال النجاح، و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

لاحظ أن هذه الصيغة تُمثّل دالة منفصلة للمتغير العشوائي X، تُسمَّى **دالة التوزيع الاحتمالي ذي الحدين**.

مثال 7 توزيع ذات الحدين

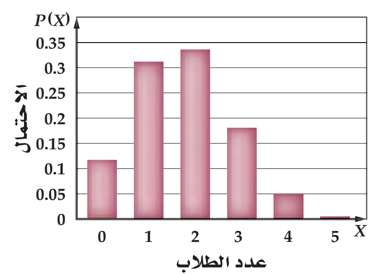
امتحان: في امتحان نهائي، أكد 35% من الطلبة أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلبة عشوائيًا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلبة الذين أجابوا بنعم عن السؤال، كوّن التوزيع ذا الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلبة على الأقل عن السؤال بنعم.

هذه تجربة ذات حدين فيها $n = 5, p = 0.35, q = 1 - 0.35 = 0.65$. استعمل الآلة الحاسبة؛ لحساب احتمال كل قيمة ممكنة من قيم X، مستعملًا صيغة احتمال ذات الحدين.

$$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$$
$$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$$
$$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$$
$$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$$
$$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$$
$$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$$

وفيما يأتي التوزيع الاحتمالي للمتغير X، وتمثيله بالأعمدة.

X	P(X)
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005



لإيجاد احتمال أن 3 طلبة على الأقل أجابوا بنعم، أوجد $P(3) + P(4) + P(5)$.

احتمال 3 طلبة على الأقل $\quad P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$

$P(3) = 0.181, P(4) = 0.049, P(5) = 0.005 \quad = 0.181 + 0.049 + 0.005$

بالتبسيط $\quad = 0.235 = 23.5\%$

إرشاد تقني

حساب احتمال ذات الحدين لإيجاد كل احتمال لذات الحدين على الآلة الحاسبة البيانية؛ استعمل الأمر binompdf(n, p, x) من قائمة DISTR .

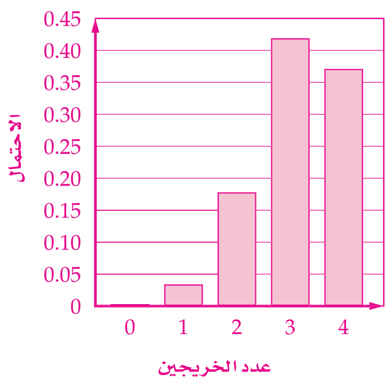
تأكد

7) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات % 48 من الطلبة لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 طلبة خريجين عشوائيًا، وتم سؤالهم عمَّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلبة الذين أجابوا بنعم، كوّن التوزيع ذا الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلبة بنعم. انظر الهامش

مثال إضافي

7 **كليات:** في دراسة حديثة أجريت على خريجي إحدى الكليات، تبيّن أن 78% من الطلبة يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج. تم اختيار 4 طلبة عشوائيًا وسؤالهم عما إذا كانوا يرغبون بتلقي التدريب العملي بعد تخرجهم. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الخرجين الذين أجابوا بنعم عن السؤال. كوّن التوزيع ذا الحدين ومثله بيانيًّا، ثم أوجد احتمال أن ثلاثة منهم على الأقل أجابوا بنعم عن السؤال.

X	P(X)
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370

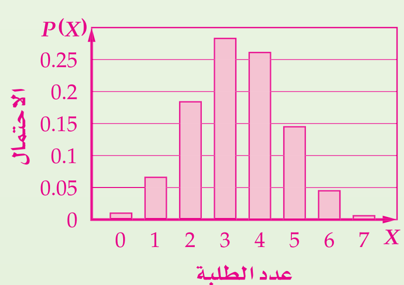


$P(x \geq 3) = 0.788$

إجابة (تأكد):

7)

X	P(X)
0	0.010
1	0.066
2	0.184
3	0.283
4	0.261
5	0.145
6	0.045
7	0.006



$P(X < 4) = 0.543 = 54.3\%$

تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد الوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي **الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات حدين**

يحسب كل من الوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي ذي حدَّين X بالصيغ الآتية:

الوسط $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

إن هذه الصيغ أكثر سهولة، ولكنها مكافئة جبريًّا للصيغ التي استعملتها؛ لإيجاد الوسط، والتباين، والانحراف المعياري لتوزيعات احتمالية.

مثال 8 الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين

امتحان: يُبيّن الجدول أدناه التوزيع ذا الحدين في المثال 7 . أوجد الوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع، ثُمَّ فسّر معانيها في سياق الموقف.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.116	0.312	0.336	0.181	0.049	0.005

الطريقة 1 استعمل صيغ الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي.

$$\mu = \sum[X \cdot P(X)]$$
$$= 0(0.116) + 1(0.312) + 2(0.336) + 3(0.181) + 4(0.049) + 5(0.005)$$
$$= 1.748$$
$$\sigma^2 = \sum[(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$$
$$= (0-1.748)^2 \cdot 0.116 + (1-1.748)^2 \cdot 0.312 + (2-1.748)^2 \cdot 0.336 + (3-1.748)^2 \cdot 0.181 + (4-1.748)^2 \cdot 0.049 + (5-1.748)^2 \cdot 0.005$$
$$\approx 1.1354$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1354} \simeq 1.0656$$

الطريقة 2 استعمل صيغ الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين. في هذه التجربة ذات الحدين $n = 5, p = 0.35, q = 0.65$.

$$\mu = np$$
$$= 5(0.35) = 1.75$$
$$\sigma^2 = npq$$
$$= 5(0.35)(0.65) = 1.1375$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1375} \simeq 1.0665$$

تُعطي الطريقتان النتيجة نفسها تقريبًا، لذا، فإن وسط التوزيع يساوي 1.8 تقريبًا، ويعني أن طالبين تقريبًا من أصل 5 أجابوا بنعم. كل من التباين الانحراف المعياري يساوي 1.1 تقريبًا.

تأكد

8) كليات: أوجد الوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الذي كوَّنته في تأكد7، وفسّر معانيها في سياق الموقف.

8) $\mu = 3.36$, $\sigma^2 = 1.747$, $\sigma \approx 1.322$, بمعدّل 3 طلبة من بين 7 يدرسون لغة عالمية في سنة التخرج.

توزيع ذو الحدين

مثال 8 يُبيّن كيفية إيجاد الوسط، والتباين، والانحراف المعياري لتوزيع ذات حدين.

مثال إضافي

8 كليات: يُبيّن الجدول أدناه التوزيع ذا الحدين للمثال الإضافي 7. أوجد الوسط، والتباين و الانحراف المعياري لهذا التوزيع، ثم فسّر معانيها في سياق الموقف.

X	$P(X)$
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370

الوسط = 3.12، التباين = 0.682، والانحراف المعياري = 0.826، بمعدل 3 طلبة خريجين من أصل 4 يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج.

إرشادات للمعلم الجديد

مفردات إذا احتاج الطلبة مساعدة لفهم المفردات، اطلب إليهم العمل في مجموعات ثنائية أو ثلاثية، وكلف كل طالب بالمجموعة كتابة تعريف أو رسم صورة لكل مفردة جديدة. بعد أن يكمل كل طالب تعريفه أو رسمه، اطلب إلى الطلبة مناقشة أعمالهم داخل المجموعة، إذا كانت التعريفات متوافقة ينتقل الطلبة إلى مفردة أخرى، وإذا لم تكن كذلك، على المجموعة متابعة المناقشة وتحليل أسباب الاختلاف في التعريف.

تدرب وحل المسائل

صنّف كل متغير عشوائي مما يأتي من حيث كونه منفصلًا أو متصلًا. وبرِّر إجابتك. (مثال 1) للتمارين 1-4 انظر الهامش

1) يُمثّل X عدد الرسائل النصية القصيرة المُرسلة في أحد الأيام من طالب تم اختياره عشوائيًّا.

2) يُمثّل X الزمن الذي احتاجه طالب اختير عشوائيًّا؛ لأداء اختبار فيزياء.

3) يُمثّل X عدد الأقراص المدمجة التي يملكها طالب اختير عشوائيًّا.

4) يُمثّل X وزن طالب تم اختياره عشوائيًّا.

كوّن التوزيع الاحتمالي لكل متغير عشوائي مما يأتي، ومثِّله بالأعمدة، ثم أوجد الوسط، وفسّره في سياق الموقف، ثم أوجد التباين والانحراف المعياري. (الأمثلة 4-2)

5) **مطالعة:** سُئل الطلبة عن عدد الكتب الثقافية التي قرؤوها الشهر الماضي.

التكرار	عدد الكتب X
9	0
17	1
9	2
5	3
2	4

انظر ملحق الإجابات

6) **إفطار:** تم سؤال عيِّنة من طالبات إحدى المدارس الثانوية عن عدد الأيام التي تناولن فيها طعام الإفطار في الأسبوع الماضي.

التكرار	عدد الأيام X
5	0
3	1
17	2
27	3
6	4
19	5
18	6
65	7

انظر ملحق الإجابات

7) **صحة:** سُئل مرضى في عيادة طبيب أسنان عن عدد المرات الأسبوعية التي ينظِّفون فيها أسنانهم باستعمال خيط طبي.

التكرار	مرات التنظيف X
9	1
15	2
5	3
2	4
1	5
0	6
1	7

انظر ملحق الإجابات

8) **تأمين سيارات:** يدفع صاحب سيارة مبلغ BD 120 تأمينًا لسيارته، ويتقاضى مبلغ BD 2500 في حالة تعرُّضها لحادث وانتهاء صلاحيتها. إذا كان احتمال تعرض السيارة لحادث وانتهاء صلاحيتها $p = 0.0002$، فأوجد توقّع ربح (أو خسارة) شركة التأمين وفق هذه الاتفاقية. (مثال 5) انظر الهامش

9) قدّم أحد محلات الحلوى الجديدة عرضًا، بحيث يتم السحب على 4 قطع من الكيك أسعارها BD 5، BD 10، BD 15، BD 20 لكل شخص يشتري بـ BD 1 من المحل.

إذا تم السحب على 100 بطاقة اشترى أصحابها بـ BD 1، فما توقّع الربح الصافي لشخص اشترى بـ BD 1 (مثال 5)
خسارة BD 0.5

حدِّد فيما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك، فاكتب قيم n, p, q، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبيِّن السبب. (مثال 6) للتمارين 10-15 انظر الهامش

10) سألتَ 200 شخص عمّا إذا كانوا شاهدوا مباراة كرة القدم مساء الاثنين الماضي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الأشخاص الذين شاهدوا المباراة في ذلك اليوم.

11) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.

12) أُلقيت قطعة نقد 20 مرة، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

13) سألتَ 15 شخصًا عن أعمارهم، والمتغير العشوائي X يدل على أعمار هؤلاء الأشخاص.

14) سألتَ 40 شخصًا عن نتيجتهم في اختبار قيادة السيارة، والمتغير العشوائي X يدل على عدد الناجحين.

15) صندوق به 52 كرة منها 13 كرة حمراء، و13 كرة زرقاء، و13 كرة بيضاء، و13 كرة صفراء. سحبت 10 كرات على التوالي دون إرجاع، والمتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

كوّن التوزيع ذا الحدين لكلِّ متغير عشوائي مما يأتي، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد الوسط، وفسّر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين، والانحراف المعياري. (المثالان 8 ,7) للتمارين 16-18 انظر ملحق الإجابات

16) إذا كان % 89 من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، وتم اختيار 5 طلاب عشوائيًّا من هذه المدرسة، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني.

17) بيّنت دراسة أن % 26 من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم. إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًّا، وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم.

18) أفادت دراسة إحصائية أن % 65 من طلبة الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان أثناء قيادة سياراتهم. إذا تم اختيار 8 طلبة عشوائيًّا ممن يمتلكون سيارات وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة أمان أثناء قيادة سياراتهم.

3 تدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–18 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية استعمل جدول الكتروني في التمارين التي تحتاج من الطلبة حساب الوسط، والتباين والانحراف المعياري.

إجابات:

1) منفصل؛ الرسائل النصية معدودة.

2) متصل؛ يمكن أن يكون الزمن ضمن فترة زمنية معقولة مثل الفترة 30 min إلى 55 min.

3) منفصل؛ لأن الأقراص المدمجة CDs معدودة.

4) متصل؛ يمكن لأي عدد أن يكون وزنًا.

8) استعمل الصيغة

$E(x) = \Sigma\,[x.P(x)]$

$= (120 - 2500)(0.0002) + (120)(0.9998)$

$= \text{BD}\,119.5$

10) تجربة ذات حدين؛ $n = 200$
$P(S)$ يساوي نسبة الذين شاهدوا المباراة مساء الإثنين الماضي، $P(F) = 1 - P(S)$
إجابة ممكنة: الشخص ضمن العينة إما شاهد المباراة أو لم يشاهدها.

11) تجربة ذات حدين؛ $n = 10$، $P(S) = \frac{1}{6}$ لكل رمية، $P(F) = \frac{5}{6}$،
إجابه ممكنة: في كل رمية يظهر الرقم 5 أو رقم آخر.

12) تجربة ذات حدين؛ $n = 20$، $P(S) = \frac{1}{2}$، $P(F) = \frac{1}{2}$،
إجابة ممكنة: تكون النتيجة إما صورة أو كتابة.

13) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة؛ لأنه يوجد أكثر من نتيجتين متوقعتين؛ لأن العمر قد يكون أي عدد ضمن المعقول.

14) تجربة ذات حدين؛ $n = 40$،

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	24–21، 32–26
ضمن المتوسط	24–19، 32–26
فوق المتوسط	32–19

$P(S)$ يساوي نسبة الذين نجحوا في الاختبار، $P(F) = 1 - P(S)$،
إجابة ممكنة: الشخص إما نجح في الاختبار أو لم ينجح.

15) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة: بما أنك تسحب كرات دون إرجاع، فإن الاحتمالات تختلف في كل سحب لنقص عدد الكرات.

تنبيه!

أخطاء شائعة في التمرين 22، قد يفترض الطلبة أن ظهور الصورة في 10 محاولات متتالية يجب أن يتبعه ظهور كتابة في المحاولة اللاحقة. ذكرهم أن كل محاولة مستقلة عن الأخرى.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة وصف كيف سيساعدهم التوزيع الاحتمالي للقيم المنفصلة في الدرس القادم وهو التوزيع الطبيعي.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلبة للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-6 ،1-6، بإعطائهم اختبار قصير 1 من مصادر الفصل 6.

إجابات:

19a) 24.9% **19b)** 86.5%

19c) 4.13% **19d)** 5.98%

22) لا؛ إجابة ممكنة: إلقاء قطعة نقد هي تجربة ذات حدين تكون كل محاولة فيها مستقلة، ويكون احتمال الحصول على كتابة في كل محاولة ثابتًا، ونتيجة المحاولة الحالية مستقلة عن نتيجة المحاولة السابقة.

24) خطأ؛ إجابة ممكنة: قد يكون الوسط من ضمن النتائج المتوقعة للتجربة وقد لا يكون.

25 استعمل $\mu = np$ ، $\sigma^2 = npq$، حيث $n = 50,\ q = 1 - p,\ \sigma = 1.54$.
حُلَّ بالنسبة لـ p، ثم استعمل قيمة p وقيمة n لإيجاد μ

$$1.54^2 = 50p(p - 1)$$
$$\frac{1.54^2}{50} = p(p - 1)$$
$$0.047432 = p - p^2$$
$$p^2 - p + 0.047432 = 0$$

استعمل القانون العام لتحل المعادلة بالنسبة لـ p.
$p = 0.95$ أو $p = 0.05$.
ومن الإرشاد، $p = 0.05$،
لذلك $\mu = np = 50 \times 0.05 = 2.5$

---

19) تطوّع: في دراسة حديثة تبيّن أن 62% من الأشخاص في إحدى المدن يقضون أوقات فراغهم في الأعمال التطوعية الإنسانية في العام الماضي. إذا تم اختيار عينة من 10 أشخاص من هذه المدينة، فأوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية: **للفروع a-d انظر الهامش**

a) 6 أشخاص فقط من العينة يقضون أوقات فراغهم في الأعمال التطوعية الإنسانية.

b) 5 أشخاص من العينة على الأقل يقضون أوقات فراغهم في الأعمال التطوعية الإنسانية.

c) 3 أشخاص على الأكثر يقضون أوقات فراغهم في الأعمال التطوعية الإنسانية.

d) أكثر من 8 أشخاص يقضون أوقات فراغهم في الأعمال التطوعية الإنسانية.

20) تمثيلات متعددة: في هذا التمرين سوف تستقصي شكل التوزيع ذي الحدين. **للفروع a-d انظر ملحق الإجابات**

a) **تمثيل بياني:** كوّن التوزيع ذا الحدين المرتبط بكل من التجارب الآتية، ثم مثّله بالأعمدة.

i) $n = 6, p = 0.5$ ii) $n = 6, p = 0.3$

iii) $n = 6, p = 0.7$ iv) $n = 8, p = 0.5$

v) $n = 10, p = 0.5$

b) **تعبير لفظي:** صفْ شكل كلٍّ من التوزيعات التي أوجدتها في الفرع a.

c) **تحليل:** خمِّن شكل التوزيع في كل حالة مما يأتي: $p < 0.5$ ، $p = 0.5$ ، $p > 0.5$.

d) **تحليل:** ماذا يحدث لتشتت التوزيع عندما تزداد قيمة n؟

مسائل مهارات التفكير العليا

21) برهان: استعمل التوزيع أدناه؛ لإثبات أن $\mu = np, \sigma^2 = npq$ في التوزيع ذي الحدين. إذا علمت أن: **انظر ملحق الإجابات**

$$\mu = \sum[X \cdot P(X)],\ \sigma^2 = \sum[(X - \mu)^2 \cdot P(X)]$$

في أي توزيع احتمالي.

X	P(X)
0	$1 - p$
1	p

22) تبرير: ألقيت قطعة نقد 10 مرات، وظهرت صورة في المرات العشرة. هل يزيد احتمال ظهور الكتابة في الرمية التالية؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

23) مسألة مفتوحة: إذا كانت احتمالات الحصول على قيم المتغير العشوائي متساوية في توزيع احتمالي معيّن، سُمي توزيعًا احتماليًّا منتظمًا. أعطِ مثالًا على متغير عشوائي يتج عنه توزيع احتمالي منتظم، ثم كوِّن التوزيع الاحتمالي، ومثله بيانيًّا. **انظر ملحق الإجابات**

24) تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة، أو خاطئة، وبرِّر إجابتك.
"وسط المتغير العشوائي هو دائمًا أحد النتائج الممكنة للتجربة". **انظر الهامش**

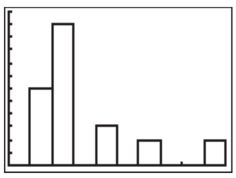
25) تحدّ: إذا كان لديك توزيع ذو حدين فيه $n = 50, \sigma = 1.54$ ، فما وسط التوزيع؟ (إرشاد: p أقرب إلى 0 منها إلى 1). **انظر الهامش**

26) اكتب: صِفّ طريقة أخرى يمكنك استعمالها؛ لإيجاد احتمال إجابة 3 طلبة على الأقل إجابة اعتيادية أو $P(X \geq 3)$ في المثال 7. أعطِ مثالًا يكون فيه استعمال هذه الطريقة أسرع. **انظر الهامش**

مراجعة تراكمية

27) مزاد علني: يُبيّن الجدول أدناه أسعار بيع أرقام خاصة للسيارات. (الدرس 1-6) **للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات**

أسعار الأرقام (BD)					
1800	600	600	750	600	1800
600	750	1200	300	450	1350
300	750	600	2700	450	750
1200	2700	450	600	300	750



a) استعمل المدرج التكراري أعلاه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.

b) لخِّص تمركز البيانات، وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة، وبرِّر إجابتك.

أوجد الزاوية بين كل متجهين مما يأتي: (الدرس 5-4)

28) $\mathbf{u} = \langle 2, 9, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 7, 6 \rangle$ **63.03°**

29) $\mathbf{m} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{n} = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ **93.4°**

30) $\mathbf{u} = \langle 8, -2, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 6, -10 \rangle$ **111.1°**

تدريب على اختبار معياري

31) تشير نتائج إحدى الإحصائيات إلى أن 48% من الأشخاص يستعملون الإنترنت أسبوعيًّا مرة على الأقل. تم اختيار 10 أشخاص عشوائيًّا، ما احتمال أن 7 أشخاص منهم على الأقل استعملوا الإنترنت مرة على الأقل أسبوعيًّا؟ **D**

A 3.4% C 10.0%

B 4.8% D 14.1%

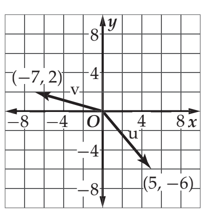
32) ماناتج $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ من الشكل المجاور؟ **A**

A −47

B −24

C −6

D 47



تنويع التعليم

فوق

توسّع قسِّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية، على أن يقوم طالب من كل مجموعة بكتابة سؤال مسح إحصائي من اهتمامات المجموعة. كلف كل مجموعة بمناقشة كيفية تحقيق السؤال لشروط تجربة ذات حدين وكتابة نتائج المسح، ثم تحديد كل من n, p, q وتكوين توزيع ذي حدين وتمثيله بيانيًّا.

26) إجابة ممكنة: بدلاً من إيجاد $P(3), P(4), P(5)$ ، ثم جمع النتائج يمكنك إيجاد $P(0), P(1), P(2)$، ثم جمع النتائج، وطرح الناتج من 1 . تكون هذه الطريقة أسرع إذا أوجدت $P(X \geq 1)$ أو $P(X \geq 2)$ في مثال 7 .

6-3 التوزيع الطبيعي
The Normal Distribution

لماذا ؟

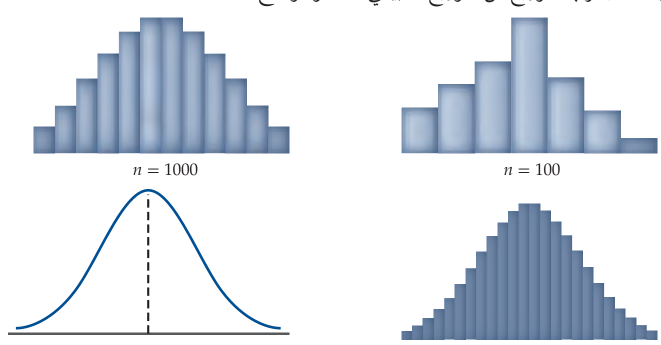
في السنوات الأخيرة وفي إحدى الدول تَبيّن أن 107 ملايين نسمة ممن أعمارهم 20 سنة فأكثر تصل نسبة الكولسترول عندهم إلى 200 mmol/L ، أو تزيد على ذلك. ويستعمل الأطباء هذه المتغيرات لمقارنة نسبة الكولسترول عند المرضى مع النسبة الطبيعية لمستويات الكولسترول. وفي هذا الدرس سوف تحسب احتمال وجود نسبة محددة من الكولسترول عند شخص تم اختياره عشوائيًا.

التوزيع الطبيعي يُسمَّى التوزيع الاحتمالي لمتغير متصل التوزيع الاحتمالي المتصل. ومن أكثر هذه التوزيعات استعمالًا **التوزيع الطبيعي**، وفيما يأتي خصائص هذا التوزيع.

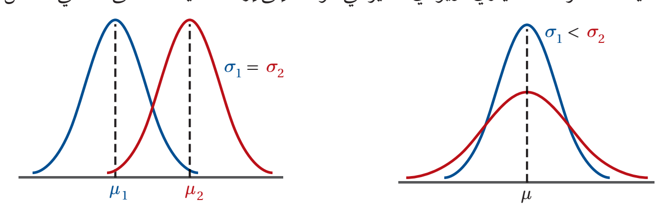
مفهوم أساسي **خصائص التوزيع الطبيعي**

- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل بالنسبة للوسط.
- يتساوى الوسط والوسيط والمنوال وتقع في المركز.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x ، ولكنه لا يمسه.
- المساحة تحت المنحنى تساوي 1 ، أو 100 % .

افترض أنك مهتم بالتوزيع الاحتمالي المتصل لزمن قَطع مسافة 400 m عَدْوًا لعينة مكوّنة من 100 متسابق. وإذا قمت بزيادة حجم العينة وتقليل طول الفئة، فإن التوزيع يصبح أكثر تماثلًا، وإذا كان بالإمكان التعامل مع المجتمع الإحصائي بكامله يقترب التوزيع من التوزيع الطبيعي كما هو موضح أدناه.



يعتمد شكل التوزيع الطبيعي لمتغير عشوائي على الوسط والانحراف المعياري فمثلًا في الشكل (1) يتوسّع المنحنى؛ نتيجةً لزيادة قيمة الانحراف المعياري. ويؤدي التغير في الوسط إلى إزاحة أفقية للمنحنى كما في الشكل (2) .



الشكل (1) الشكل (2)

فيما سبق
درست التوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية منفصلة.

والآن
الأفكار الرئيسة
- أجِدُ المساحة تحت منحنيات توزيعات طبيعية.
- أجِدُ احتمالات ضمن توزيعات طبيعية، وأجِدُ قيم بيانات عُلمت احتمالاتها.

المفردات الأساسية
التوزيع الطبيعي
normal distribution
القانون التجريبي
empirical rule
قيمة z
z-value
التوزيع الطبيعي المعياري
standard normal distribution

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-3
تحليل التوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية منفصلة.

الدرس 6-3
إيجاد المساحة تحت منحنيات توزيعات طبيعية.
إيجاد احتمالات ضمن توزيعات طبيعية معيارية، وإيجاد قيم بيانات عُلمت احتمالاتها.

ما بعد الدرس 6-3
استعمال التوزيع الطبيعي؛ لإيجاد فترات الثقة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- افرض أن وسط أوزان نوع من السمك تم اصطياده في منطقة ما يساوي 25 Ib. إذا ذهبت لهذه المنطقة، واصطدت سمكة من النوع نفسه، فماذا تتوقع أن يكون وزنها؟ 25 Ib
- أيهما أكثر احتمالًا، اصطياد سمكة وزنها 30 Ib أو 40 Ib؟ 30 Ib
- ما الوزن المعقول لسمكة يزيد وزنها عن 90% من الأسماك الأخرى التي تم اصطيادها؟ بما أن الوزن كبير، ولا نعرف تشتت البيانات، فإنه لا يمكن الإجابة.
- ما الحدث الأكثر منطقية: وزن السمكة التي اصطدتها أقل من 23 Ib أو وزنها أقل من 20 Ib؟ وزن السمكة أقل من 23 Ib

مصادر الدرس 6-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (282)	• تنويع التعليم ، ص (282)	• تنويع التعليم ، ص (285)
مصادر الفصل	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (32) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية	• دليل الدراسة والمعالجة • تدريبات المهارات • كتاب التمارين ، ص (32) • تدريبات المسائل اللفظية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية • تدريبات إثرائية	• كتاب التمارين ، ص (32) • تدريبات المسائل اللفظية • تدريبات إثرائية • نشاط الآلة الحاسبة البيانية
مصادر إضافية	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب	• كراسة الطالب

التوزيع الطبيعي

مثال 1 يُبيّن كيفية استعمال القانون التجريبي؛ لإيجاد الاحتمالات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تأكد" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **ارتفاعات:** تتخذ ارتفاعات 32 قمة من قمم الجبال شكل التوزيع الطبيعي، بوسط مقداره 10200 ft وانحراف معياري مقداره 295 ft.

a) كم قمة تقريبًا يزيد ارتفاعها على 10495 ft؟ 5 تقريبًا

b) ما نسبة القمم التي تقع ارتفاعاتها بين 9610 ft - 10790 ft؟ 95% تقريبًا

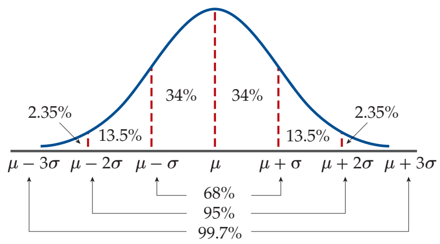
تُمثّل المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين قيمتين من المشاهدات (البيانات) نسبةَ المشاهدات التي تقع ضمن هذه الفترة. يمكن استعمال **القانون التجريبي**؛ لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي، وعلى فترات تبعُد عن الوسط بمقدار انحراف معياري أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات.

إرشادات للدراسة

قانون تجريبي يُعرف القانون التجريبي كذلك بالقاعدة 99.7 - 95 - 68 .

مفهوم أساسي — القانون التجريبي

في توزيع طبيعي وسطه μ ، وانحرافه المعياري σ



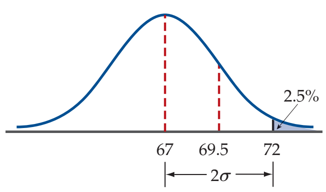
- تقع 68% تقريبًا من المشاهدات بين $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$.
- تقع 95% تقريبًا من المشاهدات بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$.
- تقع 99.7% تقريبًا من المشاهدات بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$.

يمكنك حَلّ مسائل تتخذ مشاهداتها التوزيع الطبيعي باستعمال القانون التجريبي.

مثال 1 استعمال القانون التجريبي

طول: تتخذ أطوال 880 طالبًا في إحدى الجامعات شكل التوزيع الطبيعي، بوسط مقداره 67 in ، وانحرافٍ معياري مقداره 2.5 in.

a) كم طالبًا تقريبًا يزيد طوله على 72 in ؟

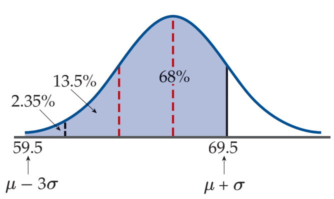


لإيجاد عدد الطلبة الّذين تزيد أطوالهم على 72 in، أوجد المساحة على يمين هذا العدد تحت المنحنى.

يوضح الشكل المجاور أن الطول 72 يبعُد 2σ عن الوسط ، وبما أن 95% من المشاهدات تقع بين انحرافين معياريين عن الوسط، فإن كل ذيل يُمثّل 2.5% من المشاهدات. أي أن المساحة على يمين 72 تُمثّل 2.5% من 880 أي 22 = 2.5% × 880.

لذا، يكون عدد الطلبة الّذين تزيد أطوالهم عن 72 in هو 22 طالبًا تقريبًا.

b) ما نسبة الطلبة الّذين تقع أطوالهم بين 59.5 in و 69.5 in؟



تُمثّل المساحة المظللة في الشكل المجاور نسبة الطلبة الّذين تقع أطوالهم بين 59.5 in و 69.5 in وتقع بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+\sigma$. وتكون المساحة تحت المنحنى بين 59.5 و 69.5 مساوية لمجموع مساحات كل منطقة.

$$2.35\% + 13.5\% + 68\% = 83.85\%$$

لذا، فإن 84% من الطلبة تقريبًا تقع أطوالهم بين 59.5 in و 69.5 in.

إرشادات للدراسة

المساحة تحت المنحنى استعمل 2.5% عندما يُطلب إيجاد عدد الأشخاص كما في المثال 1a ، أو عددهم الذي يزيد على، أو ينقل عن قيمة معينة؛ لأن عليك حساب المساحة على يمين، أو يسار القيمة المطلوبة جميعها.

تأكد

1) **صناعة:** تُستعمل آلة لتعبئة عبوات بالمياه المعدنية، وتختلف كمية الماء اختلافًا ضئيلًا بين العبوات. إذا كان حجم الماء في 120 عبوة يتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط 1.1 L، وانحراف معياري 0.02 L.

A) كم عبوة تقريبًا يكون حجم الماء فيها أقل من 1.06 L؟ 3

B) كم نسبة العبوات التي يكون فيها حجم الماء بين 1.08 L و 1.14 L؟ 81.5%

إرشادات للمعلم الجديد

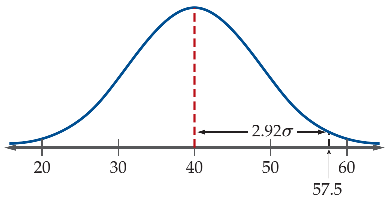
قيمة عظمى لاحظ أن منحنى التوزيع الطبيعي قيمةً عظمى عند الوسط.

يُستعمل القانون التجريبي؛ لتحليل التوزيع الطبيعي عند حساب قيم محددة فقط مثل $\mu + \sigma$. ويمكن تحويل قيم المتغير في التوزيع الطبيعي إلى قيم معيارية (z)، والتي يمكن استعمالها لتحليل أي مدى من القيم في التوزيع الطبيعي، حيث يُسمى هذا التحويل توحيد المعيار. وتُسمى **قيمة z** الدرجة المعيارية، وتُمثّل عدد الانحرافات المعيارية لقيمة عن الوسط.

مفهوم أساسي — صيغة الدرجة المعيارية (قيمة z)

تُعطى الدرجة المعيارية z لقيمة في مجموعة بيانات بالصيغة $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ، حيث X القيمة، و μ الوسط، و σ الانحراف المعياري.

يمكنك استعمال قيم z ؛ لتحديد موقع أي قيمة ضمن مجموعة بيانات؛ فمثلًا إذا كان لديك توزيع فيه $\mu = 40$ ، و $\sigma = 6$ ، فإن القيمة 57.5 تبعُد 2.92 انحرافًا معياريًا تقريبًا عن الوسط، كما في الشكل أدناه. لذا، فإن $X = 57.5$ ترتبط بالدرجة المعيارية 2.92 .



مثال 2 — استعمال صيغة الدرجة المعيارية

أوجد كلًّا مما يأتي:

a) قيمة z ، إذا كانت $X = 24, \mu = 29, \sigma = 4.2$.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة الدرجة المعيارية
$= \frac{24 - 29}{4.2}$	$X = 24, \mu = 29, \sigma = 4.2$
≈ -1.19	بالتبسيط

أي أن قيمة z التي ترتبط بالقيمة $X = 24$ هي -1.19 . وعليه، فإن 24 تقل عن الوسط بمقدار 1.19 انحرافًا معياريًّا في هذا التوزيع.

b) قيمة X ، إذا كانت $z = -1.73, \mu = 48, \sigma = 2.3$.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة الدرجة المعيارية
$-1.73 = \frac{X - 48}{2.3}$	$\mu = 48, \sigma = 2.3, z = -1.73$
$-3.979 = X - 48$	بضرب كلا الطرفين في العدد 2.3
$44.021 = X$	بإضافة 48 للطرفين

أي أن الدرجة المعيارية -1.73 ترتبط بالقيمة 44 تقريبًا في هذا التوزيع.

تأكد

أوجد كلًّا مما يأتي:

2A) قيمة z ، إذا كانت $X = 32, \mu = 28, \sigma = 1.7$ **2.35**

2B) قيمة X ، إذا كانت $z = 2.15, \mu = 39, \sigma = 0.4$ **39.9**

لكل توزيع طبيعي لمتغير عشوائي وسط وانحراف معياري وحيدان يؤثِّران على موقع المنحنى وشكله. لذلك هناك عدد لا نهائي من التوزيعات الاحتمالية الطبيعية، وترتبط كلها بتوزيع واحد يُسمَّى **التوزيع الطبيعي المعياري**، وهو توزيع طبيعي وسطه 0، وانحرافه المعياري 1 .

إرشادات للدراسة

قيم z الموجبة والسالبة إذا كانت القيمة أقل من الوسط، تكون قيمة z المرتبطة بها سالبة. وإذا كانت القيمة أكبر من الوسط، فإن قيمة z المرتبطة بها موجبة.

إرشادات للدراسة

الموقع النسبي تستعمل قيم z ؛ لمقارنة الموقعين النسبيين لقيمتين في توزيعين مختلفين تمامًا كما في المئينات.

التوزيع الطبيعي

مثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد قيم z واستعمالها في الربط مع قيم X, μ, σ .

مثال إضافي

2 أوجد كلًّا مما يأتي:

a) قيمة z ، إذا كانت $X = 36, \mu = 40, \sigma = 6$. **-0.67**

b) قيمة X ، إذا كانت $z = 1.5, \mu = 1.3, \sigma = 0.6$. **2.2**

التركيز في المحتوى الرياضي

الانحراف المعياري تستعمل صيغة حساب الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n}}$ ، في المتغيرات العشوائية المنفصلة. وتستعمل معادلة أخرى لحساب الانحراف المعياري للمتغيرات العشوائية المتصلة؛ لأن احتمالاتها تكون لفترات بدلًا من قيم مفردة والمعادلة هي: $\sigma = \sqrt{\int (x - \mu)^2 \, p(x)dx}$ ، حيث $p(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ، $\mu = \int xp(x)\,dx$. وكلا التكاملين محدد على الفترة المعطاة.

التوزيع الطبيعي

مثال 3 يُبيّن كيفية استعمال التوزيع الطبيعي المعياري لحساب الاحتمالات.

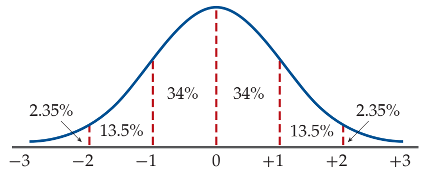
مثال إضافي

3 **تجارة:** قام تاجر بتسجيل المكالمات الصادرة منه خلال 60 يومًا. فوجد أن مُعدّل مكالماته اليومية 20 مكالمة، بانحراف معياري مقداره 4 . أوجد عدد الأيام التي أجرى فيها التاجر أكثر من 25 مكالمة، إذا كان عدد المكالمات يتخذ شكل التوزيع الطبيعي.

6 أيام تقريبًا

تتلخص خصائص التوزيع الطبيعي المعياري فيما يأتي:

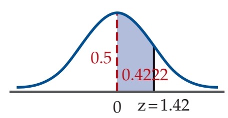
مفهوم أساسي — خصائص التوزيع الطبيعي المعياري



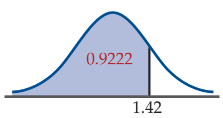
- **المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي 1 أو 100% .**
- **كل المساحة تقريبًا تقع بين $z = -3$ و $z = 3$.**
- **التوزيع متماثل.**
- **الوسط 0 ، والانحراف المعياري 1 .**
- **يقترب المنحنى من المحور x ، ولكنه لا يمسه.**

يمكنك حَلّ مسائل التوزيع الطبيعي المعياري بإيجاد قيم z المرتبطة بقيم X ، ومن ثم إيجاد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري. ويمكن إيجاد هذه المساحة باستعمال جدول لقيم z بصفحة 291 ، حيث تُعطى المساحة بين 0 وأي قيمة لِـ z على يمين 0 ، ثم إضافة 0.5 للقيمة التي تم إيجادها. فمثلًا، الجدول المجاور والشكل (1)، يوضِّحان المساحة تحت المنحنى بين 0 و $z=1.42$ على يمين 0 ، وتساوي 0.4222 . أما المساحة تحت المنحنى المرتبطة بقيمة $z=1.42$ (على يسار $z = 1.42$) فتساوي $0.5+0.4222=0.9222$ كما في الشكل (2) .

z	0.00	0.01	0.02
0.0	.0000	.0040	.0080
.	.	.	.
.	.	.	.
1.4	.4192	.4207	.4222



الشكل (1)



الشكل (2)

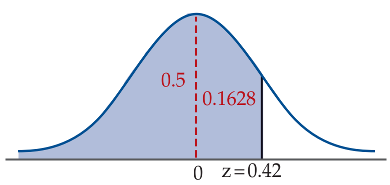
ويمكن كذلك إيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي على يسار قيمة معطاة من z، باستعمال الآلة الحاسبة البيانية .

مثال 3 — استعمال التوزيع الطبيعي المعياري

اتصالات: **يتلقى مركز خدمة اتصالات مكالمات يومية بوسط 105 مكالمة، وبانحراف معياري قدره 12 خلال شهر فيه 30 يومًا. على افتراض أن عدد المكالمات موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا، أوجد عدد الأيام التي تقل فيها عدد المكالمات عن 110 .**

صيغة الدرجة المعيارية $\quad z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$X = 110,\ \mu = 105,\ \sigma = 12 \quad = \dfrac{110-105}{12} \approx 0.42$



يمكنك إيجاد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري، باستعمال جدول لقيم z ، فالمساحة تحت المنحنى على يسار $z=0.42$ تساوي :

$0.66 \approx 0.5+0.1628=0.6628$ ، حيث 0.1628 هي المساحة المعطاة في جدول قيم z كما في الشكل المجاور. وبما أنه يوجد 30 يومًا في الشهر، فإن عدد الأيام التي يقل فيها عدد المكالمات عن 110 يساوي $30 \times 0.66 = 19.8$ يومًا.

لذا، يكون عدد الأيام التي تقل فيها عدد المكالمات عن 110 يساوي 20 يومًا تقريبًا.

تأكد

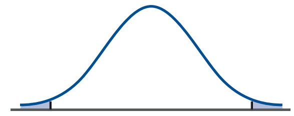
3) **كرة سلة :** إذا كان الوسط لعدد النقاط التي يسجِّلها فريق لكرة السلة في المباراة الواحدة 63 نقطة، والانحراف المعياري 18، وأُجريت 15 مباراة في أحد المواسم الكروية، فأوجد نسبة مباريات الفريق التي سجَّل فيها أكثر من 70 نقطة، افترض أن عدد النقاط موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا. 35 %

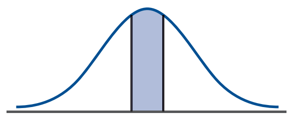
إرشاد تقني

المساحة تحت المنحنى الطبيعي يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية ؛ لإيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي ، والمرتبطة بأي زوج من قيم z باختيار المفاتيح 2nd ثم [DISTR] ، ومنها اختيار normalcdf بـ (أكبر قيمة لِـ z ، أقل قيمة لِـ z).

280 الفصل 6 الإحصاء والتوزيعات الاحتمالية

وكما أوجدت المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والمرتبطة بقيمة z ، فإن بإمكانك كذلك إيجاد قيمة z المرتبطة بمساحة محددة، فمثلًا يمكنك إيجاد قيمة z المرتبطة بمساحة تراكمية %99 ,%20 ,%1. ويمكنك كذلك إيجاد فترات قيم z التي تحتوي أو تقع بينها نسبة محددة من البيانات.


%1 على الطرفين

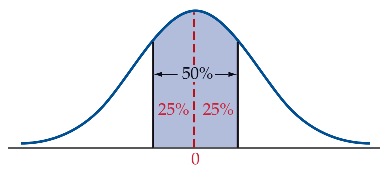

%20 في المنتصف

مثال 4 إيجاد قيم z المرتبطة بمساحة معطاة

أوجد فترة لقيم z ترتبط بالمساحات الآتية :

a) %50 من منتصف توزيع البيانات

ترتبط %50 من منتصف توزيع البيانات بالبيانات بين %25 و %75 من التوزيع، أو 0.25 و 0.75 كما في الشكل أدناه، ولإيجاد الفترة التي ترتبط بالمساحة %50. فإننا نجد قيمة z من جدول القيم المقابلة للمساحة %25 أو 0.25.

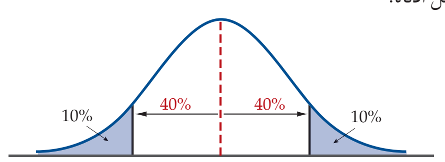


وباستعمال جدول قيم z ، فإن المساحة 0.25 تقابل في الجدول قيمة $z = 0.67$ ، وحيث إن التوزيع الطبيعي المعياري متماثل، فإن قيمتي z اللّتين تحصران مساحة %50 من منتصف توزيع البيانات هما 0.67، -0.67 كما في الشكل أعلاه.

لذا، فإن الفترة التي تُمثّل %50 من منتصف توزيع البيانات هي $-0.67 < z < 0.67$.

b) %20 من توزيع البيانات على الطرفين.

%20 من توزيع البيانات على الطرفين تُمثّل %10 على يمين أحد الطرفين، و %10 على يسار الطرف الآخر؛ كما في الشكل أدناه.



وباستعمال جدول قيم z فإن المساحة 0.4 تقابل في الجدول قيمة $z = 1.28$، وبما أن التوزيع الطبيعي المعياري متماثل، فإن قيمتي z اللتين تحصران %20 من توزيع البيانات على الطرفين هما 1.28 ، -1.28 كما في الشكل أعلاه.

لذا، فإن الفترة التي تُمثّل %20 من توزيع البيانات على الطرفين هي $z < -1.28$ ، أو $z > 1.28$.

✓ تأكد

أوجد فترة لقيم z ترتبط بالمساحات الآتية :

4A) %75 من منتصف توزيع البيانات.

4B) %60 من توزيع البيانات على الطرفين.

4A) $-1.15 < z < 1.15$

4B) $z > 0.52$ أو $-0.52 > z$

إرشادات للدراسة

تماثل التوزيع الطبيعي متماثل، لذلك عندما تُسأل عن المنتصف أو الأطراف فإن قيم z تكون متعاكسة.

التوزيع الطبيعي

مثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد قيم z إذا أُعطيت المساحة تحت المنحنى الطبيعي.

مثال إضافي

4 أوجد فترة لقيم z ترتبط بالمساحات الآتية:

a) %68 من منتصف توزيع البيانات.
$-1 < z < 1$

b) أعلى %5 من توزيع البيانات.
$z > 1.64$

التعليم باستعمال التقنيات

الآلة الحاسبة البيانية قسّم طلبة الصف إلى مجموعات صغيرة، وكلفهم كتابة سؤالين أحدهما معطى فيه فترة ويطلب إيجاد الاحتمال، والثاني معطى فيه الاحتمال ويطلب تحديد الفترة. اسمح للطلبة بمراجعة الأسئلة والتحقق من إجاباتها، واعرض السؤالين على السبورة، أو على السبورة التفاعلية.

الدرس 3-6 التوزيع الطبيعي 281

الاحتمال والتوزيع الطبيعي لاحظ أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري ترتبط بقيم البيانات ضمن فترة، وترتبط المساحة كذلك باحتمال وقوع البيانات ضمن فترة معطاة، فاحتمال اختيار قيمة عشوائية لـ z بين 0 و 1 يكافئ المساحة تحت المنحنى بين 0 و 1، وتساوي 0.3413، لذلك، فاحتمال اختيار قيمة لـ z بين 0 و 1 يساوي 34% تقريبًا.

إرشادات للدراسة

النسبة المئوية، التناسب، الاحتمال، المساحة عند السؤال عن النسبة المئوية أو التناسب أو الاحتمال، فإننا نسأل عن القيمة نفسها، وهي المساحة تحت المنحنى الطبيعي التي ترتبط بهذه القيم.

مثال 5 إيجاد الاحتمالات

أرصاد جوية: إذا كانت درجة الحرارة في إحدى المدن خلال شهر تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وفيه $\mu = 81°$، و $\sigma = 6°$، فأوجد الاحتمالات المطلوبة، وارسم المساحة تحت المنحنى والمرتبطة بالاحتمال.

a) $P(70° < X < 90°)$

المطلوب نسبة الدرجات التي تقع بين °70 و °90 بالنسبة للتوزيع. لذا أوجد أولًا قيمة z المرتبطة بـ $X = 70°$ و $X = 90°$.

عندما $X = 70°$.

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$ صيغة الدرجة المعيارية

$$= \frac{70-81}{6}$$ $X = 70, \mu = 81, \sigma = 6$

$$\approx -1.83$$ بالتبسيط

عندما $X = 90°$.

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$ صيغة الدرجة المعيارية

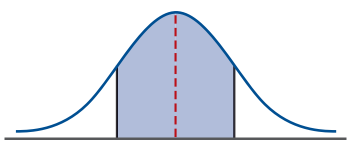
$$= \frac{90-81}{6}$$ $X = 90, \mu = 81, \sigma = 6$

$$\approx 1.5$$ بالتبسيط

إرشادات للدراسة

الاتصال في التوزيعات المتصلة لا يوجد فرق بين $P(X > c)$ و $P(X \geq c)$ لأن $P(X = c) = 0$.

وباستعمال جدول قيم z، فإن المساحة المقابلة لـ $z = 1.5$ تساوي 0.4332، والمساحة المقابلة لـ $z = -1.83$ تساوي 0.4664، كما في الشكل المجاور، وفي هذه الحالة المساحة بين $z = -1.83$ و $z = 1.5$ هي: $0.4332 + 0.4664 = 0.89956$ كما في الشكل المجاور.



لذا، فإن 90% تقريبًا من درجات الحرارة تقع بين °70 و °90.

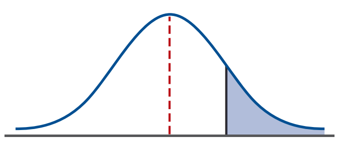
b) $P(X \geq 95°)$

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$ صيغة الدرجة المعيارية

$$= \frac{95-81}{6}$$ $X = 95, \mu = 81, \sigma = 6$

$$\approx 2.33$$ بالتبسيط

يمكنك إيجاد المساحة تحت المنحنى على يمين $z = 2.33$ باستعمال جدول قيم z. أوجد المساحة المقابلة لـ $z = 2.33$ وتساوي 0.4901. وفي هذه الحالة المساحة على يمين $z = 2.33$ تساوي $0.5 - 0.4901 = 0.0099$ كما في الشكل المجاور.



وعليه، فإن احتمال اختيار درجة حرارة أكبر من أو تساوي °95 اختيارًا عشوائيًّا يساوي تقريبًا 1% .

تأكد

5) **امتحان:** إذا كانت درجات أحد امتحانات الرياضيات لنهاية الفصل موزعة توزيعًا طبيعيًا، حيث $\mu = 72$، و $\sigma = 11$، فأوجد الاحتمالات الآتية، ثم ارسم المساحة تحت المنحنى، والمرتبطة بالاحتمال.

A) $P(X < 89)$ **93.9%**

B) $P(65 < X < 85)$ **62%**

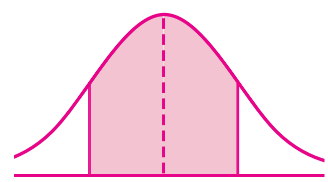
الاحتمال والتوزيع الطبيعي

مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد الاحتمالات في توزيع طبيعي إذا أعطيت قيم X.

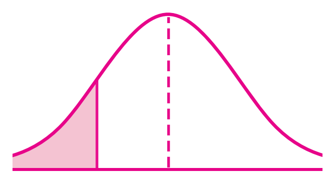
مثال إضافي

5 **مرور:** إذا كان عدد السيارات التي مرت من تقاطع لأحد الشوارع يتخذ شكل التوزيع الطبيعي وفيه $\mu = 1210$, $\sigma = 220$. أوجد الاحتمالات الآتية، وارسم المساحة تحت المنحنى المرتبطة بالاحتمال.

a) $P(1000 < X < 1420)$ **66.0%**



b) $P(X < 950)$ **11.9%**



إرشادات للمعلم الجديد

رسم المنحنى الطبيعي يغير المنحنى اتجاه تقعره عند النقاط التي تبتعد بمقدار انحراف معياري واحد عن الوسط.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة كتابة خطوات تحديد المساحة تحت المنحنى الطبيعي؛ بهدف تحديد الاحتمالات المرتبطة بفترات من الانحرافات المعيارية، حيث تتطلب هذه العملية متعددة الخطوات التبرير الاستنتاجي لتحليل الشكل.

يمكنك إيجاد فترات محددة من البيانات لاحتمالات أو نسب مئوية معطاة باستعمال التوزيع الطبيعي المعياري.

الربط مع واقع الحياة

بلغ معدّل درجات اختبار SAT لهذا العام: 502 في القراءة الناقدة، و 515 في الرياضيات، و 494 في الكتابة، أما معدّل درجات اختبار ACT فقد كان 21.1 في العام نفسه.

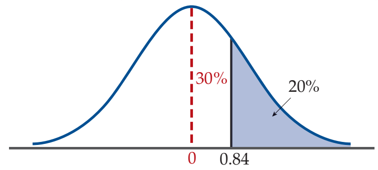
المصدر: USATODAY

مثال 6 إيجاد فترات من البيانات

كلية علوم: افترض أن نتائج اختبار القبول في قسم الرياضيات في إحدى كليات العلوم موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا، وفيه $\mu = 65$ ، $\sigma = 8$.

a) إذا رغب سلطان أن تكون درجته من أعلى 20% من الدرجات، فما هي الدرجة التي يجب أن يحصل عليها؟

لإيجاد أعلى 20% من الدرجات، فأوجد درجة الاختبار X التي تفصل أعلى 20% من المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري، كما في الشكل أدناه. وباستعمال جدول قيم z تجد قيمة z المرتبطة بالمساحة 30% أو 0.3 .



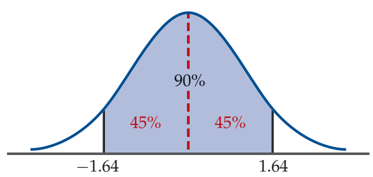
استعمل صيغة الدرجة المعيارية؛ لإيجاد درجة الاختبار المطلوبة X والمرتبطة بقيمة z .

صيغة الدرجة المعيارية	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
$\mu = 65, \sigma = 8, z = 0.84$	$0.84 = \frac{X - 65}{8}$
بضرب كل طرف في العدد 8	$6.72 = X - 65$
بإضافة 65 لكل طرف	$71.72 = X$

يحتاج سلطان للحصول على الدرجة 72 على الأقل؛ لتكون درجته من أعلى 20% من درجات الاختبار.

b) توقَّع سلطان أن يحصل على درجة تكون ضمن 90% من منتصف الدرجات. ما مدى الدرجات التي تقع ضمن هذه النسبة؟

90% من منتصف الدرجات تُمثّل 45% على كل جهة من جهتي الوسط، وباستعمال جدول قيم z، فإن قيمة z المقابلة للمساحة 0.45 هي 1.64 m . لذا، فإن قيمتي z هما 1.64 ، 1.64− على الترتيب، كما في الشكل المجاور.



استعمل صيغة الدرجة المعيارية؛ لإيجاد قيمة X .

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة الدرجة المعيارية	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
$1.64 = \frac{X - 65}{8}$	$\mu = 65, \sigma = 8$	$-1.64 = \frac{X - 65}{8}$
$13.162 = X - 65$	بالضرب	$-13.12 = X - 65$
$78.162 = X$	بالتبسيط	$51.88 = X$

لذا، يتوقّع سلطان أن تكون درجته بين 52 و 78 .

تأكد

6) **بحث:** قام باحث بإجراء دراسة طبية تتعلق بأوزان عيّنة من الأشخاص. وكان وسط الأوزان 190 lb، وانحرافها المعياري 12 lb . أفرض أن الأوزان موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا، فأجب عما يأتي:

A) إذا كانت الدراسة تركز على أفراد العينة الّذين تقع أوزانهم ضمن 80% من منتصف الأوزان، فما مدى الأوزان، التي تقع ضمنها هذه النسبة؟

B) إذا رَكَّزت الدراسة على أفراد العينة الّذين تقع أوزانهم ضمن 5% من طرفي التوزيع، فما مدى الأوزان التي تقع ضمنها هذه النسبة؟

6A) $174.6 < X < 205.4$

6B) $X > 213.5$ أو $X < 166.5$

الاحتمال والتوزيع الطبيعي

مثال 6 يُبيّن كيفية إيجاد فترات من المشاهدات في توزيع طبيعي معياري إذا أُعطيت الاحتمالات.

مثال إضافي

6 **رفع الأثقال:** في إحدى بطولات رفع الأثقال التي تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، كان $\mu = 265$ lb ، $\sigma = 45$ lb .

a) إذا رغب أحد الرِّياضيين أن يكون ضمن الثلث الأعلى من التوزيع، ما الوزن الذي يجب عليه رفعه؟ **284 lb**

b) ما مدى الأثقال التي يجب رفعها؛ لتبقي أحد اللاعبين ضمن 80% من منتصف التوزيع؟ **207 lb إلى 323 lb**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 13-1 للتأكد من مدى فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

المنحنى الطبيعي إذا احتاج الطلبة إلى مساعدة في التمرينين 12,13، فاقترح عليهم رسم المساحة المظللة تحت المنحنى الطبيعي أولاً، وبعدها يمكنهم تحديد القيمة العظمى والصغرى من هذه المساحة بسهولة.

تنبيه!

أخطاء شائعة في التمرين 14 إذا اعتقد الطلبة أن أداء علي كان أفضل في الرياضيات؛ لأن $81 > 76$ ، فذكرهم بأن عليهم المقارنة بين الدرجات المعيارية z.

إجابات:

7) $-0.39 < z < 0.39$

8) $z < -1.44$ وَ $z > 1.44$

9) $z < -0.84$ وَ $z > 0.84$

10) $-0.13 < z < 0.13$

14) إجابة ممكنة: قيمة z في الفيزياء 0.4 وفي الرياضيات 0.33 . بما أن قيمة z في الفيزياء أكبر، يكون أداء علي أفضل في الفيزياء.

19a) أكثر رطوبة نسبية في المدينة 3 . أقل رطوبة نسبية في المدينة 2 . قيم z للمدن $1, 2, 3$ هي $0.25, 0.2, 0.3$ على الترتيب.

19b) درجتها المعيارية 0.375؛ لذلك يكون فيها أعلى رطوبة نسبية بين جميع المدن.

تدرب وحل المسائل

1) **استهلاك البنزين:** يقطع عبد اللّه مسافة 290 mi أسبوعيًّا بسيارته؛ بسبب العمل. إذا كان متوسط ما تقطعه سيارته 29.6 mi/gal، وبانحراف معياري 5.4 mi/gal. أفرض أن البيانات موزعة توزيعًا طبيعيًّا، فأجب عما يأتي: (مثال 1)

a) كم ميلًا يمكن أن تقطعه سيارة عبد اللّه بمتوسط أكبر من، أو يساوي 35 mi/gal ؟ **46.4 mi**

b) أوجد النسبة المئوية للمسافة التي تقطعها سيارة عبد اللّه في الفترة التي تقطع سيارته فيها بين 24.2 mi/gal، و 40.4 mi/gal. **81.5%**

أوجد المطلوب في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

2) قيمة z، إذا كانت $X = 19, \mu = 22, \sigma = 2.6$ **−1.15**

3) قيمة X، إذا كانت $z = 2.3, \mu = 64, \sigma = 1.3$ **66.99**

4) قيمة z، إذا كانت $X = 52, \mu = 43, \sigma = 3.7$ **2.43**

5) **علم الأسماك:** درس أحد علماء الأسماك الوسط لنمو 797 من سمك السلّور الذهبي الأخضر، فوجد المعلومات الآتية موزّعة توزيعًا طبيعيًّا. (مثال 3) **للفرعين a، b انظر ملحق الإجابات**

a) أوجد عدد الأسماك التي يقل طولها عن 4.5mm عند فقس البيض.

b) أوجد عدد الأسماك التي يزيد طولها عن 5mm عند فقس البيض.

6) **سكة حديد:** إذا كانت الفترات الزمنية للانتظار التي يقضيها 16000 مسافر في إحدى محطات سكك الحديد موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بوسط مقداره 72 min، وانحراف معياري 15 min. (مثال 3)

a) أوجد عدد المسافرين الّذين ينتظرون أقل من 60 min. **3390**

b) أوجد عدد المسافرين الّذين ينتظرون أكثر من 90 min. **1842**

أوجد فترة قيم z المرتبطة بكل مساحة مما يأتي: (مثال 4) **للتمارين 10-7 انظر الهامش**

7) 30% من منتصف توزيع البيانات 8) 15% على الطرفين

9) 40% على الطرفين 10) 10% من منتصف توزيع البيانات

11) **صحة** إذا كان مستوى الكولسترول عند الأشخاص البالغين في إحدى الدول موزعًا توزيعًا طبيعيًّا بوسط مقداره 5.3 mmol/L تقريبًا (مليمول لكل لتر) وانحراف معياري 1 mmol/L تقريبًا، فأوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية: (مثال 5)

a) أن يكون مستوى الكولسترول عند شخص ما أقل من 4.1 mmol/L تقريبًا (يعد هذا المستوى منخفضًا وقد يؤدي إلى زيادة خطورة الإصابة بالسكتة الدماغية). **13%**

b) أن يكون مستوى الكولسترول أكثر من 6.2 mmol/L تقريبًا (يعد هذا المستوى مرتفعًا وقد يؤدي إلى زيادة خطورة الإصابة بأمراض القلب). **17%**

c) أن يكون مستوى الكولسترول ما بين 4.7 mmol/L, 5.2 mmol/L تقريبًا (يعد هذا المستوى طبيعيًّا). **19%**

12) **ثلوج:** في إحدى المناطق الشمالية من الكرة الأرضية، تتساقط الثلوج سنويًّا، إذا كان سُمكُها موزَّعًا توزيعًا طبيعيًّا بوسط $\mu = 260$ cm، وانحراف معياري $\sigma = 27$ cm . (مثال 6)

a) أوجد الحد الأدنى لسُمْك الثلوج في أعلى 15% من التوزيع.

b) أوجد الحد الأعلى لسُمْك الثلوج في أدنى 30% من التوزيع.

c) أوجد المدى لسُمْك الثلوج الّذي يقع في 60% من منتصف توزيع البيانات . **للفروع a-c انظر ملحق الإجابات**

13) **سرعة:** إذا كان متوسط السرعة بالميل لكل ساعة في أحد الشوارع موزّعة توزيعًا طبيعيًّا، حيث $\mu = 37.5, \ \sigma = 5.5$. (مثال 6)

a) أوجد أقصى سرعة لأبطأ 10% من السيارات. **30.5 mi/h**

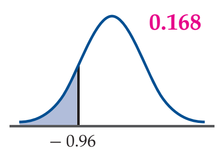
b) أوجد أدنى سرعة لأسرع 5% من السيارات. **46.5 mi/h**

c) ما مدى السرعة الّذي يقع في 25% من منتصف توزيع البيانات؟ **35.7 mi/h — 39.3 mi/h**

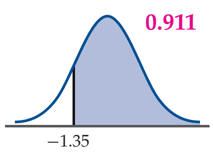
14) **اختبارات:** أدى علي اختبارَيْ فيزياء، ورياضيات، وكانت درجته في الفيزياء 76، ووسط الدرجات 72، وانحرافها المعياري 10 درجات. وكانت درجته في الرياضيات 81، ووسط الدرجات 78، وانحرافها المعياري 9. افرض أن البيانات موزّعة توزيعًا طبيعيًّا، في أي الاختبارين كان أداؤه أفضل؟ **انظر الهامش**

أوجد المساحة المرتبطة بالمنطقة المظلّلة في كلٍّ مما يأتي:

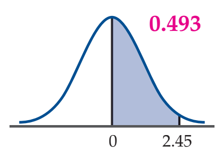
15) **0.168**



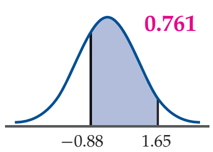
16) **0.911**



17) **0.493**



18) **0.761**



19) **أرصاد جوية:** يُبيِّن الجدول أدناه نسبة الرطوبة في ثلاث مدن في صباح أحد الأيام. إذا كانت البيانات موزّعة توزيعًا طبيعيًّا، فأجب عما يأتي: **للفرعين a, b انظر الهامش**

المدينة	الرطوبة النسبية	الوسط لنسبة الرطوبة	الانحراف المعياري
1	85%	82%	12%
2	94%	91%	15%
3	46%	43%	10%

a) أي المدن فيها أكبر رطوبة نسبية؟ وأيها فيها أقل رطوبة نسبية؟ برِّر إجابتك.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	21، 22، 24–37
ضمن المتوسط	14، 15، 17، 19–22، 24–37
فوق المتوسط	14–37

20) للفروع a, b, d, e انظر ملحق الإجابات

b) في مدينة رابعة بلغت الرطوبة النسبية 81%، والوسط لنسبة الرطوبة 78%، والانحراف المعياري 8%، أين سيكون موقعها بالنسبة للرطوبة النسبية بالمقارنة مع المدن الثلاث؟

20) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين سوف تستقصي شكل التوزيع الطبيعي لمجتمع يتكوّن من الأعداد 4, 6, 8, 10. اعتمد على البيانات في الإجابة عما يأتي:

a) **تمثيل بياني:** أنشئ أعمدة بيانية ، واستعملها لوصف شكل التوزيع، ثم أوجد الوسط والانحراف المعياري للبيانات.

b) **تمثيل بياني:** اختر ثماني عيّنات عشوائية في كلٍّ منها قيمتان من البيانات المُعطاة مع إمكانية التكرار، ثم مثِّل الوسط لها بيانيًّا باستعمال الأعمدة البيانية، واستعمل التمثيل البياني؛ لوصف شكل التوزيع، ثم أوجد الوسط والانحراف المعياري للعينات.

c) **جدولة:** يتضمن الجدول أدناه كل العينات الثنائية، التي يمكن تكوينها من البيانات المعطاة مع إمكانية التكرار. أوجد وسط كل عيّنة، ثم أوجد الوسط والانحراف المعياري لأوساط العينات. $\mu = 7, \sigma = 1.6$

العينة	الوسط	العينة	الوسط
4, 4	4	8, 4	6
4, 6	5	8, 6	7
4, 8	6	8, 8	8
4, 10	7	8, 10	9
6, 4	5	10, 4	7
6, 6	6	10, 6	8
6, 8	7	10, 8	9
6, 10	8	10, 10	10

d) **تمثيل بياني:** مثِّل أوساط العينات في الفرع c بالأعمدة البيانية، واستعمل التمثيل؛ لوصف شكل التوزيع. ماذا يحدث لشكل التوزيع إذا زاد حجم العينة؟

e) **تحليل:** اقسم الانحراف المعياري للبيانات الذي أوجدته في الفرع a على الجذر التربيعي لحجم العينة. ماذا يحدث حسب اعتقادك للوسط والانحراف المعياري للتوزيع كلما زاد حجم العيّنة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من محمد، وجاسم الفترة من قيم z المرتبطة بـ 35% من التوزيع على الطرفين. حيث اعتقد محمد أنها $z < -0.39$ ، $z > 0.39$، في حين اعتقد جاسم أنها $z < -0.93$ ، $z > 0.93$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك. انظر الهامش

22) **تبرير:** في التطبيقات الحياتية تقع قيم z عادة بين 3− و 3+ في التوزيعات الطبيعية المعيارية. وضِّح السبب؟ انظر الهامش

23) **تحدٍّ:** أوجد قيمتين لـ z واحدة موجبة والأخرى سالبة، بحيث يكون مجموع المساحتين عند الذيلين يكافئ كلًّا مما يأتي:

a) 1% b) 5% c) 10%

للفروع a-c انظر الهامش

24) **تبرير:** للمتغيرات المتصلة توزيع طبيعي أحيانًا، أو دائمًا، أو ليس لها توزيع طبيعي على الإطلاق. برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

25) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه، وأوجه الاختلاف بين التوزيع الطبيعي المعياري، والتوزيع الطبيعي. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

للفرعين a, b انظر ملحق الإجابات

26) **كرة قدم:** يُبيِّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لعدد الأهداف التي سجّلها 17 لاعبًا خلال أحد المواسم الكروية. (الدرس 2-6)

الأهداف X	التكرار
0	3
1	1
2	8
3	2
4	3

a) كوّن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، ثم مثله بالأعمدة.

b) أوجد الوسط، وفسِّره في سياق الموقف.

c) أوجد التباين والانحراف المعياري. $\sigma^2 \approx 1.58, \sigma \approx 1.26$

أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقاط ذات الإحداثيات القطبية المعطاة: (الدرس 2-5)

27) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 28) $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ 29) $(-2, \pi)$ $(2, 0)$

أوجد المتجه u ، إذا علمت كلًّا من v ، u • v . (الدرس 5-4)

30) $\mathbf{v} = \langle -4, 2, -7\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 17$ إجابة ممكنة: $\langle 1, 0, -3\rangle$

31) $\mathbf{v} = \langle \frac{2}{3}, -3, \frac{1}{3}\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 10$ إجابة ممكنة: $\langle 6, -1, 9\rangle$

32) $\mathbf{v} = \langle 2, 8, 5\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -6$ إجابة ممكنة: $\langle 0, 3, -6\rangle$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية: (الدرس 2-4)

33) $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ $26.6°$ 34) $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ $143.1°$ 35) $2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ $284.0°$

تدريب على اختبار معياري

36) كان الوسط والانحراف المعياري لأحد الاختبارات العامة 21.0 ، و 4.7 على الترتيب. إذا كانت الدرجات موزَّعة توزيعًا طبيعيًا، فأوجد الاحتمال التقريبي لحصول أحد الأشخاص على درجة أكبر من 30.4؟ D

A 1% تقريبًا C 2% تقريبًا

B 1.5% تقريبًا D 2.5% تقريبًا

37) إذا كان زمن أداء أناشيد إسلامية على قرص مضغوط موزَّعًا توزيعًا طبيعيًّا بوسط $\mu = 4.12$ min، وانحراف معياري $\sigma = 0.68$ min. إذا اختيرت أنشودة عشوائيًا من القرص، فأوجد احتمال أن يزيد زمن أدائها على 5 min. A

A 10% تقريبًا C 39% تقريبًا

B 19% تقريبًا D 89% تقريبًا

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 21 إجابة جاسم صحيحة. قد يكون حدث لبس عند محمد أن المساحة بين قيمتي z على أطراف التوزيع. وخطأ آخر متوقع وهو أنه استعمل قيم z: 0.45, − 0.45 على اعتبار أنهما تحصران بينهما 35% تقريبًا من المساحة تحت المنحنى.

4 التقويم

بطاقة خروج

اسأل الطلبة السؤال الآتي:

IQ درجة تصف مستوى الذكاء وتتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط 100 . أي الحدثين الآتيين فرصة وقوعه أقل؟

A) شخص درجة ذكائه أقل من 90 .

B) شخص درجة ذكائه تزيد عن 112 .

اطلب إلى الطلبة حل هذا السؤال وتسليمك إجاباتهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

B ، 112 أبعد عن الوسط، لذلك فرصة وجود شخص مستوى ذكائه 112 أقل من فرصة وجود شخص مستوى ذكائه 90 .

إجابات

21) جاسم، 35% من التوزيع على الاطراف تناظر القيمتان 0.175 , 0.825 والمرتبطتان بقيم $z < -0.93$ ، $z > 0.93$. أوجَدَ محمد قيمتي z المرتبطتان بـ 70% على الأطراف التي تناظر القيمتين 0.39− ، 0.39 .

22) إجابة ممكنة: بناء على القانون التجريبي 99.7% من البيانات تقع ضمن 3 إنحرافات معيارية عن الوسط والتي تناظر قيم z في المدى $z = -3$ إلى $z = +3$ في التوزيع الطبيعي المعياري.

23) a) إذا كان مجموع المساحتين عند الذيلين هو 1%، فإن 0.5% تقع عند كل طرف، ولذلك فإن قيمة z مرتبطة بـ 0.005 و 0.995 .وباستعمال جدول قيم z فإن قيمتي z المناظرتين هما 2.58− ، 2.58 على الترتيب.

تنويع التعليم

فوق

توّسع اطلب إلى مجموعات من الطلبة وضع 50 قطعة نقدية معدنية داخل صندوق وتحريك الصندوق، وقلبه عدة مرات، ثم تسجيل عدد القطع التي ظهر عليها صورة. كرر هذه العملية 10 مرات. واطلب إلى كل مجموعة إيجاد الوسط لعدد مرات ظهور الصورة في كل مرة، ثم اطلب إليهم توضيح سبب إمكانية اعتبار التوزيع طبيعيًا. حدد عدد االمرات التي يظهر فيها عدد الصور ضمن انحراف معياري واحد، انحرافين معياريين أو ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط. قارن ذلك مع توقع عدد الصور الظاهرة. انظر اعمال الطلبة

b) إذا كان مجموع المساحتين عند الذيلين هو 5%، فإن 2.5% تقع عند كل طرف، ولذلك فإن قيمة z مرتبطة بـ 0.025 و 0.975 ، وباستعمال جدول قيم z، فإن قيمتي z المناظرتين هما 1.96− ، 1.96 على الترتيب.

c) إذا كان مجموع المساحتين عند الذيلين هو 10%، فإن 5% تقع عند كل طرف، ولذلك فإن قيمة z مرتبطة بـ 0.05 و 0.95 . وباستعمال جدول قيم z ، فإن قيمتي z المناظرتين هما 1.64 و 1.64 على الترتيب.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 1-3، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكُّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

CRM اختبار المفردات في مصادر الفصل

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، الحروف المبعثرة، البحث عن كلمة باستعمال قائمة كلمات، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

الفصل 6

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الإحصاء الوصفي (الدرس 1-6)

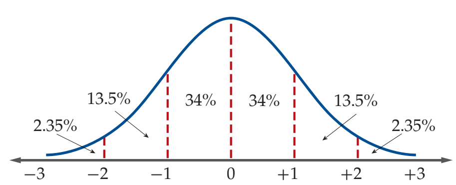
- أشكال التوزيع الثلاثة الأكثر استعمالًا هي: ذات الالتواء السالب، والمتماثلة، وذات الالتواء الموجب.

التوزيعات الاحتمالية (الدرس 2-6)

- يربط التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X، كل قيمة ممكنة لـ X باحتمال وقوعها.

التوزيع الطبيعي (الدرس 3-6)

- تُمثِّل قيمة z عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدُها قيمة عن الوسط، وتُعطى بالصيغة $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.
- التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع لقيم z بوسط 0، وانحراف معياري 1.



المفردات الأساسية

وحيدة المتغير ص258	المتغير العشوائي المتصل ص268
التوزيع ذو الالتواء السالب ص258	التوزيع الاحتمالي ص269
التوزيع المتماثل ص258	القيمة المتوقعة (التوقع) ص270
التوزيع ذو الالتواء الموجب ص258	تجربة ذو الحدين ص272
إحصائي مقاوم ص258	توزيع ذات حدين ص273
تجمّع ص260	دالة التوزيع الاحتمالي ذي الحدين ص273
التوزيع ثنائي المنوال ص260	التوزيع الطبيعي ص277
المئين ص262	القانون التجريبي ص278
تمثيل المئين بيانيًا ص262	قيمة z ص279
المتغير العشوائي ص268	التوزيع الطبيعي المعياري ص279
المتغير العشوائي المنفصل ص268	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه؛ لإكمال كل عبارة مما يأتي:

1) الوسط أقل من الوسيط، ومعظم البيانات تقع جهة اليمين في التوزيع ذو الالتواء السالب.

2) يمكن لـ المتغير العشوائي المتصل أن يأخذ عددًا لا نهائيًا من القيم ضمن فترة محددة.

3) يُسمى توزيع قيم z الذي وسطه صفر، وانحرافه المعياري 1 التوزيع الطبيعي المعياري.

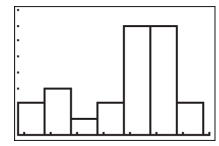
مراجعة الدروس

6-1 الإحصاء الوصفي (الصفحات 267 – 258)

4) يُبيّن الجدول أدناه درجات 24 طالبًا في اختبار دُوَلي درجته الكلية 550 . للفرعين a,b انظر الهامش

الدرجات							
516	503	491	477	437	373	519	508
491	479	454	392	522	508	498	485
463	405	533	513	499	485	470	417

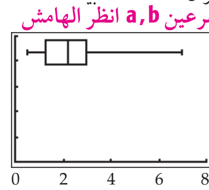
a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.



b) لخِّص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط، والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة، وبرِّر إجابتك.

5) **قطع ذهبية :** يُبيّن الجدول أدناه أوزان 25 قطعة ذهبية. للفرعين a,b انظر الهامش

الأوزان (بالجرامات)				
4.0	2.4	1.9	1.1	0.5
4.2	2.5	2.2	1.4	0.7
5.4	2.9	2.2	1.5	1.0
6.3	2.9	2.2	1.7	1.0
7.0	3.1	2.3	1.8	1.1



a) استعمل الصندوق وطرفيه أعلاه؛ لوصف شكل التوزيع.

b) لخِّص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة، وبرِّر إجابتك.

6) يُبيّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لأول 322 متسابقًا وفق زمن إنهاء أحد سباقات الماراثون. أنشئ المنحنى المئيني للبيانات، ثم قدّر الرتبة المئينية للذين أنهوا السباق بأقل من 3 ساعات، وفسّر معناه. انظر الهامش

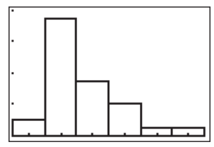
عدد المتسابقين	الزمن (بالساعات)
3	2:45 – 2:49:59
4	2:50 – 2:54:59
28	2:55 – 2:59:59
35	3:00 – 3:04:59
54	3:05 – 3:09:59
80	3:10 – 3:14:59
118	3:15 +

مثال 1

يُبيّن الجدول أدناه وزن الحقيبة المدرسية لعينة من طلبة المرحلة الثانوية.

متوسط وزن الحقيبة (باوند)					
24.5	19.0	17.0	16.0	15.0	11.5
25.0	21.0	17.5	16.0	15.5	12.5
25.0	21.0	18.0	16.5	15.5	14.5
27.0	21.5	18.0	17.0	15.5	14.5
30.0	23.5	18.5	17.0	16.0	15.0

a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.



التمثيل البياني ذو التواء موجب، ومعظم أوزان الحقائب محصورة بين 14 lb و 22 lb، وعدد قليل منها أثقل من ذلك، لذا فإن ذيل التوزيع يكون إلى جهة اليمين.

b) **لخِّص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة، وبرِّر إجابتك.**

توزيع البيانات ذو التواء. لذا، من الأفضل استعمال المقاييس الخمسة. ولإيجاد المقاييس الخمسة، رتِّب القيم تصاعديًّا أو تنازليًّا. وبالتالي فإن القيمة الصغرى 11.5، و $Q_1 = 15.5$ ، والوسيط 17 ، و $Q_3 = 21$ ، والقيمة العظمى 30 . وتوضح هذه المقاييس أن الأوزان موزّعة بين 11.5 lb و 30 lb، والوسيط 17 lb، ونصف الأوزان بين 15.5 lb و 21 lb .

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

بناء الاختبارات
التقـــويم

إذا أنهى الطلبة المراجعة للفصل، يمكنك استعمال برنامج بناء الاختبارات لتقديم تمارين إضافية على الفصل كاملًا، أو على الجزء من الفصل الذي ما زال الطلبة يحتاجون لدعم إضافي فيه.

إجابات:

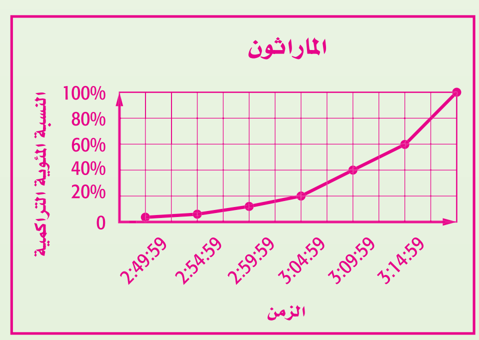
4a) التوزيع ذو التواء سالب.

4b) التوزيع ذو التواء. لذا، فإنه يمكن استعمال المقاييس الخمسة التي قيمها 533 , 508 , 488 , 458.5 , 373 لوصف التوزيع.

5a) المشاهدات موزعة بين 0، 8 وبنسبة تزيد عن 75% من المشاهدات قيمتها أقل من 3.

5b) توزيع المشاهدات ذو التواء. لذا، يمكن استعمال المقاييس الخمسة لوصف التوزيع. الوسيط 2.2، ونسبة المشاهدات التي تقع بين 3.0 ، 1.25 هي 50% .

6)



11% من المتسابقين أنهوا السباق بأقل من 3h

الفصل 6 دليل الدراسة و المراجعة

6-2 التوزيعات الاحتمالية (الصفحات 268 – 276)

صنِّف كل متغيّر عشوائي مما يأتي، من حيث كونه منفصلًا، أو متصلًا، وبرِّر إجابتك. للتمرينين 7,8 انظر الهامش

7) يُمثّل X عدد حضور إحدى مباريات دوري كرة القدم في أحد الأشهر.

8) يُمثّل X كمية الدم التي تبرّع بها شخص في حملة للتبرع بالدم.

9) **أشخاص مشهورون:** في إحدى الدراسات تَبيّن أن 63% من الشباب يفضلون أداء أحد الرياضيين المشهورين. إذا اختير 5 من الشباب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يفضلون أداء هذا الرياضي أو لا.

a) إذا مثَّل المتغير العشوائي X عدد الشباب الذي يفضِّلون أداء هذا الرياضي، كوِّن جدول التوزيع الاحتمالي ذي الحدين للمتغير X، ومثِّله بالأعمدة. انظر الهامش

b) أوجد احتمال أن يكون أكثر من 2 من الشباب يفضِّلون أداء هذا الرياضي. 73.3%

10) يُمثّل الجدول أدناه عدد السيارات التي تمتلكها الأسرة الواحدة في إحدى المناطق. أوجد التباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

السيارات	التكرار
0	17519
1	2720
2	1614
3	774
4	333

$\sigma^2 = 0.7602, \sigma = 0.8719$

مثال 2

تمثيل بياني: أُجريت دراسة في إحدى المدارس، فَتبيّن أن 45% من الطلاب يستطيعون رسم مخروط. إذا تم اختيار 5 منهم بشكل عشوائي، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يستطيعون رسم مخروط أو لا.

a) إذا مثَّل المتغير العشوائي X عدد الطلاب الذين لديهم مقدرة على رسم مخروط، كوّن التوزيع الاحتمالي ذا الحدين للمتغير X، ومثّله بالأعمدة.

في هذه المسألة $n = 5, p = 0.45, q = 1 - 0.45 = 0.55$.

$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.45^0 \cdot 0.55^5 \approx 0.050$

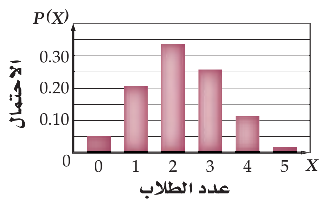
$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.45^1 \cdot 0.55^4 \approx 0.206$

$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.45^2 \cdot 0.55^3 \approx 0.337$

$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.45^3 \cdot 0.55^2 \approx 0.276$

$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.45^4 \cdot 0.55^1 \approx 0.113$

$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.45^5 \cdot 0.55^0 \approx 0.018$



b) أوجد احتمال أن يكون أقل من 3 طلبة من الّذين تمت مقابلتهم لديهم القدرة على رسم مخروط.

$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$

$= 0.05 + 0.21 + 0.34 = 0.60 = 60\%$

6-3 التوزيع الطبيعي (الصفحات 277 – 285)

أوجد كلًّا مما يأتي:

11) قيمة z، إذا كان $X = 1.5, \mu = 1.1, \sigma = 0.3$ 1.33

12) قيمة X، إذا كان $z = -1.12, \mu = 35, \sigma = 3.4$ 31.192

للتمرينين 13, 14 انظر الهامش

أوجد الفترة من قيم z المرتبطة بكلٍّ من المساحات الآتية:

13) 55% على الطرفين

14) 24% من منتصف توزيع البيانات

مثال 3

أوجد قيمة z، إذا كانت $X = 36, \mu = 31, \sigma = 1.3$.

$z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ صيغة الدرجة المعيارية

$= \dfrac{36 - 31}{1.3}$ $X = 36, \mu = 31, \sigma = 1.3$

≈ 3.85 بالتبسيط

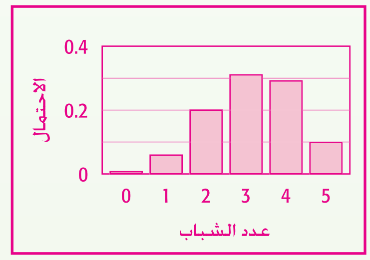
إجابات:

7) منفصل؛ يمكن عد الحضور، ولذلك فالمتغير منفصل.

8) متصل؛ يمكن أن تكون كمية الدم أية قيمة.

9a)

X	$P(X)$
0	0.007
1	0.059
2	0.201
3	0.342
4	0.291
5	0.099



13) $z < -0.598$ ، $z > 0.598$

14) $-0.31 < z < 0.31$

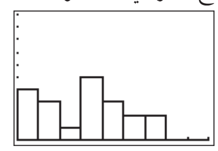
الفصل 6 دليل الدراسة و المراجعة

تطبيقات ومسائل

15) **رياضة:** يُبيّن الجدول أدناه مستوى السمنة لعشرين لاعبًا محترفًا في كرة السلة. (الدرس 1-6) للفرعين a,b انظر الهامش

مستويات السمنة (%)				
3.4	5.5	6.1	4.8	8.3
7.7	6.5	6.5	4.9	3.7
3.9	4.0	7.3	8.9	9.5
9.8	3.9	7.1	6.3	6.1

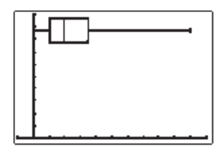
a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.



b) لخِّص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرِّر إجابتك.

16) **تمارين رياضية:** يُبيّن الجدول أدناه عدد الساعات التي تقضيها عينة من الطلبة في ممارسة التمارين الرياضية أسبوعيًّا. (الدرس 1-6)

زمن ممارسة التمارين الرياضية (بالساعات)		
0	2.5	3
2	3	1.5
0	2	3.5
0	9.5	1.5
1.5	0.5	8
4	10	1



a) استعمل الصندوق وطرفيه أعلاه؛ لوصف شكل التوزيع.
للفرعين a,b انظر الهامش

b) لخِّص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرِّر إجابتك.

17) يُبيّن الجدول أدناه درجات الحرارة السيليزية التي سُجّلت في 85 يومًا في إحدى المناطق الباردة خلال فصل الشتاء. (الدرس 2-6)

الدرجة X	0	1	2	3	4
التكرار	12	18	25	19	11

أوجد الوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

1.99, 1.51, 1.23

18) **مستوى الذكاء (IQ):** إذا كان مستوى الذكاء (IQ) لمجموعة من الأشخاص موزعًا توزيعًا طبيعيًّا بوسط 105 ، وانحراف معياري 22. إذا اختير شخص بشكل عشوائي، فأوجد احتمال أن يكون مستوى ذكائه: (الدرس 3-6)

a) أكثر من 101 **0.57**

b) أقل من 94 **0.31**

c) بين 110 و 120 مقرَّبًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين. **0.16**

19) إذا كان عدد رقائق الشوكولاتة الموجودة في عدد من قطع الحلوى موزعًا توزيعًا طبيعيًّا، وفيه $\mu = 25, \sigma = 3$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-6)

a) $P(X < 35)$ **99.96%**

b) $P(21 < X < 29)$ **81.64%**

c) $P(X > 15)$ **99.96%**

مراجعة حَلّ المسائل

إذا احتاج الطلبة إلى تدريبات إضافية على حَلّ المسألة، فذكّرهم بخطوات حَلّ المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيداً من التدريبات على ورقة عمل.

دليل التوقّع

اطلب إلى الطلبة أن يجيبوا عن أسئلة دليل التوقع في مصادر الفصل 6، ويناقشوا أي تغيرات طرأت على إجاباتهم بعد أن أتموا دراسة الفصل 6.

قبل الاختبار

اطلب إلى الطلبة دراسة الصفحات 286 – 289 من دليل الدراسة؛ لمراجعة المواضيع، والمهمات الواردة في الفصل.

إجابات:

15a) يُظهر التمثيل أن البيانات متجمعة ولها منوالان، وأن مستويات السمنة متقبلة بين 3% ، 12%.

15b) وسط مستوى السمنة 6.1%، والانحراف المعياري 1.9%. التوزيع غير ملتوٍ. لذا، فلا حاجة للمقاييس الخمسة.

16a) بما أن الطرف الأيمن أطول من الأيسر والوسيط أقرب إلى الرُّبيع الأول Q_1 منه إلى الرُّبيع الثالث Q_3، فإن التوزيع ذو التواء موجب.

16b) توزيع المشاهدات ذو التواء موجب؛ لذلك يمكن استعمال المقاييس الخمسة لوصف التوزيع. يتوزع عدد الساعات التي يقضيها الطلبة في ممارسة التمارين بين 0h، 10h والوسيط ساعتان، نصف الطلبة يقضون بين 1h، 3.5h.

بناء الاختبارات
التقـويم

أنشئ نسخًا معدّلة من اختبار الفصل مع مفاتيح إجاباتها. كما أنّ جميع أسئلة الاختبارات المتعددة المستويات في مصادر الفصل 6 متوافرة في برنامج بناء الاختبارات.

إجابات:

1a) البيانات ذات توزيع متماثل.

1b) إجابة ممكنة: بما أن التوزيع متماثل، فإنه يستعمل كل من الوسط الذي قيمته 16 سنة، والانحراف المعياري الذي قيمته 1.3 لوصف تمركز وتشتت البيانات على الترتيب.

2a) إجابة ممكنة: الوسيط لدرجات الحرارة في المكان B أعلى منه في المكان A . وأقل درجة حرارة في المكان B أكبر من أعلى درجة حرارة في المكان A .

2b) المكان B؛ يظهر من تمثيل الصندوق وطرفيه أن أعلى قيمة لدرجات الحرارة في المكان A أقل من أدنى قيمة في المكان B.

5) منفصل؛ عدد مرات ظهور الكتابة دائمًا معدود؛ لأنه لايمكن الحصول على جزء من الكتابة.

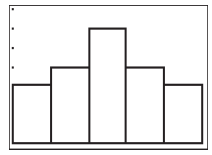
6) متصل؛ يمكن للمتسابق إكمال السباق بأي مقدار من الوقت.

اختبار الفصل

1) إنتاج أدبي: يُبيّن الجدول أدناه أعمار 20 طالبًا اشتركوا في مسابقة الإنتاج الأدبي في إحدى المدارس. للفرعين a,b انظر الهامش

أعمار الطلاب									
14	16	17	15	14	16	18	16	17	16
17	15	18	16	15	16	17	15	18	14

a) استعمل المدرج التكراري أدناه؛ لوصف شكل التوزيع للجدول.



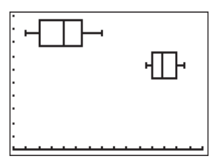
b) لخصّ تمركز البيانات وتشتتها باستعمال الوسط والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة. وبرِّر إجابتك.

2) إجازة: يخطّط أحد الأشخاص لقضاء إجازة في فصل الربيع، وانحصرت اختياراته في مكانين A, B على الشاطئ . والجدول أدناه يُبيّن درجات الحرارة الفهرنهايتية المتوقعة خلال فترة الإجازة في كلٍّ من المكانين.

المكان A					
63	55	57	62	60	52
60	54	52	54	59	64
المكان B					
71	72	76	76	77	77
73	73	72	74	74	72

a) استعمل الصندوقين وطرفيهما أدناه، والممثّلين أحدهما فوق الآخر على خط الأعداد؛ للمقارنة بين التوزيعين.

للفرعين a,b انظر الهامش



b) إذا رغب الشخص في قضاء الإجازة على شاطئ البحر الذي درجة حرارته أعلى، فأي المكانين سيختار؟ ولماذا؟

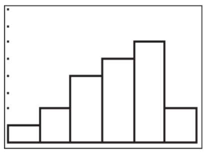
3) مشاريع: إذا كانت الدرجات المعطاة على مشروع علمي في أحد الصفوف موزعة توزيعًا طبيعيًا، وفيه $\mu = 78 , \sigma = 8$ ، فأوجد الاحتمالات الآتية:

a) $P(X \geq 96)$ 1.2%

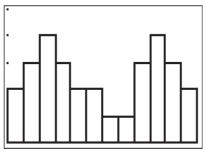
b) $P(60 < X < 85)$ 79.7%

4) اختيار من متعدد: أي التمثيلات أدناه موجب الالتواء؟ D

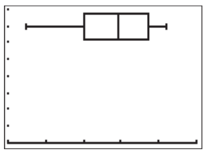
A



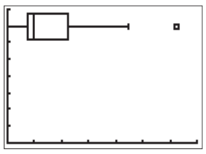
C



B



D



صنّف كلًّا من المتغيرات العشوائية الآتية X من حيث كونه منفصلًا، أو متصلاً. وبرِّر إجابتك. للسؤالين 5,6 انظر الهامش

5) X يُمثّل عدد مرات ظهور الكتابة عند رمي قطعة نقد عشوائيًا عددًا من المرات.

6) X يُمثّل الوقت الّذي سيحتاجه متسابق ماراثون تم اختياره عشوائيًا لإنهاء السباق.

7) صابون سائل: إذا كانت كمية الماء مقاسة بالملمتر في صابون سائل معين موزعة توزيعًا طبيعيًا، وفيه $\mu = 125 , \sigma = 7$ ، فأوجد كلًا مما يأتي:

a) $P(X < 105)$ 0.21%

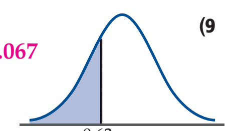
b) $P(X > 140)$ 1.62%

c) $P(115 < X < 130)$ 68.47%

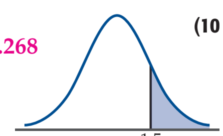
8) دراسة الطب: في دراسة إحصائية شملت طلاب الصف الثالث الثانوي، تَبيّن أن 20 % منهم يرغبون في دراسة الطب. إذا اختيرت عينة عشوائية من 6 طلاب من الصف الثالث الثانوي، فما احتمال أن تحوي العينة ثلاثة طلاب على الأقل يرغبون في دراسة الطب؟ 9.9%

أوجد المساحة المرتبطة بالمنطقة المظلّلة في كلٍّ مما يأتي:

9) 0.067



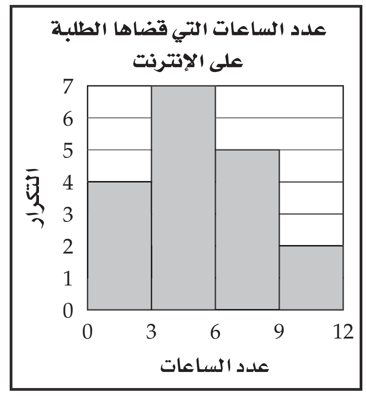
10) 0.268



مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا أو أقل من الأسئلة،	إذا أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا أو أكثر من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	فاختر أحد المصدرين الآتيين:
كتاب الطالب الدروس 1-6 ، 2-6 ، 3-6	مصادر الفصل دليل الدراسة والمعالجة
كتاب التمارين الفصل 6	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
دليل المعلم مشروع الفصل، ص (256)	
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

التهيئة للفصل 6 ص 257

7a) 

7b) عدد الطلبة الذين قضوا أكثر من 6h على الإنترنت أكبر.

الدرس 1-6 ، ص 258–267

2a) يُبيّن التمثيل بالمدرج التكراري، أن التوزيع ثنائي المنوال بتجمعين منفصلين ويوحي إلى وجود نوعين مختلفين من أجهزة الحاسوب وموجودين معًا في المتجر ويمكن أن يكون أحدهما من أجهزة الحاسوب المكتبية والآخر من أجهزة الحاسوب المحمولة.

2b) بما أن المجموعة الدنيا من البيانات متماثلة تقريبًا، فإنه يمكن استعمال وسط الأسعار BD 561.25 والانحراف المعياري BD 80.81، لوصف تمركز البيانات وتشتتها على الترتيب. المجموعة العليا من المشاهدات ذات التواء موجب، لذلك تستعمل المقاييس الخمسة التي تُبين أن الأسعار تقع بين BD 890، BD 1250 وأن وسيط الأسعار هو BD 1000 وأن نصف الأسعار يقع بين BD 950، BD 1150.

3 **a)** بما أن الطرف الأيمن أطول من الطرف الأيسر، والخط الذي يمثل الوسيط أقرب إلى $Q1$ منه إلى $Q3$، فإن للتوزيع التواء موجبًا. ولاحظ أن القيمة 12.5 تعد متطرفة في التوزيع.

b) إجابة ممكنة: بما أن توزيع المشاهدات ملتوٍ إلى اليمين، لذلك يمكن استعمال المقاييس الخمسة لوصف التوزيع. تتراوح عدد الساعات التي يقضيها الشباب على العاب الفيديو بين 0h، 12.5h، وأن الوسيط هو الوسيط 2h، كما أن نصف عدد الشباب يقضون ما بين 1.5h، 4.5h على ألعاب الفيديو، والمدى الربيعي يساوي 3h.

4a) بما أن طولي الطرفين متساويين تقريباً والوسيط يقع تمامًا بين $Q1$، $Q3$، فإن التوزيع متماثل تقريبًا.

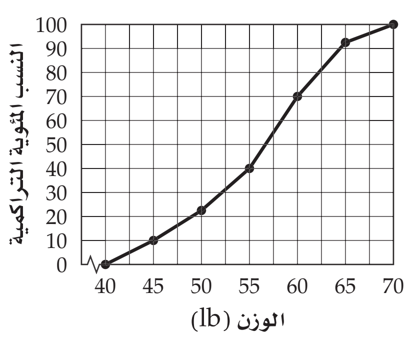
4b) بما أن التوزيع متماثل تقريباً، فإن يمكن استعمال الوسط 25.8 درجة تقريبًا، والانحراف المعياري 4.14 درجة تقريبًا لوصف تمركز المشاهدات وتشتتها على الترتيب.

5) الوسيط لاستهلاك الوقود للسيارات في السنة 1 أقل بقليل منه للسيارات في السنة 2. والقيمة الصغرى في السنة 1 أقل من القيمة الصغرى في السنة 2. لكن القيم العظمى متساوية تقريبًا في السنتين، لذلك لا يوجد تغير كبير للأحسن في استهلاك الوقود للسيارات الهجينة من السنة الأولى إلى السنة الثانية. تشتت البيانات أكبر قليلاً للسيارات في السنة 2 عنه في السنة الأولى، ولكنه تقريبًا نفسه.

6) الوسيط لقوة الهزات الأرضية في المنطقة 2 أقل من أصغر درجة للهزات الأرضية في المنطقة 1. أكبر درجة في المنطقة 2 تساوي تقريبًا الرُّبيع الثالث في المنطقة 1 ويعني ذلك أن 25 % من قيم بيانات المنطقة 1 أكبر من قيم بيانات المنطقة 2. لذلك درجات الهزات الأرضية في المنطقة 1 أعلى منها في المنطقة 2 بشكل عام. تشتت البيانات أكبر في المنطقة 2، لذلك التغيّر في قوة الهزات الأرضية في المنطقة 2 أكبر منه في المنطقة 1.

7a)

أوزان إناث ثعالب الماء البالغة



7b) إجابة ممكنة: الوزن 55 lb يقابل المئين 40 ويعني أن 40 % من إناث ثعالب الماء البالغة وزنها أقل من 55 lb.

الدرس 6-1، ص 266

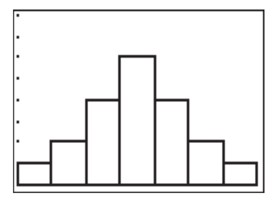
17c)

$X' = 3 + 5X$				
228	158	298	188	263
198	328	213	243	118
283	248	73	268	203
143	223	388	163	343

$X' = 10 + X$				
55	41	69	47	62
49	75	52	58	33
66	59	24	63	50
38	54	87	42	78

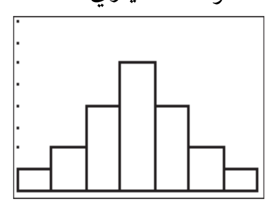
$X' = 5X$				
225	155	295	185	260
195	325	210	240	115
280	245	70	265	200
140	220	385	160	340

17d)



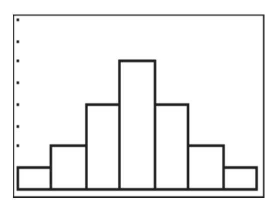
[50, 400] scl: 50 by [0, 8] scl: 1

شكل التوزيع متماثل.
الوسط = 228.5،
الانحراف المعياري = 76.2



[20, 90] scl: 10 by [0, 8] scl: 1

شكل التوزيع متماثل.
الوسط = 55.1،
الانحراف المعياري = 15.2



[50, 400] scl: 50 by [0, 8] scl: 1

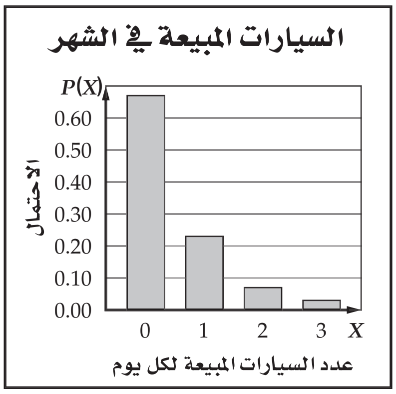
شكل التوزيع متماثل.
الوسط = 225.5،
الانحراف المعياري = 78.2

17e) إجابة ممكنة: التحويل الخطي لا يوثر على شكل التوزيع. التحويل الخطي على الصورة $X' = a + bX$،
يؤثر على كل من الوسط والانحراف المعياري، وتزداد قيمتها أو تنقص بمقدار المعامل b (تصبح القيمة الأصلية مضروبة في b) وتنسحب قيمتها بمقدار a وحدة إلى اليمين أو اليسار.

الدرس 6-2 (تأكد)، ص 269

2)

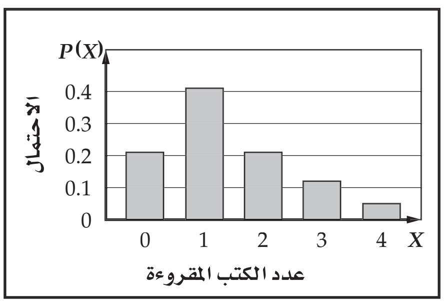
السيارات المبيعة X	0	1	2	3
$P(X)$	0.67	0.23	0.07	0.03



الدرس 6-2، ص 268–276

5)

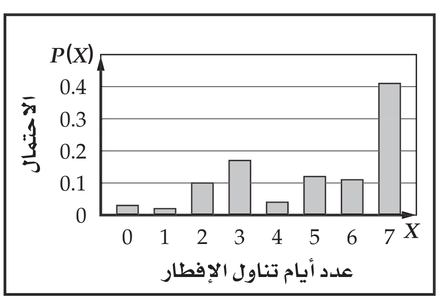
عدد الكتب X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.21	0.41	0.21	0.12	0.05



$\mu = 1.38$؛ إجابة ممكنة: وسط ما يقرأه الطلبة كتاب أو كتابين في الشهر. $\sigma^2 \approx 1.21$، $\sigma \approx 1.10$

6)

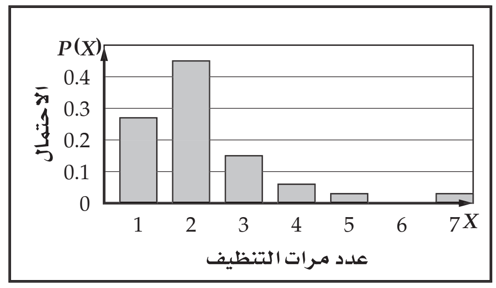
الأيام X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0.03	0.02	0.10	0.17	0.04	0.12	0.11	0.41



$\mu \approx 5$؛ إجابة ممكنة: وسط عدد الأيام الأسبوعية التي يتناول فيها الطلبة إفطارًا 5 أيام، $\sigma^2 \approx 4.5$، $\sigma \approx 2.1$

7)

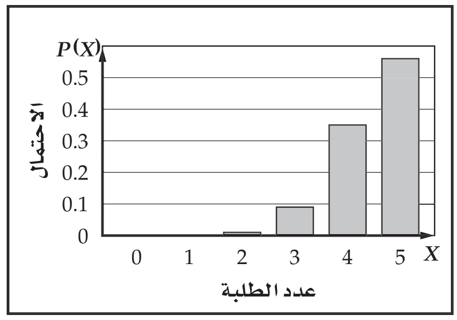
مرات التنظيف X	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0.27	0.45	0.15	0.06	0.03	0	0.03



$\mu \approx 2.24$؛ إجابة ممكنة: ينظف المرضى أسنانهم بمُعدّل مرتين في الأسبوع، $\sigma^2 \approx 0.96$ ، $\sigma \approx 0.98$

(16

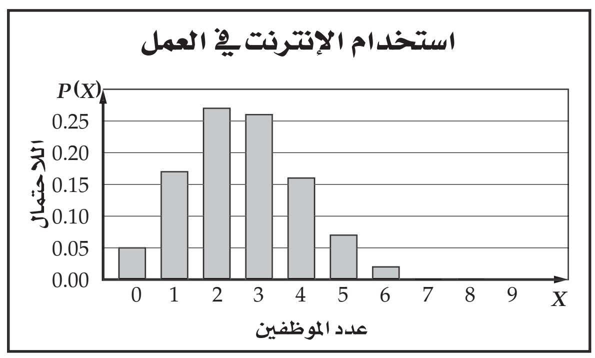
X	P(X)
0	0.00
1	0.00
2	0.01
3	0.09
4	0.35
5	0.56



$\mu \approx 4.45$؛ إجابة ممكنة: من بين 5 طلاب من طلاب المرحلة الثانوية 5 منهم تقريبًا يتابعون مباريات منتخبتهم الوطني، $\sigma \approx 0.70$ ،$\sigma^2 \approx 0.49$

(17

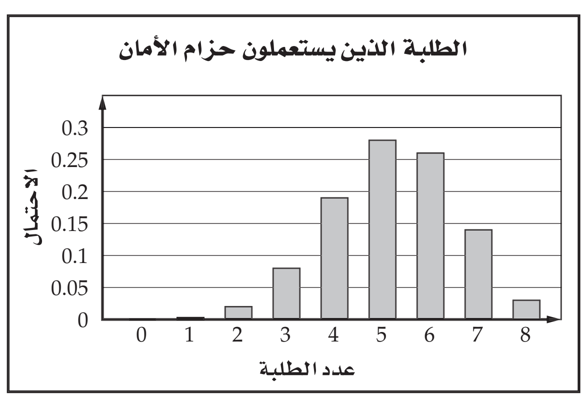
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	0.05	0.17	0.27	0.26	0.16	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00



$\mu \approx 2.60$؛ أجابة ممكنة: من بين 10 موظفين 3 منهم تقريبًا يستعملون الإنترنت في العمل $\sigma^2 \approx 1.92$ ، $\sigma \approx 1.39$

(18

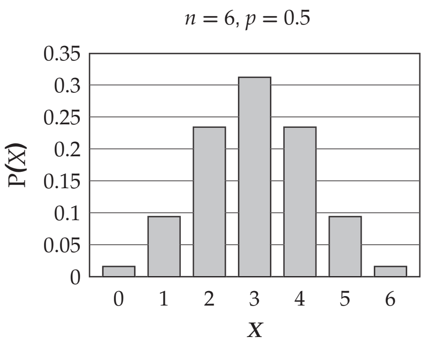
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X)	0.00	0.003	0.02	0.08	0.19	0.28	0.26	0.14	0.03



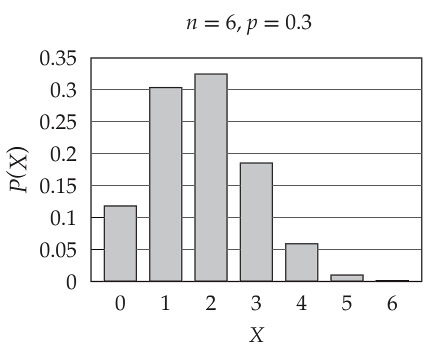
$m \approx 5.20$؛ إجابة ممكنة: من بين 8 طلبة من طلبة الجامعات الّذين يملكون سيارات خاصة 5 منهم تقريبًا يستعملون حزام الأمان أثناء قيادة سياراتهم، $\sigma^2 \approx 1.82$ ،$\sigma \approx 1.35$

(20a

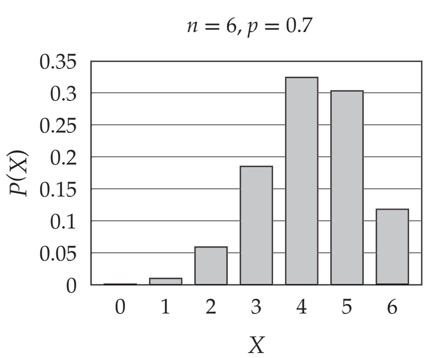
$n = 6, p = 0.5$	
X	P(X)
0	0.016
1	0.094
2	0.234
3	0.312
4	0.234
5	0.094
6	0.016



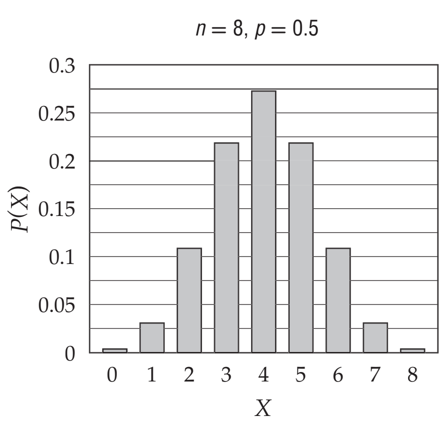
$n = 6, p = 0.3$	
X	P(X)
0	0.118
1	0.303
2	0.324
3	0.185
4	0.059
5	0.010
6	0.001

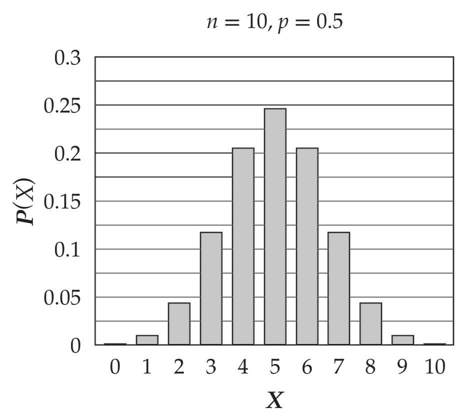


$n = 6, p = 0.7$	
X	P(X)
0	0.001
1	0.010
2	0.059
3	0.185
4	0.324
5	0.303
6	0.118



$n = 8, p = 0.5$	
X	P(X)
0	0.004
1	0.031
2	0.109
3	0.219
4	0.273
5	0.219
6	0.109
7	0.031
8	0.004





n = 10, p = 0.5	
X	P(X)
0	0.001
1	0.010
2	0.044
3	0.117
4	0.205
5	0.246
6	0.205
7	0.117
8	0.044
9	0.010
10	0.001

20b) إجابة ممكنة: التوزيع المناظر إلى $n = 6$ ، $p = 0.5$ متماثل. التوزيع المناظر إلى $n = 6$ ، $p = 0.3$ ذو التواء موجب والتوزيع المناظر إلى $n = 6$ ، $p = 0.7$ ذو التواء سالب. التوزيعان المناظران إلى $n = 8$ ، $p = 0.5$ و $n = 10$ ، $p = 0.5$ كلاهما متماثلان.

20c) إجابة ممكنة: إذا كان $p = 0.5$ ، فإن شكل التوزيع متماثل، عندما يكون $p < 0.5$ التوزيع ذو التواء موجب، و إذا كان $p > 0.5$ التوزيع ذو التواء سالب.

20d) إجابة ممكنة: عندما تزداد n ، فإن التوزيع يتوسع ويمتد ويزداد الانحراف المعياري.

21) المعطى: $\mu = \Sigma[X \cdot P(X)]$

أثبت أن: $\mu = np$

$$\mu = \Sigma[X \cdot P(X)]$$
$$= X_1 \cdot P(X_1) + X_2 \cdot P(X_2)$$
$$= (0)(1-p) + (1)(p)$$
$$= p$$

وتساوي np لِـ n من المحاولات.

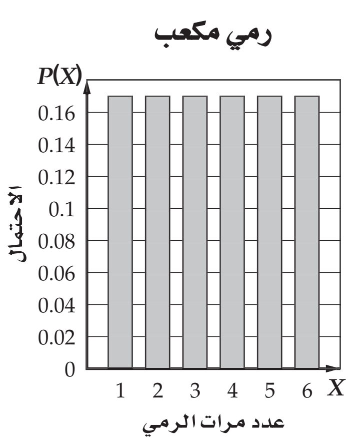
المعطى: $\sigma^2 = \Sigma[(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$

أثبت أن: $\sigma^2 = npq$

$$\sigma^2 = \Sigma[(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$$
$$= (X_1 - p)^2 \cdot P(X_1) + (X_2 - p)^2 \cdot P(X_2)$$
$$= (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p$$
$$= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3$$
$$= p(1-p)$$

وتساوي npq لِـ n من المحاولات.

23) إجابة ممكنة: الاحتمال النظري لتجربة رمي مكعب أوجهه مرقمة من 1 إلى 6، وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي يعطي توزيعًا منتظمًا؛ لأن لكل وجه الفرصة نفسها للظهور.



X	$P(X)$
1	$\frac{1}{6} \approx 0.17$
2	$\frac{1}{6} \approx 0.17$
3	$\frac{1}{6} \approx 0.17$
4	$\frac{1}{6} \approx 0.17$
5	$\frac{1}{6} \approx 0.17$
6	$\frac{1}{6} \approx 0.17$

27a) الشكل ثنائي المنوال لتوزيع بمجموعتين منفصلتين، ويدل ذلك على وجود نوعين من القيم الخاصة موجودان في البيانات، النوع الأول سعره رخيص نسبيًا والثاني غالي.

27b) المجموعة الدنيا من البيانات ذات التواء سالب، وسط الأسعار فيها BD 564.71، والانحراف المعياري BD 133.61، أما المجموعة العليا فذات التواء موجب، ويمكن استعمال المقاييس الخمسة التي تدل على أن الأسعار تقع بين BD 300 وَ BD 2700.

الوسيط BD 675، ونصف الأسعار تقع بين BD 300 ، BD 600.

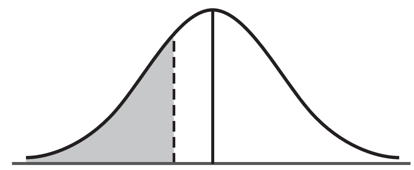
الدرس 3–6 ، ص 277-285

5 **a)** أوجد قيمة z عندما $x = 4.5$

$$z = \frac{x - \mu}{6} = \frac{4.5 - 4.69}{0.258}$$

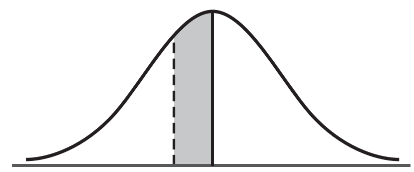
$$\approx -0.736$$

استعمل الجداول لإيجاد المساحة، حيث $z < -0.736$



$z = -0.736$

لاحظ أن جدول التوزيع الطبيعي المعياري يعطي المساحة الممثلة في الشكل أدناه:



$z = -0.736$

وهي 0.2673 تقريبًا، وعليه تكون المساحة المطلوبة حيث $z < -0.736$ هي $0.5 - 0.2673 = 0.2327$

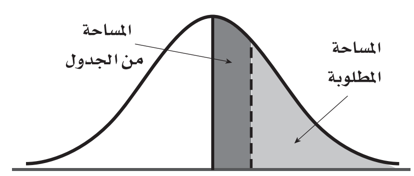
∴ عدد الأسماك التي يقل طولها عن 4.5 mm هو

$$0.2327 \times 797 \approx 185$$

b) أوجد قيمة z عندما $x = 5$

$$z = \frac{5 - 4.69}{0.258} \approx 1.2$$

استعمل الجداول لإيجاد المساحة حيث $z > 1.2$



$z = 1.2$

المساحة المطلوبة هي $0.5 - 0.3849 = 0.1151$

∴ عدد الأسماك التي يزيد طولها عن 5 mm هو

$$0.1151 \times 797 \approx 92$$

12 **a)** لإيجاد الحد الأدنى لسُمْك الثلوج في أعلى 15% من التوزيع، أوجد القيمة X التي تفصل أعلى 15% من المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري. أعلى 15% مرتبطة بـ $0.85 = 0.15 - 1$.
وباستعمال جدول z تجد أن قيمة z المرتبطة بالمساحة هي 1.036.
استعمل صيغة الدرجة المعيارية لإيجاد القيمة X.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$1.036 = \frac{X - 260}{27}$$

$$28.0 = X - 260$$

$$288.0 = X$$

b) لإيجاد الحد الأعلى لسُمْك الثلوج في أدنى 30% من التوزيع، أوجد القيمة X التي تفصل أدنى 30% من المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري. أدنى 30% مرتبطة بـ 0.30. وباستعمال جدول z تجد أن قيمة z المرتبطة بالمساحة هي -0.5244. استعمل صيغة الدرجة المعيارية لإيجاد القيمة X.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$-0.5244 = \frac{X - 260}{27}$$

$$-14.2 = X - 260$$

$$245.8 = X$$

c) 60% من منتصف البيانات يمثل 30% على كل جهة من جهتي الوسط، ولذلك هي مرتبطة بالفترة من 0.2 إلى 0.8، وباستعمال جدول قيم z فإن قيم z المناظرة لـ 0.8, 0.2 هي 0.8416, 0.8416− بالترتيب

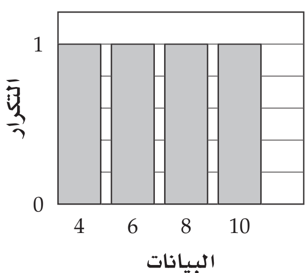
$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$0.8416 = \frac{X - 260}{27} \qquad -0.8416 = \frac{X - 260}{27}$$

$$22.7 = X - 260 \qquad -22.7 = X - 260$$

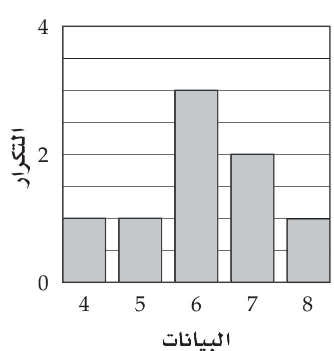
$$282.7 = X \qquad 237.3 = X$$

20a) التوزيع منتظم،
$\mu = 7, \sigma = 2.2$



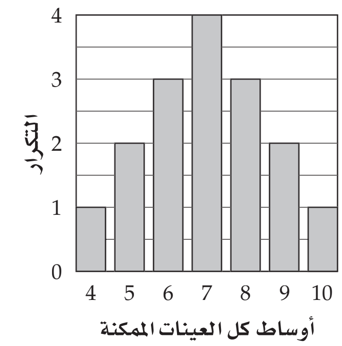
20b) إجابة ممكنة:

عينة	وسط	عينة	وسط
4, 8	6	4, 6	5
4, 4	4	6, 6	6
10, 4	7	6, 10	8
8,4	6	8, 6	7



التوزيع متماثل إلى حد ما، $\mu = 6.13$, $\sigma = 1.16$

20d)



التوزيع متماثل. إجابة ممكنة: عندما يزداد حجم العينة يقترب توزيع أوساط العينات من التوزيع الطبيعي.

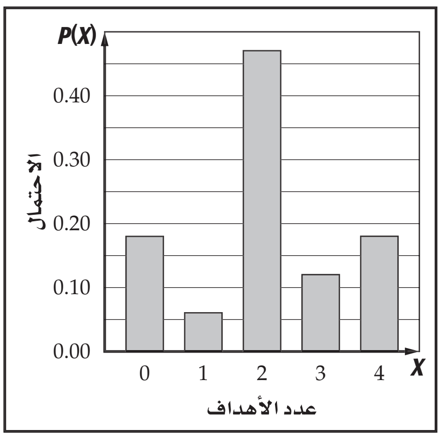
20e) إجابة ممكنة: عندما يزداد حجم العينة، فإن وسط أوساط العينات يقترب من وسط المشاهدات (المجتمع)، والانحراف المعياري لأوساط العينات يساوي الانحراف المعياري للمشاهدات (المجتمع) مقسومًا على الجذر التربيعي لحجم العينة.

24) أحيانًا، إجابة ممكنة: بالرغم من أنه يوجد للمتغيرات المتصلة توزيعات طبيعية، يمكن ان يكون لها توزيعات ملتوية.

25) إجابة ممكنة: المساحة تحت منحنى كل من التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري تساوي 1 وكلا المنحنيين متصل ومتماثل بالنسبة للوسط. لكن وسط التوزيع المعياري 0 وانحرافه المعياري 1 في حين أن الوسط والانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي قد يكون أية قيمة.

26a)

الأهداف X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.18	0.06	0.47	0.12	0.18



26b) 2.06، إجابة ممكنة: وسط عدد الأهداف التي سجلها اللاعب الواحد هدفان تقريبًا.

1-1 المتطابقات المثلثية

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي، حيث $0° < \theta < 90°$:

1) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ $\frac{12}{13}$

2) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{2}$ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = 4$ $\sqrt{17}$

4) $\cot\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = \frac{2}{5}$ $\frac{5}{2}$

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي، حيث $180° < \theta < 270°$:

5) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{15}{17}$ $-\frac{17}{8}$

6) $\cot\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -\frac{3}{2}$ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي، حيث $270° < \theta < 360°$:

7) $\cot\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{10}$ $-\frac{3\sqrt{91}}{91}$

8) $\sec\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -8$ $\frac{8\sqrt{7}}{21}$

9) $\sin\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

10) $\cot\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

بسّط كل تعبير ممّا يأتي:

11) $\csc\theta\tan\theta$ $\sec\theta$

12) $\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$ $\cos^2\theta$

13) $\sin^2\theta\cot^2\theta$ $\cos^2\theta$

14) $\cot^2\theta + 1$ $\csc^2\theta$

15) $\frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{1-\cos^2\theta}$ $\csc^2\theta$

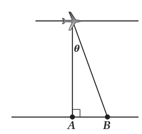
16) $\frac{\csc\theta - \sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta$

17) $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$ $\csc\theta$

18) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ $2\tan\theta$

19) $\sec^2\theta\cos^2\theta - \tan^2\theta$ $\sec^2\theta$

20) **تصوير جوي:** يُبيّن الشكل المجاور طائرة تلتقط صورة جوية للنقطة A. وبما أن النقطة A تقع تحت الطائرة تمامًا، فإنه لا يوجد تشويه أو عيوب في الظل أو الصورة لها. أما النقاط التي لا تقع أسفل الطائرة مباشرة مثل النقطة B ، فسوف يوجد تشويه في الصورة يعتمد مقداره على بُعد النقاط عن الموقع أسفل الطائرة؛ لأنه عندما تزيد المسافة من الكاميرا إلى المنطقة المراد تصويرها يقل زمن عرض الصورة على فيلم التصوير في الكاميرا، حسب التعبير $(\sin\theta)(\csc\theta - \sin\theta)$. عبّر عن هذا التعبير بدلالة $\cos\theta$ فقط. $\cos^2\theta$



21) **أمواج:** المعادلة $y = a\sin\theta t$ تُمثّل ارتفاع الأمواج على عوّامة في البحر، حيث الزمن t بالثواني. عبّر عن a بدلالة $\csc\theta t$. $a = y\csc\theta t$

1-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

1) $\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$$

2) $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} = 1$

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

3) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = \cos^2\theta$

$$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$

4) $\tan^4\theta + 2\tan^2\theta + 1 = \sec^4\theta$

$$\tan^4\theta + 2\tan^2\theta + 1 = (\tan^2\theta + 1)^2 = (\sec^2\theta)^2 = \sec^4\theta$$

5) $\cos^2\theta\cot^2\theta = \cot^2\theta - \cos^2\theta$

$$\cot^2\theta - \cos^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta = \frac{\cos^2\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{(\cos^2\theta)(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cos^2\theta\cot^2\theta$$

6) $(\sin^2\theta)(\csc^2\theta + \sec^2\theta) = \sec^2\theta$

$$(\sin^2\theta)(\csc^2\theta + \sec^2\theta) = (\sin^2\theta)\left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\right) = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

7) **مقذوفات:** مربع السرعة الابتدائية لجسيم قُذف من سطح الأرض هو $v^2 = \frac{2gh}{\sin^2\theta}$ ، حيث θ زاوية القذف، و h أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم، و g مقدار تسارع (عجلة) الجاذبية الأرضية. أثبت صحّة المتطابقة الآتية:

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta} = \frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}$$

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta} = \frac{2gh}{1-\cos^2\theta} = \frac{2gh}{1-\frac{1}{\sec^2\theta}} = \frac{2gh}{\frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta}} = \frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}$$

8) **ضوء:** تُقاس شدة مصدر الضوء بالشمعة، من المعادلة $I = ER^2\sec\theta$ ، حيث E هي مقدار الإنارة بالشمعة القدمية على السطح، و R هي المسافة بالأقدام من مصدر الضوء، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والخط الرأسي على السطح. أثبت صحة المتطابقة الآتية $ER^2(1+\tan^2\theta)\cos\theta = ER^2\sec\theta$.

$$ER^2(1+\tan^2\theta)\cos\theta = ER^2\sec^2\theta\cos\theta = ER^2\sec^2\theta\cdot\frac{1}{\sec\theta} = ER^2\sec\theta$$

1-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي:

1) $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) $\cos 375°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3) $\sin(-165°)$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

4) $\sin(-105°)$ $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5) $\sin 150°$ $\frac{1}{2}$

6) $\cos 240°$ $-\frac{1}{2}$

7) $\sin 225°$ $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

8) $\sin(-75°)$ $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

9) $\sin 195°$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

10) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$$\cos(180° - \theta) = \cos 180°\cos\theta + \sin 180°\sin\theta = -1\cos\theta + 0\sin\theta = -\cos\theta$$

11) $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$

$$\sin(360° + \theta) = \sin 360°\cos\theta + \cos 360°\sin\theta = 0\cos\theta + 1\sin\theta = \sin\theta$$

12) $\sin(45° + \theta) - \sin(45° - \theta) = \sqrt{2}\sin\theta$

$$\sin(45° + \theta) - \sin(45° - \theta) = \sin 45°\cos\theta + \cos 45°\sin\theta - (\sin 45°\cos\theta - \cos 45°\sin\theta) = 2\cdot\cos 45°\sin\theta = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$$

13) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} + \sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin x$$

14) **طاقة شمسية:** في 21 من شهر مارس تُحدّد القيمة العظمى للطاقة الشمسية الساقطة على القدم المربع من سطح الكرة الأرضية في موقع معيّن بالتعبير $E\sin(90° - \phi)$ ، حيث ϕ خط العرض الجغرافي للموقع، و E مقدار ثابت. استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين الزوايا لإيجاد كمية الطاقة الشمسية بدلالة جيب التمام $(\cos\phi)$ للموقع الجغرافي الذي يُمثّله خط العرض ϕ . $E\cos\phi$

15) **كهرباء:** تُحدّد قيمة التيار (c) بالأمبير في دائرة كهربائية فيها تيار متردّد بالصيغة $c = 2\sin(120t)$ بعد t ثانية.

إجابة ممكنة:

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين. $c = 2\sin(90t + 30t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع الزوايا لإيجاد قيمة التيار عند $t = 1$ sec . $\sqrt{3}$ amp

1-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان:

1) $\cos\theta = \frac{5}{13}, 0° < \theta < 90°$

$\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}$

2) $\sin\theta = \frac{8}{17}, 90° < \theta < 180°$

$-\frac{240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$

3) $\cos\theta = \frac{1}{4}, 270° < \theta < 360°$

$-\frac{\sqrt{15}}{8}, -\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{4}$

4) $\sin\theta = -\frac{2}{3}, 180° < \theta < 270°$

$\frac{4\sqrt{5}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}, -\frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{6}$

أوجد القيمة الفعلية لكلٍّ مما يأتي:

5) $\tan 105°$ $-2-\sqrt{3}$

6) $\tan 15°$ $2-\sqrt{3}$

7) $\cos 67.5°$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

8) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

9) $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\tan\theta - \sin\theta}{2\tan\theta}$

$$\frac{\tan\theta - \sin\theta}{2\tan\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sin\theta}{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\sin\theta - \sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

10) $\sin 4\theta = 4\cos 2\theta\sin\theta\cos\theta$

$$\sin 4\theta = \sin 2(2\theta) = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 2(2\sin\theta\cos\theta)(\cos 2\theta) = 4\cos 2\theta\sin\theta\cos\theta$$

11) **صور جويّة:** في التصوير الجوّي يكون هناك تناقص في درجة وضوح صور الفيلم لأي نقطة X لا تقع مباشرة أسفل الكاميرا. يُعطى التناقص في وضوح الصورة E_θ بالعلاقة $E_\theta = E_0\cos^4\theta$ ، حيث θ الزاوية بين الخط الرأسي من الكاميرا إلى سطح الأرض والمستقيم من الكاميرا إلى النقطة X ، و E_0 درجة وضوح النقطة X الموجودة تحت الكاميرا مباشرة. استعمل المتطابقة $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ لإثبات أن:

$$E_0\cos^4\theta = E_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

$$E_0\cos^4\theta = E_0(\cos^2\theta)^2 = E_0(1-\sin^2\theta)^2 = E_0\left(1 - \frac{2\sin^2\theta}{2}\right)^2 = E_0\left(1 - \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = E_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

12) **تصوير:** تلتقط آلة المسح الجوّي صورًا حرارية من ارتفاع يتراوح بين 300m و 1200m. إذا علمت أن عرض المنطقة W التي يتم تغطيتها بالصورة يُعطى بالعلاقة $W = 2H'\tan\theta$ ، حيث H' الارتفاع، و θ نصف زاوية المسح. أثبت أن:

$$\frac{2H'\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = 2H'\tan\theta$$

$$\frac{2H'\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{4H'\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta - 1)} = \frac{4H'\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{2H'\sin\theta}{\cos\theta} = 2H'\tan\theta$$

ملحق إجابات كتاب التمارين

1-5 حل المعادلات المثلثية

حُلّ كل معادلة مما يأتي على الفترة المعطاة:

1) $\sqrt{2}\cos\theta = \sin 2\theta,\ 0° \le \theta \le 360°$
$45°, 90°, 135°, 270°$

2) $\sin 2\theta = \cos\theta,\ 90° \le \theta < 180°$
$90°, 150°$

3) $\cos 4\theta = \cos 2\theta,\ 180° \le \theta < 360°$
$180°, 240°, 300°$

4) $\cos\theta + \cos(90-\theta) = 0,\ 0 \le \theta < 2\pi$
$3\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

5) $2 + \cos\theta = 2\sin^2\theta,\ \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ **$\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$**

6) $\tan^2\theta + \sec\theta = 1,\ \frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$ **$\frac{2\pi}{3}$**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

7) $\cos^2\theta = \sin^2\theta$ **$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$**

8) $\cot\theta = \cot^3\theta$ **$\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$**

9) $\sqrt{2}\sin^3\theta = \sin^2\theta$
$k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

10) $\cos^2\theta\sin\theta = \sin\theta$ **$k\pi$**

11) $2\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ **$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$**

12) $\sec^2\theta = 2$ **$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

13) $\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta$ **$90° + k \cdot 180°$**

14) $\csc^2\theta - 3\csc\theta + 2 = 0$
$30° + k \cdot 360°, 90° + k \cdot 360°,$
$150° + k \cdot 360°$

15) $\frac{3}{1+\cos\theta} = 4(1-\cos\theta)$
$60° + k \cdot 180°, 120° + k \cdot 180°$

16) $\sqrt{2}\cos^2\theta = \cos^2\theta$
$90° + k \cdot 180°$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها:

17) $4\sin^2\theta = 3$ **$\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi$**
أو: $60° + k \cdot 180°, 120° + k \cdot 180°$

18) $4\sin^2\theta - 1 = 0$ **$\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi$**
أو: $30° + k \cdot 180°, 150° + k \cdot 180°$

19) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta = -1$
$\frac{\pi}{6} + 2K\pi,$
$\frac{\pi}{2} + 2K\pi,$
$\frac{5\pi}{6} + 2K\pi$

20) $\cos 2\theta + \sin\theta - 1 = 0$ **$k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$**
أو: $k \cdot 180°, 30° + k \cdot 360°, 150° + K.360°$

21) **أمواج:** تُسبّب الأمواج تحرّك العوّامة بنمط ثابت معيّن في الماء. يمكن تحديد ارتفاع العوّامة h بالمعادلة $h = 2\sin x$. اكتب تعبيرًا لموقع العوّامة عندما يكون ارتفاعها عند خط المنتصف. **$k\pi$ أو $k \cdot 180°$**

22) **كهرباء:** يمكنك وصف قيمة التيار الكهربائي المتردد المار في دائرة كهربائية ما بالصيغة $i = 3\sin 240t$، حيث i شدة التيار الكهربائي بالأمبير، و t الزمن بالثواني. اكتب تعبيرًا يصف الزمن عندما لا يوجد تيار كهربائي.
$t = 0.75k$

2-1 الدوالّ

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة، وعلى صورة فترة إن أمكن:

1) $\{-3, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$
$\{x \mid x \ge -3, x \in Z\}, [-3, \infty)$

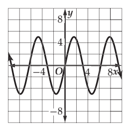
2) $-6.5 < x \le 3$
$\{x \mid -6.5 < x \le 3, x \in R\}, (-6.5, 3]$

3) جميع مضاعفات العدد 2
$\{x \mid x = 2n, n \in Z\}$

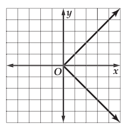
4) $x < 0$ أو $x > 8$
$\{x \mid x < 0$ أو $x > 8, x \in R\};$
$(-\infty, 0) \cup (8, \infty)$

حدّد ما إذا كانت كل علاقة مما يأتي تمثل y على أنها دالة في x:

5) تمثّل x رقم لوحة السيارة، و y سنة صنع السيارة ونوعها. **دالة**

6)


دالة

7)


ليست دالة

8) $-x + y = 3x$ **دالة**

9) $x = 5(y-1)^2$ **ليست دالة**

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

10) $h(x) = x^2 - 8x + 1$
a) $h(-1)$ **10**
b) $h(2x)$ **$4x^2 - 16x + 1$**
c) $h(x+8)$ **$x^2 + 8x + 1$**

11) $f(a) = -3\sqrt{a^2+9}$
a) $f(4)$ **-15**
b) $f(3a)$ **$-9\sqrt{a^2+1}$**
c) $f(a+1)$ **$-3\sqrt{a^2+2a+10}$**

حدّد مجال كل دالة من الدالّتَين الآتيتين:

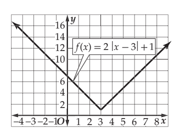
12) $g(x) = \sqrt{-3x-2}$ **$\{x \mid x \le -\frac{2}{3}, x \in R\}$**

13) $h(t) = \frac{2t-6}{t^2+6t+9}$ **$\{t \mid t \ne -3, t \in R\}$**

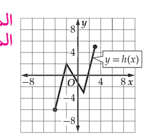
14) أوجد $f(-4)$، $f(11)$ لـ $f(x) = \begin{cases} 3x^2+16, & x < -2 \\ \sqrt{x-2}, & -2 < x \le 11 \\ -75, & x > 11 \end{cases}$ **$64, 3$**

2-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوالّ والعلاقات

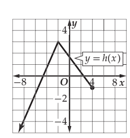
1) قدّر $f(7), f(1), f(-2.5)$ مستعملًا التمثيل البياني المجاور، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك، ثم تحقق من صحة التقدير جبريًّا. **$12, 5, 9$**



استعمل التمثيل البياني أدناه لإيجاد مجال ومدى كلٍّ من الدالتين الآتيتين :

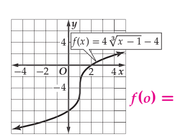
2)


المجال= $[-4, 3],$
المدى= $[-6, 5]$

3)


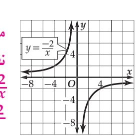
المجال = $(-\infty, 4],$
المدى = $(-\infty, 3]$

4) استعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد مقطع المحور y للدالة f و أصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.

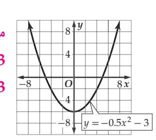


مقطع المحور y = -8 ، صفر الدالة = 2
$f(o) = 4\sqrt[3]{0-1} - 4 = 4\sqrt[3]{-1} - 4 = 4(-1) - 4 = -8,$
$y = -8$
$0 = 4\sqrt[3]{x-1} - 4,\ 4 = 4\sqrt[3]{x-1},$
$1 = \sqrt[3]{x-1},\ 1 = x - 1,\ 2 = x$

اختبر التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل لكل من الدالتين الآتيتين مستعملًا التمثيل البياني أدناه لكل دالة، وعزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقق منها جبريًّا:

5)


متماثل حول
نقطة الأصل
$-y = \frac{-2}{-x}$
$y = \frac{-2}{x}$

6)


متماثل حول المحور y
$y = -0.5(-x)^2 - 3$
$y = -0.5(x)^2 - 3$

7) مثّل $g(x) = \frac{1}{x^2}$ بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، وحلّل منحنى الدالة لتحديد ما إذا كانت زوجيةً أو فرديةً أو غير ذلك، ثم تحقَّق من حلك جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجيةً أو فرديةً فصِف تماثل منحنى الدالة.

زوجية، متماثلة حول المحور y .

2-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

ابحث في اتصال كل دالة عند قيمة (قيم) x المعطاة، وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فبيّن نوع الانفصال، هل هو نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة؟

1) $f(x) = -\frac{2}{3x^2},\ x = -1$
نعم متصلة، الدالة معرفة عند $x = -1$ ،
الدالة تقترب من $-\frac{2}{3}$ عندما تقترب x من
-1 من الجهتين و $f(-1) = -\frac{2}{3}$

2) $f(x) = \frac{x-2}{x+4},\ x = -4$
ليست متصلةً، الدالة لها انفصال
لا نهائي عند $x = -4$

3) $f(x) = x^3 - 2x + 2,\ x = 1$
نعم متصلة، الدالة معرفة عند $x = 1$ ،
الدالة تقترب من 1 عندما تقترب x من 1
من الجهتين و $f(1) = 1$

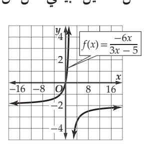
4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2},\ x = -1,\ x = -2$
منفصلة، للدالة نقطة انفصال قابل للإزالة
عند $x = -1$ ، وانفصال لا نهائي
عند $x = -2$

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

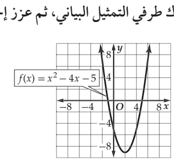
5) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4,\ [-6, 2]$
$[-5, -4], [-1, 0], [0, 1]$

6) $g(x) = x^4 + 10x - 6,\ [-3, 2]$
$[-3, -2], [0, 1]$

استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا:

7)


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2;\ \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$
انظر أعمال الطلبة.

8)


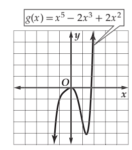
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty;\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
انظر أعمال الطلبة.

9) **إلكترونيات:** يوضح قانون أوم العلاقة بين المقاومة R ، وفرق الجهد E ، وشدة التيار I في دائرة كهربائية، وتُعطى هذه العلاقة بالقاعدة $R = \frac{E}{I}$. إذا كان فرق الجهد ثابتًا، وتزايدت شدة التيار، فماذا يحدث للمقاومة؟
تتناقص المقاومة لتقترب إلى الصفر.

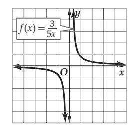
ملحق إجابات كتاب التمارين

2-4 القيم القصوى ومتوسط مُعدّل التغيّر

استعمل التمثيل البياني لكل دالة من الدالتين الآتيتين لتحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة (قرّب إلى أقرب 0.5 وحدة) ، ثم عزّز إجابتك عدديًّا:

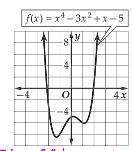
1)


متزايدة على $(-\infty, 0)$ ، متناقصة على $(0, 1.5)$ متزايدة على $(1.5, \infty)$ انظر أعمال الطلبة.

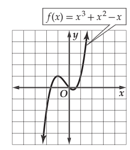
2)


متناقصة على الفترتين $(-\infty, 0)$ ، $(0, \infty)$ انظر أعمال الطلبة.

حدّد قيم x التي تكون $f(x)$ عندها قيم قصوى لكلٍّ مما يأتي (قرّب إلى أقرب 0.5 وحدة)، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًّا:

3)


صغرى محلية قيمتها -8.5 عند $x=-1.5$ ، عظمى محلية قيمتها -5 عند $x=0$ ، صغرى محلية قيمتها -6 عند $x=1$ ، انظر أعمال الطلبة.

4)


عظمى قيمتها 1 عند $x=-1$ صغرى قيمتها 0 عند $x=0.5$ انظر أعمال الطلبة.

5) **آلة حاسبة بيانية:** أوجد قيمًا تقريبية إلى أقرب جزء من مئة للقيم القصوى المحلية والقصوى المطلقة لِـ $h(x)=x^5-6x+1$ ، وحدّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

عظمى محلية $(-1.05, 6.02)$ ، صغرى محلية $(1.05, -4.02)$

أوجد متوسط مُعدّل التغيّر لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

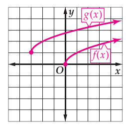
6) $g(x)=x^4+2x^2-5 , [-4 , -2]$ -132

7) $g(x)=-3x^3-4x , [2, 6]$ -160

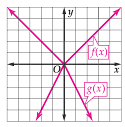
8) **فيزياء:** إذا كان ارتفاع صاروخ $h(t)$ ، بالقدم بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا يُعطَى بِـ $h(t)=-16t^2+32t+0.5$، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ. 16.5 ft

2-5 الدوال الأم والتحويلات الهندسية

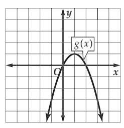
1) استعمل منحنى $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ لتمثيل منحنى $g(x)=\sqrt{x+3}+1$.



2) استعمل منحنى $f(x)=|x|$ ؛ لتمثيل منحنى $g(x)=-|2x|$.

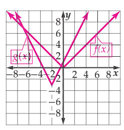


3) وضِّح العلاقة بين منحنى $f(x)=x^2$ ومنحنى $g(x)$ في التمثيل البياني المجاور، ثم اكتب معادلة $g(x)$.



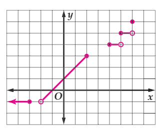
منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بالانعكاس في المحور x ، وانسحاب مقداره وحدة إلى اليمين ووحدة إلى الأعلى.
$g(x)=-(x-1)^2+1$

4) عيّن الدالة الأم f لـ $g(x)=2|x+2|-3$. ثم صِف العلاقة بين منحنيَيْ $g(x), f(x)$ ، ومثِّلهما في المستوى الإحداثي نفسه.

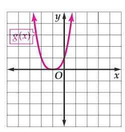


منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)=|x|$ تحت تأثير تضييق رأسي وانسحاب مقداره وحدتان إلى اليسار، وانسحاب آخر مقداره 3 وحدات إلى الأسفل.

5) مثّل $f(x)=\begin{cases}-1 , & x\le -3\\ 1+x , & -2<x\le 2\\ [\![x]\!] , & 4\le x\le 6\end{cases}$ بيانيًّا.



6) استعمل منحنى $f(x)=x^3$ ؛ لتمثيل منحنى $g(x)=\left|(x+1)^3\right|$ بيانيًّا .



2-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكلٍّ من $f(x), g(x)$ في التمرينين الآتيين، وأوجد مجال الدوال الناتجة:

1) $f(x)=2x^2+8$
$g(x)=5x-6$

المجال: $2x^2+5x+2, (-\infty, \infty)$
المجال: $2x^2-5x+14, (-\infty, \infty)$
$10x^3-12x^2+40x-48,$ المجال: $(-\infty, \infty)$
المجال: $\frac{2x^2+8}{5x-6}, \left\{x \mid x\neq \frac{6}{5}, x\in R\right\}$

2) $f(x)=x^3$
$g(x)=\sqrt{x+1}$

المجال: $x^3+\sqrt{x+1}, [-1, \infty)$
المجال: $x^3-\sqrt{x+1}, [-1, \infty)$
المجال: $x^3\sqrt{x+1}, [-1, \infty)$
المجال: $\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}, (-1, \infty)$

أوجد $[f\circ g](x) , [g\circ f](x) , [f\circ g](3)$ لكل زوج من الدوال مما يأتي:

3) $f(x)=x+5$
$g(x)=x-3$
$x+2, x+2; 5$

4) $f(x)=2x^3-3x^2+1$
$g(x)=3x$
$54x^3-27x^2+1, 6x^3-9x^2+3; 1216$

5) $f(x)=2x^2-5x+1$
$g(x)=2x-3$
$8x^2-34x+34, 4x^2-10x-1; 4$

6) $f(x)=3x^2-2x+5$
$g(x)=2x-1$
$12x^2-16x+10, 6x^2-4x+9; 70$

حدّد مجال $f\circ g$ ، ثم أوجد $f\circ g$ ، لكل زوج من الدوال الآتية:

7) $f(x)=\sqrt{x-2}$
$g(x)=3x$
$\left\{x \mid x\ge \frac{2}{3}, x\in R\right\}, f\circ g=\sqrt{3x-2}$

8) $f(x)=\frac{1}{x-8}$
$g(x)=x^2+5$
$\left\{x \mid x\neq \pm\sqrt{3}, x\in R\right\}, f\circ g=\frac{1}{x^2-3}$

أوجد الدالتين f ، g في كلٍّ من التمرينين 9 ، 10 ، بحيث يكون $h(x)=[f\circ g](x)$. على ألا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x)=x$:

9) $h(x)=\sqrt{2x-6}-1$
إجابة ممكنة:
$f(x)=\sqrt{x}-1, g(x)=2x-6$

10) $h(x)=\frac{1}{3x+3}$
إجابة ممكنة:
$f(x)=\frac{1}{3x}, g(x)=x+1$

11) **مطعم:** دخل ثلاثة أشخاص مطعمًا، وطلب كلٌّ منهم الوجبة نفسها. إذا تقاضى صاحب المطعم 18% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، فاكتب ثلاث دوال على النحو الآتي الأولى تمثّل تكلفة الوجبات الثلاث قبل إضافة بدل الخدمة، والثانية قيمة بدل الخدمة، و الثالثة تمثّل تركيب الدالتين الذي يعطي تكلفة الوجبات الثلاث بعد إضافة بدل الخدمة. $f(x)=3x$ ، حيث x تكلفة الوجبة الواحدة، $g(x)=1.18x$ ، $g(f(x))=3.54x$

2-7 العلاقات والدوال العكسية

مثِّل كلًّا من الدوال الآتية باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحدِّد إن كانت الدالة العكسية موجودة أو لا:

1) $f(x)=3|x|+2$ لا

2) $f(x)=-\sqrt{x+3}-1$ نعم

3) $f(x)=x^5+5x^3$ نعم

4) $f(x)=\frac{x}{5}+9$ نعم

أوجد الدالة العكسية f^{-1} لكلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب ليس لها دالة عكسية:

5) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ $f^{-1}(x)=x^3+1$

6) $f(x)=\frac{2x-1}{x+7}$ $f^{-1}(x)=\frac{7x+1}{2-x}, x\neq 2$

7) $f(x)=\frac{4}{(x-3)^2}$ ليس لها دالة عكسية

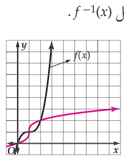
8) $f(x)=\sqrt{x-2}$ $f^{-1}(x)=x^2+2; x\ge 0$

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f ، g تمثل دالة عكسية للأخرى في كلٍّ مما يأتي:

9) $f(x)=2x+3 , g(x)=\frac{x-3}{2}$
$f[g(x)]=2\left(\frac{x-3}{2}\right)+3=x$
$g[f(x)]=\frac{2x+3-3}{2}=x$

10) $f(x)=\frac{x^2}{2}-6 , x\ge 0 , g(x)=\sqrt{2x+12}$
$f[g(x)]=\frac{\left(\sqrt{2x+12}\right)^2}{2}-6=x$
$g[f(x)]=\sqrt{2\left(\frac{x^2}{2}-6\right)+12}=x$

11) استعمل منحنى $f(x)$ في الشكل أدناه لتمثيل $f^{-1}(x)$.



12) **مكافحة الحرائق:** تقوم الطائرات عادة بإسقاط الماء عند إطفاء حرائق الغابات. ويعطى الزمن الذي يستغرقه الماء للوصول إلى سطح الأرض بالثواني بـ $t(h)=\frac{\sqrt{h}}{4}$ ، حيث h ارتفاع الطائرة بالقدم. أوجد الدالة العكسية لدالة ارتفاع الطائرة. وإذا استغرق وصول الماء إلى سطح الأرض 8 sec، فأوجد ارتفاع الطائرة.
$f^{-1}(x)=16x^2, 1024\text{ ft}$

3-1 تقدير النهايات بيانيًا

قدِّر كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

1) $\lim_{x\to 0^+}(4-\sqrt{x})$ **4**

2) $\lim_{x\to 3^+}\frac{3-x}{|x-3|}$ **−1**

3) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ **8**

4) $\lim_{x\to -1^-}\frac{x+7}{x^2+8x+7}$ **−∞**

5) $\lim_{x\to -1^+}\frac{x+7}{x^2+8x+7}$ **∞**

6) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}$ **∞**

قدِّر كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

7) $\lim_{x\to -\infty}\frac{-4x^2}{x^2+1}$ **−4**

8) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x-2}{x-1}$ **3**

9) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ **2**

10) $\lim_{x\to \infty}(2.7)^{3x+2}$ **∞**

11) **مُعدل التغيّر:** يرتكز سلم طوله 20 ft على جدار. سُحِبت قاعدة السلم بعيدًا عن الجدار بمُعدّل 3 ft/sec. فبدأ الطرف العلوي للسلم في بالهبوط بمُعدّل $r(x)=\frac{3x}{\sqrt{400-x^2}}$ قدمًا لكل ثانية، حيث x المسافة بين قاعدة السلم والجدار. مثِّل $r(x)$ بيانيًّا، ثم استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{x\to 20^-} r(x)$. **∞**

12) **تلوُّث:** يمكن تقدير تكلفة تنظيف بقعة ملوثة بمخلفات كيميائية بِـ $C(x)=\frac{312x}{100-x}$، حيث C التكلفة بالدينار، و x كمية المخلفات الكيميائية بالجرامات، $0\le x\le 100$. أوجد $\lim_{x\to 100^-} C$. **∞**

3-2 حساب النهايات جبريًا

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

1) $\lim_{x\to 3}(x^2+3x-8)$ **10**

2) $\lim_{x\to -6}\frac{x^2-36}{x+6}$ **−12**

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^2-9}{x}$ **6**

4) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2-2x+1}$ **3**

5) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$ $\frac{1}{9}$

6) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{2+\sqrt{x-3}}$ $\frac{9}{2}$

7) $\lim_{x\to \infty}(2-6x+5x^3)$ **∞**

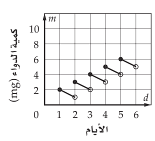
8) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^5-8x^2}{4x^5+3x}$ $\frac{1}{4}$

9) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^3-4x+1}{5x^4-2x^2}$ **0**

10) $\lim_{x\to -\infty}(6x^7-x^2)$ **−∞**

11) **كتب:** تمثل $v(t)=\frac{300}{6+35(0.2)^t}$ سعر كتاب بالدينار بعد t سنة. كم يكون الثمن النهائي للكتاب؟ أيْ أوجد $\lim_{t\to\infty} v(t)$. **BD 50**

12) **دواء:** يتناول عامر 2 mg من الدواء يوميًّا، ويبيّن الشكل المجاور كمية الدواء m المتبقية في دمه بعد d يومًا. أوجد $\lim_{d\to 3^-} m(d)$ ، $\lim_{d\to 3^+} m(d)$. **4 mg، 2 mg**



3-3 المماسّ والسرعة المتجهة

أوجد ميل مماسّ منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة :

1) $y=x^2-x,\ (3,6)$ **5**

2) $y=\frac{5}{x},\ (-1,-5)$ **−5**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة واقعة عليه:

3) $y=-2x+1$ $\mathbf{m=-2}$

4) $y=x^3-2x^2$ $\mathbf{m=3x^2-4x}$

تمثّل $h(t)$ في كلٍّ مما يأتي، بُعد جسم متحرك بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى :

5) $h(t)=300-16t^2,\ t=2$ $\mathbf{v(2)=-6y\ ft/s}$

6) $h(t)=-16t^2+200t+700,\ t=3$ $\mathbf{v(3)=104\ ft/s}$

تمثل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي لحظة زمنية t :

7) $h(t)=17t^2+8$ $\mathbf{v(t)=34t}$

8) $h(t)=5t^3-6t^2+4t+1$ $\mathbf{v(t)=15t^2-12t+4}$

9) $h(t)=\sqrt{t}-2t^2$ $\mathbf{v(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t}-4t}$

10) $h(t)=\frac{3}{t}+2t$ $\mathbf{v(t)=\frac{-3}{t^2}+2}$

11) **مظليّ:** يمكن تمثيل ارتفاع مظلّيّ عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية بِـ $h(t)=18000-16t^2$. أوجد تعبيرًا يصف سرعة المظلي المتجهة اللحظية $v(t)$. $\mathbf{v(t)=-32t}$

12) **كرة قدم:** ركل علي كرةً بسرعة ابتدائية مقدارها 58 ft/sec. وتمثل $h(t)=-16t^2+58t+6$ ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية.

a) أوجد تعبيرًا يصف سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$. $\mathbf{v(t)=-32t+58}$

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 1.5 sec ؟ **10 ft/s**

3-4 المشتقّة

أوجد مشتقة كلِّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة :

1) $g(x)=3x^2-5x,\ x=-2,1$
$\mathbf{6x-5,\ -17,\ 1}$

2) $h(x)=4x^3-x^2,\ x=3,0$
$\mathbf{12x^2-2x,\ 102,\ 0}$

3) $f(x)=x^2-4x+7,\ x=2,-3$
$\mathbf{2x-4,\ 0,\ -10}$

4) $m(x)=-2x^2-6x+1,\ x=0,-3$
$\mathbf{-4x-6,\ -6,\ 6}$

5) $q(x)=-1+x^3-2x^4,\ x=-1,3$
$\mathbf{3x^2-8x^3,\ 11,\ -189}$

6) $t(x)=3x^7-1,\ x=-1,1$
$\mathbf{21x^6,\ 21,\ 21}$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

7) $f(x)=(x^2+5x)^2$
$\mathbf{f'(x)=4x^3+30x^2+50x}$

8) $f(x)=x^2(x^3+3x^2)$
$\mathbf{f'(x)=5x^4+12x^3}$

9) $f(x)=\sqrt[5]{x^6}$
$\mathbf{f'(x)=\frac{6}{5}\sqrt[5]{x}}$

10) $h(x)=-\frac{3}{x^6}$
$\mathbf{h'(x)=\frac{18}{x^7}}$

11) $p(x)=-4x^5+6x^3-5x^2$
$\mathbf{p'(x)=-20x^4+18x^2-10x}$

12) $n(x)=(3x^2-2x)(x^3+x^2)$
$\mathbf{n'(x)=15x^4+4x^3-6x^2}$

13) $r(x)=\frac{3x-1}{x^2+2}$
$\mathbf{r'(x)=\frac{(-3x^2+2x+6)}{(x^2+2)^2}}$

14) $q(x)=\sqrt{x}(x^2-3)$
$\mathbf{q'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}}$

15) **فيزياء:** تسارع (عجلة) جسم متحرك هو مُعدّل تغيّر سرعته. تمثل $v(t)=3t^2-6t+5$ سرعة جسم متحرك بالمتر لكل ثانية. أوجد تسارع الجسم بالمتر لكل ثانية تربيع بعد 5 sec (إرشاد: التسارع هو مشتقة السرعة).
$\mathbf{24\ m/s^2}$

ملحق إجابات كتاب التمارين

3-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x، على الفترة المعطاة في كلٍّ مما يأتي باستعمال الطرف المعطى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة:

1) $f(x) = x + 3$ **22 وحدة مربعة**
$[1, 5]$
الطرف الأيسر

2) $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ **10 وحدات مربعة**
$[2, 5]$
الطرف الأيمن

3) $g(x) = 3x^3$ **108 وحدات مربعة**
$[0, 4]$
الطرف الأيسر

4) $p(x) = 1 + x^2$ **95 وحدة مربعة**
$[1, 6]$
الطرف الأيمن

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

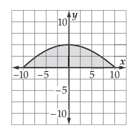
5) $\int_0^2 x^2\,dx$ **$\frac{8}{3}$ وحدة مربعة**

6) $\int_1^6 6x^2\,dx$ **430 وحدة مربعة**

7) $\int_1^3 (x^2 - x)\,dx$ **$\frac{14}{3}$ وحدة مربعة**

8) $\int_{-2}^1 (-x^2 - 2x + 11)\,dx$ **33 وحدة مربعة**

9) **تصميم وعمارة:** يصمم مهندس نافذة زجاجية يمكن نمذجتها بـ $y = 5 - 0.05x^2$، والممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور. ما مساحة سطح النافذة؟
66.67 وحدة مربعة تقريبًا



3-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = 4x^3$ $\quad F(x) = x^4 + C$

2) $f(x) = 2x + 3$ $\quad F(x) = x^2 + 3x + C$

3) $f(x) = x(x^2 - 3)$ $\quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + C$

4) $f(x) = 8x^2 + 2x - 3$ $\quad F(x) = \frac{8}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$

احسب كل تكامل مما يأتي:

5) $\int 8\,dx$ $\quad 8x + C$

6) $\int (2x^3 + 6x)\,dx$ $\quad \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + C$

7) $\int (-6x^5 - 2x^2 + 5x)\,dx$ $\quad -x^6 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$

8) $\int_2^5 2x\,dx$ $\quad 21$

9) $\int_{-5}^{-1} (-4x^3 - 3x^2)\,dx$ $\quad 500$

10) $\int_{-2}^{1} (1 - x)(x + 3)\,dx$ $\quad 9$

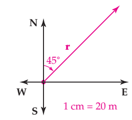
11) **فيزياء:** يُعطى الشُّغل (بالجول) واللازم لضغط نابض مسافة ℓ قدم من وضعه الطبيعي بالصيغة $W = \int_0^{\ell} 2x\,dx$. ما مقدار الشُّغل اللازم لضغط النابض مسافة 6ft من وضعه الطبيعي؟
0.25 ft • 1b

12) **أعمال النجارة:** افترض أن عدد الساعات التي يحتاج إليها نجار لصناعة p قطعة أثاث مُعطى بالتكامل $h = \int_0^p (30 - 3x)\,dx$، فكم ساعة يحتاج هذا النجار لصناعة 6 قطع أثاث؟ **126 h**

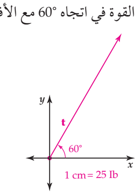
4-1 مقدمة في المتجهات

استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه يمثل كل كمية مما يأتي، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

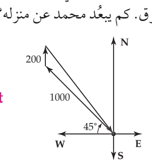
1) $\mathbf{r} = 60$ m في اتجاه N 45° E



2) $\mathbf{t} = 100$ lb من القوة في اتجاه 60° مع الأفقي



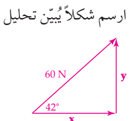
3) **تسوُّق:** سار محمد مسافة 1000 ft من منزله في اتجاه 45° شمال الغرب، ثم سار 200 ft في اتجاه الشمال؛ بغرض الوصول إلى مركز التسوق. كم يبعُد محمد عن منزله؟ وفي أي اتجاه؟



1150 ft باتجاه 52.1° شمال الغرب

4) **بناء:** يدفع عبد الله صندوقًا يحتوي على مواد بناء بقوة مقدارها 60 N وبزاوية قياسها 42° مع الأفقي.

a) ارسم شكلاً يُبيِّن تحليل القوة التي يؤثِّر بها عبد الله في الصندوق إلى مركبتيها المتعامدتين.



b) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقيَّة والرأسيَّة للقوة. **44.6 N, 40.1 N**

5) **طيران:** تحلِّق طائرة بسرعة 500 mi/h في اتجاه الشمال. إذا هبت الرياح بسرعة 50 mi/h في اتجاه الغرب فحدِّد محصلة سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى سطح الأرض.

502.49 mi/h وباتجاه 354.3°

4-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$، المُعطى نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

1) $A(2, 4), B(-1, 3)$ $\quad \langle -3, -1 \rangle, \sqrt{10}$

2) $A(4, -2), B(5, -5)$ $\quad \langle 1, -3 \rangle, \sqrt{10}$

3) $A(-3, -6), B(8, -1)$ $\quad \langle 11, 5 \rangle, \sqrt{146}$

إذا كان $\mathbf{w} = \langle -3, 5 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

4) $3\mathbf{v}$ $\quad \langle 6, -3 \rangle$

5) $\mathbf{w} - 2\mathbf{v}$ $\quad \langle -7, 7 \rangle$

6) $4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ $\quad \langle -1, 11 \rangle$

7) $5\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$ $\quad \langle -21, 28 \rangle$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ له الاتجاه نفسه في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{v} = \langle -3, 6 \rangle$ $\quad \left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

9) $\mathbf{v} = \langle -8, -2 \rangle$ $\quad \left\langle -\frac{4\sqrt{17}}{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17} \right\rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$، المُعطى نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ مما يأتي:

10) $D(4, -5), E(6, -7)$ $\quad 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

11) $D(-4, 3), E(5, -2)$ $\quad 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

12) $D(4, 6), E(-5, -2)$ $\quad -9\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

13) $D(2, 1), E(3, 7)$ $\quad \mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور الأفقي في كلٍّ مما يأتي:

14) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 42°$ $\quad \langle 8.9, 8.0 \rangle$

15) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 132°$ $\quad \langle -5.4, 5.9 \rangle$

16) **بستنة:** يقوم كلٌّ من علي ومحمد بدفع حجر من حديقتهم. إذا كان علي يدفع الحجر بقوة مقدارها 120 N بزاوية تميل 60° مع المحور الأفقي، في حين يدفع محمد الحجر بقوة مقدارها 180 N بزاوية تميل 40° مع المحور الأفقي، فأوجد مقدار محصلة القوى الناتجة عن تأثير قوتي الدفع معًا. **295.62 N**

4-3 الضرب الداخلي ومسقطا المتَّجه

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u ، v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين في كلٍّ مما يأتي :

1) $\mathbf{u}=\langle 3,6\rangle, \mathbf{v}=\langle -4,2\rangle$
0 ، متعامدان

2) $\mathbf{u}=-\mathbf{i}+4\mathbf{j}, \mathbf{v}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$
−11 ، غير متعامدين

3) $\mathbf{u}=\langle 2,0\rangle, \mathbf{v}=\langle -1,-1\rangle$
−2 ، غير متعامدين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u ، v في كلٍّ مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u}=\langle -1,9\rangle, \mathbf{v}=\langle 3,12\rangle$ **$20.4°$**

5) $\mathbf{u}=\langle -6,-2\rangle, \mathbf{v}=\langle 2,12\rangle$ **$117.9°$**

6) $\mathbf{u}=27\mathbf{i}+14\mathbf{j}, \mathbf{v}=\mathbf{i}-7\mathbf{j}$ **$109.3°$**

7) $\mathbf{u}=5\mathbf{i}-4\mathbf{j}, \mathbf{v}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ **$65.2°$**

أوجد مسقط u على v ، ثم اكتب u في صورة مجموع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u على v في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{u}=\langle 4,8\rangle, \mathbf{v}=\langle -1,2\rangle$
$\left\langle -\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right\rangle, \left\langle -\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right\rangle$

9) $\mathbf{u}=\langle 62,21\rangle, \mathbf{v}=\langle -12,4\rangle$
$\left\langle \frac{99}{2}, -\frac{33}{2}\right\rangle, \left\langle \frac{99}{2}, -\frac{33}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{25}{2}, \frac{75}{2}\right\rangle$

10) $\mathbf{u}=\langle -2,-1\rangle, \mathbf{v}=\langle -3,4\rangle$
$\left\langle -\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right\rangle, \left\langle -\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right\rangle + \left\langle -\frac{44}{25}, -\frac{33}{25}\right\rangle$

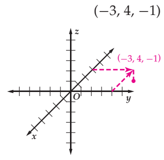
11) **مواصلات:** انطلق القطاران A ، B من نقطة واحدة. إذا كان $\langle 33, 12\rangle$ يُمثّل مسار القطار A ، و$\langle 55, 4\rangle$ يُمثّل مسار القطار B ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. **$15.8°$**

12) **فيزياء:** يدفع شخص عربة بقوة مقدارها 100 N إلى أعلى سطح مائل طوله 6 m ، ويميل بزاوية قياسها 30° مع الأفقي. أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله الشخص في الاتجاه الرأسي، وَقرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (إرشاد: استعمل نسبة الجيب، والصيغة $W = F.d$ ، حيث W الشغل بالجول، وَ F القوة بالنيوتن، وَ d المسافة بالأمتار). **300 J**

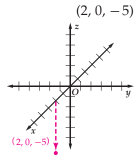
4-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

عيّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد أدناه :

1) $(-3, 4, -1)$

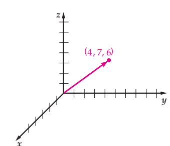


2) $(2, 0, -5)$

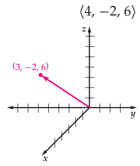


مثِّل كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد أدناه :

3) $\langle 4, 7, 6\rangle$



4) $\langle 4, -2, 6\rangle$



أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$:

5) $A(2, 1, 3), B(-4, 5, 7)$
$\langle -6, 4, 4\rangle, 2\sqrt{17}$
$\left\langle -\frac{3\sqrt{17}}{17}, \frac{2\sqrt{17}}{17}, \frac{2\sqrt{17}}{17}\right\rangle$

6) $A(4, 0, 6), B(7, 1, -3)$
$\langle 3, 1, -9\rangle, \sqrt{91}$
$\left\langle \frac{3\sqrt{91}}{91}, \frac{\sqrt{91}}{91}, -\frac{9\sqrt{91}}{91}\right\rangle$

7) $A(-4, 5, 8), B(7, 2, -9)$
$\langle 11, -3, -17\rangle, \sqrt{419}$
$\left\langle \frac{11\sqrt{419}}{419}, -\frac{3\sqrt{419}}{419}, -\frac{17\sqrt{419}}{419}\right\rangle$

8) $A(6, 8, -5), B(7, -3, 12)$
$\langle 1, -11, 17\rangle, \sqrt{411}$
$\left\langle \frac{\sqrt{411}}{411}, -\frac{11\sqrt{411}}{411}, \frac{17\sqrt{411}}{411}\right\rangle$

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف، وطول القطعة المستقيمة المُعطى نقطتا طرفيها في كلٍّ مما يأتي :

9) $(3, 4, -9), (-4, 7, 1)$
$\sqrt{158}, \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, -4\right)$

10) $(-17, -3, 2), (3, -9, 5)$
$\sqrt{445}, \left(-7, -6, \frac{7}{2}\right)$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهين $\mathbf{v}=\langle 2,-4,5\rangle, \mathbf{w}=\langle 6,-8,9\rangle$:

11) $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ $\langle 8, -12, 14\rangle$

12) $5\mathbf{v}-2\mathbf{w}$ $\langle -2, -4, 7\rangle$

13) **فيزياء:** بفرض أن القوة المؤثرة في جسم ما تُعطي $\langle 110, 35, 85\rangle$ ، حيث يمثل كل إحداثي في الثلاثي المرتب القوة بالنيوتن، أوجد مقدار القوة. **143 lb تقريبًا**

4-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد إذا كانا متعامدين :

1) $\langle -2, 0, 1\rangle, \langle 3, 2, -3\rangle$
−9 ، غير متعامدين

2) $\langle -4, -1, 1\rangle, \langle 1, -3, 4\rangle$
3 ، غير متعامدين

3) $\langle 0, 0, 1\rangle, \langle 1, -2, 0\rangle$
0 ، متعامدان

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u ، v في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u}=\langle 1,-2,1\rangle$ ، $\mathbf{v}=\langle 0,3,-2\rangle$ **$154.9°$ تقريبًا**

5) $\mathbf{u}=\langle 3,-2,1\rangle$ ، $\mathbf{v}=\langle -4,-2,5\rangle$ **$96.9°$ تقريبًا**

6) $\mathbf{u}=\langle 2,-4,4\rangle$ ، $\mathbf{v}=\langle -2,-1,6\rangle$ **$51.3°$ تقريبًا**

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u ، v في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من u ، v :

7) $\mathbf{u}=\langle 1,3,4\rangle, \mathbf{v}=\langle -1,0,-1\rangle$
$\langle -3,-3,3\rangle, \langle -3,-3,3\rangle \cdot \langle 1,3,4\rangle$
$= -3(1) + -3\,(3) + 3\times 4 = 0,$
$\langle -3,-3,3\rangle \cdot \langle -1,0,-1\rangle$
$= -3\,(-1) - 3\,(0) + 3(-1) = 0$

8) $\mathbf{u}=\langle 3,1,-6\rangle, \mathbf{v}=\langle -2,4,3\rangle$
$\langle 27,3,14\rangle, \langle 27,3,14\rangle \cdot \langle 3,1,-6\rangle$
$= (27)(3) + 3(1) + 14(-6) = 0$
$\langle 27,3,14\rangle \cdot \langle -2,4,3\rangle$
$= 27(-2) + 3(4) + 14(3) = 0$

9) $\mathbf{u}=\langle 3,1,2\rangle, \mathbf{v}=\langle 2,-3,1\rangle$
$\langle 7,1,-11\rangle, \langle 7,1,-11\rangle \cdot \langle 3,1,2\rangle$
$= 7(3) + (1)(1) + (-11)\cdot 2 = 0,$
$\langle 7,1,-11\rangle \cdot \langle 2,-3,1\rangle$
$= 7(2) + (1)(-3) - 11(1) = 0$

10) $\mathbf{u}=\langle 4,-1,0\rangle, \mathbf{v}=\langle 5,-3,-1\rangle$
$\langle 1,4,-7\rangle, \langle 1,4,-7\rangle \cdot \langle 4,-1,0\rangle$
$= 1\,(4) + 4\,(-1) + -7(0) = 0$
$\langle 1,4,-7\rangle \cdot \langle 5,-3,-1\rangle$
$= 1(5) + 4(-3) + -7(-1) = 0$

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه u ، v ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

11) $\mathbf{u}=\langle 9,4,2\rangle, \mathbf{v}=\langle 6,-4,2\rangle$
62.4 وحدة مربعة

12) $\mathbf{u}=\langle 2,0,-8\rangle, \mathbf{v}=\langle -3,-8,-5\rangle$
74.2 وحدة مربعة

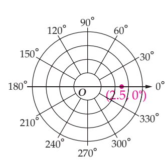
13) أوجد حجم متوازي السطوح الذي تكون فيه المتجهات $\langle -2, -5, -8\rangle$ ، $\langle -7, -2, 6\rangle$ ، $\langle 9, -2, 3\rangle$ أحرفًا متجاورة. **643 وحدة مكعبة**

14) **أدوات إصلاح سيارات:** يؤثر ميكانيكي بقوة مقدارها 35 N بشكل رأسي إلى أسفل على ذراع أداة أفقية طوله 0.25 m. أوجد طول واتجاه قيمة العزم إذا كانت ذراع الأداة تصنع زاوية قياسها 20° فوق المحور الأفقي. **8.2 N • m**

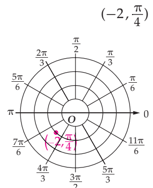
5-1 الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي أدناه:

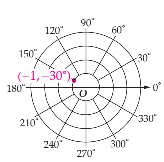
1) $(2.5, 0°)$



2) $\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$

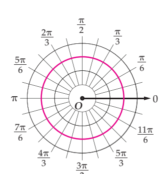


3) $(-1, -30°)$

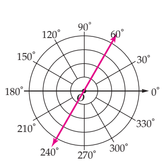


مثّل كل معادلة قطبية مما يأتي بيانيًّا في المستوى القطبي أدناه:

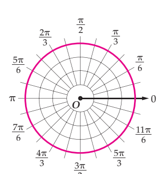
4) $r = 3$



5) $\theta = 60°$

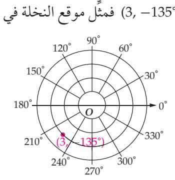


6) $r = 4$



7) **منظر طبيعي:** صمم أحد المعماريين حديقة في مبنى جديد لجمعية المتقاعدين.

a) إذا وضع المصمم نخلة عند $(3, -135°)$ فمثِّل موقع النخلة في المستوى القطبي أدناه.



b) إذا أراد المصمم وضع مقعد عند $(-4, 85°)$ ، وإنشاء بركة عند $(1, 105°)$ فأوجد المسافة بين المقعد والبركة. **4.95 وحدة**

ملحق إجابات كتاب التمارين

5-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

1) $(6, 120°)$ $\mathbf{(-3, 3\sqrt{3})}$ 2) $(-4, 45°)$ $\mathbf{(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})}$ 3) $(4, \frac{\pi}{6})$ $\mathbf{(2\sqrt{3}, 2)}$

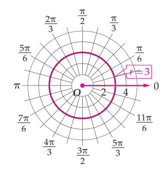
أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية، بحيث $0 \le \theta < 2\pi$ ، في كلٍّ مما يأتي:

4) $(2, 2)$ 5) $(2, -3)$ 6) $(-3, \sqrt{3})$

$\mathbf{(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}), (-2\sqrt{2}, 5\frac{\pi}{4})}$ $\mathbf{(3.61, 5.30), (-3.61, 2.16)}$ $\mathbf{(2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}), (-2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6})}$

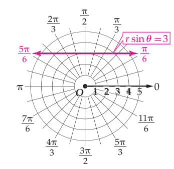
حدّد شكل التمثيل البياني لكل من المعادلتين الديكارتيتين الآتيتين، ثم اكتب كلًّا منهما على الصورة القطبية:

7) $x^2 + y^2 = 9$



دائرة مركزها (0, 0) ونصف قطرها 3،
$r = \pm 3$

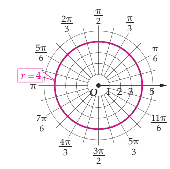
8) $y = 3$



$r \sin 0 = \pm 3$
$r = 3\sec 0$ مستقيم افقي

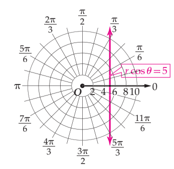
اكتب كلًّا من المعادلتين القطبيتين الآتيتين على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع التمثيل البياني لكلٍّ منهما:

9) $r = 4$



$x^2 + y^2 = 16$ دائرة نصف قطرها 4 وحدات ومركزها (0, 0)

10) $r\cos\theta = 5$



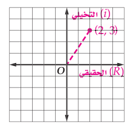
$x = 5$ ؛ مستقيم رأسي يمر بالنقطة (5, 0)

11) **مساحة:** وجد مسّاح حدًّا لأرض عند نقطة إحداثياها القطبية $(40, 62°)$. ما الإحداثيات الديكارتية لهذه النقطة؟ **(18.78, 35.32)**

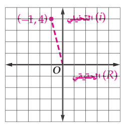
5-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثّل العددين المركبين الآتيين في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1) $2 + 3i$ **3.61**



2) $-1 + 4i$ **4.12**

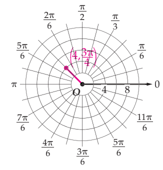


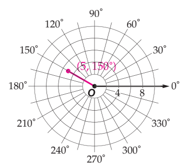
اكتب كلًّا من العددين المركبين الآتيين على الصورة القطبية:

3) $2 + 2\sqrt{3}\,i$ $\mathbf{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$ 4) $3\sqrt{3} - 3i$ $\mathbf{6\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}$

مثّل كلًّا من العددين المركبين الآتيين في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

5) $4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $\mathbf{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i}$ 6) $5(\cos 150° + i\sin 150°)$ $\mathbf{-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)i}$





أوجد الناتج لكلٍّ مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

7) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\mathbf{10\,i\,;\,10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$

8) $8(\cos 240° + i\sin 240°) \div 4(\cos 210° + i\sin 210°)$ $\mathbf{\sqrt{3} + i\,,\,2(\cos 30° + i\sin 30°)}$

أوجد الناتج لكلٍّ مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

9) $(-\sqrt{3} + i)^5$ $\mathbf{16\sqrt{3} + 16i}$ 10) $(1 + i)^{10}$ $\mathbf{32\,i}$

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعددين المركبين الآتيين: $\mathbf{\pm 0.97 + 0.22i, \pm 0.43 + 0.90i, \pm 0.78 - 0.62i, -i}$

11) الجذور الرباعية للعدد $-8 + 8\sqrt{3}\,i$ 2) الجذور السباعية للعدد i

$\mathbf{\sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}\,i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}\,i}$

12) **كهرباء:** أوجد التيار المار في دائرة كهربائية فرق جهدها 12 v ومقاومتها $(2 - 4\mathbf{j})\ \Omega$ مستعملاً الصيغة $E = I \cdot Z$ ، حيث E فرق الجهد بالفولت، وI التيار بالأمبير، و Z المقاومة بالأوم.

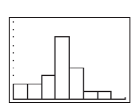
(إرشاد: يستعمل مهندسو الكهرباء الرمز j للدلالة على العدد التخيلي i . لذا، فهم يكتبون العدد المركب على الصورة $a + bj$. عبِّر عن كلّ عدد على الصورة القطبية وعوضها في الصيغة المعطاة، ثم اكتب مقدار شدّة التيار على الصورة الديكارتية). **$(1.2 + 2.4j)$ Amp**

6-1 الإحصاء الوصفي

1) **طقس:** يُبيّن الجدول أدناه مُعدّلات سرعة الرياح في 21 محطة رصد في إحدى الدول:

المحطة	السرعة (mi/h)	المحطة	السرعة (mi/h)	المحطة	السرعة (mi/h)
1	8.9	* 8	7.1	* 15	9.1
* 2	9.1	* 9	12.5	16	10.4
3	10.8	* 10	11.3	17	9.6
4	10.7	11	9.3	18	7.8
* 5	6.2	12	8.8	* 19	9.2
6	10.5	13	8.1	* 20	9.4
* 7	9.5	14	6.2	* 21	9.0

a) استعمل المدرج التكراري المجاور؛ لوصف شكل التوزيع للجدول .

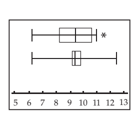


للتوزيع قيمة عظمى واحدة، ويبدو أن التوزيع متماثل إلى حد ما

b) لخص تمركز البيانات، وتشتتها مستعملًا الوسط، والانحراف المعياري، أو المقاييس الخمسة، وبرِّر إجابتك.

بما أن التوزيع متماثل، فاستعمل الوسط والانحراف المعياري.
الوسط هو 9.21 mi/h والانحراف المعياري 1.53 mi/h

2) **محيطات:** إذا علمت أن المحطات العشر التي وضعَ بجانب كل منها إشارة (*) في الجدول أعلاه قريبة من المحيط الأطلسي أو الهادي، فاستعمل صندوقين وطرفيهما المجاورين، والمُمثَّل أحدهما فوق الآخر على خط الأعداد للمقارنة بين التوزيعين.

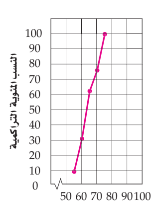


الوسيط لسرعات الرياح في المحطات القريبة من المحيط يساوي تقريبًا الوسيط للمحطات الأخرى، ونصف سرعات الرياح في منتصف توزيع المحطات القريبة من المحيط تبدو أقل تشتتًا من مثيلاتها في المحطات الأخرى.

3) **درجات:** يُبيّن الجدول المجاور درجات طلاب فصل دراسي في اختبار للرياضيات.

الفئات	التكرار
55.5 –	3
60.5 –	8
65.5 –	12
70.5 –	5
75.5 – 80.5	9

a) أنشئ المنحنى المئيني لهذه البيانات.



b) قدّر الرتبة المئينية للدرجة 62 ضمن التوزيع، وفسِّر معناها.

30% ، وهذا يعني أن الطالب الذي درجته 62 أفضل من % 30 تقريبًا من الذين تقدموا للاختبار

6-2 التوزيعات الاحتمالية

صنّف كل متغير عشوائي مما يأتي من حيث كونه متصلًا أو منفصلًا، وبرر إجابتك.

1) يُمثّل X الزمن الذي استغرقته درجةحرارة فصل دراسي تم اختياره عشوائيًّا للانخفاض من 68°F إلى 60°F .

متصل، لأن الزمن يمكن أن يكون أي عدد

2) يُمثّل X عدد الصور التي التقطها مصور في إحدى الحفلات التي تم اختيارها عشوائيًا.

منفصل، لأن عدد الصور معدود.

3) يُبيّن الجدول المجاور عدد الهواتف المحمولة المملوكة من قبل 100 أسرة تم اختيارها عشوائيًا. كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X ، ثم أوجد الوسط وفسّره في سياق المسألة. ثم أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع.

الهواتف X	التكرار
0	2
1	30
2	48
3	13
4	7

الهواتف x	0	1	2	3	4
التكرار	0.02	0.30	0.48	0.13	0.07

الوسط 1.93 لذلك يملك كل منزل هاتفين تقريبًا، التباين 0.79، الانحراف المعياري 0.886

4) **سباق:** يخطط أحد منظمي السباقات لإقامة سباق للدراجات الهوائية ليوم واحد. وتبلغ التكلفة التنظيمية BD 8000، ومن المتوقع أن يحصل منظم السباق على BD 15000 بعد انتهاء السباق. إذا كان احتمال أن يكون ذلك اليوم عاصفًا %30، وفي حالة حدوث ذلك يتم إلغاء السباق، فأوجد الربح المتوقع لمنظّم السباق. **8100 BD**

5) **مواصلات:** في استطلاع للرأي أُجري مؤخرًا، تبيّن أن %45 من سكان إحدى المناطق يستعملون المواصلات العامة في الذهاب إلى أعمالهم. تم اختيار خمسة من سكان هذه المنطقة عشوائيًّا وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون المواصلات العامة للذهاب إلى أعمالهم.

a) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يدل على عدد الأشخاص الذين أجابوا بنعم.

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.050	0.206	0.337	0.276	0.113	0.018

b) أوجد الوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع. وفسّر إجاباتك في سياق هذا الموقف.

الوسط 2.25 ، والتباين 1.2375 ، والانحراف المعياري تقريبًا 1.112 ، بالمتوسط 2 من كل 5 أشخاص يتم اختيارهم عشوائيًا من سكان هذه المنطقة يستعملون المواصلات العامة للوصول إلى عملهم.

ملحوظات للمعلم

6-3 التوزيع الطبيعي

1) **أشجار:** إذا كانت أطوال 200 شجرة تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط مقداره 120 in ، وانحراف معياري 16 in.

a) أوجد قيمة تقريبية لعدد الأشجار التي يزيد طولها على 136 in. **32 شجرة**

b) ما نسبة الأشجار التي تقع أطوالها بين 88 in ، 104 in؟ **13.6 %**

أوجد كلًّ مما يأتي:

2) z ، إذا كانت $X = 65$ ، $\mu = 50$ ، $\sigma = 10$. **1.5**

3) X ، إذا كان $z = -0.4$ ، $\mu = 40$ ، $\sigma = 5$. **38**

أوجد فترة قيم z المرتبطة بكل مساحة مما يأتي:

4) 60% من منتصف توزيع البيانات. $\mathbf{-0.84 < z < 0.84}$

5) % 30 على طرفي توزيع البيانات. $\mathbf{z < -1.04\ ,\ z > 1.04}$

6) **خِراف:** إذا كان وزن 42 خروفًا يتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط مقداره 86 Ib وانحراف معياري 3 Ib:

a) أوجد عدد الخراف التي يزيد وزنها على 82 Ib. **38 خروفًا تقريبًا**

b) كم خروفًا يقل وزنها عن 88 Ib؟ **31 خروفًا تقريبًا**

7) **فنادق:** إذا كانت أسعار الغرف في مجموعة فنادق تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان $\mu =$ BD 30 ، $\sigma =$ BD 6 ، فأوجد الاحتمالات الآتية:

a) سعر الغرفة أكثر من BD 39. **6.7 %**

b) سعر الغرفة بين BD 27 ، BD 33. **38.3 %**

c) سعر الغرفة بين BD 21 ، BD 24. **9.2 %**

d) إذا توافرت أغلى% 16 من الغرف فقط، فما أقل مبلغ يمكن دفعه لاستئجار غرفة؟ **BD 36**

8) **اختبارات:** حصل طالب على الدرجة 65 في اختبار الاحياء الذي فيه $\mu = 50$ ، $\sigma = 10$، وحصل على الدرجة 30 في اختبار اللغة العربية الذي فيه $\mu = 25$ ، $\sigma = 5$. قارن بين أداء الطالب في الاختبارين، على فرض أن كلًّا من مجموعتي توزيع الدرجات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي.

أداء الطالب أفضل في اختبار الأحياء؛ لأن درجته المعيارية z في اختبار الأحياء 1.5 وفي اختبار اللغة العربية 1 .

32